

A h -eloszlású osztott késleltetésű modell számítógép-intenzív becslése

Napjainkban kezd tért hódítani magának egy új irányzat az ökonometria becsléelméletében. Ez az irányzat — valószínűségelméleti alapokról indulva — a matematikai statisztika és az ökonometria korábbi fejlődéséhez szükséges, de napjainkra már gyakran a továbbfejlődést gátló túlzott megkötések helyett a mintából kinyerhető információk jobb hasznosítására törekszik. Az irányzat fejlődését elsősorban a számítástechnikai lehetőségek javulása tette lehetővé. Szükségességét egyfelől a nagyobb elméleti igényességre és a nagyobb gyakorlati megalapozottságra törekvés hozta létre, másrészt, hogy egyre gyakrabban ütközött megoldhatatlan problémákba a becslési módszerek fejlődésével a klasszikus becsléelmélet.

A dolgozatban egy ebbe az irányzatba tartozó módszer, a *bootstrap*-módszer alkalmazását írom le. Minthogy tudomásom szerint Magyarországon elsőként alkalmazok ilyen módszert, az első részben röviden összefoglalom az irányzattal és annak eredményeivel kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat. A második rész tartalmazza az alkalmazás leírását. A h -eloszlású osztott késleltetésű modell igen hasznos eszköze lehet a közgazdaságtanilag is megalapozott ökonometriai kutatásoknak, azonban a vele kapcsolatos becslési problémákat a klasszikus becsléelmélet nem tudta teljesen tisztázni. Most megkíséreltem a számítógép-intenzív becslési módszerek segítségével javítani a becslés használhatóságát. A harmadik fejezet néhány olyan következtetést tartalmaz, amely az elvégzett kísérletek nyomán érdemel figyelmet.

I. Számítógép-intenzív módszerek

1.1. A klasszikus becsléelmélet problémáiról

A matematikai statisztika és az ökonometria modelljeinek felépítésekor figyelembe veszi, hogy a modellhez létezik-e, kialakítható-e megfelelő, a statisztika bizonyos kritériumait kielégítő becslési eljárás. A modellek és a becslési eljárások vizsgálatakor minden, elméleti igényességre törekvő műben elsőrendű kérdés az esztimátorok és a prediktorok statisztikai tulajdonságainak vizsgálata. A konkrét modelltípustól független kritériumrendszerekkel szokás szembesíteni az adott eljárást. A továbbiakban a két leggyakoribb kritériumrendszert és az ezeket kielégítő modellek szokott hipotéziseit mutatom be.

Az egyik kritériumrendszer központi kérdése a torzítatlanság. Az, hogy az adott esztimátor várható értéke éppen a becslni kívánt paraméter-e, általában jól definiált, de nehezen eldönthető kérdés. Gyakran (konkrét modelltípustól

függően) szükséges hozzá a latens változók, illetve az adatsorok adott eloszlásának feltételezése. A klasszikus regressziós modell a latens változók normalitásának hipotézisével szokott élni. A modern többváltozós matematikai statisztika egyes modelljei (pl. a faktoranalízis) a változók együttes normalitását tételezik fel. Egyébként lehetséges más eloszlástípusok feltételezése is, de a statisztika — mint könnyen kezelhető eloszlástípus — a normális eloszlást szokta előnyben részesíteni.

A normalitás, illetve az adott más eloszlástípus feltételezése két érvre támaszkodhat. Az egyik érv egy olyan sztochasztikus folyamat vagy modell bemutatása, amely — statisztikai vagy szaktudományi ismeretekkel bizonyíthatóan — létrehozza az adott adatsort, jellemzi az adott változó alakulását, és a feltételezett eloszlást adja megoldásként. Ilyen megalapozása ezeknek a feltételezéseknek általában nincsen; néhány közgazdasági modellen kívül szinte egyeduralkodónak mondható a központi határeloszlás-tételre való hivatkozás. Ez a hivatkozás azonban nem tekinthető jogosultnak a tételben szereplő modell és a modellezni kívánt változó kapcsolatának bemutatása nélkül. Ez a kapcsolat az esetek nagyobbik részében bizonyíthatatlan.

A másik érv az lehet, hogy a felhasznált adatsor — bár nem tudjuk miért, de — adott (normális) eloszlású. Ennek a hipotézisnek a bizonyítása azonban megint csak meglehetősen nehéz. Egyrészt az alkalmazások többségénél a viszonylag rövid adatsor nem teszi lehetővé, hogy bizottsággal állíthassuk: ez az adatsor normális eloszlású és nem másfajta. Másrészt a vizsgálni kívánt adatsor gyakran csak a becslés elvégzése során áll elő (reziduumvektor), így vizsgálatuk a becslés elvégzéséhez nem szükséges, utána pedig kifejezetten zavaró lenne; ilyent nem szoktak elvégezni. Csak akkor kerül elő a kérdés, ha a becslés eredménye „szokatlan”, szemmel láthatóan hibás, mint pl. a *Heywood*-eset a faktoranalízisben.

PAIZS [9] tanulmányában az előző módszert kisminta-tulajdonságok vizsgálatára tekinti alkalmasnak, míg egy másik kritériumrendszert nagyminta-tulajdonságok vizsgálatával hoz kapcsolatba. Megemlíti, hogy „A... módszerekkel nyerhető paraméterbecslések nagyminta-tulajdonságai (aszimptotikus torzítás, aszimptotikus hatásosság, konzisztencia, aszimptotikus eloszlás) analitikus (deduktív) úton meghatározhatók és jól ismertek, *viszonylag kevés ismerettel rendelkezünk azonban kisminta-tulajdonságaikra... vonatkozóan.* A kisminta-tulajdonságok... vizsgálatának *analitikus (deduktív) útja* nehezen járható és eddig jelentős erőfeszítések ellenére is kevés eredményre vezetett.”

A nagyminta-tulajdonságok vizsgálata azzal a feltételezéssel él, hogy az idősorok végtelen hosszúságúak, illetve végtelen hosszúságúra meghosszabbíthatók. Alapkérdés a konzisztencia. A statisztikai — ökonometriai modellek ugyanakkor valamilyen formában feltételezik a struktúra stabilitását. A standard ökonometriai modellben ez a paramétermátrixok és véletlen változók momentummátrixainak állandóságát jelenti; egyes esetekben emellett újra megjelenik a normalitás hipotézise.

Idősorok vizsgálatakor ez a két feltétel szinte óhatatlanul szembekerül egymással. Éves ökonometriai modelleknél például nagyon nehéz elképzelni, hogy a gazdálkodó alanyok viselkedésmintái, így a strukturális forma paramétermátrixai változatlanok maradjanak egy alapvető gazdasági reformnak vagy egy fejlettségi szint átlépésének esetén is. Felgyorsult korunkban ez szinte bizonyosan bekövetkezik, legkésőbb minden tíz-tizenötödik évben. Ilyenkor adatsorok vesztek el értelmüket és ennek megfelelően mérésük is

lehetetlenné vagy értelmetlenné válik; gazdálkodó egységek születnek és tűnnek el, gyakran a gazdaságban tevékenykedő egyedek számának nagyságrendjét is megváltoztatva. Több lehetséges megoldás is van ilyenkor, ezek azonban — véleményem szerint — korántsem kielégítőek.

Át lehet térni negyedéves adatokra. Ez azonban többnyire kikényszeríti az éves modell közgazdasági összefüggéseinek gyökeres átalakítását, alapvető változók — pl. vállalati vagy népgazdasági mérlegadatok — elhagyását, kevéssé kielégítő más adatokkal való helyettesítésüket, esetleg az egész modell közgazdasági kiindulópontjának megváltoztatását. Gyakori ilyenkor a közgazdasági hipotézisek helyettesítése statisztikai összefüggésekkel, illetve szükségessé válhat olyan finom struktúrák ábrázolása, amelyekben egyes igen rövid távon ható tényezőknek — pl. divat, időjárás — szerepe meghatározó; így esetleg visszajutunk az eredeti problémához.

Másik lehetőség a keresztmetszeti adatok használata. Itt is adódnak azonban problémák. Egyrészt, ilyenkor az előrejelzés inkább az „átlagos gazdálkodó alanya”, semmint a következő évre vonatkozhat. Az összefüggések alapvető megváltozása ilyenkor is felléphet. Sokváltozós statisztikai modelleknek az adatsorokra vonatkozó normalitás-hipotézise pedig szinte bizonyosan nem teljesül.

Egy harmadik lehetőség a paramétermátrixok változatlanságának feloldása. Ez a változás kétirányú lehet: egyrészt lehet valószínűségi jellegű, amikor a paramétermátrix egy másik — valószínűségi jelleget is magában hordozó — struktúra függvényében alakul, másrészt lehet a minta particionálására alapuló (disequilibrium-modellek, szakaszos regresszió modellek stb.). A második esetben a minta particionálása lehet külső információon alapuló, illetve a mintából következő is. A felsoroltak túlnyomó többségében láthatóan visszatér a stabilitás: stacionér sztochasztikus folyamatoknak, „magasabb rendű”, de szintén konstans paramétermátrixoknak, illetve stabilitást „teremtő” külső információknak a formájában. A mintából következő particionálás pedig mind ez idáig nagyrészt megoldatlan problémákkal küzd (ez egyébként sok más felsorolt módszer esetében is gátolja ennek az útnak a választását). [8]

Végeredményben tehát általánosan kimondható: nem fenyeget minket az a „veszély”, hogy a mintaelemszám végtelenné válik. A gyakorlatban felmerülő problémák jó részénél tehát az aszimptotikus tulajdonságok vizsgálata nem helyettesítheti a kisminta-tulajdonságok elemzését.

1.2. Egy egyszerű példa

A továbbiakban egy példán mutatjuk be a klasszikus és a számítógép-intenzív becslési módszereket. Az összehasonlíthatóság érdekében ugyanazon a modellen és ún. alapbecslésen fogjuk felépíteni őket, amely a jelen esetben egy egyszerű regressziós modell legkisebb négyzetek módszerével számított becslése; természetesen — értelemszerű módosításokkal — tetszőleges modell alapbecslésére alkalmazhatók.¹

¹ A továbbiakban használatos jelölések:

latin betűk jelölik az elméleti modell változóit és adatsorait;

görög betűk jelölik az elméleti modell paramétereit;

grotzesk betűk jelölik az alapbecslés modelljének változóit, adatsorait és paramétereit;

félkövér szedés jelöli a vektorokat, ill. mátrixokat;

Alapbecslés

Tegyük fel, hogy adott egy T elemű minta két, mérhető és megfigyelhető változóra: \mathbf{x} és \mathbf{y} . Tételezzük fel, hogy a két változó között olyan kapcsolat van, amelyet a következő modell jellemez:

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

ahol:

\mathbf{u} a latens változó nem megfigyelhető adatsora, α paraméter. Tegyük fel továbbá, hogy $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $E(\mathbf{u}'\mathbf{u}) = s^2$. Válasszuk a legkisebb négyzetek módszerét alapbecslésnek. A módszer az α paraméterre, amellyel kapcsolatban becslési feladat merül fel, a következő esztimátort szolgáltatja:

$$\hat{\alpha} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y} \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \hat{\alpha}\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

amelyről bizonyítható, hogy torzítatlan, konzisztens,

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha, \quad E((\hat{\alpha} - \alpha)^2) = s^2(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \quad (1.3)$$

Nézzük most végig, hogy a különböző módszerek, a legkisebb négyzetek elvén működő alapbecslést használva, hogyan adnak becslést az α paraméterre, feltéve, hogy rendelkezésre áll egy T elemű minta: \mathbf{x} és \mathbf{y} , és a modell feltevésünk szerint:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \alpha \mathbf{x} + \mathbf{u}, & E(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{u}\mathbf{u}') &= \sigma^2 \mathbf{I}_T. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Klasszikus alkalmazás I.

A. fázis: $\mathbf{x} := \mathbf{x}$, $\mathbf{y} := \mathbf{y}$, $\hat{\alpha}_1 := \hat{\alpha}$, $\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}$, $T = T$.
Torzítatlan becslést adunk σ -ra:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} (\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}})}. \quad (1.5)$$

B. fázis: Feltesszük, hogy \mathbf{u} eloszlása normális. Ekkor bizonyítható, hogy $\frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha}{\hat{\sigma}}$ eloszlása Student-féle t -eloszlás $T - 1$ szabadságfokkal. Most meghatározzuk azokat a $\vartheta(\alpha) = \hat{\sigma} t_{T-1} + \alpha$ valószínűségi változókat (t_{T-1} Student-féle t -eloszlást követ, $T - 1$ szabadságfokkal), amelyekhez olyan (legsűkebb) intervallum tartozik, amelybe eső értékeket a $\vartheta(\alpha)$ valószínűségi változó adott (pl. 95%-os) valószínűséggel vesz fel, és amely tartalmazza $\hat{\alpha}_1$ -t. Ezek bármelyike lehet a kérdéses becslőfüggvény, így hát bármelyik várható értéke lehet α (a valóságban természetesen csak az egyiké). Ezen valószínűségi változók segítségével adunk ún. konfidenciaintervallumot vagy $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$ pontbecslést α -ra.

kalap ($\hat{\cdot}$) jelöli a becsült paramétereket;
definiáló egyenlőségjellel ($:=$) teremtjük meg a kapcsolatot két szám között, ha a bal oldalon álló a jobb oldalon álló értékét veszi fel.

Megjegyzés: Az eljárást a B. fázis szigorú megszorító feltételezése nélkül is el lehet végezni. A normalitás hipotézise nélkül is, a Csebisev-egyenlőtlenség alapján számíthatnánk konfidenciaintervallumot α -ra. Ez a becslés azonban gyakorlati alkalmazásokban kezelhetetlenül rossz hatékonyságú² lenne.

Klasszikus alkalmazás II.

A. fázis: $\mathbf{x} := \mathbf{x}$, $\mathbf{y} := \mathbf{y}$, $\top = T$, $\hat{\alpha}_1 := \hat{\alpha}$, $\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}$. (1.6)

B. fázis: Feltesszük, hogy T nagy: $T \rightarrow \infty$. Ekkor bizonyítható, hogy $\hat{\alpha}_1$ aszimptotikus eloszlása normális.

Most meghatározzuk azokat a $\vartheta(\alpha) \sim N\left(\alpha, \frac{1}{T} \mathbf{u}' \mathbf{u}\right)$ valószínűségi változókat,

amelyekhez olyan (legsűkebb) intervallum tartozik, amelyekbe eső értékeket a $\vartheta(\alpha)$ valószínűségi változó adott (pl. 95%-os) valószínűséggel vesz fel, és amely tartalmazza $\hat{\alpha}_1$ -t. Ezek bármelyike lehet a kérdéses becslőfüggvény, így hát bármelyik aszimptotikus várható értéke lehet α . Ezen valószínűségi változók segítségével adunk konfidenciaintervallumot vagy pontbecslést α -ra.

Megjegyzés: Mint arról az előző fejezetben is szó volt, a $T \rightarrow \infty$ eset igen ritka, és a módszer nem nyújt kellő információt $T \ll \infty$ esetre.

Véletlen részminták módszere

A P. C. Mahalanobis által 1946-ban kidolgozott módszert a kézikönyvek [5] többnyire speciális mintavételi eljárásaként mutatják be, kitérve becslésméleti vonatkozásokra. Annak, hogy itt mégis becslési eljárásaként kerül tárgyalásra, az az oka, hogy — mint látni fogjuk — alap gondolata alapján méltán tarthatjuk a továbbiakban bemutatásra kerülő módszerek ősének.

A. fázis: Osszuk fel a T elemű mintát véletlen módon S egyenlő³ részre!

Jelöljük az i -edik $\frac{T}{S}$ elemű részmintát $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ -vel. Mindegyik részmintára végezzük el S -szer az alapbecslést:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}_i, \quad \top = \frac{T}{S}, \quad \hat{\alpha}_i := \hat{\alpha} \quad i = 1, 2, \dots, S (S \ll T) \quad (1.7)$$

B. fázis: Feladatunk, hogy meghatározzuk azokat a $\vartheta(\alpha)$ valószínűségi változókat, amelynek realizációi lehetnek az $\hat{\alpha}_i$ értékek. Bármely feltételezést tesztelhetünk (pl. χ^2 -próbával).

$\hat{\alpha}$ pontbecslés előállításához általában elegendő a kapott eloszlás valamely középértékének, általában az empirikus várható értéknek (átlagnak vagy pl. a módusznak) a meghatározása. Intervallumbecslést is előállíthatunk empirikusan, a hisztogram alapján.

² Normalitás feltételezése esetén a konfidenciaintervallum hossza a szórás négyszerese, a feltevés nélkül a Csebisev-egyenlőtlenség alapján 9,4-szerese.

³ A nem egyenlő elemszámú részmintákkal, valamint az előzetes információ felhasználásával számítható optimális S kiválasztásával kapcsolatban az olvasó a kézikönyvekben találhat útmutatást.

Megjegyzés: A módszer látható előnye a klasszikus eljárásokhoz képest, hogy a B. fázist hisztogram segítségével, erőszakolt vagy irreális feltételezések bevezetése nélkül hajtottuk végre. Lényegesen biztosabban tudunk eloszlást illeszteni S realizációra, mint egyre. Ez az előny azonban nagyon „törékeny”. Egyrészt, ha S viszonylag nagy T -hez képest, az egyes $\hat{\alpha}_i$ mintaelemek statisztikai stabilitása lesz kicsi, mert az egyes becslésekhez tartozó adatsor hossza túlzottan lecsökken. Másrészt, ha S túlzottan kicsiny, az eloszlás illesztése és a statisztikai jellemzők becslése lesz bizonytalan az S elemű mintából.

Jackknife-módszer⁴

A *Quenouille* és *Tukey* által az ötvenes évek közepén kifejlesztett, később jackknife-nak nevezett módszer a Mahalanobis-módszer „komplementumaként” könnyen érthető.

A. fázis: Összük fel a T elemű mintát véletlen módon S egyenlő részre.

Jelöljük az i -edik $\frac{T}{S}$ elemű részminta elhagyásával kapott „komplementer” részmintát rendre \bar{x}_i, \bar{y}_i -vel. Végezzük el az alapbecslést a következő módon: ($S + 1$ -szer)

$$\text{egyrészt: } \mathbf{x} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}, \quad T = T, \quad \bar{\alpha} := \hat{\alpha} \quad (1.8)$$

$$\text{másrészt: } \mathbf{x} := \bar{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{y} := \bar{\mathbf{y}}_i, \quad T = \frac{(S-1)T}{S}, \quad \hat{\alpha}_i := S\bar{\alpha} - (S-1)\hat{\alpha},$$

$$i = 1, 2, \dots, S(S \leq T)$$

B. fázis: Megegyezik a véletlen részminták módszerének II. fázisával.

Megjegyzés: A véletlen részmintákhoz képest előnyös, hogy S megközelítheti, sőt el is érheti T -t, nem fenyeget az egyes mintaelemek esetlegessé válása. A T -t mint abszolút korlátot azért még mindig nem tudtuk áttörni. 20–50 elemből álló mintára, mint ami gyakran a tényleges helyzet, még mindig igen bizonytalan eloszlást illeszteni. A második probléma, hogy az $\hat{\alpha}_i$ mintaelemek nem függetlenek, nem ennyire zavaró. Egyrészt, a mintaelemek közel függetlenek; másrészt, idősoros modellezéskor a függetlenség általában az eredeti modellben sem áll fenn. Késleltetett változók esetén a módszer alkalmazása megköveteli végső forma előállítását.

Bootstrap-módszer⁵

Az *EFRON* [4] által 1979-ben javasolt módszer felhasználási lehetőségei még az előzőekénél is szélesebbek, a most közölt variáns azonban szűkebb az eredetinél⁶: elsősorban regressziós becslésekre dolgozták ki, és csak olyan alapbecslésre alkalmazható, amely reziduumvektort állít elő.

⁴ Jackknife (angol) jelentése: többpengéjű zsebkés, bicska.

⁵ Bootstrap (angol) jelentése: cipő füle. Az elnevezés egy magyarban visszaadhatatlan szójátékra utal. By one's own bootstraps hozzávetőleges jelentése: önerőből, lehetetlen helyzetből is (kivágja magát).

⁶ A módszer általánosabb változatait a jackknife-módszerek kapcsán fejlesztették ki. Ebben az általánosabb formában a jackknife felfogható, mint a bootstrap lineáris approximációja.

A. fázis: Végezzük el először a becslést a következő módon:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}, \quad \mathbb{T} = T, \quad \bar{\mathbf{a}} := \hat{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.9)$$

Majd S -szer, különböző \mathbf{P}_i véletlen mátrixok segítségével, ahol a mátrix sorai függetlenül, véletlenül (visszatevéssel) választott egységvektorok:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} := \bar{\mathbf{a}}\mathbf{x} + \mathbf{P}_i\bar{\mathbf{u}}, \quad \text{és legyen } \hat{\mathbf{a}}_i := \hat{\mathbf{a}}. \quad (S \ll T^T) \quad (1.10)$$

B. fázis: Megegyezik a véletlen részminták módszerének II. fázisával.

Megjegyzés: A T^T általában már nem jelent korlátot; jóval alatta maradni az azonos elemek elkerülése végett érdemes. Ha viszont T nagyon nagy, a becslést gyorsítani lehet azáltal, ha az egyes $\hat{\mathbf{a}}_i$ -k kiszámításakor a minta (véletlenszerűen kiválasztott) részét elhagyjuk. A számításgigényt egyszerűsítő számítástechnikai megoldásokkal nagymértékben lehet csökkenteni: a jelenlegi példánál maradva, az $(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'$ vektor előállítására, amely az alapbecslés egyetlen nagyobb számításgigényű feladata, csak egyszer van szükség, ez a vektor a becslés folyamán mindvégig változatlan marad. A késleltetett változókat tartalmazó modellre az eljárást értelemsszerűen módosítani kell.

1.3. Számítógép-intenzív módszerek alkalmazása

Az előbb bemutatott módszerek elvileg természetesen bármilyen alapbecslési eljárással használhatók. A felsorolás sem teljes: inkább a módszerek logikus sorbaállítására törekedtem. Ugyanakkor már a módszerek rövid ismertetéséből is látszik, hogy az utóbbi három — a továbbiakban *számítógép-intenzív* módszereknek nevezett⁷ — módszer számításgigénye sokszorosa az első kettőnek („klasszikus” módszereknek), esetenként azt egy nagyságrenddel is meghaladhatja. (Bár az alapbecslés egyszeri elvégzéséhez képest bekövetkező számításgigény-növekedés megfelelő számítástechnikai megoldásokkal, az alapbecslés speciális tulajdonságainak kihasználásával, általában a minimálisra csökkenthető.)

A módszerek megérdemlik a „számítógép-igényes” nevet is, így hát jogosan vetődik fel a kérdés: mi szükség van rájuk? A kérdésre válaszolva a módszerek három előnyös tulajdonságát sorolhatjuk fel — azon túl, hogy mint a szokásostól elütő módszerek, gazdagítják az ökonometria-elmélet fegyvertárát:

— Először, egy elméleti jelentőségű vonása a módszereknek, hogy ahelyett, hogy a becslés B. fázisában különféle hipotéziseket — normalitás, $T \rightarrow \infty$ — tennénk fel, majd a B. fázisban ezen hipotézisek ellenőrzéséről „feledkeznénk meg”, az A. fázisban — az előzőekben említett hipotézisek nélkül — több munkával ugyan, de a B. fázisban juthatunk a klasszikus módszerekkel egyező „erejű” eredményekhez. Szokás egyfajta „információ-megmaradási” törvényre hivatkozni. Nos, a klasszikus és a számítógép-intenzív módszerek közti különbség abban rejlik, hogy a klasszikus módszerek több információt használnak fel, külön hipotézisek formájában, mint a számítógép-intenzív módszerek; ugyan-

⁷ Szokásos még a *quasi-sampling* vagy *resampling* elnevezés is, a másodlagos mintakiválasztásra célozva.

akkor a mintából felhasználható információkkal pazarló módon bánnak, nem vizsgálják, hogy a hipotézisek alátámaszthatóak-e, így az előzővel azonos mennyiségű információt „elpazarolnak” a mintabeliből. Amennyiben tehát a klasszikus módszerek hipotéziseiket az adott minták alapján értékelik, a két módszeresalád azonos információmennyiséget használ fel, információértékük is azonos.

— Másodsor, az említett számítógép-intenzív módszerek párhuzamosan alkalmazhatók a klasszikus módszerekkel. Adott esetben bizonyítható, hogy ha pl. az alapbecslés konzisztens (II. klasszikus módszer), akkor a módszer jackknife-változata is konzisztens, de kismintabeli torzítása csökken. [10]

— Harmadsor, s ez a jelen tanulmányban a legfontosabb tulajdonság: ezek a számítógép-intenzív módszerek „mindig” alkalmazhatóak (bár természetesen lehetséges, hogy alkalmazásuk nem lesz eredményes). Ez a klasszikus módszerekről, a klasszikus kritériumrendszerekről nem mondható el. A modellek és a becslési eljárások jelentős részében nem tudjuk analitikusan meghatározni a becslőfüggvény eloszlását, sőt: leghasznosabb esztimátorainkról ki szokott derülni, hogy bizonyíthatóan torzítottak. A nagyminta-tulajdonságokat sem könnyű levezetni, speciális nagyminta-hipotéziseket kell bevezetni, és gyakran még ezek sem elegendők: a nagyminta-tulajdonságok sem meghatározhatók. [3]

A számítógép-intenzív módszerek segítségével pontbecslésekből intervallum becsléseket, becslő eloszlásokat lehet előállítani. Ha szélesen értelmezzük a pontbecslés fogalmát, akkor idetartozik a bonyolult nemlineáris statisztikai módszerek túlnyomó többsége is. Ezekkel a módszerekkel lehet pl. egy faktoranalízis vagy egy sokdimenziós skálázás eredményét valószínűségi jellemzőkkel ellátni, a faktormodell vagy a klaszterstruktúra stabilitását ellenőrizni. A módszerek tért hódítanak a pooling és az egyensúlyvizsgálatok területén, vizsgálták nemlineáris eljárások tesztjeit, alkalmazták a diszkriminancia-analízis, a hányadosbecslés stb. területén is. [1], [2], [4]

Összefoglalva tehát azt mondhatjuk: a modern számítástechnika mindenki által elérhetővé tett egyes bonyolult becslési eljárásokat. Ezeknél az eljárásoknál régebben esetleg a megoldhatóság érdekében kényszerültek olyan feltevésekre, amelyek — mint az a tömeges alkalmazás nyomán ma már mindinkább világossá válik — a gyakorlatban általában irreálisak, nem állnak fenn. Így sokszor teljesen félrevezető eredmények születhetnek. A számítástechnika azonban nem csupán megteremtette a felületes, téves alkalmazás lehetőségét: eszközt is adott a felmerülő veszélyek elkerülésére. Ezek az eszközök az előzőekben vázolt számítógép-igényes módszerek.

Érdeemes kitérni a számítógép-intenzív módszerek és a Monte Carlo eljárások kapcsolatára is. Kétségtelenül vannak rokon vonások, mint a számítógép-igényesség vagy a sztochasztikus jelleg. A különbség azonban alapvető eltéréstől fakad. A Monte Carlo eljárás adott struktúrához adott valószínűségeloszlásból vett „zavarással”, latens változók generált értékeivel generál nagyszámú mintát, a minták segítségével adott becslés („alapbecslés”) sztochasztikus tulajdonságait vizsgálja — adott struktúra (és adott exogén adatsor) esetén. A számítógép-intenzív becslési módszerek adott mintából számítanak becsült struktúrákat, és ha ehhez latens változók értékeit fel is használják (bootstrap-

módszer), ezek az értékek sem generáltak, hanem a mintából származnak. Összefoglalva: a Monte Carlo vizsgálatok a becslések *általában vett* tulajdonságainak, a számítógép-intenzív módszerek pedig a becslések *adott mintán vett* tulajdonságainak meghatározását célozzák.

Meg kell jegyezni, hogy a bootstrap-módszert mint a valóságos mintaelemeken végzett Monte Carlo vizsgálatot is szokás emlegetni. [1], [4]

2. A h -eloszlású osztott késleltetésű modell és becslése

2.1. A modell és az alapbecslés

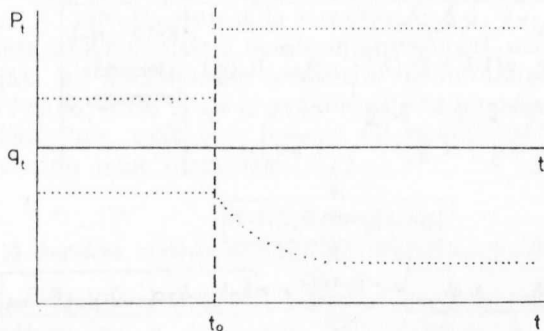
Az ökonometriai modellekben szereplő alapszituációk egyike a késleltetett alkalmazkodás. Tegyük fel pl., hogy egy termék ára és az iránta megnyilvánuló kereslet fordítottan arányos, de az ár megváltozása után a kereslet nem tud azonnal végleges (pl. egyensúlyi) szintjére beállni, az igazodás a megváltozott körülményekhez (jelen példában az árszinthez) csak több, egymást követő periódusban tud teljes egészében végbemenni. Ilyen igazodást mutat az 1. ábra is, ahol q_t a kereslet, p_t a termék ára adott t időpontban. A t_0 időpontban bekövetkező áremelés hatására részleges keresletcsökkenés következik be. Az új szintnek megfelelő egyensúlyi helyzet azonban csak lassan, fokozatosan jön létre.

A folyamatot a következő függvénnyel szokták leírni:

$$q_t = \alpha_0 p_t + \alpha_1 p_{t-1} + \alpha_2 p_{t-2} + \dots + \alpha_n p_{t-n} + u_t, \quad (2.1)$$

u_t véletlen változó.

Az egyenlet becslése több, itt nem részletezett problémát is felvet, amelyek megoldására sok könnyen kezelhető, jól illeszkedő módszert dolgoztak ki. [8] A modellel kapcsolatos másik probléma, az összefüggés közgazdasági interpretációja azonban jórészt megoldatlan, a becslési módszerek általában elméletileg nehezen indokolható megkötéseket alkalmaznak. A leggyakrabban felsorolt okok között a viselkedés rugalmatlansága, „súrlódás”, a döntéshozatal módjával összefüggő tényezők vannak. Elméletileg megalapozott, bár sajnos nem minden esetre alkalmazható modellek találhatók a beruházási javak vagy az adaptív várakozások tárgykörében.



1. ábra

HUNYADI [7] osztott késleltetésű modelljét egy információ-terjedési folyamat alapján építette fel. Az előzőekben említett példánál maradva, feltehető, hogy egy adott népességben (pl. egy országban) egy árváltozásról szóló hír „szájról szájra” terjed, az információ terjedésének sebessége van, belső szabályai, meghatározható és nyomon követhető lefolyása van. A folyamat rokon pl. egy járvány lezajlásával. A „hólabda”-folyamatot Hunyadi elemezte először részletesen, ő állította elő az általa generált h -eloszlást [6], és ugyancsak ő alkalmazta először az említett folyamatra.

A hólabda-eloszlás képlete – legegyszerűbb formájában – a következő:

$$z_t = 1 - \lambda^{(2^t)}, \quad (2.2)$$

ahol z_t azok részaránya a t -edik időpillanatban, akik rendelkeznek az adott információval, a λ paraméter pedig arra utal, hogy az adott információval a népesség mekkora része nem rendelkezett a folyamat kezdetekor. (Nyilván $0 \leq \lambda < 1$, $0 \leq z_t \leq 1$.) Ebből vezethető le a (2.1.) modell konkrét, becslésre alkalmas formája:

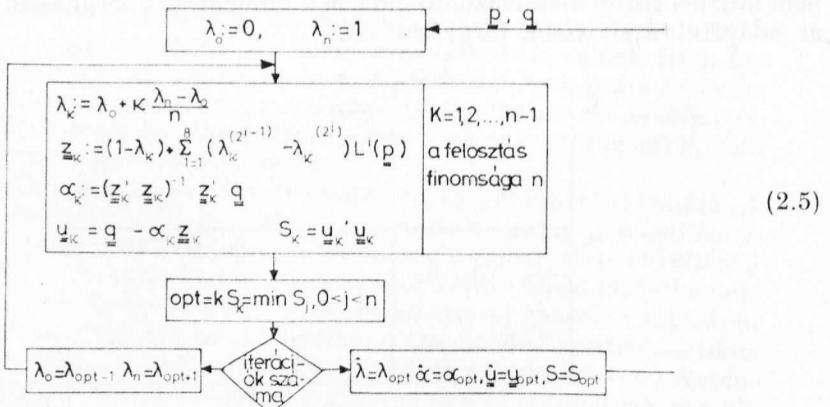
$$q_t = \alpha \left[(1 - \lambda) p_t + \sum_{i=1}^N (\lambda^{(2^{t-1})} - \lambda^{(2^i)}) p_{t-i} \right] + u_t \quad (2.3)$$

$0 \leq \lambda < 1$, $N = \infty$, u_t véletlen változó, $E(u_t) = 0$,
vagy vektoralakban:

$$\mathbf{q} = \alpha \left[(1 - \lambda) \mathbf{p} + \sum_{i=1}^N (\lambda^{(2^{i-1})} - \lambda^{(2^i)}) L^i \mathbf{p} \right] + \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

$0 \leq \lambda < 1$, $N = \infty$, \mathbf{u} véletlen vektorváltozó,
 $E(\mathbf{u}) = 0$, L a késleltetés (lag)-operátor.

A becslés bonyolult feladat: erősen nemlineáris a paraméterekben (hiszen pl. a két paraméter szorzata szerepel benne), a becslést végtelen sorból kell elvégezni. Ez utóbbi problémát egyszerűbb megoldani, ui. az eloszlás tulajdonságaiából adódóan $N \geq 8$ esetén a becslés már gyakorlatilag független N -től. Az első probléma azonban azonnal valamilyen nemlineáris eljárás alkalmazását feltételezi.



2. ábra

Hunyadi scanning-típusú becslési eljárása azt a körülményt használja ki, hogy λ egy jól meghatározott intervallumon belüli értékeket vehet csak fel. A becslés folyamatábráját a 2. ábrán láthatjuk.

A becslés láthatóan nemlineáris legkisebb négyzetek módszere. Részletesebb leírását, általában a modell bővebb tárgyalását [7a] és [7b] tartalmazzák. Témánk szempontjából fontos azonban az említett tanulmányok néhány következtetése:

1. Az eloszlást zárt alakban előállítani, a becslés analitikus tulajdonságait megadni (terminológiánk szerint: az alapbecslést klasszikus keretekbe helyezni) mind ez idáig nem sikerült. A becslőfüggvények eloszlásának, a konfidencia- és a toleranciaintervallumoknak az előállítása nem sikerült. Az alapbecslés alkalmazása tehát csak bizonytalan tulajdonságú pontbecsléseket eredményezhet.

Hunyadi részletes Monte Carlo vizsgálatokat végzett az alapbecslés tulajdonságainak vizsgálatára, amelyek főbb következtetései az alábbiak:

2. A paraméterek, elsősorban λ becslésének szórása és torzítása nagyon érzékeny az u_i véletlen változó szórására. Ha a relatív szórás 4% körül van, az eljárás nem alkalmas λ meghatározására. A kísérletekben a véletlen változó szórása 0,5%-ra volt rögzítve.

3. λ növekedésével a $\hat{\lambda}$ szórása és torzítása tendenciaszerűen csökken, λ kis értékei esetén a torzítás azonban olyan nagy, hogy az eljárás gyakorlatilag használhatatlan.

4. Rögzített relatív szórás esetén a becslés érzéketlen α változásaira, $\hat{\alpha}$ becslési eredményei igen jók; igaz, hogy ez a kevésbé lényeges paraméter, „skála-paraméter”.

A felsorolt következtetésekben említett problémák önmagukban is elég súlyosak, együttesük azonban magát az alkalmazást teszi kérdésessé. Az 1. problémát sokan hajlamosak „szépséghibának” tekinteni. Együtt a 2. problémával azonban súlyossá válik: egy pontbecslésből nem tudunk a becslőfüggvény, főként nem a látens változó szórására következtetni, így minden alkalmazáskor feltehető a kérdés: hátha a becslés sikertelen, csak mi nem tudjuk?

A 3. probléma sem önmagában súlyos, a modell akkor „érdekes”, ha az alkalmazkodási, információ-tovaterjedési folyamat jelentős szerepet játszik, a kereslet nagy részét érinti a késleltetett alkalmazkodás, a népesség nagy része az információ-terjedési folyamatban szerzi meg az árváltozás-információt, azaz: a λ paraméter viszonylag nagy. Pontbecslés esetén azonban nem tudjuk megállapítani, hogy a kapott érték nagy szórású, kicsi λ (nem adekvát modell) vagy kis szórású, nagy λ (helyes alkalmazás) eredménye. Az 1. probléma az alapjában kedvező 4. következtetést is lerontja.

A modell elméleti értékeit tehát a becslés hiányosságai, megoldatlan problémái erősen rontják, az alkalmazást nehezítik. Tanulmányában a szerző is megjegyzi: „figyelembe véve, hogy a gyakorlati alkalmazások során ismétlésekre nincs lehetőségünk, csak egy becslés áll rendelkezésünkre, az itteni eredmények egyáltalán nem biztatóak.” [7]

2.2. A becslési eljárás átalakítása bootstrap-módszerré

Az előzőek ismeretében kézenfekvőnek tűnik valamely számítógép-intenzív módszer felhasználása, az 1. probléma megoldására. A bootstrap-eljárás mellett döntöttem, ez a problémára egyszerűen alkalmazható volt.

A módszer nagy számítógépígénye nem engedte meg, hogy Hunyadihoz hasonlóan Monte Carlo vizsgálatokat végezzek a becslés tulajdonságainak meghatározására. Kísérletsorozatot állítottam össze, amelyben ugyan magam generáltam azokat a mintákat, amelyekre azután a becslést alkalmaztam, de kísérletenként csak egy mintát használtam fel (az optimálisnak tekintett 50–200 helyett). A 20 kísérletet Hunyadi vizsgálatainak alapján állítottam össze. Az exogén változó adatsora minden kísérletben azonos volt: egy „átlagos makrogazdasági idősor”, amit a [7] tanulmányból vettem át. A minta hossza $20 + 8$, a scanning felosztás finomsága 10, a scanning interációk száma 2, a bootstrap iterációk száma 200 volt. A kísérletek során változtattam az egyes paramétereket: α -t, λ -t, illetve az u véletlen változó eloszlását.

A kísérletet a 3. ábrán található séma szerint végeztem. A futtatásokat az Országos Tervhivatal ICL System 4/70 számítógépén végeztem. Véletlen szám generálásán a gépen rendelkezésre álló pseudo-véletlen számokat generáló szubrutin meghívását értem.

$$f(\mathbf{p}, \lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{p} + \sum_{j=1}^8 (\lambda^{2^{j-1}} - \lambda^{2^j})L^j(\mathbf{p}). \quad (2.6)$$

Az egyes kísérletek eredményeit külön-külön értékeltem. Minden kísérlet eredményeként a két becslőfüggvény eloszlására vonatkozó adatokat kaptam: az empirikus eloszlásjellemzőket (átlag, empirikus szórás) és a hisztogramokat. A 11. kísérlet eredménytáblája pl. a következőképpen nézett ki (l. 4. ábra).

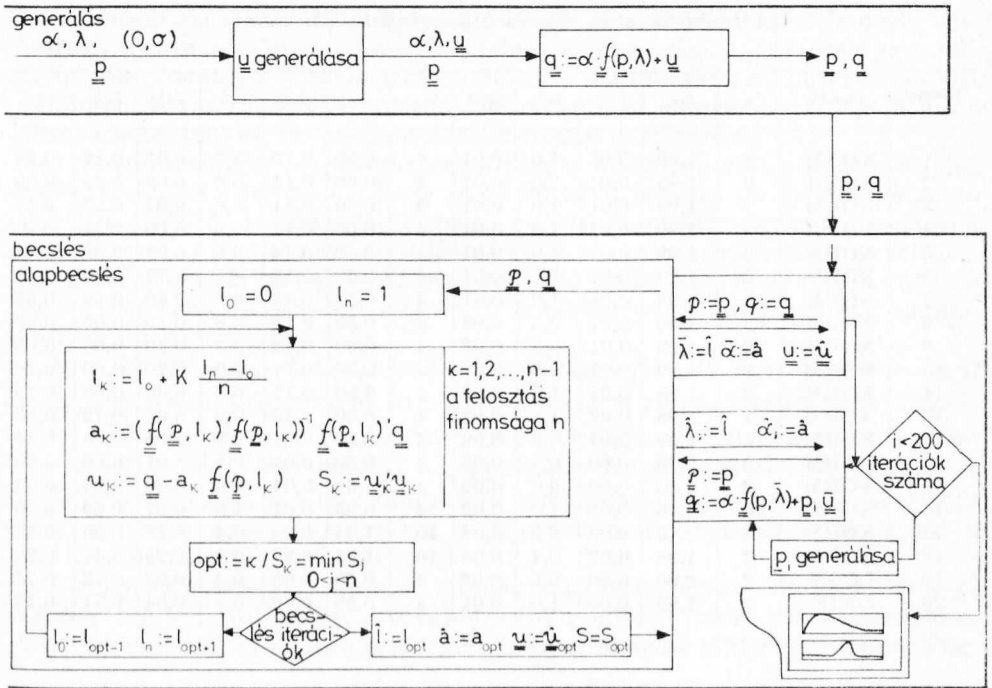
(2.7) alatt közlöm az egyes kísérletek eredményeinek összefoglaló tábláját. Az egyes jelölések: $E(\hat{\theta})$: átlag; $D(\hat{\theta})$: szórás; $B(\hat{\theta})$: a torzítás abszolút mértéke; $V(\hat{\theta})$: relatív torzítás.

$$B(\hat{\theta}) = \theta - E(\hat{\theta}), \quad V(\hat{\theta}) = \frac{B(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta})}.$$

Az eredmények értékelésekor abból a célból kell kiindulnunk, amit magunk elé tűztünk a bootstrap-becsléssé alakításakor. Mennyiben sikerült megoldani az alapbecsléssel kapcsolatos, az előző fejezetben jelzett problémákat?

Először is meg kell állapítani, hogy sikerült a becslés átalakítása. A keletkező hisztogramok az esetek mindegyikében értelmezhetők, releváns információkat hordoznak, még ha ezek az információk alapvetően negatív tartalmúak is. Mondható, hogy a becslőfüggvények mintabeli eloszlása ismert vagy legalábbis ezek jó empirikus közelítését kaptuk meg.

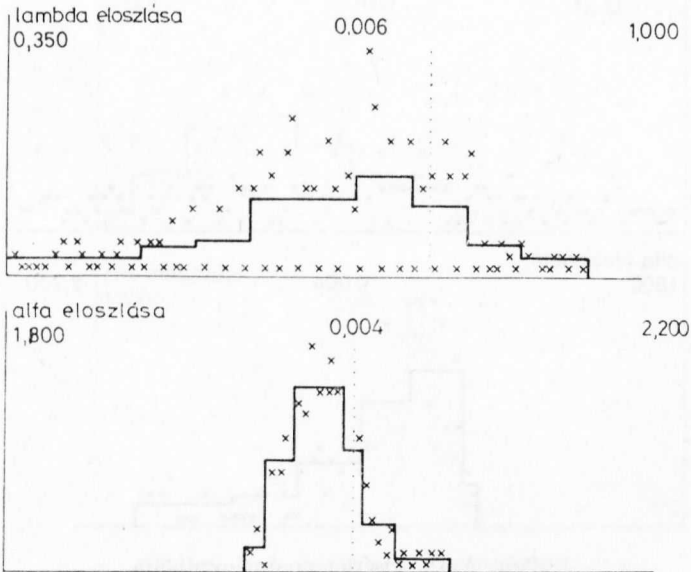
Mivel a becslés klasszikus értelemben vett tulajdonságai nem ismertek, a becslőfüggvény ismeretében sem tudunk teljes határozottsággal konfidencia-intervallumot adni a becslést paraméterekre. A kísérletek alapján ugyanakkor elmondható, hogy jöllehet a becslőfüggvény egyes jellemző pontjai (várható érték, módusz) nem esnek egybe az elméleti paraméterértékkel, az elméleti érték minden esetben benne volt a becslőfüggvény mintabeli átlagának empirikus sugarú környezetében (sőt, jobb oldali környezetében). Ezen tulajdonság a Monte-Carlo eredményekhez képest is újdonságnak mondható, s bár nem tekinthető egzaktan bizonyítottnak, legalábbis reménykeltő. A vele kapcsolatos bizonytalanság nem nagyobb, mint az aszimptotikus konfidencia-intervallumokkal kapcsolatos, az intervallumok szélessége alapján pedig a becslés jónak mondható egy eloszlásfüggetlen, sőt egy normális eloszlást felté-



3. ábra. Az egyes kísérletek folyamatábrája

Input paraméterek:

N = 20 M = 7 alfa = 2.0000 lambda = 0.75 kezd = 2.0 fact = 4.0 késl. sz. = 7
 Lambda várható értéke = 0.6579 szórásnégyzete = 0.0111
 Alfa várható értéke = 1.9846 szórásnégyzete = 0.0004
 Mintanagyság = 200



4. ábra. A 11. kísérlet eredménytáblája

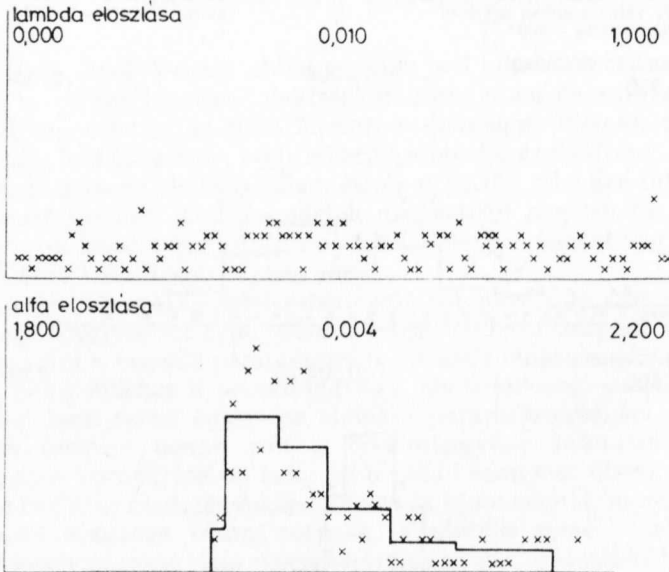
A kísérletek eredményeinek összefoglaló táblázata

(2.7)

Kísérlet száma	Eloszlás	α	$E(\hat{\lambda})$	$B(\hat{\lambda})$	$V(\hat{\lambda})$	$D(\hat{\lambda})$	$D(\sigma)$	$V(\sigma)$	$D(\hat{\lambda})$	$V(\hat{\lambda})$	$B(\hat{\lambda})$	$E(\hat{\lambda})$	λ
1	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,12	0,7	0,08	0,17	0,25
2	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,13	0,6	0,08	0,22	0,30
3	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,14	0,6	0,08	0,27	0,35
4	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,14	0,6	0,09	0,31	0,40
5	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,14	0,6	0,09	0,36	0,45
6	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,13	0,8	0,10	0,40	0,50
7	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,13	0,8	0,10	0,45	0,55
8	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,13	0,8	0,10	0,50	0,60
9	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,12	0,8	0,10	0,55	0,65
10	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,11	0,9	0,10	0,60	0,70
11	NORM	2	1,98	0,02	1,0	0,02	4	0,50	0,11	0,8	0,09	0,66	0,75
12	NORM	2	1,98	0,02	1,0	0,02	4	0,50	0,10	0,8	0,08	0,72	0,80
13	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,07	0,7	0,05	0,80	0,85
14	NORM	2	2,00	0,00	0,0	0,03	4	0,50	0,05	0,2	0,01	0,89	0,90
15	NORM	2	2,00	0,00	0,0	0,03	4	0,50	0,04	0,0	0,00	0,95	0,95
16	NORM	20	19,98	0,02	1,0	0,02	4	0,05	0,01	1,0	0,01	0,69	0,70
17	NORM	2	2,00	0,00	0,0	0,04	10	1,25	0,26	0,4	0,10	0,20	0,30
18	NORM	2	1,98	0,02	0,4	0,05	10	1,25	0,29	0,8	0,23	0,47	0,70
19	LOGN	2	2,00	0,00	0,0	0,02	4	0,50	0,08	0,4	0,03	0,72	0,75
20	UNIF	2	1,99	0,00	1,0	0,01	4	0,50	0,06	0,7	0,04	0,71	0,75

Input paraméterek:

N = 20 H = 7 alfa = 2.0000 lambda = 0.70 kezd = 2.0 fact = 10.0 késl. sz. = 7
 Lambda várható értéke = 0.4688 szórásnégyzete = 0.0857
 Alfa várható értéke = 1.9844 szórásnégyzete = 0.0029
 Mintanagyság = 200



5. ábra. A 18. kísérlet eredménytáblája

telező konfidenciaintervallumhoz viszonyítva is. (Ezeknél a szórásnak kétszerese, illetve ötszöröse a konfidenciaintervallum sugara, bár ezek az intervallumok „biztosan” tartalmazzák a keresett paramétert.) A konfidenciaintervallumok biztos ismeretéhez természetesen sok, az alapbecslés tulajdonságait elemző kutatásra és Monte-Carlo kísérletre van még szükség.

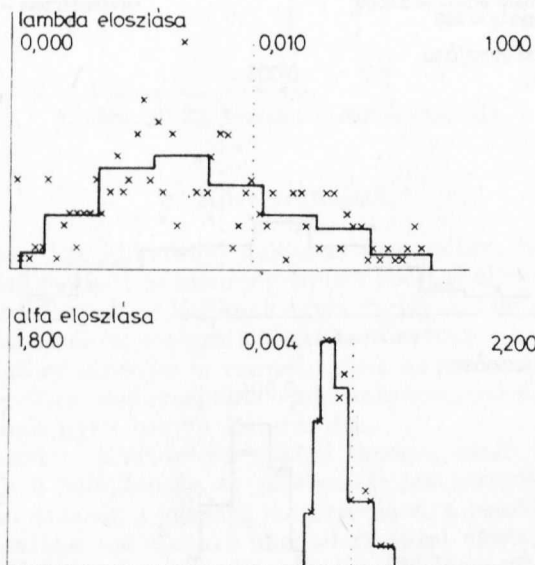
A 2. probléma az alapbecslésben rejlik, a bootstrap-változat nem enyhít rajta. Kedvező azonban az, hogy most fel lehet ismerni az ilyen eseteket (a véletlen változó dominanciáját, nagy relatív szórását), ugyanis ilyenkor a becslőfüggvény hisztogramja is diffúzzá válik, s a szórás meghaladja az átlagot. Helyes alkalmazás esetén tehát nem kell attól tartanunk, hogy csak a véletlen játéka befolyásolta becslésünket — a becslőfüggvény hisztogramja alapján minden ilyen eset kiszűrhető.

A 3. következtetést kísérleteim nem támasztják alá egyértelműen. Igen nagy λ esetén mutatható csak ki a $\hat{\lambda}$ szórásának és relatív torzításának csökkenése. A $\hat{\lambda}$ hisztogramja mindenesetre jól elkülöníthető λ nagyságától függően így következtetni lehet belőlük λ nagyságára. Mindazonáltal igaz, hogy ha λ szélsőségesen nagy, a $\hat{\lambda}$ becslőfüggvény tulajdonságai ugrásszerűen megjavulnak. Érdekes összehasonlítani a 3. kísérlet eredménytábláját (6. ábra) a 14. kísérlet táblájával (7. ábra).

A 4. következtetést a kísérletek minden tekintetben igazolták, s a bootstrap-becslés segítségével minden további nélkül adható konfidenciaintervallum α -ra. Természetesen hangsúlyozni kell, hogy α becslése a kisebb feladat. Meg-

Input paraméterek:

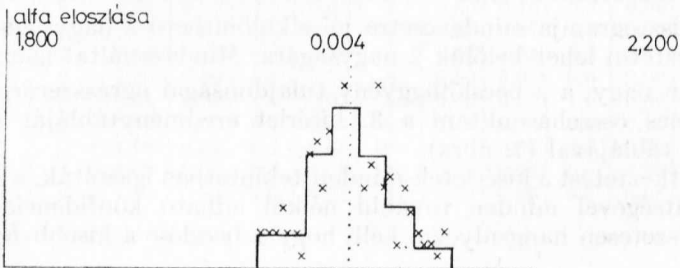
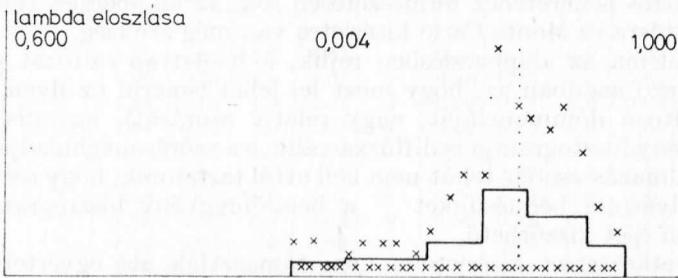
$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.35$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 4.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 λ várható értéke = 0.2656 $\text{szórásnégyzete} = 0.0186$
 α várható értéke = 1.9947 $\text{szórásnégyzete} = 0.0001$
 Mintanagyság = 200



6. ábra. A 3. kísérlet eredménytáblája

Input paraméterek:

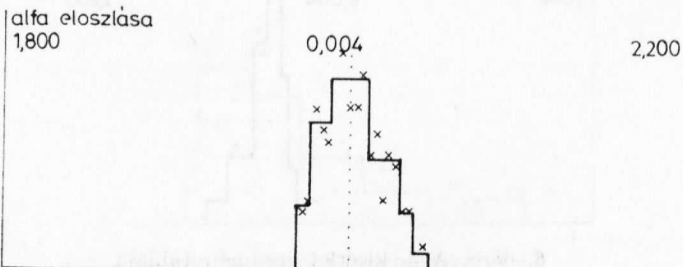
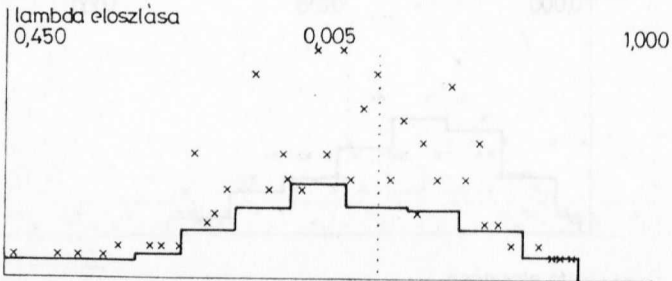
$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.90$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 4.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 Lambda várható értéke = 0.8943 szórásnégyzete = 0.0022
 Alfa várható értéke = 2.0019 szórásnégyzete = 0.0007
 Mintanagyság = 200



7. ábra. A 14. kísérlet eredménytáblája

Input paraméterek:

$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.75$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 1.4$ $\text{késl. sz.} = 7$
 Lambda várható értéke = 0.7238 szórásnégyzete = 0.0072
 Alfa várható értéke = 2.0060 szórásnégyzete = 0.0004
 Mintanagyság = 200



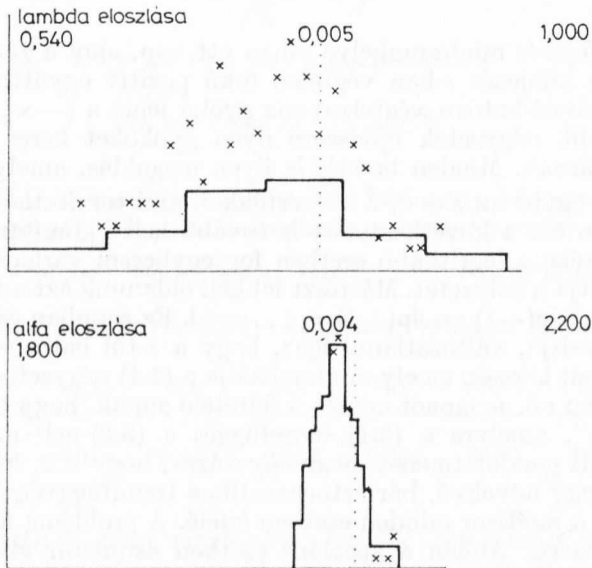
8. ábra. A 19. kísérlet eredménytáblája

jegyzendő még, hogy normális eloszlású véletlen változó esetén sem normális, sőt nem is szimmetrikus a becslőfüggvény eloszlása.

A becslés egy igen hasznos tulajdonságát is mutatják a kísérletek. A becslés eloszlásfüggetlennek tűnik, hiszen sem egy erősen ferde, sem egy „diffúz” eloszlású hibatag nem befolyásolta hátrányosan a becslés tulajdonságait. Az ábrákon lognormális, ill. egyenletes eloszlású véletlen változóval generált minta becslésének eredményei láthatók. A paraméterek értékei megegyeznek a 11. kísérletével (4. ábra).

Input paraméterek:

$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.75$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 8.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 Lambda várható értéke = 0.7062 szórásnégyzete = 0.0031
 Alfa várható értéke = 1.9912 szórásnégyzete = 0.0001
 Mintanagyság = 200



9. ábra. A 20. kísérlet eredménytáblája

3. Következtetések

A tanulmányban két különböző módszert kapcsoltam össze: a h -eloszlású osztott képlettesű modellt és scanning-típusú becslési eljárását a számítógépi intenzív becslési módszerek családjának egyik tagjával, a bootstrap-módszerrel. Az összekapcsolásnak és az elvégzett kísérletsorozatnak a közvetlen alkalmazhatóságon túlmenő eredményei is vannak. Ezek az eredmények módot adnak a két módszer sajátos tulajdonságainak jobb megismerésére. Egyúttal további indítékul szolgálnak ilyen irányú kutatásokra.

A h -eloszlású osztott képlettesű modell becslése során igen erős torzítást tapasztaltunk. Ez a tulajdonság az alkalmazás lehetőségeit rontja. Elméleti magyarázatra van szükség a jelenség megértéséhez, a becslőmódszer javításához. A magyarázathoz tekintsük a modellt (2.5)-tel ekvivalens felírását (az ekvivalenciát a modell származtatása alapján [7] bizonyítja):

$$q = \alpha[p(0) - \lambda \Delta p(0) - \lambda^2 \Delta p(-1) - \lambda^4 \Delta p(-2) - \dots] + u. \quad (3.1)$$

Tegyük fel a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy $\hat{\alpha} = \alpha = 1$, $\Delta p(0) = \Delta p(-1) = \Delta p(-2) = \dots = 1\Delta$, és hogy adott a $\lambda = \lambda + \varepsilon$ becslésünk. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{p} - 1\Delta(\lambda + \lambda^2 + \lambda^4 + \dots) + \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{p} - 1\Delta(\hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}^4 + \dots) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} = 1\Delta((\hat{\lambda} - \lambda) + (\hat{\lambda}^2 - \lambda^2) + (\hat{\lambda}^4 - \lambda^4) + \dots) + \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Ebbe behelyettesítve feltételezésünket és a kifejezés várható értékét számítva az adódik, hogy

$$E((\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})'(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})) = \sigma^2 + T\Delta^2(\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\lambda\varepsilon + \varepsilon^4 + 6\lambda^2\varepsilon^2 + 4\lambda\varepsilon^3 + \dots)^2 \quad (3.4)$$

A kapott kifejezés minimumhelye ε -ban ott van, ahol a zárójeles kifejezés értéke 0. Ez a kifejezés ε -ban végtelen fokú pozitív együtthatójú polinom, aminek (megszámlálhatóan végtelen) sok gyöke lehet a $(-\infty, 0]$ intervallumban. A legkisebb négyzetek módszere ilyen gyököket keres, és az egyiket tekinti megoldásnak. Minden becslés is ilyen megoldás, amely azonban csak véletlenül esik egybe az $\varepsilon = 0$, $\hat{\lambda} = \lambda$ értékkel, ami torzítatlan becslést adna.

A valóságban ezt a következtetést is tovább kell finomítani. Egyrészt, az \mathbf{u} mintabeli értéke a legritkább esetben fog egybeesni várható értékével. Ez tovább bonyolítja a helyzetet. Másrészt fel kell oldanunk azt a feltevést, amely szerint $\Delta p(0) = \Delta p(-1) = \Delta p(-2) = \dots = \Delta$. Ez azonban csak a számszerű értékeket módosítja, változatlanul igaz, hogy a λ -tól balra eső félegyenesen végtelen sok pont létezik, amely minimalizálja a (3.4) négyzetösszeget, feltéve, hogy p_i monoton nő. p_i monotonitása a feltétele annak, hogy található legyen olyan „átlagos”, amelyre a (3.1) összefüggés a (3.2)-nek megfelelő alakra hozható. A fenti gondolatmenet megmagyarázza, hogy a 2. fejezet kísérleteiben, ahol p_i -t egy növekvő, bár sztochasztikus trendfüggvénnyel generáltuk, miért torzított a módszer minden esetben lefelé. A probléma általános megoldása nem egyszerű. Abban a speciális esetben azonban, ahol p_i monoton, feltehetően érdemes a becslési eljárást oly módon bővíteni, hogy az ne csak egy minimumhelyet, hanem a minimumhelyek közül a legnagyobb $\hat{\lambda}$ -t keresse meg. Látható ugyanis, hogy $\varepsilon = 0$ éppen ezen becslésnél következik be.

A kísérletek alapján a modell becslésének másik sarkalatos pontja az, hogy mekkora a véletlen változó (relatív) szórása. A kísérletekben alkalmazott 0,5% kevésnek, a valóságban elő nem fordulónak, túlságosan „sterilnek” tekinthető. Erre a problémára is nyújt némi információt a modell alternatív levezetése.

A modell (2.3) képletében szereplő véletlen változó láthatóan a modellt előállító folyamattól független látens változó. Joggal feltételezhetjük, hogy ez az áralkalmazkodás folyamatában is jelen van. Speciálisan tegyük fel, hogy míg az információ terjedési folyamata során a népességnek egy adott (a terjedési folyamattal jellemzett) hányada képes viselkedését determinisztikus módon igazítani az árváltozáshoz, mivel az árváltozási információ birtokában van, addig a maradék hányad csak véletlenszerűen tudja viselkedését változtatni, információhiánya miatt. Képletben megfogalmazva: ha t_0 időpillanatban árváltozás következik be, egy $t > t_0$ időpillanatban a népesség z_t hányada rendelkezik az adott információval, és így a q_t kereslet ebben az időpontban

$$q_t = \alpha p_0 + \alpha z_t \Delta p + (1 - z_t) v_0, \quad (3.5)$$

ahol z_t -t a hólabda-folyamat generálja, és v_0 az (árváltozás időpontjához kapcsolható) véletlen változó, amelyre $E(v_0) = 0$, $E(v_0^2) = \omega^2$. Ebből levezethető a [7] tanulmányban követett módon a keresleti függvény:

$$q_t = \alpha(z_0 \Delta p_t + z_1 \Delta p_{t-1} + \dots + z_i \Delta p_{t-i} + \dots) + (1 - z_0)v_t + (1 - z_1)v_{t-1} + \dots + (1 - z_i)v_{t-i} + \dots \quad (3.6)$$

és az osztott késleltetésű modell, ami megegyezik a (2.3) formulával, azzal a lényeges különbséggel, hogy u_t nem 0 várható értékű, konstans szórású páronként korrelálatlan valószínűségi változó, hanem

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{(2^j)} v_{t-j}. \quad (3.7)$$

Ebből levezethető, hogy az u_t -k kovarianciamátrixa

$$E(u_t u_{t'}) = \omega^2 \lambda^{(2^{(t'-t)})} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{(2^j)} \quad (3.8)$$

alakú tagokból áll. A kifejezésben szereplő sor tagjai egy λ hányadosú mértani sorozat egy részsorozatát alkotják; a mértani sor konvergenciaértékéig így az itt szereplő sor is az $\frac{1}{1-\lambda}$ felülről becsli. A sort zárt alakban előállítani nem sikerült, különböző λ -k esetén közelítő értékét a következő táblázat tartalmazza:

λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lambda \sum_{j=1}^6 \lambda^{(2^j)}$	0,029	0,075	0,158	0,304	0,554	0,997	1,906

(3.9)

A táblázatból látszik, hogy megfelelően kis λ -k esetén az u_t σ szórása, így a relatív szórás is ω -hoz képest igen kicsiny lehet, tehát ezekben az esetekben a becslésnél nem lép fel a kellemetlen diffúz becselőfüggvény. Ugyanakkor a latens változók korreláltsága újabb problémát vet fel, amelynek súlyosságát vizsgálni kell. Szerencsére látható, hogy a \sum mátrix közelítően kvázidiagonális, ui. ha $(t' - t)$ kellően nagy, a kovariancia a $\lambda^{(2^{(t'-t)})}$ tag miatt elhanyagolhatóan kicsi.

A vizsgálat a bootstrap-módszer néhány érdekes tulajdonságát is megmutatta. Az egyik, hogy a bootstrap-becslés tulajdonságaira elég sok információt nyújtanak a Monte-Carlo vizsgálatok. A másik, hogy a módszer nem tudja az alapbecslés tulajdonságait alapvetően megváltoztatni: talán csökkenti a véges mintabeli torzítást, de nem szünteti meg az aszimptotikus torzítást.

A vizsgálat alapján tehát elmondható, hogy a számítógép-igényes becslési módszerek nem szüntetik meg az analitikus vizsgálatok szükségességét, éppen ellenkezőleg: használatukat könnyítik, biztosabbá teszik a nagyminta-tulajdonságok vagy a kisminta-tulajdonságok analitikus vagy Monte-Carlo vizsgálatának eredményei. Ugyanakkor ezeknek egyes erős elméleti előfeltevései nélkül is használhatóak.

(Beérkezett: 1985. augusztus 5-én.)

IRODALOM

1. AGUIRE-TORRES, V.-GALLANT, A. R.: The Null- and Non-null Asymptotic Distribution of the Cox Test for Multivariate Nonlinear Regression. (Alternatives and a New Distribution-Free Cox Test.) *Journal of Econometrics*, 21. 1983. 5—33.
2. Computer-Intensive Methods in Statistics. *Scientific American*, 1983. 05.: 96—100.
3. DIJKSTRA, T.: Some Comments on Maximum Likelihood and Partial Least Squares Methods. *Journal of Econometrics*, 22 1983. 67—70.
4. EFRON, B.: Bootstrap methods: Another Look at the Jackknife. *Annals of Statistics*, 7. 1979. 1—26.
5. ÉLTETŐ ÖDÖN—MESZÉNA GYÖRGY—ZIERMANN MARGIT: *Sztochasztikus módszerek és modellek*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
6. HUNYADI LÁSZLÓ: Egy terjedési folyamat elemzése: a hólabda modell. *Sigma*, XI. 1978.: 191—209.
- 7a. HUNYADI LÁSZLÓ: A h-eloszlású osztott késleltetési modell. Budapest, 1982. okt. OT. TgI. 751 (XVIII) 1983. (kézirat).
- 7b. HUNYADI LÁSZLÓ: Egy terjedési típusú osztott késleltetési modell. *Sigma*, XVII. 1984. 31—46.
8. JUDGE, G. G.—HILL, R. C.—GRIFFITHS, W.—LÜTKEPOHL, H. LEE, T.: *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. John Wiley & Sons, N. Y., 1982.
9. PAIZS JÁNOS: Paraméterbecslési módszerek kisminta-tulajdonságai és specifikációs hibákkal szembeni érzékenysége (kézirat) KSH Statisztikai és Matematikai Módszerek Közgazdasági Alkalmazásának Laboratóriuma. *Laboratóriumi Munkaanyagok*, 8. szám, Budapest, 1969.
10. PHILLIPS G. D. A.—McCABE B. P.: A Comparison of Several Jackknife-type Estimators and Other Bias-reduction Techniques Applied to Two Stage Least Squares Estimation of Simultaneous Equation Models. School of Economic Studies, University of Leeds, 1982. április (kézirat).

A COMPUTER-INTENSIVE ESTIMATION OF THE h -DISTRIBUTION MODEL WITH DISTRIBUTED LAGS

In our days the computer-intensive estimation procedures are gaining ground in the estimation theory of econometrics. The first part of the paper describes a few such models, as reflected by comparisons with the classic estimation procedures. The chapter also presents the necessity of the use of these methods, as well as the advantages and pitfalls of their use.

The h -distribution model with distributed lags improves the cumbersome economic interpretation possibilities of the models with distributed lags. But its application cannot yet be considered widespread, first of all because of estimation problems. By improving the properties of the original procedure with the aid of a computer-intensive method, the bootstrap-method, the model might hopefully become a useful instrument in practical econometric researches as well. The second chapter sums up the manner of transforming the estimation and the lessons of the experiments conducted. The third chapter explains earlier estimation results by giving a theoretical reason for biasedness. Through an alternative specification of the error term it shows that the use of the h -distribution model is not hopeless even in the case of an adjustment process with relatively large variance. In view of the experiments the relationship between the use of computer-intensive estimation procedures and the analysis of estimation properties is indicated.

ИНТЕНСИВНАЯ ОЦЕНКА ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МОДЕЛИ, ИМЕЮЩЕЙ h -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Вычислительные методы интенсивной оценки в настоящее время все шире распространяются в эконометрической теории оценок. В первой части статьи описано несколько таких методов в сравнении с классическими методами оценок. В этой главе показана необходимость, преимущества и трудности их применения.

Сложность экономической интерпретации запаздывающих распределенных моделей улучшается запаздывающей распределенной моделью, имеющей h -распределение. Однако их применение в первую очередь из-за проблематичность оценок, еще нельзя назвать общепринятыми. Можно надеяться, что вычислительный метод интенсивной оценки, свойства которого улучшаются с помощью метода bootstrap, станет полезным средством для практики эконометрических исследований.

Вторая глава статьи обобщает метод преобразования оценок и опыт проведенных исследований. Третья глава в качестве объяснения предыдущих результатов оценок демонстрирует теоретические причины неточности оценок. На основании альтернативной спецификации остаточного члена показано, что даже в случае относительно большой распределенности процесса не всегда безнадежно применение модели, имеющей h -распределение на основании проведенных исследований указывается связь между вычислительными методами интенсивной оценки и аналитическими исследованиями свойств оценок