

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

BOD PÉTER, PONGRÁCZ TIBOR, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

Szerkesztőbizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA, ÁBEL ISTVÁN, BOD PÉTER, ÉLTETŐ ÜDÖN (elnök), FORGÓ FERENC, HUNYADI LÁSZLÓ, KIRÁLY JÚLIA, KOVÁCS ÁLMOS, LIGETI ISTVÁN, MARTOS BÉLA, MESZÉNA GYÖRGY, MIKÓ GYULA, ORMÓS ZSOLT, SIMON ANDRÁS, SIMONOVITS ANDRÁS, SZAKOLCZAI GYÖRGY SZÉP JENŐ, VITA LÁSZLÓ, ZALAI ERNŐ, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

BAGDY GÁBOR, az Ipargazdasági Intézet tudományos munkatársa, BALOGH ALBERT, a matematikai tudományok kandidátusa, a Mikroelektronikai Vállalat fősztályvezető-helyettese, FLUCK ZSUZSANNA, az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjának főelőadója, KELLE PÉTER, az MTA SZTAKI tudományos osztályvezető-helyettese, KREKÓ BÉLA, a matematikai tudományok kandidátusa, a Marx K. Közgazdaságtudományi Egyetem tanára, LENGYEL IMRE, az MTA Regionális Kutatások Központja Alföldi Kutatócsoportjának tudományos segédmunkatársa, MÁTYÁS LÁSZLÓ, az OT Tervgazdasági Intézet tudományos ösztöndíjasa, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, OKUGUCHI KOJI, a tokiói Metropolitan Egyetem Közgazdasági tanszékének munkatársa, RACSKÓ PÉTER, az ELTE Számítóközpont munkatársa, SIMONOVITS ANDRÁS kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos főmunkatársa, SZIDAROVSKY FERENC, a műszaki tudományok doktora, az MKKE Matematikai és Számítástechnikai Intézet docense

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest V., József nádor tér 1., 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az *Akadémiai Kiadónál* (1363 Budapest, Alkotmány utca 21., tel.: 111-010) és az *Akadémiai Kiadó Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22., tel.: 185-881) és *Magiszter* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) könyvesboltjaiban. Előfizetési díj egy évre: 104,— Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149.

Növekedés, szabályozás és feszültségek egy nyitott szocialista gazdaságban

I. Bevezetés

Ez a dolgozat, akárcsak elődjei, KORNAI [1982] (rövidítve KJ) és KORNAI—SIMONOVITS [1983] (rövidítve KS) a kelet-európai szocialista országok növekedését, szabályozását és feszültségét elemzi. Mindhárom modell alapgon-dolata a következő: A feszültségek a készleteknek, a kapacitásoknak, a külső adósságnak stb. a függvényei. A rendszerben azért keletkeznek feszültségek, mert túlzott a beruházás és az import. A feszültségek viszont csökkentik a beruházási, a termelési és a külkereskedelmi hatékonyságot; és módosítják a tényleges beruházást, importot stb.

Megközelítésünkben a feszültségek nem szubjektív hibákból fakadó ideig-lenes jelenségek, hanem bizonyos gazdasági rendszerek állandó és fontos jel-lemzői. Elméleti következményként különös figyelmet szentelünk azoknak a növekedési pályáknak a vizsgálatára, amelyekre a *feszültség állandó*.

Az említett három dolgozat közös vonása, hogy a klasszikus *növekedésemé-letet* (lásd HARROD [1939], DOMAR [1957] és KALECKI [1982]) alkalmazza a *szocialista gazdaság leíró-magyarázó elméletére* (lásd pl. KORNAI [1980]).¹ (E megközelítést bírálja DLOUHY [1984] és különösen DLOUHY—KLAUS [1985].)

A három dolgozat a közös elméleti keret mellett különböző feltevéseket és egyszerűsítéseket alkalmaz. KJ nagy hangsúlyt helyezett a *késleltetések* mo-dellezésére (pl. amelyek a beruházási folyamatban jelentkeznek), de elhanya-golta a csökkenő hatékonyság és növekvő beruházási hányad *hosszú távú* irány-zatait. KS és a jelen dolgozat viszont a késleltetéseket hanyagolja el, de nagy szerepet biztosít az említett hosszú távú változásoknak.

Természetesen vannak különbségek KS és a jelen dolgozat között is. KJ-höz hasonlóan KS egy *zárt* gazdaságot vizsgál, és annak belső struktúráját meglehetősen részletesen elemzi. Ezzel ellentétben a jelen dolgozat egy *nyitott* gazdaságot modellez, és elhanyagol bizonyos belső összefüggéseket. (Részletes összehasonlítást a 9. lábjegyzet tartalmaz.)

A zárt modellek alkotói maguk is kiemelték modelljeik „kinyitásának” a fontosságát, de jobbnak vélték a kutatást zárt modellel indítani. KS 260—261. o. érvelése szerint a külkereskedelem bevezetése . . . „feleslegesen meg-terhelne az első expozíciót” és „emellett kívánatos is, hogy a probléma vizs-gálatát olyan modellel kezdjük, amely a beruházási folyamatra összpontosítja a figyelmet, mert itt van a szocialista gazdaság működésében és növekedésé-ben tapasztalható szabályosságok magyarázatának a magva”.

¹További hivatkozásokat tartalmaz KORNAI [1982] és KS.

A nyitott modell előnyei a zárttal szemben nyilvánvalóak, különösen egy olyan kis ország esetén, mint amilyen Magyarország. A modell közelebb kerül a valósághoz (esetünkben Magyarországhoz), és alkalmassá válik arra, hogy segítségével elemezzük azt a fontos kérdést is, hogyan oszlik meg a feszültség a belső és a külső szféra közt (lásd BAUER [1981], KORNAI [1980] és LACKÓ [1980]).

Láttuk tehát, hogy mindhárom modell nagyon megszorító feltevéseket volt kénytelen alkalmazni. Ennek ellenére a modelleket csak részben tudtuk *analitikusan* vizsgálni, s kiegészítő eszközként számítógépes *szimulációhoz* kellett folyamodnunk.

Félreértést elkerülendő megjegyezzük, hogy a három modell egyike sem volt ökonometriai modell. A paramétereket nem *becsültük*, hanem intuitíve *választottuk*. Elméleti modelljeink hosszú távú kérdésekre összpontosítottak, és számos olyan rövid távú problémát figyelmen kívül hagytak, amelyek nélkülözhetetlenek az ökonometriai modellezéshez. A létező ökonometriai modellek pl. BURKETT és tsai [1981], HEWETT [1980], MARRESE [1981] és PORTES – WINTER [1980] éppen emiatt alkalmatlanok céljainkra.

Reméljük, hogy az alkalmazott numerikus modell *ad hoc* jellege ellenére szimulációnk hozzájárul a kutatási terület jobb megértéséhez. Egyébként hasonló módszert alkalmazott KAPITÁNY [1981] és NGUYEN – TURNOVSKY [1983], akik bizonyos „minőségi jellegű” állítások bizonyítására *elméleti szimulációt* végeztek.

A Bevezetés végére érve körvonalazzuk a dolgozat szerkezetét. A 2. fejezet a modell magvát tartalmazza, és ismerteti a dolgozat fő analitikus eredményét: a feszültség vektor dinamikáját a többi hányadosváltozó függvényében. A 3. fejezet a modell lezárásával foglalkozik. Ismertetjük a reakció-függvényeket, amelyek a szabályozhatatlan és szabályozható változókat az idő és a feszültségek függvényében adják meg. Öt egymással versengő stratégiát vezetünk be, amelyek a feszültségek elosztásában különböznek egymástól.

A 4. fejezetben beszámolunk az *alaphalmazzal* végzett szimulációról. Először a numerikus adatokat ismertetjük, majd a szimuláció eredményeit mutatjuk be. A fő minőségi megállapítás a következő: *erőltetett beruházás növekvő feszültségek mellett nem kifizetődő*.

Az 5. fejezet a *módosított paraméterekkel* végzett futásokat ismerteti, melyek segítségével megvizsgálhatjuk a 4. fejezetben kapott eredmények *érzékenységét*. Figyelembe véve dolgozatunk elméleti jellegét, elméletileg érdekes speciális eseteket vizsgáltunk (pl. az egzogen beruházási hányad állandó, a kamatláb változatlan stb.). Néha a kapott eredmények csupán mennyiségi információt nyújtottak egy minőségileg nyilvánvaló tényről, például arról, hány százalékkal nőtt volna a fogyasztás az alapfutáshoz képest, ha az egzogen beruházási hatékonyság nem csökkent volna. Más esetekben azonban meglepő következtetések adódtak (pl. ha a kamatláb meredek emelkedése elmaradt volna, a D stratégia fogyasztása akkor is alig emelkedett volna az alapfutáshoz képest, mert a relatíve csökkenő adósságteher nem kényszerítette volna ki a beruházási hányad csökkenését).

A *Függelék* egy bizonyítást tartalmaz.

Köszönetnyilvánítás. Külön köszönettel tartozom Kornai Jánosnak, aki a témakörben mint kutatótársát vezetett be. Mély hálával tartozom John Burkettnek egy rokonmodell ökonometriai elemzéséért és a dolgozat egy korábbi változatáról szóló mélyreható bírálatáért. Halpern László, Kapitány Zsuzsa,

Király Júlia, Kőrösi Gábor, Lackó Mária, Martos Béla és Vincze János értékes tanácsaikkal támogattak a dolgozat írása folyamán. Természetesen minden felelősség engem terhel a dolgozatban maradó bármely hibáért.

2. A modell magva

2.1. Alapfeltevések

Itt csak felsoroljuk az alapfeltevéseket, (részletes indoklást KJ tartalmaz). A további speciális feltevéseket a modell leírásakor ismertetjük.

1. Létezik egyetlen egy *homogén* makro-termék, amely exportálható és importálható, továbbá termelhető, fogyasztható és raktározható.

2. a) A *hazai* termék ára rögzített és állandó; b) az *import* és az *export* ár időben változhat.

3. a) A pénznek nincs explicit szerepe a gazdaság *belső* szférájában, b) automatikus hitelemechanizmus biztosítja a *külkereskedelmi* hiteligenyek finanszírozását.

4. Egyetlen termelési tényező van: a beruházás által létrehozott állóeszköz. A munka és a műszaki haladás nem játszik explicit szerepet a modellben.

5. Az idő diszkrét változó, s a modell paraméterei folytonosan differenciálható függvények.

6. Egyszerű késleltetés érvényesül bizonyos folyamatokban.

Megjegyzések: (i) Néhány feltevés, mint pl. a homogenitás és a folytonosság, megszóktak az irodalomban. A szocialista gazdaságban azonban a homogenitási feltevés kevésbé elfogadható, mint a kapitalista gazdaságban, mivel széleskörűek a hiányok (vö. KORNAI [1980]), és megosztott a külső piac (lásd HEWETT [1980]). Végül, az áru és a szolgáltatás aggregálása eltorzítja a beruházási hatékonyság mutatóját (lásd AUGUSZTINOVICS [1981b]).

(ii) Más feltevések, pl. a rögzített hazai árak és a pénz nélküli gazdaság, első látásra sokkolhatják az olvasót. Ezek a feltevések azonban nemcsak egyszerűsítő technikai eszközök, hanem visszatükrözik a pénz gyenge szerepét a szocialista gazdaság termelési és beruházási döntési szférájában.

2.2. Változók²

A rövidség kedvéért a t változót gyakran elhagyjuk, s a késleltetett (vagy sítettett) változót a -1 (ill. a $+1$) alsó indexszel különböztetjük meg.

V = készlet. Technikai okokból a készlet hagyományos kategóriáját két részre osztjuk; nevezetesen *input*- és *output* készletre. Kizárólag az utóbbit fogjuk készletnek tekinteni, míg az első változó növekményét a beruházás kategóriájába soroljuk.

Y = nettó kibocsátás, vagy egyszerűen kibocsátás.

C = fogyasztás.

² Jelölési elveink: Abszolút mennyiségeket latin nagy betűk jelölnek, relatív mennyiségeket a megfelelő latin kisbetűk. Egzozón, illetve szabályozási értékeket a megfelelő tényleges értékektől \sim -mal különböztetünk meg. További részleteket a megfelelő pontokon közlünk.

$I = \text{beruházás}$. A készletnél mondottakkal összhangban, állóeszközök és inputkészletek felhalmozása alkotja a beruházást. E ráfordítások egy év késséssel növelik a kibocsátást.

$B = \text{kibocsátási növekmény}$.

$A = a \text{ nemzeti jövedelem belső felhasználása}$.

$M = \text{importvolumen}$.

$X = \text{exportvolumen}$.

$q = \text{importár(index)}$.

$p = \text{exportár(index)}$.

$r = \text{nemzetközi kamatláb}$.

$W = \text{külső adósság}$, pontosabban: fölhalmozott külkereskedelmi deficit.

Megjegyzések: A 2. feltevéssel összhangban, V, Y, A, C, I, B, X és M állandó hazai áron van mérve, r mértékegysége 1/év, s a fennmaradó p, q és W nemzeti valutában van mérve (azaz folyó áron).

2.3. A modell azonosságai

Bevezetvén a modell változóit, rátérünk a modell azonosságainak az ismertetésére.

Mérlegegyenletek

Belső felhasználás:

$$A = Y + M - X. \quad (1)$$

Készletváltozás:

$$\Delta V = Y - I - C - X + M. \quad (2)$$

Kibocsátási növekmény:

$$\Delta Y = B. \quad (3)$$

Külső adósság változása:

$$\Delta W = rW - pX + qM. \quad (4)$$

Hányadosváltók

A fenti változók bizonyos hányadosai fontos szerephez jutnak modellünkben. Egyelőre elnevezésüket és képletüket soroljuk fel:

Készlet per kibocsátás hányados³:

$$v = V/Y_{-1}. \quad (5)$$

Beruházási hatékonyság:

$$b = B/I. \quad (6)$$

Beruházási hányad:

$$i = I/A. \quad (7)$$

Fogyasztási hányad:

$$c = C/A. \quad (8)$$

³ Későbbi egyenletek matematikai egyszerűsége érdekében a szokásos készletforgási sebességet (lásd pl. KS) reciprokával helyettesítjük.

Külső adósság per export hányad:

$$w = W/p_{-1}X_{-1}. \quad (9)$$

Export (volumen) hányad:

$$x = X/A. \quad (10)$$

Import(volumen)hányad:

$$m = M/A. \quad (11)$$

Belső felhasználás aránya (a nemzeti jövedelemben):

$$a = A/Y = 1/(1 - m + x). \quad (12)$$

2.4. Alapegyenletek

Célszerű lesz megszabadulni az eredeti abszolút változóktól, s dinamikus egyenleteinket relatív változók (hányadosváltozók) segítségével kifejezni. Új egyenleteinket *alapegyenleteknek* fogjuk nevezni.

A kibocsátás *növekedési ütemét* g -vel jelöljük:

$$g = Y/Y_{-1} - 1. \quad (13)$$

A Harrod–Domar képlet⁴ szerint

$$g = b_{-1}i_{-1}a_{-1} > 0. \quad (14)$$

Most már közölhetjük az *alapegyenleteinket*:

$$v_{+1} = \frac{v}{\gamma} + (1 - i - c)a, \text{ ahol } \gamma = g + 1, \quad (15)$$

és

$$w_{+1} = \frac{\varrho p_{-1}a_{-1}x_{-1}}{\gamma p a x} w + \frac{q m}{p x} - 1, \text{ ahol } \varrho = r + 1.5 \quad (16)$$

Lemma: A (15)–(16) egyenletek a modell azonosságai, melyek elvivalensek (2)-vel és (4)-gyel.

Bizonyítás: lásd a Függeléket.

Megjegyzés: Miután levezettük az alapegyenleteket, teljesítettük első feladatunkat: megtaláltuk azt az egyenletrendszert, amelyben kizárólag hányadosváltozók szerepelnek.

⁴ Mind a matematikai kezelhetőség, mind a közgazdasági logika a következő feltevést indokolja: egy adott év beruházási ráfordítása a következő év kibocsátását növeli arányosan.

⁵ A w dinamikáját FILATOV—MATTIONE [1985] egy sokkal egyszerűbb modellben elemezte.

3. A modell lezárása

3.1. Reakciófüggvények

A klasszikus növekedésmélethez b , p , q , i , c , x és m értékét rögzítjük, s ezáltal (15)–(16) két, egymástól független lineáris egyenletre bomlana. Ekkor v_t és w_t dinamikáját könnyen lehetne elemezni: a *stacionárius* (vagy normális, ill. egyensúlyi) \bar{v} és \bar{w} állapotpár meghatározásán túl a következő egyszerű stabilitási feltétel adódna: $r < g$, azaz a kamatláb legyen alacsonyabb, mint a növekedési ütem. Ez a megoldás azonban alig segítene a szocialista gazdaság jelenlegi komplex problémáinak a megértésében.

KJ-t és KS-t követve mi is föltesszük, hogy a szóban forgó hányadosváltozók nem állandóak, hanem az idő, v és w függvényei. Mielőtt azonban definiálnánk a *reakciófüggvényeket*, némi magyarázattal szolgálunk.

Már a Bevezetésben hangsúlyoztuk, hogy megközelítésünk központi eleme a feszültségekre való reakció.

Feszültségek

Modellünkbe két feszültségváltozót vezetünk be: $1/v$ legyen a belső feszültség (röviden: BF) mutatója, míg w a külső feszültségé (röviden: KF). Valóban, normális körülmények között minél nagyobb $1/v$ értéke, annál gyorsabb az outputkészletek forgása, amely a hiány nagyobb valószínűségét sejteti. Hasonlóan, minél nagyobb w , a külső adósságnak az exporthoz viszonyított értéke, annál valószínűbb a fizetéseképtelenség bekövetkezése.⁶

Az egyszerűség kedvéért más feszültségmutatók — pl. a kapacitáskihasználás, vagy a beruházási kötelezettség relatív értéke (melyeket KJ és KS alkalmazott), mint BF, sem a konvertibilis valutatartalék relatív értéke, mint KF — nem szerepelnek a modellben.

Szabályozott és szabályozatlan változók

A feszültségvektor és a hányadosváltozók közti kölcsönhatás leírásakor a hányadosváltozókat két csoportra osztjuk: (i) *szabályozatlan változók* csoportja: beruházási hatékonyság, export- és import ár, kamatláb; valamint (ii) *szabályozott változók* csoportja: beruházási-, fogyasztási-, export- és importhányad.⁷ Mint később látni fogjuk, ez a felosztás csupán feltételes, s mint ilyent, nem kell túlzottan komolyan venni.

A továbbiakban föltesszük, hogy a szabályozatlan változók késés nélkül reagálnak a feszültségekre, míg a szabályozott változók egyéves késéssel. De mi a reakciók iránya?

⁶ Feltevésünk meglehetősen leegyszerűsített. Valójában w magas értéke jelezhet egy pusztán időleges eladósodást, amelyet egy sikeres exportoffenzíva követ. (Úgyanakkor ne felejtjük el, hogy a ma fizetéseképtelen országok mindegyike hajdanán ezt az érvet használta!) Hasonlóan, v alacsony értéke a kínálat nagyon hatékony megszervezését is jelezheti, ugyanakkor v magas értéke hatalmas eladhatatlan árutömeget is takarhat. De outputkészletekre összpontosítva ezek a torzítások kevésbé jelentősek, mint ha a teljes készletet tekintenénk.

⁷ KJ-ban és KS-ben hasonló különbséget tettünk *reál-* és *szabályozási* változók között. Bevezetvén azonban az árakat és a kamatot, a felosztás érvényét veszti, hiszen árváltozóink sem nem reál-, sem nem szabályozási változók.

Valószínűsíthető, hogy a feszültségeknek negatív (vagy nulla) hatásuk van minden szabályozatlan változóra. Feltesszük, hogy a beruházási hatékonyság és az exportár reagál, míg az importár és a kamatláb nem reagál a feszültségekre.

Bonyolultabb a helyzet a szabályozott változókkal. Feltételezhető, hogy a beruházási-, a fogyasztási- és az exporthányad negatívan reagál a belső feszültségre, míg az importhányad pozitívan. Hasonlóan feltesszük, hogy a beruházási- és az importhányad negatívan, míg a fogyasztási- és exporthányad pozitívan reagál a külső feszültségre.

Időben változó függvények

Eddig szót sem ejtettünk arról, hogy az idő nem csak a feszültségváltozáson keresztül hathat a többi hányadosváltozóra, hanem közvetlenül is. S valóban, a gazdasági valóság ismeretében célszerű fölteni, hogy a reakciófüggvények időben változó függvények. Például Magyarországon a beruházási hatékonyság és a cserearány romlását csak részben okozták a fokozódó belső és külső feszültségek, más részük egzogén okok következménye volt. Azt mondhatnánk, hogy az osztrák cserearányromlást kizárólag egzogén tényezők okozták, s a magyar és az osztrák romlás közti különbség vezethető vissza a megnövekedett magyar feszültségekre.

Hasonló megkülönböztetés érvényesíthető a szabályozott változóknál: a beruházási hányad értéke kis és nagy feszültségnél is megegyezhetett, mert a beruházási hányad *szabályozási értéke* megváltozott.

Specifikálva az időben változó reakciófüggvényeket, a következő feltevésekkel élünk: mindegyik reakciófüggvény három tényező szorzata: 1. az egzogén vagy szabályozási értéknek nevezett időfüggvényé, 2. a belső feszültség függvényé és 3. a külső feszültség függvényé.

Célszerű, ha a változó és az időfüggvény dimenziója megegyezik. Ezt a leggyorsabbban úgy valósíthatjuk meg, ha a feszültségváltozók standardizálva vannak. Tegyük hát föl az időben változatlan *cél-feszültségek* létezését (jelöljük: $1/\bar{v}$ és \bar{w}), és definiáljuk a *relatív feszültségeket* a következőképpen:

$$\frac{1}{\hat{v}} = \frac{\bar{v}}{v} \quad \text{és} \quad \hat{w} = \frac{w}{\bar{w}}. \quad (17)$$

A feszültségfüggvények legyenek a relatív feszültségek hatványfüggvényei. Ily módon a kitevők *rugalmassági* együtthatók lesznek; pl. $\varepsilon_{p,w}$ lesz az exportár rugalmassága a (relatív) külső feszültségre vonatkozóan. (Megemlítjük, hogy az abszolút és a relatív feszültségre vonatkozó elaszticitások egymással azonosak.)

Összegezve:

$$u = F^{(u)} \hat{v}^{\varepsilon_{u,v}} \bar{w}^{\varepsilon_{u,w}}, \quad (18)$$

ahol $\tau = 0$ a szabályozatlan változóknál, míg $\tau = 1$ a szabályozott változóknál. (Figyeljük meg, hogy $1/\hat{v}$ helyett \hat{v} -t írva, a rugalmassági együttható előjele megváltozik!)

Szükségünk lesz még a következő feltevésre. A kezdeti feszültségek egyenlőek a cél-feszültségekkel:

$$v_0 = \bar{v} \quad \text{és} \quad w_0 = \bar{w}. \quad (19)$$

Ekkor az *állandó feszültségű* (röviden ÁF) pályát u és $F^{(u)}$ egyenlősége jellemzi.

További egyszerűsítő feltevésünk a következő. Mindegyik időfüggvény alakja:

$$F_t(\tilde{u}_0, \tilde{u}_\infty, s_{\tilde{u}}) = \tilde{u}_\infty + (\tilde{u}_0 - \tilde{u}_\infty) s_{\tilde{u}}^t, \quad (20)$$

ahol $0 < s_{\tilde{u}} < 1$.

Könnyen belátható, hogy $F_0(\tilde{u}_0, \tilde{u}_\infty, s_{\tilde{u}}) = \tilde{u}_0$, $F_\infty(\tilde{u}_0, \tilde{u}_\infty, s_{\tilde{u}}) = \tilde{u}_\infty$ és F_t nő (csökken), ha $\tilde{u}_0 < \tilde{u}_\infty$ (vagy $\tilde{u}_0 > \tilde{u}_\infty$).

Mielőtt ismertetnénk a reakcióegyenleteinket, két módosításról kell szólnunk:

(i) A beruházási hatékonyság függ még a beruházási hányadtól is, pontosabban $(ia/\bar{i}\bar{a})^{\varepsilon_{bi}}$ -től, ahol $ia = I/Y$ és \bar{i}, \bar{a} az i és a változók cél-értékei. Valóban, a neoklasszikus közgazdaságtanban (lásd PHELPS [1961]) a beruházási hatékonyság fordítottan arányos a beruházási hányaddal, függetlenül téve a növekedési ütemet a beruházási hányadtól: $\varepsilon_{bi} = -1$. Ezzel szemben a keynesi gazdaságtan szerint a beruházási hatékonyság független a beruházási hányadtól: $\varepsilon_{bi} = 0$. Megfogalmazásunk a fenti két esetet mint szélső eseteket foglalja magában. Vegyük figyelembe, hogy (14)-gyel összhangban a beruházási hatékonyság nem I/A -tól, hanem I/Y -tól függ.

(ii) Az importhányad függ még a beruházási- és a fogyasztási hányad súlyozott átlagától — $(i + q_c c)/(i + q_c \bar{c})$ -től — is, hiszen a beruházás importigénye különbözik a fogyasztásától, az előbbi jóval nagyobb mint az utóbbi.

Végül még egy egyszerűsítéssel élünk: megkerülve a külkereskedelmi árak helyes mérésének a problematikáját,⁸ önkényesen rögzítjük az importárakat. Ekkor az exportár egyenlővé válik a *cserearány*val (amelyet z -vel jelölünk), a névleges kamatláb pedig a reálkamatlábbal.

Most már tényleg ismertethetjük a reakcióegyenleteinket.

Reakcióegyenletek

Beruházási hatékonyság:

$$b = F(\tilde{b}_0, \tilde{b}_\infty, s_{\tilde{b}}) \hat{v}^{\varepsilon_{b,i}} \hat{v}^{\varepsilon_{b,v}} \hat{w}^{\varepsilon_{b,w}}, \quad (21)$$

Importár:

$$q = 1 \quad (22)$$

Exportár (cserearányok):

$$p = F(\tilde{p}_0, \tilde{p}_\infty, s_{\tilde{p}}) \hat{v}^{\varepsilon_{p,v}} \hat{w}^{\varepsilon_{p,w}} \quad (23)$$

Reálkamatláb:

$$r = F(r_0, r_\infty, s_r) \quad (24)$$

Beruházási hányad:

$$i = F(\tilde{i}_0, \tilde{i}_\infty, s_{\tilde{i}}) \hat{v}^{\varepsilon_{i,v}} \hat{w}^{\varepsilon_{i,w}} \quad (25)$$

Fogyasztási hányad:

$$c = F(\tilde{c}_0, \tilde{c}_\infty, s_{\tilde{c}}) \hat{v}^{\varepsilon_{c,v}} \hat{w}^{\varepsilon_{c,w}} \quad (26)$$

Exporthányad:

$$x = F(\tilde{x}_0, \tilde{x}_\infty, s_{\tilde{x}}) \hat{v}^{\varepsilon_{x,v}} \hat{w}^{\varepsilon_{x,w}} \quad (27)$$

⁸ A külkereskedelmi adatok definíciója a lehető legzavarosabb probléma Magyarországon és más szocialista országokban. A hivatalos adatokat forintban adják meg, amely nem konvertibilis valuta. Tehát a közzétett folyó külkereskedelmi mérleg nem túl releváns. Az igazán hasznos adat a dollárban megadott adósságállomány lenne, de még ezt az adatot is torzítaná a mesterséges dollár/rubel átváltási kulcs alkalmazása. Egy megfelelő megoldás a két külkereskedelmi szféra adatainak elválasztását követelné meg.

Importhányad:

$$m = F(\tilde{m}_0, \tilde{m}_\infty, s_{\tilde{m}}) \frac{i + \varphi_c c}{i + \varphi_c \bar{c}} \hat{v}_{-1}^{\varepsilon_{m,r}} \hat{w}_{-1}^{\varepsilon_{m,qc}} \quad (28)$$

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy modellünk *rekurzív*, és bármely paraméteregyüttes mellett egyetlen egy megoldása van. Valóban, v_{-1} , v , w_{-1} , w meghatározza a b , q , p , r , i , c , m , x együttest [lásd a (21)–(28) egyenleteket]. Hozzávéve más predeterminált változókat (p_{-1} , m_{-1} , x_{-1}) v_{+1} és w_{+1} is meghatározva [lásd (15)–(16)].⁹

3.2. Állandó belső- és külső feszültségű stratégiák

A 3.1. pontban egyetlen stratégiát definiáltunk (melyet S_E -vel fogunk jelezni) négy szabályozási értékpálya megadásával. Most vizsgat olyan stratégiákat keresünk, amelyek részben *endogén* módon vannak meghatározva (jelzésük: S_A , S_B , S_C és S_D). Olyan stratégiákat szemelünk ki, amelyek *állandó belső feszültséget* (röviden: ÁBF), illetve *állandó külső feszültséget* (röviden: ÁKF) biztosítanak. Az előző tulajdonságú stratégiák jele: S_A , S_B , S_D ; az utóbbiak jele S_A , S_B , és S_C . Az *állandó* (külső és belső) *feszültségű* (röviden ÁF) pályát tehát S_A és S_B biztosítja. Az ÁF-pályák vizsgálatának ötlete KS-től származik, de AUGUSZTINOVICS [1981a] tanulmánya szintén endogén módon meghatározott stratégiákat hasonlít össze, hasonló közgazdaságtani mondani-
valóval.

Mostantól kezdve a tényleges fogyasztási hányadot, c -t tekintjük az ÁBF-et biztosító *szabályozási változónak*, míg a tényleges exporthányadot, x -et az ÁKF-et biztosító szabályozási változónak (képletüket lásd alább: (26*) és (27*), (29). (PORTES [1979] alternatív megoldást javasolt.)

(15)-ből és a $v_{+1} = v = \bar{v}$ definícióból az ÁBF-et biztosító döntés a következő:

$$c = 1 - i - \bar{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{a}. \quad (26^*)$$

Hasonló módon, (16)-ből és a $w_{+1} = w = \bar{w}$ definícióból, valamint (12)-ből adódik az ÁKF-et biztosító döntés:

$$x = \frac{n(1 - m) + \frac{qm}{p}}{1 + \bar{w} - n}, \quad (27^*)$$

⁹ Bár a Bevezetésben már érintettük a KS és a jelen dolgozat bizonyos eltéréseit, célszerűnek látszik kiegészíteni a különbségek listáját. (i) KS-ben a nettó kibocsátás (Y) mellett szerepelt a bruttó kibocsátás (X), sőt, A -val jelzett különbségük is, A/X -et a -val jelöltük, s e mennyiségről föltettük, hogy csökkenő függvénye a Z hiányindikátornak: $a = a(Z)$. (ii) Ellentétben a jelen dolgozattal (és KORNAI [1982]-vel), KS különbséget tett a kibocsátás (X) és a kapacitás (K) között. (iii) A hiányindikátor a $k = X/K$ kapacitáskihasználásának és v -nek (pontosabban $1/v$ -nek) függvényeként van értelmezve: $Z = Z(k, v)$. Mivel k szintén függ v -től, Z kifejezhető mint v függvénye: $Z = Z[v]$. Végül v lévén az egyetlen *független* állapotváltozó, minden ciklikus mozgás ki van zárva. (iv) A $Z[v]$ hiányindikátor, bár használatra vonzó, helyettesítéssel kiküszöbölhető; pl. $i(Z)$ és $Z[v]$ együtt $i\{v\} = i\{Z[v]\}$ -hez vezet. (v) Feltéve, hogy $px = qm$, visszakapjuk KS zárt modelljét. (vi) KS-ben az *exogén*, ill. szabályozási értékek a *hiánymentes gazdaságra* jellemző szélső értékek, míg nálunk az ÁF-gel értelmezett értékek.

ahol

$$n = \frac{\rho p_{-1} x_{-1} a_{-1}}{p\gamma} \bar{w}. \quad (29)$$

Megjegyzések: 1. Az analitikus elemzés egyik legfontosabb eredménye: időben változó paraméterű rendszerben is létezhet működőképessé állandó feszültségű pálya; a gazdaság olyan állapota, amelyben a walrasi egyensúlytól (a nulla feszültségtől) való eltérés „foka” állandósult.

2. A beruházási hányadot olyan szabályozási változóként is definiálhatnánk, amelyik állandó növekedési ütemet biztosítana, de ez a megoldás feleslegesen bonyolítaná a modellt.

3. Az ÁF-stratégiák bevezetésénél (26*) lép (26) helyébe, (27*) és (29) helyettesíti (27)-et. Most a fogyasztási- és az exporthányad szabályozási értékét határozza meg a tényleges fogyasztási- és exporthányad; nem pedig fordítva. A sorrend-felcserélés egyetlen hátulütője az, hogy a kiszámított szabályozási értékek nem elégítik ki (20)-at. Később látni fogjuk, hogy ez a probléma a gyakorlatban jól kezelhető.

4. Föltesszük, hogy először az importhányadot számítjuk ki a belső igények alapján (28), majd az exporthányadot határozzuk meg (27*) és (29) alapján. Ez a leegyszerűsítés elfogadható volt a második olajárrobbanásig, de 1980-tól kezdve a lépések sorrendje megváltozott: az export határozza meg az importot, s az import határozza meg (korlátozza be) a beruházást és a fogyasztást Magyarországon.

Most formálisan is definiáljuk az *A*-, *B*-, *C*-, *D*- és *E* stratégiákat.

Az *A*-stratégia egy ÁF-stratégia. Ragaszkodik a kezdeti beruházási hányadhoz, elfogadja a növekedési ütem hanyatlását. (26*)-ból sejthető, hogy a kialakuló fogyasztási hányad alig változik, *m* és *x* dinamikája azonban már túl bonyolult ahhoz, hogy analitikusan elemezhető legyen.

A *B*-stratégia szintén egy ÁF-stratégia, azonban megpróbálja föltartóztatni a lassulást a beruházási hányad emelésével. (26*) alapján a fogyasztási hányad csökkenése nagyjából azonos a beruházási hányad növekedésével.

A kibocsátás gyorsabban fog nőni, mint S_A -nál; de a fogyasztás lemarad c_A -tól.

A *C*-, *D*-, és *E*-stratégiák egyike sem ÁF-stratégia, mivel az S_B ambiciózus beruházási hányada lesz a megfelelő szabályozási érték, és vagy (i) az S_A állandó fogyasztási hányada, vagy (ii) egy lassan növekvő exporthányad lesz a megfelelő szabályozási változó; mindkét megoldás növekvő feszültséget idéz elő.

A *C*-stratégia egy ÁKF-stratégia, ahol az exporthányad (27*)–(29)-ből származik, míg a fogyasztási hányad szabályozási értéke állandó, nevezetesen c_0^C . Nyilvánvaló, hogy a BF nőni fog, ha nem is feltétlenül monoton módon.

A *D*-stratégia, lévén S_C tükörképe, egy ÁBF-stratégia. A tényleges fogyasztási hányadot (26*)-ból vesszük, s az exporthányad szabályozási értékét S_E -ből. (Szebb megoldás lenne, ha x_t^A lenne \tilde{x}_t^D , azonban ez a megoldás nem adna elegendően nagy adósságot.) Nyilvánvalóan a KF nőni fog, ha visszaesésekkel tarkítva is.

Az *E*-stratégia a 3.1. pontban tárgyalt stratégia, egzogen módon meghatározott szabályozási változókkal. De úgy is kifejezhetjük magunkat, hogy S_E az S_C -nek és S_D -nek a kombinációja: a fogyasztási hányad szabályozási értéke \tilde{c}^C , míg az exporthányad szabályozási értéke \tilde{x}^D . Mind BF, mind KF növekedni fog — hullámvázásokkal tarkítva.

Miután definiáltuk mind az öt stratégiát, a modell ismertetésének a végére értünk. Modellünk bonyolultsága miatt a továbbiakban számítógépes szimulációra lesz szükség, hogy részletesebb információkhoz jussunk.

4. A versengő stratégiák szimulációja

4.1. Ökonometriai és elméleti szimuláció

Miután specifikáltuk a modellt, felvetődik a kérdés: Verifikálható-e modellünk a standard ökonometriai módszerekkel, mondjuk Magyarországra? Mint a Bevezetésben megemlítettük, a válasz nemleges. A modell alapfeltevései túl megszorítóak, fontos egzogen változók teljesen el vannak hanyagolva vagy túlzottan le vannak egyszerűsítve. Így hát a nemleges válasz nem meglepő. BURKETT és SIMONOVITS [1985] megpróbálták megszabadulni bizonyos leegyszerűsítésektől, de a módosított modell még mindig nem volt megfelelő. Ezért be kell érniünk egy meglehetősen *ad hoc* numerikus modellel.

Természetesen egy *ad hoc* modellel végzett elméleti szimuláció sokkal kevésbé megbízható eredményeket ad, mint egy megfelelően verifikált ökonometriai modell. Mindazonáltal elméleti szimulációnk az előző analitikus eredmények hasznos kiegészítője lehet, ha megfelelő óvatossággal kezeljük a kapott eredményeket.

Az alapfutás (az 1. futás) együtthatóit tartalmazza az 1. táblázat.

Az együtthatók jelentése eléggé egyszerű, mivel legtöbbjük dimenzió nélküli szám. Például $b_0 = 0,3$ azt mondja nekünk, hogy a beruházási volumen egységnyi növelése a 0. időszakban 0,3 egységgel növeli majd a kibocsátást az 1. időszakban. Hadd hozzunk egy másik példát is: $\varepsilon_{i,w} = -0,5$ azt jelenti,

1. táblázat

Az alapadatok

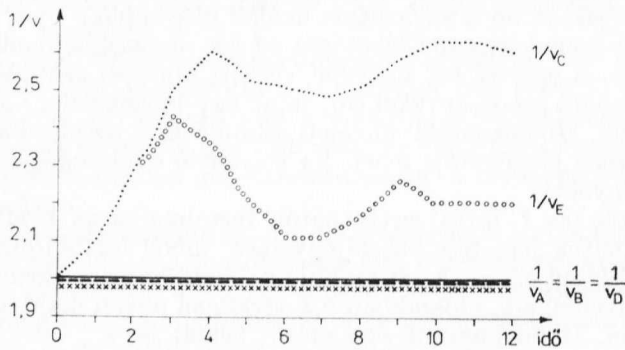
Változó u	Növekedési együttható	Predeter- minált	Kezdő	Aszimpto- tikus	Rugalmasságok		
	értékek				i	v	w
	$S_{\bar{u}}$	u_{-1}	u_0	\bar{u}_{∞}	$\varepsilon_{u,i}$	$\varepsilon_{u,v}$	$\varepsilon_{u,w}$
\bar{b}	0,9	0,313	0,3	0,18	-0,5	2,0	-0,6
r	0,9		0,03	0,12			
q	1		1	1			
\bar{p}	0,825	1,012	1	0,9		0,1	-0,1
\bar{i}	0,75	0,23 ^a	0,23	0,33		0,75	-0,5
\bar{z}	1	0,737	0,737	0,737		0,1	0,1
m	0,9		0,404	0,634		-0,1	-0,1
\bar{x}	0,9	0,38 ^b	0,394	0,52		0,2	0,2
t	—	—	0	12			
v, \bar{v}			0,5				
w, \bar{w}			0,4				

Megjegyzések a) $i_{-1}a_{-1}$
 b) $x_{-1}a_{-1}$
 c) $\varphi_c = 0,4$

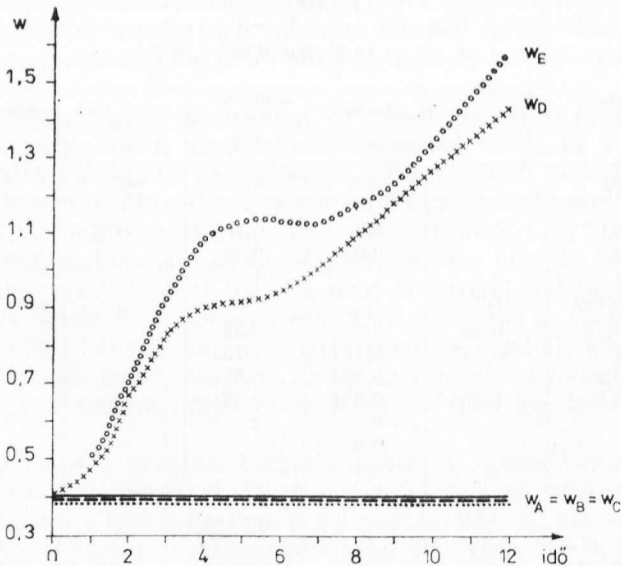
hogy a t időszak KF-ének 1%-os növekedésére a $(t + 1)$ -edik időszak beruházási hányada 0,5%-kal fog csökkenni a szabályozási változóhoz képest.

Adatbázisunk szerkesztésénél az elmúlt „évtized” (1970–1982) Magyarországot próbáltuk másolni, de a felesleges bonyodalmak nélkül (pl. elhagytuk az export- és az importárak pontos leírását). Pontosabban szólva, arra törekedtünk, hogy — amennyire csak lehet — S_D tükrözze a magyar fejlődést, különösen a hosszú távú hatásokat. Például mind S_D -nél, mind Magyarországon a szóban forgó időszakban a növekedési ütem $2/3$ -ával csökkent, az export-hányad (változatlan áron mérve) egyre nőtt, az importhányad pedig stagnált (később visszaesett). A valósággal való számos egyezés ellenére modellünk a tiszta elmélet síkján marad.

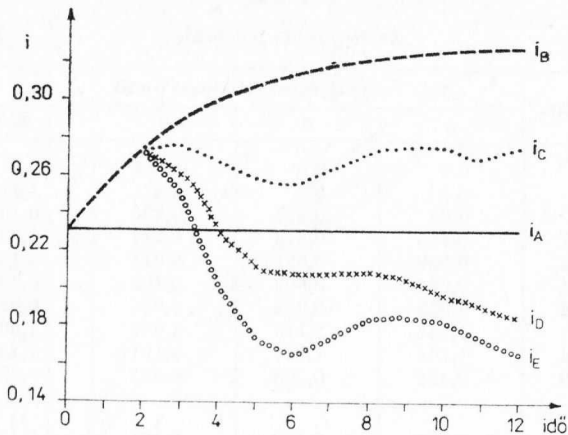
Számos paraméterünk lévén, számos más paraméterhalmaz is hasonló növekedési mintát származtathat S_D -re, mint az alaphalmaz. Mi biztosítja, hogy a többi négy stratégia nem viselkedik teljesen másként ezeknél az adathalmazoknál?



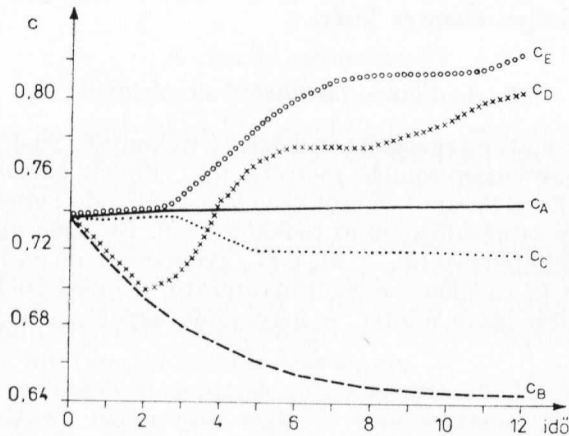
1. ábra. A belső feszültség



2. ábra. A külső feszültség



3. ábra. A beruházási hányad



4. ábra. A fogyasztási hányad

Megismételhetnénk a szimulációt sztochasztikusan perturbált adatokkal, mint KAPITÁNY [1981] és NGUYEN—TURNOVSKY [1983]. Előnyben részesítjük azonban az elméletileg érdekes *kitüntetett* esetek vizsgálatát az 5. fejezetben (egyébként ez a megoldás is szerepel kiegészítésként NGUYEN—TURNOVSKY [1983]-ban).

4.2. A növekedési pályák elemzése és összehasonlítása

Befejeztük a numerikus modell felállítását. A számítógépes program elkészítése semmiféle nehézséget nem jelent. El kell döntenünk, hogy milyen számok érdekesek a számunkra. Elkerülendő az információ-özönt, kizárólag a legfontosabb változók grafikonját (1–8. ábra) mutatjuk be. A 13 változó kezdeti és végértékeit a 2. táblázat mutatja be.

2. táblázat

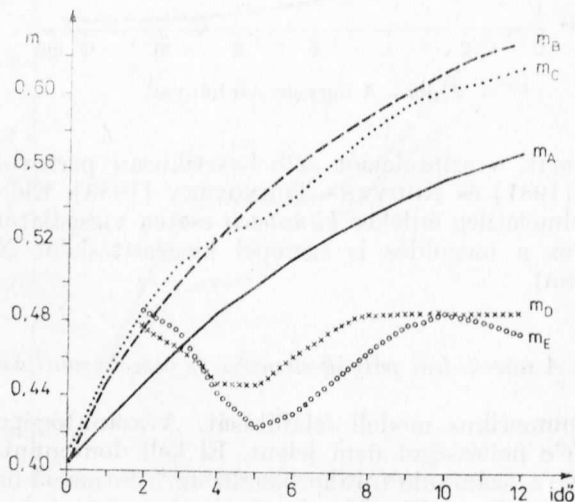
Az alapfutás jellemzői

Változó	Kezdő értékek	Az egyes stratégiák végső értékei				
		A	B	C	D	E
v	0,5	0,5	0,5	0,384	0,5	0,454
w	0,4	0,4	0,4	0,4	1,417	1,569
i	0,23	0,23	0,327	0,266	0,184	0,166
c	0,737	0,745	0,644	0,717	0,804	0,824
m	0,404	0,569	0,631	0,613	0,484	0,476
x	0,394	0,634	0,699	0,709	0,609	0,605
g	0,072	0,049	0,058	0,030	0,022	0,017
Y	1,0	1,948	2,119	1,682	1,605	1,470
C	0,744	1,364	1,277	1,101	1,146	1,073
W	0,159	0,422	0,505	0,385	0,993	0,979
b_{-1}	0,313	0,224	0,189	0,121	0,127	0,106
z	1,0	0,910	0,910	0,885	0,806	0,792

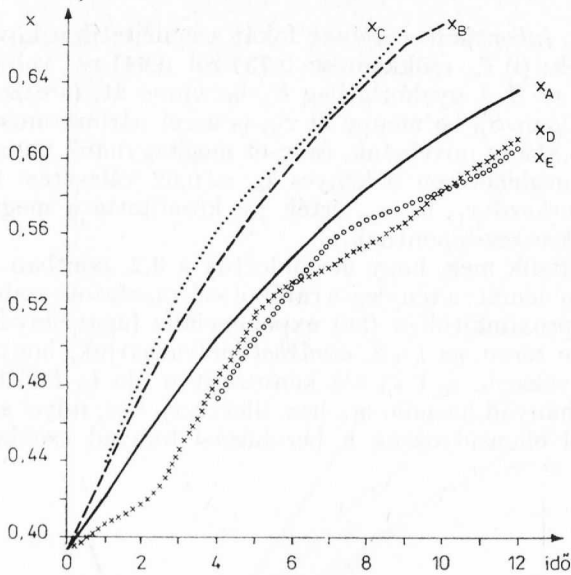
Az ábrákat szöveges elemzés kíséri.

4.3. Az állandó feszültségű stratégiákról

A) S_A -nál 13 év alatt az egzogén beruházási hatékonyság 28,4%-kal csökken, míg az egzogén cserearányromlás mértéke 9%. Ennek ellenére, v , w , i és (gyakorlatilag) c állandó marad. A csökkenő b és az állandó i eredményeképpen a növekedési ütem is párhuzamosan csökken b -vel. Egzogén módon növekvő importhányadot feltételezve ($\tilde{m}_0 < \tilde{m}_\infty$), m_A gyorsan nő, de x_A -nak még gyorsabban kell nőnie (a csökkenő cserearánymutató, a növekvő kamatláb és a csökkenő növekedési ütem miatt). A fogyasztás lassabban nő, mint a kibo-



5. ábra. Az import hányad



6. ábra Az export hányad

csátás, hiszen a nemzeti jövedelem meghaladja a belső felhasználást. A legdrámaibb fejlemény: az adósságállomány értéke több mint négyszeresére nő.

B) S_B -nél a beruházási hányad meredeken nő ($i_{12}^B = 0,327$ szemben $i_0 = 0,23$ -dal és a fogyasztási hányad meredeken csökken ($c_{12}^B = 0,644$ -re $c_0 = 0,737$ -ről). Az erőltetett beruházás hatására a beruházási hatékonyság gyorsabban csökken, mint S_A -nál (39,4%-kal 28,4%-kal szemben, de a növekedési ütem jelentősen felülmúlja S_A -ét ($g_{12}^B = 0,058$, $g_{12}^A = 0,049$). Mivel a beruházások relatív importigénye 2,5-szer nagyobb, mint a fogyasztásé, m_B sokkal gyorsabban nő, mint m_A ; s hasonló igaz x_B -re.

S_A és S_B összevetésénél az alapkérdés a következő: Megtérül-e a termelés gyorsabb növelése a fogyasztás nagyobb volumenében? Mint azt a 8. ábra mutatja, modellünkben az erőltetett beruházás nem tojik aranytojásokat,¹⁰ C_B mindvégig jelentősen C_A alatt marad.¹¹ Még az időszak végén is az előbbi 6%-kal alacsonyabb, mint az utóbbi. Sőt mi több, a megnövelt termelés és import miatt az adósságállomány 20%-kal meghaladja W_{13}^A -at.

4.4. A változó feszültségű stratégiákról

Mielőtt rátérnénk S_C elemzésére, néhány általános megjegyzést teszünk a nem ÁF-stratégiákról. Ezeknél a stratégiáknál b és z csökkenésének mind egzogen, mind endogen okai vannak. A növekedő feszültségek csökkentik b -t és z -t, ez viszont tovább növeli a feszültséget.

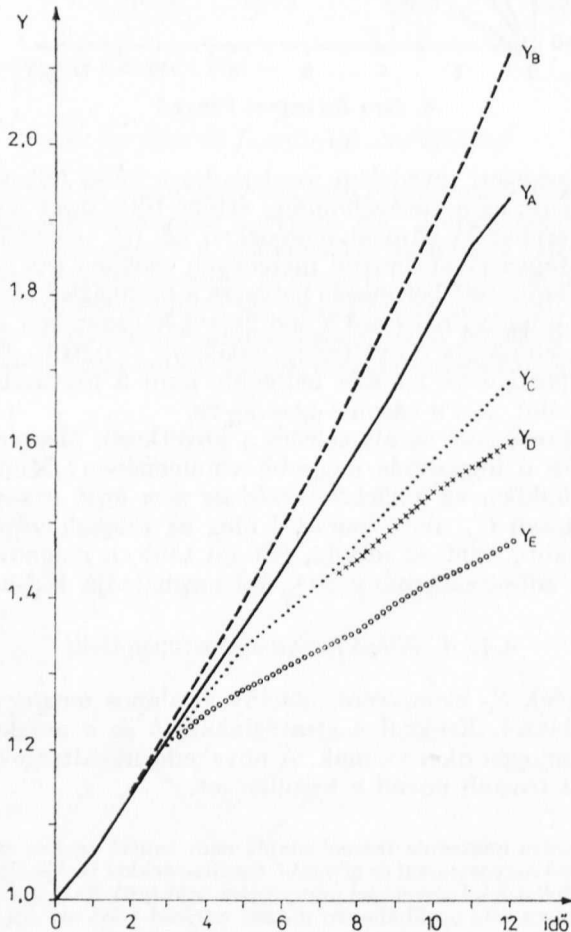
¹⁰ A korai szocialista iparosítás frazeológiáját nem ismerő olvasó számára megemlítjük, hogy a csökkenő fogyasztással és növekvő feszültségekkel járó erőltetett beruházások politikájának ellenfeleit képletesen „az aranytojást tojó tyúk levágásával” vádolták.

¹¹ Itt és a 6. futásban az optimális beruházási hányad kérdését érintjük. E téma legnevezetesebb elemzése PHELPS [1961] érdeme, de az ő modellje nagymértékben különbözik a jelen modelltől.

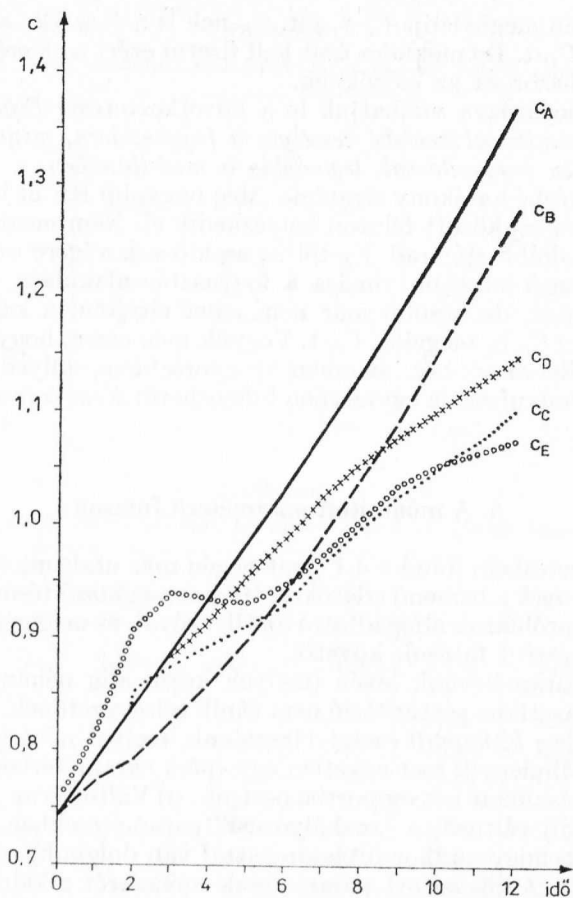
Az S_C , S_D és S_E inkonzisztenciájának fokát szemléltetik a következő szám-szerű megfigyelések: (i) \tilde{c}_∞ csökkentése 0,737-ről 0,641-re, valamint s_z csökkentése 1-ről 0,75-re S_C -t gyakorlatilag S_B -be vinné át, (s ezzel együtt S_E -t S_D -be). (ii) Hasonlóan S_B -be menne át S_D (s ezzel párhuzamosan S_C -be S_E), ha \tilde{x}_∞ -t 0,52-ről 0,819-re növelnénk, és s_x -et meghagynánk 0,9-nek. (Már említettük, hogy a meglehetősen önkényes $\tilde{x}_\infty = 0,52$ választást az indokolta, hogy ekkor a keletkező x_{12} és w_{13} érték jól közelítette a megfelelő magyar adatot, 1970-et véve kezdőpontnak.)

Végül hadd említsük meg, hogy megoldottuk a 3.2. pontban a 3. megjegyzésben említett problémát: a tényleges rátából származtatott szabályozási rátát jó közelítéssel approximáltuk a (20) exponenciális függvényvel.

C) S_C elemzésére térve, az 1–8. ábrákból leolvashatjuk, hogy a BF enyhe oszcillációkkal növekszik, i_C -t i_B alá kényszerítve (de i_A fölött hagyva). Az import- és exporthányad hasonló m_B -hez, illetve x_B -hez, mivel a fokozódó BF hatását nagyjából ellensúlyozzák a beruházási hányad csökkenéséből és a



7. kibábra A oc-átás



8. ábra. A fogyasztás

cserearányromlásból származó hatások. A kibocsátás és a fogyasztás mind jobban elmarad az S_A -értékektől; a $t = 12$ időszakban az elmaradás már 13,7%, illetve 19,3%. Sőt, C_B is felülmúlja C_C -t $t > 6$ -nál. Az összehasonlítás mondanivalója meglehetősen egyszerű: Az erőltetett beruházás különösen rossz hatékonyságú, ha a fogyasztási hányad szabályozási értékét nem csökkentik a kellő időben és a kellő mértékben.

D) S_D elemzése következik; azé a stratégiáé, amelyet a magyar fejlődés durva képviselőjének választottunk. S_D legjellemzőbb vonása a KF állandó növekedése ($w_{13}^D = 3,54 w_0$), s ez i_D -t nemcsak i_B , hanem i_A alá is kényszeríti. Egyenes következmény: az importhányad szintén m_A alá süllyed. A cserearány egzogen romlását ($z_{12}^A = 0,91$) most endogén romlás is kíséri ($z_{12}^D = 0,806$), ezért a megtermelt és a felhasznált nemzeti jövedelem különbsége egyre nő: ($x_{12} - m_{12}$) értéke 0,065 S_A -nál, 0,068 S_B -nél, 0,096 S_C -nél és 0,125 S_D -nél.

b_D dinamikája hasonló b_C -éhez, s a kibocsátási pálya némileg elmarad Y_C -től (az időszak végén az eltérés kb. 5%). A 8. ábrán látható, hogy C_D egyenle-

tesen és jelentősen meghaladja C_C -t, sőt, C_B -nek is 8 évre van szüksége ahhoz, hogy megelőzze C_D -t. De mekkora árat kell fizetni ezért a sikerért: az adósság-állomány 2–2,6-szorosa az előzőknek.

Most csak tapogatózva vonhatjuk le a következtetést: *Erőltetett növekedés gyenge exportdinamikával kevésbé veszélyes a fogyasztásra, mint erőltetett növekedés ellenőrizetlen fogyasztással, legalábbis a modellünkben.*

E) S_E a legkevésbé hatékony stratégia. Még nagyobb KF-et halmoz föl mint S_D , s BF-je w_A és w_C között félúton helyezkedik el. Nem meglepő, hogy a kibocsátás egyre inkább elmarad Y_D -tól is, az időszak végére a különbség eléri a 8,4%-ot. S_E legérdekesebb vonása a fogyasztás alakulása. Eleinte C_E ragyogó képet mutat, de később már nem lehet elrejtetni a kalandor politika gyengeségét: még C_C is megelőzi C_E -t. Vegyük még észre, hogy z_E és w_E közel marad z_D -hez, illetve w_D -hez, azonban b_E gyorsabban süllyed, mint b_D .

A történet mondanivalója egyszerűen kifejezhető: *Nem érdemes feszültségeket felhalmozni.*

5. A módosított paraméterű futások

Mind a Bevezetésben, mind a 4.1 pont végén már utaltunk arra, hogy eredményeink *érzékenyek* a bemenő adatokra. *Ad hoc* megközelítésünket mint elméleti szimulációt próbáltuk elfogadtatni az Olvasóval, és megígértük, hogy alapfutásunkat kiegészítő futások követik.

Több tucat paraméterünk lévén (melyek közül alig néhány irreleváns), a szokásos sztochasztikus perturbáció nem tűnik célravezetőnek. Inkább néhány elméletileg érdekes *küüntetett* esetet vizsgálunk, melyet néhány önkényes módosítás követ. Mindegyik eset egyetlen (pár) paraméterben különbözik az alapesettől. Futásainkat két csoportba osztjuk: (i) Változás az „egzogen” paraméterekben és (ii) változás a „szabályozási” paraméterekben.

Megjegyezzük, hogy amikor futássorozattal van dolgunk, célszerűtlen lenne a 4. 4-ben említett kiigazított paraméterek módszerét alkalmazni.

5.1. Változások az „egzogen” paraméterekben

Ebben a pontban a következő paramétereket fogjuk rögzíteni: a beruházási hatékonyságot, a cserearányromlást, és a kamatlábat.

2. *Futás. Állandó egzogen beruházási hatékonyság* $\tilde{b}_\infty = \tilde{b}_0$. Mivel KS és a jelen dolgozat egyik fő újítása a csökkenő egzogen beruházási hatékonyság bevezetése volt, egy természetes módosítás e változás „visszacsinálása”.

A modellünk szerkezete miatt a *növekedési ütem és az abszolút mutatók jelentősen emelkednek az alapfutáshoz képest, míg a hányadosváltozók* (a növekedési ütem kivételével) *változatlanok maradnak*. A stratégiáknál mutatkozó javulások nem arányosak, de a stratégiák rangsora változatlan marad. A 3. és 4. táblázat tartalmazza a kibocsátási és a fogyasztási teljesítményeket mind az öt stratégiára és összesen hét futásra.

3. *Futás. Állandó egzogen cserearány*: $\tilde{z}_\infty = 1$. Nyilvánvaló, hogy a cserearányok alakulása fontos szerepet játszik minden nyitott modellben. Vízmértékül szolgál az a hipotetikus eset, amikor az egzogen cserearányok — ahelyett, hogy mint az 1. futásban 9%-kal esnének 13 év alatt — időben állandóak maradnak.

3. táblázat

Az A–E stratégiák záró kibocsátása az 1–7. futásokban

Stratégia \ Futás	A	B	C	D	E
1	1,948	2,119	1,682	1,605	1,47
2 ($\tilde{b} \rightarrow$)	2,205	2,443	1,817	1,708	1,548
3 ($z \rightarrow$)	1,967	2,144	1,694	1,708	1,526
4 ($r \rightarrow$)	1,953	2,125	1,684	1,638	1,493
5 ($\tilde{i} \nearrow$)	—	2,034	1,807	1,607	1,574
6 ($\varepsilon_i \uparrow$)	—	—	1,745	1,598	1,634
7 ($\varepsilon_m \uparrow$)	—	—	1,682	1,657	1,5

4. táblázat

Az A–E stratégiák záró fogyasztása az 1–7. futásokban

Stratégia \ Futás	A	B	C	D	E
1	1,364	1,277	1,101	1,146	1,073
2 ($\tilde{b} \rightarrow$)	1,533	1,457	1,188	1,231	1,130
3 ($z \rightarrow$)	1,458	1,377	1,177	1,243	1,144
4 ($r \rightarrow$)	1,388	1,301	1,120	1,183	1,107
5 ($\tilde{i} \nearrow$)	—	1,325	1,219	1,182	1,153
6 ($\varepsilon_i \uparrow$)	—	—	1,182	1,224	1,082
7 ($\varepsilon_m \uparrow$)	—	—	1,099	1,15	1,079

Megjegyzés: \rightarrow változatlan, \nearrow időben növekvő, \uparrow ugorva növekvő

Mint várható, most az endogén módon meghatározott exporthányadok (S_A -nál, S_B -nél és S_C -nél) jóval kisebbek, mint az alapfutásban: pl. S_A esetében éppen 9%-kal, a régi a cserearányromlás mértékével. Viszont az exporthányadnak egzogén módon meghatározott és ezért változatlan szabályozási értéke — állandó cserearány mellett — jelentősen csökkenti a KF-t, pl. w_{13}^D -at az alapfutáshoz képest 25%-kal.

Most a külsőleg kiegyensúlyozatlan stratégiák látványosabb javulást indukálnak, mint az ÁKF stratégiák. Például a 3. táblázat szerint a cserearányromlás „megszüntetése” semmi javulást nem hoz az utóbbiaknál, míg az S_D -nél és S_E -nél mutatkozó javulások imponálóak. A 4. táblázat összetettebb képet tár elénk: C_{12} az 1. és a 2. futás közti értékek átlaga körül van S_A -nál és S_B -nél, míg a 2. futásbeli értékekkel egyenlő a változó feszültségű stratégiáknál: S_C -nél, S_D -nél és S_E -nél.

4. Futás. Állandó kamatláb: $r_\infty = r_0$. A legutóbbi évtizedben a modern gazdaságtörténet legmagasabb reálkamatlábait figyelhettük meg. Ez a tény különleges hangsúlyt ad következő kérdésünknek: Mi történt volna, ha a kamatlábak változatlanul alacsonyak maradtak volna?

Nos, ez a hipotetikus „változás” nem javította volna meg annyira a gazdaság teljesítményét, mint amennyire azt képzelnénk. *A javulás különösen szerény maradna az ÁKF-stratégiáknál, 1–2%-körüli alakulván.* De még a külsőleg kiegyensúlyozatlan S_D -nél is az egyetlen nevezetes változás KF-ben és az adósságállományban következik be: 16%-os csökkenés. De a termelés vagy a fogyasztás itt sem javul 2%-nál jobban. (E meglepő jelenség magyarázatát már a Bevezetésben megadtuk.)

5.2. Változások a szabályozási paraméterekben

Ebben a pontban a következő paramétereket változtatjuk meg: a beruházási hányad szabályozási értékét, a beruházási hányad és az importhányad rugalmasságát.

5. *Futás.* A beruházási hányad szabályozási értéke mérsékelte: $\tilde{i}_\infty^B = 1/2(\tilde{i}_\infty^A + \tilde{i}_\infty^B) = 0,28$. Ebben a futásban megvizsgáljuk: mi történik, ha az \tilde{i} kulcsváltozó aszimptotikus értékét az (alapfutás) \tilde{i}_∞^A és \tilde{i}_∞^B értékének az átlagára csökkentjük? Nyilvánvaló, hogy a módosítás nem érinti S_A -t.

A modell sajátos szerkezete miatt S_B (és S_C) minden változója gyakorlatilag megegyezik S_A és S_B (ill. S_C) megfelelő változójának átlagával. Így a feszültség és a kibocsátás a módosított S_B és S_C mellett lassabban, míg a fogyasztás gyorsabban nő, mint az alapfutásokban. S_D -nél a javulás egyenlőtlen: KF 10,5%-kal csökken, a fogyasztás 3,1%-kal nő, míg a kibocsátás nem változik az alapfutáshoz képest. Végül megemlítjük, hogy S_E annyira megjavul, hogy szinte felzárkózik S_D -hez.

Összegezve: *A túlzottan ambiciózus beruházási célok visszafogása mindegyik stratégiánál előnyös.*

Megjegyzések: 1. Vizsgáltuk még a fogyasztási célok csökkentésének hatását (S_C -re és S_E -re), de helyszűke miatt a vizsgálat ismertetésétől eltekintünk.

2. A hátralévő két futásban a beruházási- és fogyasztási hányad rugalmasságát módosítjuk, s ez csupán S_C -t, S_D -t és S_E -t érinti.

6. *Futás.* *Rugalmasabb beruházási visszacsatolás:* $\varepsilon_i = 2\bar{\varepsilon}_i$. Mivel a beruházási hányad modellünk kulcsváltozója, nagyon fontos megvizsgálni, hogy miképpen függ e változó a feszültségvektortól. *A priori* tudjuk, hogy minél nagyobbak a feszültségek, annál fontosabb szerepet játszanak a visszacsatolási paraméterek.

Válasszunk kétszer akkora abszolút értékű visszacsatolási paramétereket, mint az alapfutásban. Egyrészt a visszacsatolás erősítése elősegíti a gazdaság hosszú távú alkalmazkodását, másrészt olyan nagy ingadozásokhoz vezet, hogy némely abszolút változó is csökken: pl. $C_9^E = 1,304$, míg $C_{12}^E = 1,157$.

Most S_E nem értékelhető az időszak végi teljesítménnyel. S_C és S_D teljesítménye viszont jelentősen javul: ez utóbbinál a KF 24,4%-kal csökken, míg a fogyasztás 6,8%-kal több mint az alapfutásban.

7. *Futás.* *Rugalmasabb import-visszacsatolás:* $\varepsilon_m = 2\bar{\varepsilon}_m$. Végül az importhányad rugalmassági együtthatóit kettőzzük meg. S_C változatlan marad, míg S_D és S_E teljesítménye javul: Bár a fogyasztás stagnál, a kibocsátás 3,2%-kal nő, az adósságállomány pedig 23%-kal csökken az alapfutáshoz képest.

A 6. és a 7. futás azt sugallja, hogy *az adaptivitás fontosabb a stabilitásnál, legalábbis gyorsan változó körülmények között.*

Függelék: az alapegyenletek levezetése

(15)-öt levezetendő, a $V_{+1} = V + [1 - (i + c + x - m)a]Y$ egyenletből (lásd (1), (2), (7), (8), (10) és (11)) indulunk ki. Y -nal osztva az egyenletet, és felhasználva az $1 - (i + c + x - m)a = (1 - i - c)a$, összefüggést, a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{V_{+1}}{Y} = \frac{V}{Y} + (1 - i - c)a.$$

Figyelembe véve v és γ definícióját, (15)-höz jutunk.

(16) levezetése hasonlít (15)-éhez. Most a $W_{+1} = \varrho W + qM - pX$ egyenletből indulunk ki, amelyet pX -szel végigosztunk és átrendezünk:

$$\frac{W_{+1}}{pX} = \frac{\varrho W}{p_{-1} X_{-1}} \frac{p_{-1} X_{-1}}{pX} + \frac{qM}{pX} - 1.$$

Figyelembe véve w definícióját, valamint $X_{-1} = a_{-1}x_{-1}Y/\gamma$ és $X = axY$ azonosságokat, (16)-hoz jutunk.

(Beérkezett: 1986. február 27-én.)

IRODALOM

1. AUGUSZTINOVICS M.: A gazdasági növekedés üteme Magyarországon (1950–2000), *Közgazdasági Szemle*, 28. évf. (1981a) 523–539. o.
2. AUGUSZTINOVICS M.: A makrostruktúra változása Magyarországon (1950–2000), *Közgazdasági Szemle*, 28. évf. (1981b) 1026–1043. o.
3. BAUER T.: *Tervegazdaság, beruházás, ciklusok*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó, (1981).
4. BURKETT, J., PORTES, R.—WINTER, D.: Macroeconomic Adjustment and Foreign Trade in Centrally Planned Economies, *NBER Working Paper*, 736, (1981).
5. BURKETT, J.—SIMONOVITS, A.: Quantity Adjustments and Growth in an Open Economy: The Hungarian Case, *kézirat* (Kingston, R. I. — Budapest), (1985).
6. DLOUHÝ, V.—KLAUS, V.: Kornai-üv pokus o makroekonomii (Kornai kísérlete a makroökonómiairól) *Politická ekonomika*, 33. évf. (1985) 623–634. o. (csehül).
7. DLOUHÝ, V.: On the Problem of Macroeconomic Equilibrium and Disequilibrium in Centrally Planned Economies, *Ekonomicko-matematičky obzor*, (1984).
8. DOMAR, E. D.: *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford, University Press, (1957).
9. FILATOV, V. S.—MATTIONE, R. P.: Latin America's Recovery from Debt Problems: An Assessment of Model Based Projections, *Journal of Policy Modeling*, 7. évf. (1985) 491–524. o.
10. HARRÓD, R.: An Essay in Dynamic Theory, *Economic Journal*, 49. évf (1939) 14–33. o.
11. HEWETT, E.: A Macroeconometric Model of a Centrally Planned Economy with Endogenous Plans: The Hungarian Case, *kézirat*, University of Texas at Austin, (1980).
12. KALECKI, M.: *A szocialista gazdaság működéséről*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó, (1982)
13. KAPITÁNY Zs.: A döntés bizonytalansága: szimulációs vizsgálat, KORNAI—MARTOS (szerk.) *Szabályozás árjelzés nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó, (1981) 225–242. o.
14. KORNAI J.: *A hiány* Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó, (1980).
15. KORNAI J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó, (1982).
16. KORNAI J.—SIMONOVITS A.: Egy makronövekedési modell tulajdonságairól, *Szigma*, 15. évf. (1983) 133–147. o.
17. LACKÓ M.: Feszültségek felhalmozása és leépítése. A magyar beruházási ciklus alakulásának egyszerű modellje, *Közgazdasági Szemle*, 27. évf. (1980) 923–940. o.

18. MARRESE, M.: The Bureaucratic Response to Economic Fluctuation: An Econometric Investigation of Hungarian Investment Policies, *Journal of Policy Modeling*, 3. évf. (1981) 221—243. o.
19. NGUYEN, D. T.—TURNOVSKY, S. J.: The Dynamical Effects of Fiscal and Monetary Policies under Bond Financing, *Journal of Monetary Economics* 11. évf. (1983) 45—71. o.
20. PHELPS, E. E.: The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, *The American Economic Review*, 60, évf. (1961) 638—643.
21. PORTES, R.: Internal and External Balances in a Centrally Planned Economy, *Journal of Comparative Economics*, 3, évf. (1979) 325—345.
22. PORTES, R.—WINTER, D.: Disequilibrium Estimates for Consumption Goods in Centrally Planned Economies, *Review of Economics Studies*, 47, évf. (1980) 315—324.

GROWTH, CONTROL AND TENSIONS IN AN OPEN SOCIALIST ECONOMY

In the theoretical model the lasting contradictions observable in East-European socialist countries among growth, efficiency and equilibrium are examined. Distinction is made between internal and external tensions. Both kinds of tension reduce the efficiency of investment and foreign trade, and these tensions modify the macroeconomic proportions of distribution. Competing growth strategies are compared which cause constant internal and/or external tension.

On the basis of stylized Hungarian data a simple theoretical macromodel is constructed and analysed with the aid of computerized simulation.

РОСТ, РЕГУЛИРОВАНИЕ И НАПРЯЖЕННОСТЬ В ОТКРЫТОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

В статье рассматриваются длительные противоречия, наблюдаемые в восточно-европейских социалистических странах, которые возникают между ростом, эффективностью и равновесием. Автор различает внутреннюю и внешнюю напряженность. Оба вида напряженности снижают эффективность внешней торговли и капиталовложений, изменяют пропорции распределения на макроуровне.

Автором сравниваются соревнующиеся друг с другом стратегии роста, которые создают постоянные внутренние и/или внешние напряженности.

На основе обработки венгерских данных описывается простая теоретическая макро-модель, которая анализируется с помощью симуляции на вычислительной машине.

A többtermékes oligopol probléma stabilitásáról

I. Bevezetés

THEOCHARIS [1959] klasszikus dolgozata óta az egytermékes oligopol játék Cournot-féle egyensúlypontjának stabilitásáról számos cikk jelent meg. Ebben a dolgozatban néhány klasszikus eredményt általánosítunk a többtermékes esetre. Feltesszük, hogy az ár- és költségfüggvények valamennyien lineárisak. Az egyensúlypont létezésének bizonyítása után egy időben diszkrét dinamikus játékot fogalmazunk meg, és megadjuk stabilitásának szükséges és elégséges feltételét is. Majd az időben folytonos dinamikus modellt ismertetjük és ennek stabilitását elemezzük. Látni fogjuk, hogy a stabilitási feltételek lényegesen különböznek a két esetben. Mátrixok S -stabilitásának néhány eredményét (ARROW és McMANUS, 1958) használjuk fel a folytonos modell stabilitási vizsgálatainál.

Jelölje n a termelők (játékosok) számát. Legyen m a különféle termékek száma. Az egyes termelők stratégiáit a különféle termékekből gyártott mennyiségek jelentik. A k -adik ($1 \leq k \leq n$) termelő stratégiája tehát egy m — dimenziós $\mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}]$ vektorral írható le, ahol x_{kl} jelöli az l -edik termékből gyártott mennyiséget.

Feltesszük, hogy költségfüggvényének alakja

$$C_k(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^m b_{kl} x_{kl} + c_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

ahol $b_{kl} \geq 0$, $c_k \geq 0$. Az l -edik ($1 \leq l \leq m$) termék egységáráról is feltesszük, hogy az összes termelő által előállított teljes termékmennyiségek lineáris függvénye:

$$p_l = \sum_{j=1}^m a_{lj} X_j + d_l, \quad (2)$$

ahol

$$X_j = \sum_{k=1}^n x_{kj}.$$

Képezzük az a_{lj} együtthatókból az $m \times m$ típusú \mathbf{A} mátrixot. Tegyük fel a következőt:

(A) Az $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ mátrix negatív definit.

Ez a feltétel közvetlenül nehezen ellenőrizhető, azonban a következő esetben automatikusan teljesül, amikor az a_{lj} mátrixelemekről feltesszük, hogy

$$a_{ll} < 0, \quad a_{lj} \leq 0 \quad (j \neq l). \quad (3)$$

$$|a_{ll}| > \sum_{j \neq l} |a_{lj}| \quad (4a)$$

és

$$|a_{ll}| > \sum_{j \neq l} |a_{jl}|. \quad (4b)$$

Ekkor (3), (4a) és (4b): alapján

$$2|a_{ll}| > \sum_{j \neq l} |a_{lj} + a_{jl}|. \quad (5)$$

Tehát $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ negatív domináns diagonális elemekkel rendelkezik, azaz negatív definit.

A k -adik termelő kifizetőfüggvénye ekkor

$$\pi_k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m x_{kl} p_l(\mathbf{x}) - C_k(\mathbf{x}_k). \quad (6)$$

Tegyük fel továbbá a következőket:

(B) $k = 1, 2, \dots, n$ esetén a k -adik játékos stratégiáihalmaza $D_k \subset R^m$ korlátos, zárt, konvex. Az irodalomban a D_k stratégiáihalmazokról általában azt teszik fel, hogy

$$D_k = \prod_{l=1}^m [0, L_{kl}],$$

ahol L_{kl} a k -adik játékosnak az l -edik termékből való kapacitását jelenti. Nyilvánvaló, hogy az L_{kl} számok végeessége esetén a (B) feltétel automatikusan teljesül.

A fentiekben a $\Gamma = \{n; D_1, \dots, D_n; \pi_1, \dots, \pi_n\}$ játékot definiáltuk, amelyet többtermékes oligopol játéknak nevezünk.

Ismeretes, hogy az (A) feltétel fennállása esetén (ld. SZIDAROVSKY, 1978) π_k konvex \mathbf{x}_k -ban, így (A) és (B) teljesülése esetén a *Nikaido-Isoda* tétel (ld. SZÉP és FORGÓ, 1972) alapján a játéknak létezik egyensúlypontja, azaz létezik olyan $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) \in D_1 \times \dots \times D_n$ vektor, hogy tetszőleges k ($1 \leq k \leq n$) index és $\mathbf{x}_k \in D_k$ mellett

$$\pi_k(\mathbf{x}^*) \geq \pi_k(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{k-1}^*, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*).$$

Ez a klasszikus egyensúlypont-probléma statikus, nincs tekintettel a játékosok dinamikus viselkedésére. A következő két pontban két modellt mutatunk be, amely még a játék dinamizmusát is figyelembe veszi.

2. A diszkrét modell

Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban valamennyi játékos számára adott valamilyen $\mathbf{x}_k(0)$ stratégia. Minden $t > 0$ időpontban az összes játékos a következőképpen gondolkodik. Felteszi, hogy az összes többi játékos az előző ($t - 1$)-dik időpontbeli (már ismert) stratégiáját választja ismét. Ily módon a

k -adik játékos a

$$\pi_k(\mathbf{x}_k(t)) = \sum_{l=1}^m x_{kl}(t) \cdot \left[\sum_{j=1}^m \alpha_{lj} \left(\sum_{i \neq k} x_{ij}(t-1) + x_{kj}(t) \right) + d_l \right] - \left(\sum_{l=1}^m b_{kl} x_{kl}(t) + c_k \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

függvényt maximalizálja $\mathbf{x}_k(t)$ szerint.

Tegyük fel a következőt:

(C) Az $\mathbf{x}_k(t)$ maximumhely D_k belsejében van. Ennek a feltételnek a jelentőségére még visszatérünk.

Ekkor a parciális deriváltak zérus voltából adódóan az

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{A}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t-1) \\ \mathbf{x}_2(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik, ahol $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{km})^T$, az $\alpha_{kj} = b_{kj} - d_j$ elemekkel. Egyszerű invertálással a következő explicit lineáris differenciaegyenlet-rendszer adódik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t-1) \\ \mathbf{x}_2(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \alpha_1 \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \alpha_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (9)$$

ahol bevezettük a

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (10)$$

jelölést. Ismeretes a differenciaegyenletek elméletéből, hogy a Cournot-egyensúlypont akkor és csak akkor stabilis ha a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

mátrix sajátértékeinek abszolút értéke 1-nél kisebb. Ha bevezetjük az n -edrendű

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

mátrixot, akkor \mathbf{H} a következő Kronecker-szorzat alakban is felírható:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} \times \mathbf{B}. \quad (13)$$

Legyenek β_i a \mathbf{B} , γ_j pedig a \mathbf{C} mátrix sajátértékei. Ismeretes a következő eredmény (BELLMANN, 1970):

1. lemma: A \mathbf{H} mátrix sajátértékei a $\beta_i \gamma_j$ szorzatok.

Meghatározzuk ezután a γ_i számokat:

2. lemma: A \mathbf{C} mátrix sajátértékei -1 és $(n-1)$.

Bizonyítás: Induljunk ki \mathbf{C} sajátérték-egyenletéből:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad (14)$$

ahol $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ jelöli a sajátvektort. A (14) alapján

$$\sum_{j \neq i} z_j = \gamma z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

amelyet i -re összegezve adódik, hogy

$$(n-1) \sum_{i=1}^n z_i = \gamma \sum_{i=1}^n z_i, \quad (16)$$

vagyis

$$(n-1-\gamma) \sum_{i=1}^n z_i = 0. \quad (17)$$

Két eset lehetséges tehát:

a) $\gamma = n-1$;

b) $\sum_{i=1}^n z_i = 0$.

Az első esetben megtaláltuk az egyik sajátértéket. A másik esetben pedig adjunk $z_i - t$ a (15) egyenlethez:

$$0 = \sum_{j=1}^n z_j = (\gamma + 1)z_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

és minthogy van nemzérus z_i komponens, szükségképpen $\gamma = -1$; amely a \mathbf{C} mátrix másik sajátértékét szolgáltatja. ■

Ezek után bebizonyítjuk az alfejezet fő eredményét:

1. tétel. Az (A), (B) és (C) feltételeken kívül tegyük fel, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T$ sajátértékei valósak. Ekkor a diszkrét dinamikus modell akkor és csak akkor stabilis, ha $n < 3$.

Bizonyítás: Kimutatjuk először, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T$ mátrix valamennyi sajátértéke egységnyi. Ennek igazolására tekintsük az

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}$$

sajátértékegyenletet, majd szorozzuk be balról először az \mathbf{A} mátrixszal, majd az \mathbf{u}^* vektorral. Ekkor átrendezés után azonnal adódik, hogy

$$\delta = \frac{\mathbf{u}^* \mathbf{A}^T \mathbf{u}}{\mathbf{u}^* \mathbf{A} \mathbf{u}} = 1,$$

hiszen a számláló és a nevező megegyezik.

Ennek alapján \mathbf{B} sajátértéke $(1 + 1)^{-1} = \frac{1}{2}$, így \mathbf{H} sajátértékei $\left(-\frac{1}{2}\right)$ és $\frac{n-1}{2}$. Ezek abszolút értéke akkor és csak akkor kisebb egynél, ha $n < 3$. ■

3. A folytonos modell

A folytonos modell esetében a következőket tesszük fel. Legyen most is $t \geq 0$ valamely (folytonos) időpont. Jelölje \mathbf{x}_k és \mathbf{y}_k a k -adik játékos aktuális és profit maximalizáló stratégiáját. A profitmaximalizálást most is a rögzített $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n$ stratégiák mellett értjük. Ekkor egyszerű deriválással adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{A}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (19) \end{aligned}$$

ahol ismét feltesszük, hogy a maximumhelyek a D_k halmazok belső pontjai. Nyilvánvalóan

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_1 \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Feltesszük, hogy az egyes játékosok a

$$\frac{dx_{kl}}{dt} = r_{kl}(y_{kl} - x_{kl}) \quad (\forall k, l) \quad (21)$$

differenciálegyenlet-rendszer megoldásának megfelelően folyamatosan változtatják stratégiáikat, ahol $r_{kl} > 0$ ($\forall k, l$). Bevezetve az $r_k = (r_{k1}, \dots, r_{km})^T$ vektorokat és az $\mathbf{R}_k = \text{diag}(r_{k1}, \dots, r_{km})$ mátrixokat a (21) differenciálegyenlet-rendszer a tömörebb

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_1 \\ \frac{d}{dt} x_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_1 \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \alpha_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

alakban írható fel.

Ismeretes, hogy az egyensúlypont a folytonos (22) modell szerint akkor és csak akkor stabilis, ha az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \quad (23)$$

mátrix valamennyi sajátértékének valós része pozitív. Ismeretes (ld. ARROW és McMANUS, 1958) a következő eredmény.

3. lemma: Legyen \mathbf{S} és \mathbf{T} két azonos rendű négyzetes mátrix. Ha \mathbf{S} és $\mathbf{T} + \mathbf{T}^T$ pozitív definit mátrixok, akkor $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ valamennyi sajátértékének a valós része pozitív.

Mint hogy (23) első tényezője pozitív diagonális elemekkel rendelkező diagonális mátrix, mindig pozitív definit. A lemma alkalmazásához azt kell bizonyítanunk, hogy az $\mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{I} + \mathbf{H}^T = 2\mathbf{I} + (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$ mátrix pozitív definit. Ez nyilvánvalóan akkor teljesül, ha $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ sajátértékei (-2) -nél valamennyien nagyobbak. Mint hogy

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T),$$

a $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ mátrix sajátértékei a $-\varepsilon_i$ és $(n-1)\varepsilon_i$ mennyiségek, ahol ε_i a $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ sajátértékeit jelöli. Az egyensúlypont tehát akkor és csak akkor stabilis, ha

$$-\varepsilon_i > -2 \quad \text{és} \quad (n-1)\varepsilon_i > -2,$$

azaz

$$\frac{2}{1-n} < \varepsilon_i < 2. \quad (24)$$

Ez a feltétel a sajátértékek kiszámítása nélkül közvetlenül csak nehezen ellenőrizhető, ezért különösen jelentős a következő tétel.

2. tétel. Ha az (A), (B) és (C) feltételek fennállnak, valamint $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$, akkor az egyensúlypont mindig stabilis.

Bizonyítás: Tekintsük a $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ mátrixot:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T)^{-1})^{-1} = \\ &= (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} + (\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{A}^T)^{-1})^{-1} = \\ &= [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} + [(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})(\mathbf{A}^T)^{-1}]^{-1}]^{-1} = \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Mint hogy \mathbf{A} és \mathbf{A}^T felcserélhető, ugyancsak felcserélhető \mathbf{A} és $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$, így \mathbf{A} és $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1}$ is. Ennek alapján

$$\mathbf{B} + \mathbf{B}^T = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} + \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I},$$

így $\varepsilon_i = 1$, amellyel a tételt bizonyítottuk.

Befejezésül az (A), (B) és (C) feltételek jelentőségéről lesz szó.

Az (A) feltétellel a π_k kifizetőfüggvényeknek az \mathbf{x}_k stratégiákban való konkavitását biztosítjuk. A kifizetőfüggvények folytonossága linearitásukból következik.

A (B) feltétel a Nikaido-Isoda tétel alkalmazásához volt szükséges.

A (C) feltételre azért volt szükségünk, hogy a (7) függvény $\mathbf{x}_k(t)$ szerinti maximumhelyén a gradiens zérus legyen. Ezzel a feltétellel kapcsolatban a következő megjegyzést tesszük:

(a) Ha a D_k halmaz a $[0, L_{kl}]$ intervallumok direkt sorozata, ahol az L_{kl} korlátok elég nagyok, valamint az optimális $\mathbf{x}_k(t)$ vektor komponensei pozitívak, akkor a (C) feltétel fennáll.

(b) Ha az egyensúlyi stratégiák valamennyien D_k belsejébe esnek, valamint az 1. vagy 2. tétel feltételei fennállnak, akkor megfelelő kezdeti stratégiákból kiindulva biztosítható, hogy $t > 0$ esetén is D_k belsejébe essenek az optimális $\mathbf{x}_k(t)$ stratégiák.

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—M. McMANUS: A Note on Dynamic Stability, *Econometrica*, 26 (1958), 448—454.
2. BELLMAN, R.: *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd ed., McGraw Hill, New York, 1970.
3. FISHER, F. M.: The Stability of the Cournot Oligopoly Solution: The Effects of Speeds of Adjustments and Increasing Marginal Costs, *Review of Economic Studies*, 28 (1961), 125—135.
4. HADAR, J.: Stability of Oligopoly with Product Differentiation, *Review of Economic Studies*, 33 (1966), 57—60.
5. JOHNSON, C. R.: Sufficient Conditions for D-Stability, *Journal of Economic Theory*, 9 (1974), 53—62.
6. OKUGUCHI, K.: *Expectations and Stability in Oligopoly Models*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
7. SELTEN, R.: *Preispolitik der Mehrproduktunternehmung in der Statischen Theorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
8. SZÉP J.—FORGÓ F.: *Bevezetés a játékelméletbe*, Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.
9. SZIDAROVSKY F.: *Játékelmélet*, ELTE, TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
10. SZIDAROVSKY, F.—K. OKUGUCHI: Stability of the Cournot Equilibrium for an Oligopoly with Multi-Product Firms, *mimeo*, 1985.
11. SZIDAROVSKY, F.—S. YAKOWITZ: Contribution to Cournot Oligopoly Theory, *Journal of Economic Theory*, 28 (1982), 51—70.
12. THEOCHARIS, R. D.: On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem, *Review of Economic Studies*, 27 (1959), 133—134.

ON THE STABILITY OF THE MULTIPRODUCT OLIGOPOLY PROBLEM

The paper gives conditions for the stability of the Cournot-Nash equilibrium point of the oligopoly game. The model examined generalizes the classical results of Theocharis (1959). It is assumed that all price and cost functions are linear. Two types of model are examined; the problems with discrete and continuous time are separately analysed. The stability of the equilibrium points may be reduced in the first case to the examination of linear difference equations, in the second to that of linear differential equations. In the study some properties of the S-stability of matrices (Arrow and McManus, 1958) are exploited.

О СТАБИЛЬНОСТИ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ОЛИГОПОЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ

В статье описываются условия стабильности точки равновесия олигопольной игры типа Курно—Нэша (Cournot—Nash). Рассматриваемая модель обобщает классические результаты Теохариса (Theocharis, 1959). В ней предполагается, что все функции стоимости и затрат линейные. Анализируются два типа модели: отдельно рассматриваются проблемы, где время меняется дискретно и непрерывно. В первом случае стабильность точки равновесия сводится к линейным дифференциальным уравнениям, во втором случае к вопросу стабильности линейных дифференциальных уравнений. При анализе используются некоторые свойства S-стабильности матриц (Arrow—McManus, 1958).

Az oligopol játék bizonytalan koalíció-alakítások esetén

I. Bevezetés

Az oligopol probléma az egyik legismertebb gazdasági játék. Egy konkrét gazdasági helyzetet ír le, amikor több termelő egy homogén piacon értékesíti termékeit. Legegyszerűbb változata a következőképpen fogalmazható meg (ld. BURGER, 1959; SZIDAROVSKY, 1977a; 1978; 1979).

Tegyük fel, hogy n különböző termelő egység ugyanazt a terméket állítja elő, és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje x_k ($1 \leq k \leq n$) a k -adik termelő által előállított mennyiséget. A kapacitás korlátok miatt az x_k mennyiségek valamilyen alkalmas $[0, L_k]$ intervallumba eshetnek. Minthogy a termelők a piacon együtt jelennek meg, az általuk előállított termék f egységára a piacra kerülő $\sum_k x_k$ együttes termékmennyiségtől függ. Tegyük fel továbbá, hogy az egyes termelők K_k költsége csak az általuk előállított termékmennyiségtől függ. Így a k -adik játékos (termelő) kifizető függvénye:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - K_k(x_k) \quad (1)$$

A játék (Nash-féle) egyensúlypontján olyan n dimenziós (x_1^*, \dots, x_n^*) vektort értünk, amelyre fennáll, hogy

- (a) $x_k^* \in [0, L_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$);
- (b) tetszőleges $k = 1, 2, \dots, n$ és $x_k \in [0, L_k]$ esetén

$$\varphi_k(x_1^*, \dots, x_k^*, \dots, x_n^*) \geq \varphi_k(x_1^*, \dots, x_k, \dots, x_n^*). \quad (2)$$

Alkalmas folytonossági és konkavitási feltételek mellett kimutatható a játék egyensúlypontjának létezése, egyértelmősége, valamint numerikus eljárás is ismeretes az egyensúlypont közelítő meghatározására (ld. SZIDAROVSKY—YAKOWITZ, 1977; 1982).

Az (1) játék többtermékes általánosítását, valamint más típusú egyensúlypontokat is vizsgáltak az irodalomban (ld. SZIDAROVSKY 1977b; 1979).

Természetes törekvése a játékosoknak, hogy nyereségük növelése érdekében feladják önállóságukat. Amennyiben ez a helyzet, akkor kooperatív játékról beszélünk. A kooperatív játékok megoldására számos koncepció ismeretes az irodalomból (ld. pl. SZÉP—FORGÓ, 1972). Ebben a dolgozatban olyan kooperációkkal foglalkozunk, amikor bizonyos játékosok egy, vagy több koalíciót alkotnak, és ezek a koalíciók egymás között már egyensúlyi helyzetre törekzenek. Az irodalomban az ilyen játékokat csoportegyensúly problémáknak is szokták nevezni (ld. SZIDAROVSKY, 1974). Az (1) klasszikus oligopol játék csoportegyensúly-problémája a következőképpen fogalmazható meg. Bontsuk

fel a játékosok $N = \{1, 2, \dots, n\}$ halmazát a diszjunkt N_1, N_2, \dots, N_m halmazok egyesítésére, ekkor $k = 1, 2, \dots, m$ esetén az N_k halmazba tartozó játékosok alkotják a k -adik csoportot.

E csoport stratégiáihalmaza:

$$S_k = \times_{i \in N_k} [0, L_i], \quad (3)$$

valamint kifizetőfüggvénye:

$$\left(\sum_{i \in N_k} x_i \right) f \left(\sum_{l=1}^n x_l \right) - \sum_{i \in N_k} K_i(x_i). \quad (4)$$

Könnyen kimutatható, hogy az így definiált csoportegyensúly-probléma közönséges m -személyes oligopol játékra redukálható, ha $k = 1, 2, \dots, m$ esetén megoldjuk a

$$\begin{aligned} \min \sum_{i \in N_k} K_i(x_i) \\ \sum_{i \in N_k} x_i = s_k \\ x_i \in [0, L_i] \end{aligned} \quad (5)$$

nemlineáris programozási feladatot, ahol s_k a feladat paramétere, amely végigfut a $[0, \sum_{i \in N_k} L_i]$ intervallumon.

Ekkor ugyanis jelölje $Q_k(s_k)$ az optimális célfüggvényértéket, és definiáljuk az m -személyes klasszikus oligopol játékot a Q_k költségfüggvényekkel, az eredeti f árfüggvényvel, valamint a $[0, \sum_{i \in N_k} L_i]$ stratégiáihalmazokkal.

Ha (s_1^*, \dots, s_m^*) a redukált játék egyensúlypontja és $k = 1, 2, \dots, m$ esetén $(x_i^*)_{i \in N_k}$ jelöli az (5) feladat s_k^* melletti optimális megoldását, akkor az (x_1^*, \dots, x_n^*) vektor csoportegyensúlypontot szolgáltat. Továbbá bármely csoportegyensúlypontot ezen a módon megkaphatunk.

Ez a redukción elv feltételezi azt, hogy a játékosok N_1, N_2, \dots, N_m koalíciói valamennyien ismertek az összes játékos előtt. A gazdasági életben azonban nem mindig ez a helyzet. Jogosan felmerül tehát az a kérdés, hogy a koalíció alakításokról alkotott ismeretek hiánya, vagy bizonytalansága hogyan befolyásolja az egyes játékosok viselkedését.

Tegyük fel, hogy k valamelyik játékost jelöli. A redukción elv alapján nyugodtan feltehetjük, hogy a játékos egyedül játszik, ugyanis ellenkező esetben koalíciója egyetlen játékosként lép fel a piacon. Ha a fennmaradó játékosok koalíció alakításai nem ismeretesek teljes egészében a k -adik játékos számára, akkor a következő két lehetőségről (vagy azok kombinációjáról) van szó. A első esetben adottak olyan M_1, M_2, \dots, M_h N -beli részhalmazok, amelyekről csak azt tudjuk, hogy a létrejövő koalíciókban nem kerülnek további felbontásra. Más szavakkal ezt úgy is kifejezhetjük, hogy $j = 1, 2, \dots, h$ esetén az M_j halmazba tartozó játékosok mindenképpen együtt játszanak. Nem tudja a k -adik játékos viszont azt, hogy az egyes M_j halmazok esetleg milyen összevonással alkotják a koalíciókat, illetve ezekhez még milyen játékosok csatlakoznak. Az ilyen jellegű információkat parciális *determinisztikus* ismereteknek nevezzük. A másik esetben ennek olyan általánosításáról van szó, amikor az M_1, \dots, M_h halmazrendszerhez egy olyan p valószínűségérték is adott, amely

megadja annak a valószínűségét, hogy az M_j -be tartozó játékosok együtt játszanak ($1 \leq j \leq h$). Továbbra sem tételezünk fel semmilyen további információt a csoportok további esetleges összevonásáról, illetve a halmazokba nem tartozó játékosok koalíciókhoz való tartozásáról. Ilyen esetben parciális *stochasztikus* ismeretekről beszélünk.

2. Determinisztikus ismeretek kezelése

Jelöljön most is M_1, M_2, \dots, M_h N -beli halmazokat. Mint az előzőekben részleteztük, a k -adik játékos a többi játékos koalíció alakításairól csak annyit tud, hogy az M_j ($j = 1, \dots, h$) halmazok nem kerülnek további felbontásra. Ez matematikailag azt jelenti, hogy csak olyan N_1, N_2, \dots, N_m koalíciók alakulhatnak ki, ahol a következők teljesülnek:

- a) valamely i_0 -ra $N_{i_0} = \{k\}$;
 b) tetszőleges $i \neq j$ esetén $N_i \cap N_j = \emptyset$;
 c) $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_m = N$;
 d) tetszőleges $i = 1, \dots, m$ és $j = 1, \dots, h$ esetén $N_i \cap M_j$ vagy az üres halmaz, vagy M_j -vel azonos.

Jelölje a fenti feltételeknek eleget tevő $C = \{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ koalíció-rendszerek halmazát K . Jelölje továbbá $x^*(C)$ a C esetén fellépő csoportegyensúlyi pontot, valamint $x^{*(k)}(C)$ az ebből a k -adik játékos egyensúlyi stratégiájának elhagyásával adódó vektort. Ekkor nyilvánvalóan $x^*(C) = (x^{*(k)}(C), x_k^*(C))$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a k -tól különböző játékosok számára ismert a C koalíció-rendszer teljes egészében így, ők az $x^{*(k)}(C)$ -nek megfelelő egyensúlyi stratégiákat választják. A k -adik játékos számára ez a viselkedési mód ismeretes, csak azt nem tudja, hogy éppen melyik C koalíció-rendszer jön létre. Ilyenkor a k -adik játékos számára természetes viselkedés az, hogy az összes létrejöheto $x^{*(k)}(C)$ vektor melletti minimum feltételezésével maximalizálja saját hasznát. Azaz, a

$$\max_{x_k \in S_k} \{ \min_{C \in K} \varphi_k(x^{*(k)}(C), x_k) \} \quad (7)$$

optimumfeladatot oldja meg és az annak optimális megoldását választja.

Mielőtt a (7) feladatnak az oligopol játék esetén való megoldásával foglalkozunk megjegyezzük, hogy a (7) optimuma még a $h = n$, $M_j = j$ ($j = 1, 2, \dots, h$), azaz a teljes információhiány esetben sem egyezik meg a k -adik játékos karakterisztikus függvényével. Ennek az az oka, hogy az $N - \{k\}$ -ba tartozó játékosok most nem egymástól függetlenül választják stratégiáikat, hanem feltétlenül egyensúlyra törekszenek.

Az oligopol játék esetén csak azt tegyük fel, hogy az f árfüggvény monoton csökkenő. Ekkor

$$\varphi_k(x^{*(k)}(C), x_k) = x_k f(s^{*(k)}(C) + x_k) - K_k(x_k), \quad (8)$$

$$\text{ahol } s^{*(k)}(C) = \sum_{l \neq k} x_l^{*(k)}(C), \quad x^{*(k)}(C) = (x_l^{*(k)}(C))_{l \neq k}.$$

Ha bevezetjük az

$$s_{\max}^{*(k)} = \max_{C \in K} \{s^{*(k)}(C)\} \quad (9)$$

jelölést, akkor nyilvánvalóan (7) a következő alakban is felírható:

$$\max \{x_k \cdot f(s_{\max}^{*(k)} + x_k) - K_k(x_k)\} \quad (10)$$

$$x_k \in [0, L_k].$$

1. *példa.* Tekintsük most azt az oligopol játékot, amikor $n = 5$, $L_1 = \dots = L_5 = 5$, $f(s) = 5 - s$, valamint $K_k(x_k) = kx_k/5 + 0,005$. Ekkor a k -adik ($1 \leq k \leq 5$) játékos haszna:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_5) = x_k(5 - s) - kx_k/5 - 0,005, \quad (11)$$

ahol $s = x_1 + \dots + x_5$. Tegyük fel, hogy a játékot a harmadik játékos szemzögéből vizsgáljuk.

Először az összes olyan csoportegyensúlyi pontot határozzuk meg, amikor a harmadik játékos egyedül játszik. Ilyenkor a következő helyzetek állhatnak elő:

1, 2, 3, 4, 5; (1, 2), 3, 4, 5; (1, 4), 2, 3, 5; (1, 5), 2, 3, 4; (2, 4), 1, 3, 5; (2, 5), 3, 1, 4; (4, 5), 1, 2, 3; (1, 2), 3, (4, 5); (1, 4), 3, (2, 5); (1, 5), 3, (2, 4); (1, 2, 4), 3, 5; (1, 2, 5), 3, 4; (1, 4, 5), 2, 3; (2, 4, 5), 3, 1; (1, 2, 4, 5), 3.

A nekik megfelelő egyensúlyi stratégiákat és kifizető-függvényértékeket az 1. táblázat tartalmazza. A táblázatban szereplő eredményeket a redukciós elv és a SZIDAROVSKY (1974) értekezésben szereplő módszerrel nyertük. Ha semmilyen információ nem áll a harmadik játékos rendelkezésére, akkor $s_{\max}^{*(3)} = 2,9332$, így ekkor a (10) feladat a következő alakú:

$$\max \{x_3(5 - 2,9332 - x_3) - (0,6x_3 + 0,005)\} \quad (12)$$

$$0 \leq x_3 \leq 5,$$

amelynek optimális megoldása: $x_3^* = 0,7333$, és az optimális célfüggvényérték: 0,5425.

Ezután azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a harmadik játékos biztosan tudja, hogy az első és ötödik játékos azonos koalícióba kerül, további információ viszont nem áll rendelkezésre. Ilyenkor a szóba jöhető koalíciók:

(1, 5), 2, 3, 4; (1, 5), 3, (2, 4); (1, 2, 5), 3, 4; (1, 4, 5), 2, 3; (1, 2, 4, 5), 3.

Tehát ezek alkotják most a K halmazt. A K halmazon $s_{\max}^{*(3)} = 2,8$, így a (10) feladat alakja

$$\max \{x_3(5 - 2,8 - x_3) - (0,6x_3 + 0,005)\} \quad (13)$$

$$0 \leq x_3 \leq 5,$$

amelynek optimális megoldása: $x_3^* = 0,8$, és az optimális célfüggvényérték: 0,635.

3. Sztochasztikus ismeretek kezelése

Tekintsük ismét adottnak az M_1, \dots, M_h halmazokat. Tegyük fel csak azt, hogy a k -adik játékos most csak azt tudja, hogy az M_1, \dots, M_h (esetleg tovább bővülő vagy összevonásra kerülő) csoportok létrejöttének valószínűsége p . Jelölje most is K azon koalíciórendszerek halmazát, amelyekben az M_j ($j = 1, \dots, h$) halmazok nem kerülnek felbontásra, és jelölje \bar{K} a K -ba nem

1. táblázat
Csoportegyensúly-pontok

1; 2; 3; 4; 5	x φ	1,1333 1,2945	0,9333 0,8785	0,7333 0,5425	0,5333 0,2865	0,3333 0,1105	$s^{*(3)} = 2,9332$
(1, 2); 3; 4; 5	x φ	1,32 (1, 2) 1,7324	0 —	0,92 0,8414	0,72 0,4134	0,52 0,2654	$s^{*(3)} = 2,56$
(1, 4); 2; 3; 5	x φ	1,24 (1, 4) 1,5276	1,04 1,0766	0,84 0 7006	0 —	0,44 0,1886	$s^{*(3)} = 2,72$
(1, 5); 2; 3; 4	x φ	1,2 (1, 5) 1,430	1,0 0,995	0,8 0,635	0,6 0,355	0 —	$s^{*(3)} = 2,8$
(2, 4); 1; 3; 5	x φ	1,24 1,5326	1,04 (2, 4) 1,0716	0,84 0,7006	0 —	0,44 0,1886	$s^{*(3)} = 2,72$
(2, 5); 3; 1; 4	x φ	1,2 1,435	1 (2,5) 0,99	0,8 0,635	0,6 0,355	0 —	$s^{*(3)} = 2,8$
(4, 5); 1; 2; 3	x φ	1,2 1,435	1 0,995	0,8 0,635	0,6 (4, 5) 0,350	0 —	$s^{*(3)} = 2,8$
(1, 2); 3; (4, 5)	x φ	1,45 (1, 2) 2,0925	0 —	1,05 1,0975	0,85 (4, 5) 0,7125	0 —	$s^{*(3)} = 2,3$
(1, 4); 3; (2, 5)	x φ	1,35 (1, 4) 1,8125	1,15 (2, 5) 1,3125	0,95 0,8975	0 —	0 —	$s^{*(3)} = 2,5$
(1, 5); 3; (2, 4)	x φ	1,35 (1, 5) 1,8125	1,15 (2, 4) 1,3125	0,95 0,8975	0 —	0 —	$s^{*(3)} = 2,5$
(1, 2, 4); 3; 5	x φ	1,5 (1, 2, 4) 2,2350	0 —	1,1 1,205	0 —	0,7 0,485	$s^{*(3)} = 2,2$
(1, 2, 5); 3; 4	x φ	1,45 (1, 2, 5) 2,0875	0 —	1,05 1,0975	0,85 0,7175	0 —	$s^{*(3)} = 2,3$
(1, 4, 5); 2; 3	x φ	1,35 (1, 4, 5) 1,8075	1,15 1,3175	0,95 0,8975	0 —	0 —	$s^{*(3)} = 2,5$
(2, 4, 5); 1; 3	x φ	1,35 1,8175	1,15 (2, 4, 5) 1,3075	0,95 0,8975	0 —	0 —	$s^{*(3)} = 2,5$
(1, 2, 4, 5); 3	x φ	1,7333 (1,2,4,5) 2,9843	0 —	1,3333 1,7726	— —	0 —	$s^{*(3)} = 1,7333$

tartozó koalíciórendszerek halmazát. Ekkor $P(K) = p$, $P(\bar{K}) = 1 - p$, és a k -adik játékos a következőképpen gondolkodhat. További információk hiánya miatt a K -beli és \bar{K} -beli koalíciórendszereknek azonos valószínűségeket feltételez. Ha $|K|$ és $|\bar{K}|$ jelöli a K és \bar{K} elemszámát, akkor tetszőleges C koalíciórendszer esetén feltételezi, hogy

$$P(C) = \begin{cases} \frac{p}{|K|}, & \text{ha } C \in K \\ \frac{1-p}{|\bar{K}|}, & \text{ha } C \in \bar{K}. \end{cases} \quad (14)$$

Ily módon az összes lehetséges koalíciórendszer halmazán egy diszkrét valószínűségi mértéket definiáltunk. Ha E jelöli az e mérték szerinti várhatóérték képzést, akkor a Bayes elvnek megfelelően (ld. HARSÁNYI, 1967) a k -adik játékos a

$$\max \{E[\varphi_k(\mathbf{x}^{*(k)}(C), \mathbf{x}_k)]\} \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_k \in S_k$$

feladat optimális megoldását választja, azaz hasznának várható értékét maximalizálja. Ha történetesen semmilyen információ sem áll rendelkezésre a többi játékos koalíció-alakításait illetően, akkor az összes lehetséges koalíciórendszer halmazán egyenletes eloszlás szerinti várhatóérték képzés mellett oldja meg a (15) feladatot.

Az oligopol játék esetén a (15) feladat leegyszerűsödik:

$$\max \{x_k \cdot E[f(s^{*(k)}(C) + x_k)] - K_k(x_k)\} \quad (16)$$

$$x_k \in [0, L_k].$$

2. példa. Tekintsük ismét az 1. példa esetét, és vizsgáljuk meg a 3. játékos viselkedését olyan többletinformáció esetén, miszerint a 2. és 4. játékos koalícióba lépésének valószínűsége 0,2. Ekkor K -ba a következő koalíciórendszerek tartoznak:

(2, 4), 1, 3, 5; (2, 4), 3, (1, 5); (1, 2, 4), 3, 5; (2, 4, 5), 1, 3; (1, 2, 4, 5), 3.

Az összes többi koalíciórendszer pedig \bar{K} -ba tartozik. Tehát $p = 0,20$, $|K| = 5$, $|\bar{K}| = 10$, vagyis

$$P(C) = \begin{cases} 0,04, & \text{ha } C \in K \\ 0,08, & \text{ha } C \in \bar{K}. \end{cases} \quad (17)$$

Felhasználva f linearitását, a várhatóérték-képzés f alá bevihető, így (16) alakja:

$$\max \{x_3 \cdot (5 - \bar{s}^{*(3)} - x_3) - (0,6x_3 + 0,005)\} \quad (18)$$

$$0 \leq x_3 \leq 5.$$

Esetünkben $\bar{s}^{*(3)} = E(s^{*(3)}(C)) = 2,563188$, így az optimális megoldás: $x_3 = 0,918406$ és az optimális célfüggvényérték: 0,8384696.

Az előzőekben láttuk, hogy a (15) koncepció minden további nélkül alkalmazható, ha az összes lehetséges koalíciórendszer halmazán a rendelkezésre

álló információ alapján diszkrét eloszlást tudunk definiálni. Az eloszlás előállítását mutatjuk be az előzőeknél bonyolultabb néhány esetben.

Elsőként tegyük fel, hogy az M_1, \dots, M_h részhalmazok létrejöttére p valószínűség adott, valamint az M'_1, \dots, M'_h részhalmazok létrejöttét biztosan tudja a k -adik játékos. Ilyen kombinált információk esetén a következőt kell tennünk. Jelölje K_0 azon koalíció-rendszereket, amelyekben az M'_1, \dots, M'_h halmazok nem kerülnek további felbontásra. A K halmaz jelentése legyen az előzőekben definiált. Ekkor a (14) valószínűségi mérték a következőképpen módosul:

$$P(C) = \begin{cases} \frac{p}{|K \cap K_0|}, & \text{ha } C \in K \cap K_0 \\ \frac{1-p}{|K \cap K_0|}, & \text{ha } C \in \bar{K} \cap K_0 \\ 0, & \text{ha } C \notin K_0. \end{cases} \quad (19)$$

Tegyük fel második esetként, hogy az M_1, \dots, M_h részhalmazok létrejöttére a p valószínűség adott, valamint az M'_1, \dots, M'_h részhalmazok létrejöttére adott a p' valószínűség. Ha a függetlenséget feltételezhetjük, akkor a kombinált információ az $M'_1, \dots, M'_h, M_1, \dots, M_h$ részhalmazrendszer létrejöttére $p \cdot p'$ valószínűséget feltételez. Ha a függetlenség nem teljesül, akkor a p valószínűség mellett a

$$p' = P(M'_1, \dots, M'_h | M_1, \dots, M_h) \quad (20)$$

feltételes valószínűséget kell megadni (ill. ismerni), és így már p és p' összeszorzható. A fentiek alapján a (20) típusú többletinformációk értéke is meghatározható. Tegyük fel ennek érdekében, hogy az M_1, \dots, M_h részhalmazok létrejöttére a p valószínűség adott, valamint a (20) feltételes valószínűségnek, mint információnak az értékét kívánjuk meghatározni. Nyugodtan feltehetjük, hogy p' értékére a k -adik játékosnak rendelkezésére áll az apriori eloszlása, hiszen mindennemű (esetleg szubjektív) ismeretek nélkül például egyenletes eloszlást feltételezhet a $[0,1]$ intervallumon. Első lépésként határozzuk meg a (15) optimális célfüggvényértékét a p' valószínűség pontos ismeretének feltételezésével. Jelölje $\bar{\varphi}_k(p')$ ezt az optimális értéket. Jelölje ezután $\bar{\bar{\varphi}}_k$ a (15) optimális célfüggvényértékét csak az M_1, \dots, M_h részhalmazokra adott p valószínűség ismerete alapján. Ekkor a p' valószínűség, mint információ értéke:

$$E_{p'}[\bar{\varphi}_k(p')] - \bar{\bar{\varphi}}_k. \quad (21)$$

Megemlítjük továbbá, hogy a determinisztikus információk a $p = 1$ valószínűségi értékkel „sztochasztizálhatók”, így a fentiek a determinisztikus esetben minden további nélkül alkalmazhatók.

A fenti kérdések valamennyien a k -adik játékos szempontjából merülnek fel. Igen érdekes megvizsgálni az alábbi situációkat az esetleg koalíciókba lépő játékosok szempontjából is. A koalíciók számára sem mindegy az, hogy a többi játékos tud-e a koalíciók létrejöttéről, vagy nem. Ez az ismeret ugyanis döntően meghatározza választott stratégiáikat, így a koalíció nyereségét is. Ennek alapján meghatározhatók nemcsak a (20) típusú információk értékei, hanem koalíció-alakításokról szóló információk titokban tartásának, illetve téves in-

formációk közlésének értéke is. Bizonyos információk ismeretének eltitkolása is esetleg többlet haszonnal járhat. Ezeknek a kérdéseknek matematikai megfogalmazására, és a megoldási koncepciók bemutatására egy következő tanulmányunkban kerül majd sor.

(Beérkezett: 1986. április 10-én.)

IRODALOM

1. BURGER, E.: *Einführung in die Theorie der Spiele*. de Gruyter, Berlin, (1959).
2. HARSÁNYI, J. C.: Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. *Man. Sci.*, Vol. 14, (1967) No. 3—5—7, pp. 159—182; 320—334; 468—502.
3. SZÉP J.—FORGÓ F.: *Bevezetés a játékelméletbe*. Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (1972).
4. SZIDAROVSKY, F.: Az oligopol játék csoportegyensúly-problémája. Kandidátusi értekezés, MTA, Budapest, (1974).
5. SZIDAROVSKY, F.: A nem differenciálható oligopol probléma. *Sigma*, (1977a) pp. 69—74.
6. SZIDAROVSKY, F.: Az oligopol játék r—egyensúly-problémája. *Alk. Mat. Lapok*, (1977b) pp. 105—110.
7. SZIDAROVSKY, F.: A többtermékes oligopol játék egyensúly problémájáról. *Sigma*, (1978) pp. 243—247.
8. SZIDAROVSKY, F.: A Nash-féle kooperatív megoldási koncepció általánosításáról. *Sigma*, (1979) pp. 69—74.
9. SZIDAROVSKY, F.—S. YAKOWITZ: A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium. *Int. Econ. Review*, Vol. 18, (1977) No. 3. pp. 787—790.
10. SZIDAROVSKY, F.—S. YAKOWITZ: Contributions to Cournot Oligopoly Theory. *J. of Econ. Theory*, Vol. 28, (1982) No. 1, pp. 51—70.

THE OLIGOPOLY GAME IN THE CASE OF UNCERTAIN COALITIONS

The paper examines the oligopoly problem under conditions when the coalition formation of those participating in the game is uncertain. This uncertainty may be modelled with both deterministic and stochastic information. The behaviour and choice of strategy of the players is determined — as shown — by the nature of the uncertainty and the information available on it. The problem is first formulated in general terms, then the solution is presented for the case of the single-product oligopoly game.

ОЛИГОПОЛЬНАЯ ИГРА ПРИ ОБРАЗОВАНИИ КОАЛИЦИЙ

В статье рассматривается олигопольная проблема с ограничениями, в которых образование игроками коалиций является лабильным. Эту лабильность можно моделировать с помощью детерминистической и стохастической информации. Поведение отдельных игроков, изменение их стратегии, как показано позже, определяется характером лабильности и наличной информацией о ней. Задача сначала формулируется для общего случая, ее конкретное решение демонстрируется для случая однопродуктовой олигопольной игры.

Anyagleszabási problémák hátizsákfadatainak egy gyakorlati célú általánosítása

1. Bevezetés

Az üzemekben gyakran felmerülnek anyagleszabási (darabolási, vágási, nyírási stb.) problémák, amikor bizonyos szabványos anyagokból az igényeknek megfelelően kisebb méretűeket kell kiszabni. Cél olyan szabásminták megadása, amelyek alkalmazása esetén a felhasznált anyagok összköltsége minimális.

Az anyagleszabási probléma megoldására a közismert lineáris programozási feladatra való visszavezetés mellett számos heurisztikus eljárást is kidolgoztak (lásd DOWSLAND [4], DYCKHOFF, KRUSE, ABEL és GAL [5], GOLDEN [12], HINXMAN [19], LENGYEL [27] összefoglalóját). Az alkalmazott módszerek közül kiemelhető két, a gyakorlatban is legtöbbször felhasznált megközelítés:

1. A GILMORE – GOMORY módszer (röviden: GGM), amely a darabolás lineáris programozási feladatát módosított szimplexmódszerrel oldja meg úgy, hogy a bázisba bevonandó vektort hátizsákfeladatok megoldásával állítja elő ([7–11], [22]).
2. Heurisztikus szekvenciális eljárás (kiürítő eljárás), amely valamilyen szempontok szerint „legjobb” szabásmintát állít elő, ezt a szabásmintát a lehető legtöbbször alkalmazza, majd a megmaradt alapanyagokra és idomokra állít elő „legjobb” szabásmintát stb. (pl. [1], [15], [18], [30], [32]). A „legjobb” szabásmintát általában hátizsákfeladatnak egzakt vagy közelítő megoldásából konstruálják.

Mindkét esetben a hátizsákfeladat megfogalmazásának (amely a szabásmintával szemben támasztott technológiai, műszaki, szervezési stb. elvárásokat modellezi) és a feladat kevés időt igénylő, gyors megoldásának kiemelkedő fontossága van.

Dolgozatunkban az anyagleszabás gyakorlati körülményeinek újszerű modellezését, a hátizsákfeladat általánosításaként adódó feladatot és a feladat megoldására kidolgozott eljárást ismertetjük. Az anyagleszabási problémák közül az egydimenziós darabolás (papírtekercsek, rudak, csövek, szalagok stb. szétvágása) hátizsákfeladatának általánosításával foglalkozunk részletesen, amely mind a GGM-nél, mind a heurisztikus szekvenciális eljárásoknál ugyanaz. Kétdimenziós két-ütemű guillotine-vágásra, ahol a kétdimenziós leszabás egydimenziós darabolások sorozatára vezethető vissza, csak röviden térünk ki.

A dolgozat 2. fejezetében a leszabás üzemi (technológiai, műszaki, szervezési stb.) feltételeinek modellezését és a hátizsákfeladat általánosításaként kapott feladatot ismertetjük. A 3. fejezetben bemutatjuk a feladat megoldására kidolgozott eljárást, a 4. fejezetben a gyakorlatban alkalmazott heurisztikus módosításokra térünk ki. Az 5. fejezet a számítógépes futtatások eredményeit tartalmazza.

2. Az egydimenziós leszabás általános feltételei

Egydimenziós leszabásnál legyen L a rendelkezésre álló alapanyag hossza, a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) a kért idomok méretei. Ekkor a hátizsákfeladat a következőképpen írható fel:

$$0 \leq x_i \text{ egész } (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq L \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \max. \quad (3)$$

A szabásmintát a hátizsákfeladat megoldása mutatja, ahol x_i azt jelzi, hogy az i -edik idom hányszor szerepel a szabásmintában. A (2) feltétel azt fejezi ki, hogy az alapanyag hosszánál nem lehet nagyobb a belőle levágandó idomok összhossza, azaz nem-átfedő lefedésről van szó. A (3) célfüggvény c_i együtthatói ($c_i > 0$) a GGM-nél a megfelelő bázisvektorok árnyékárai, heurisztikus módszereknél pedig valamilyen pozitív súlysúlyszámok (lehet az idomok hossza is, ekkor megkapjuk a legkisebb hulladékú szabásmintát).

Az (1–3) feladat megoldásaként kapott vektorok több esetben nem elégítik ki a szabásmintákkal szemben támasztott üzemi elvárásokat. Például, ha a szabásgép vágófejei (kései, fűrészzei) egyszerre vágnak, akkor a vágófejek maximális számát is figyelembe kell venni. A levágott idomok válogatásának, csomagolásának, nyilvántartásának nehézségei is a feladat módosítását igényelhetik stb. Mivel a gyakorlatban a leszabás jó szervezhetősége alapvető, sőt a legfontosabb szempont, ezért a fenti hátizsákfeladat megoldásából konstruált szabásminták alkalmazása sokszor nehezen vihető végbe. Az egyik összefoglalóban [5] a szerzők 34 gyakorlati alkalmazást elemeznek, amelyek közül csak 13 esetben cél a hulladék minimalizálása, a többi esetben az üzemi körülmények más célt írnak elő.

Azért, hogy az eljárás széleskörben felhasználható legyen, az (1–3) feladathoz az anyagleszabás általánosítható körülményeit tükröző újabb feltételeket csatolunk. Az új feltételek megadásánál két szempontot tartunk szem előtt: egyrészt azt, hogy a feltételek tükrözzék vissza a *technológiai, műszaki, szervezési körülményeket*, másrészt tegyék lehetővé a *leszabás vezérlését* (a feltételek dinamizálhatók legyenek). Ez utóbbit a feltételekben szereplő *vezérlő paraméterekkel* érhetjük el. A vezérlő paramétereket az ismételt számítógépes futtatások során addig kell módosítani, amíg a gyakorlatban is alkalmazható szabásmintákat nyerünk. Így iterációs lépések után a szabásminták olyan követelményeknek is eleget tesznek, amelyek nem, vagy csak nehezen modellezhetők. Ezzel megszüntethető a leszabás determinisztikussága, a gyártásprogramozó (termelésirányító) döntésévé válik az, hogy melyik szabásminta sorozatot fogadja el, tartja megvalósíthatónak. A leszabást irányító vállalati szakemberek olyan meghatározó – gyakran szubjektív és időben is sűrűn változó – körülményeket is ismernek, amelyeket matematikai formalizmussal nehéz jól leírni.

Az iterációk során a kívánt irányba terelhető a szabásterv, mivel a GGM „stabil” abban az értelemben, hogy a vezérlő paraméterek kis változtatása

esetén az optimális célfüggvényérték is kicsit változik (a leszabás nagyméretű lineáris programozási feladata miatt). A heurisztikus szekvenciális eljárások „mohó” eljárások, amelyek a vezérlő paraméterek egyre jobb beállításával jelentősen javíthatók. HAESSLER elnevezése erre az iterációra: „multiple-pass heuristic procedure”.

A következő feltételeket vettük figyelembe, kevés és egyszerűen áttekinthető feltétellel a leszabás lényeges jellemzőinek kifejezésére törekedtünk:

$$R_l \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq R_u \quad R_l \text{ és } R_u \text{ pozitív egész.} \quad (4)$$

A (4) feltétel mint technológiai feltétel a *vágófejek korlátozott számából* adódik akkor, amikor a vágófejek egyszerre vágunk [15]. Az R -eket paraméterként változtatva a szabáskép-sorozat vezérelhető.

$$T_l \leq \sum_{i=1}^m \delta(x_i) \leq T_u, \quad T_l \text{ és } T_u \text{ pozitív egész,} \quad (5)$$

ahol

$$\delta(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_i > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az (5) feltételt a *leszabás szervezési feltételének* nevezzük. Az üzemi gyakorlatban a legtöbbször azzal a klasszikus esettel találkozunk, amikor egyidőben csak egyféle idomot szabnak ki addig, amíg az igényelt darabszámot el nem érik (azaz $T_l = T_u = 1$). Ekkor a keletkező hulladék nagy, viszont az alapanyagok bekészítése egyszerű (mivel egyféle alapanyag kell), a vágófejek beállítása, az idomok levágása és válogatása, a levágott idomok nyilvántartása, az idomok mozgatása, tárolása könnyen megszervezhető. Lehetőség van az esetleges selejt rögtöni pótlására az alapanyagoknál és az idomoknál is. Amikor a T_u vezérlő paramétert növeljük, akkor jelentősen csökken a hulladék, viszont a vágófejeket sűrűbben kell állítgatni, az idomok válogatása és az aktuális darabszám nyilvántartása, az idomok tárolása, a selejt pótlása is jóval nehezebben szervezhető meg. Az (5) feltétel technológiai jellegű is lehet, amikor a munkahelyek és a tárolóhelyek száma a szabásgép mellett korlátozott, egyféle idomot csak egy tárolóhelyre lehet gyűjteni, általában egy munkás csak egyféle idomot szed le, ellenőriz és tárol (lásd a húzott síküveg szabását [26]).

$$0 \leq l_i \leq x_i \leq u_i \quad l_i, x_i \text{ és } u_i \text{ egész } (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

A (6) *egyedi korlátok* mint vezérlő paraméterek működnek ($u_i \leq \lfloor L/a_i \rfloor$). HAESSLER szerint a GGM-nél a szabásminták száma csökkenthető (ezáltal a vágófejek átállításának idő- és költségigénye is) az egyedi korlátok ügyes megválasztásával [17]. A szekvenciális eljárás javítható, ha a magas fajlagos célfüggvény-együtthatóval rendelkező idomok egyedi korlátait csökkentjük, illetve az idomok túlszabása is vezérelhető (túlszabásnak nevezzük azt, ha a kért idomból a kerekítések miatt a darabszámnál többet vágunk le). Ha $l_i = 0$ és $u_i = 1$, akkor 0–1 programozási feladat (bináris hátizsákfeladat) áll elő.

Az újabb feltételek csatolásával az (1–3) hátizsákfeladatból megkapjuk az alábbi nemlineáris többfeltételes feladatot:

$$\begin{aligned}
 0 \leq l_i \leq x_i \leq u_i \quad & l_i, x_i \text{ és } u_i \text{ egészek } (i = 1, 2, \dots, m) \\
 \sum_{i=1}^m a_i x_i \leq L & \\
 R_l \leq \sum_{i=1}^m x_i \leq R_u \quad & R_l \text{ és } R_u \text{ pozitív egész} \\
 T_l \leq \sum_{i=1}^m \delta(x_i) \leq T_u \quad & T_l \text{ és } T_u \text{ pozitív egész} \\
 \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \max. &
 \end{aligned} \tag{7}$$

A (7) feladatban csak egyféle alapanyag szerepel. Ha többfajta, eltérő méretű alapanyagot veszünk figyelembe és alapanyagfajtánként változtatjuk a vezérlő paramétereket, valamint az alapanyagok fajlagos egységára is eltérő, akkor kapjuk a következő általános feladatot (illetve feladat-családot):

$$\begin{aligned}
 z = \max_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m c_i x_{ji}}{C_j} \mid 0 \leq l_{ji} \leq x_{ji} \leq u_{ji}; \quad & l_{ji}, x_{ji}, u_{ji} \text{ egészek } (i = 1, 2, \dots, m); \right. \\
 \sum_{i=1}^m a_i x_{ji} \leq L_j; \quad R_{jl} \leq \sum_{i=1}^m x_{ji} \leq R_{ju}; & \\
 \left. T_{jl} \leq \sum_{i=1}^m \delta(x_{ji}) \leq T_{ju}; \quad R_{jl}, R_{ju}, T_{jl}, T_{ju} \text{ pozitív egészek } (j = 1, 2, \dots, p) \right\}, & \tag{8}
 \end{aligned}$$

ahol $C_j > 0$ az L_j hosszú alapanyag ára.

A (8) feladat a szabásmintákkal szembeni elvárásokat modellezi. Ez a feladat nem egy konkrét üzem feltételeit adja vissza, hanem az üzemi technológiai-szervezési körülmények absztrakciója. Így lehetőség van olyan programrendszer elkészítésére, amely széles körben felhasználható. Nem kell egyedi modelleket szerkeszteni, hanem a helyi üzemi körülmények figyelembe vehetők a paraméterek inputként való megadásával. A dolgozat lezárásakor a fentiekben alapuló programokat már több üzem megvette és alkalmazza.

A GGM-nél a paraméterek előre rögzítettek, míg a heurisztikus szekvenciális eljárásoknál lehetőség van arra is, hogy az egyes szabásminták elfogadása, azaz a (8) feladat megoldása után a paramétereket módosítsuk és a következő szabásmintát már az új értékek, az új (8) feladat szerint keressük meg.

A szakirodalomban hátizsákfeladatnak az (1–3) feladatot nevezik, amely az NP-teljes feladatok családjába tartozik. A hátizsákfeladat hatékony megoldásával több munka foglalkozik, lásd SALKIN és De KLUYVER összefoglalóját [31], illetve a következő alapvető publikációkat [2], [13], [14], [20], [29], magyar nyelven [3], [6], [23], [24]. Az eljárások döntő része a (6) feltételt is figyelembe veszi (egészértékű feladat visszavezethető binárisra), amely dinamikus programozásnál és a korlátozás és szétválasztás (branch and bound) elvének alkalmazásánál előnyös.

Az anyagleszabással foglalkozó irodalomban GILMORE és GOMORY [11] felveti a (7) feladatot (ahol $j = 1$ és $l_i = 0$, $R_l = 0$, $T_l = 0$), amelynek megoldására dinamikus programozáson alapuló eljárást adnak (hátizsákfüggvényt kell realizálni). MARCONI [28] az (1–4) feladatnál szintén dinamikus programozást

alkalmazott. KUUTTI és VOUTILAINEN [25] a (2), (3), (6) feladatot ismételtelen megoldva, a (6) feltétel egyedi korlátait addig módosítja, amíg a (4) feltételnek is eleget tevő megoldást kap. Ők MARTELLO és TOTH [29] algoritmusát használják fel. Az egydimenziós leszabás feltételeiről JOHNSTON [21] nyújt jó összefoglalót.

A fejezetben bemutatott technológiai-vezérlő paramétereken alapuló modellezéssel, a (7) feladat dinamizálhatóságával, alsó korlátos változatával, valamint a többfajta alapanyagot és fajlagos költséget figyelembe vevő (8) feladattal az anyagleszabás szakirodalmában nem találkoztam.

3. A feladat megoldására kidolgozott eljárás

A (8) feladatot megoldó eljárás készítésekor a diszkrét programozás hátizsákfeladatokra vonatkozó közismert eredményeiből indultunk ki (lásd magyar nyelven [6], [23]). A (8) feladat megoldását a (7) részfeladat alapanyagokénti ($j = 1, 2, \dots, p$) megoldására vezetjük vissza. Lexikografikus rendezésen alapuló implicit leszámrlást (fabejárást) használunk: felsőkorlátok kiszámításával becsüljük azt meg, hogy az egyes részfeladatokat, illetve a részfeladatok lehetséges megoldásainak részhalmazait elhagyhatjuk-e. A feladat NP-teljes, a leszámrlás sebessége legrosszabb esetben exponenciálisan függ a változók számától, ezért az eljárást a számítógépes futtatások során heurisztikus megmondolásokat felhasználva finomítottuk.

A megoldandó j -edik részfeladat:

$$\begin{aligned}
 0 \leq l_{ji} \leq x_{ji} \leq u_{ji} \quad l_{ji}, x_{ji}, u_{ji} \text{ egészek } (i = 1, 2, \dots, m) \\
 \sum_{i=1}^m a_i x_{ji} \leq L_j \\
 R_{jl} \leq \sum_{i=1}^m x_{ji} \leq R_{ju} \\
 T_{jl} \leq \sum_{i=1}^m \delta(x_{ji}) \leq T_{ju} \\
 \sum_{i=1}^m c_i x_{ji} \rightarrow \max,
 \end{aligned} \tag{9}$$

ahol $R_{jl}, R_{ju}, T_{jl}, T_{ju}$ pozitív egészek, $a_i > 0$ és $c_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Képezzük a (9) feladatból az alábbi redukciós feladatot:

$$\begin{aligned}
 0 \leq x_{ji} \leq u_{ji} - l_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
 \sum_{i=1}^m a_i x_{ji} \leq L_j - \sum_{i=1}^m l_{ji} a_i \\
 \sum_{i=1}^m x_{ji} \leq R_{ju} - \sum_{i=1}^m l_{ji} \\
 \sum_{i=1}^m \delta(x_{ji}) \leq T_{ju} - \sum_{i=1}^m \delta(l_{ji})
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i x_{ji} \rightarrow \max.$$

Tegyük fel, hogy a (10) feladat megengedett megoldásainak halmaza nem üres és optimális megoldása $(\bar{x}_{j1}, \bar{x}_{j2}, \dots, \bar{x}_{jm})$.
Ekkor nyilvánvalóan teljesül az alábbi lemma:

1. lemma. A (9) feladat célfüggvényének a $\sum_{i=1}^m c_i(\bar{x}_{ji} + l_{ji})$ mennyiség egy felső korlátja. Ha

$$R_{jl} - \sum_{i=1}^m (l_{ji} + \bar{x}_{ji}) \leq 0 \text{ és } T_{jl} - \sum_{i=1}^m [\delta(l_{ji}) + \delta(\bar{x}_{ji})] \leq 0,$$

akkor a $(\bar{x}_{j1} + l_{j1}, \bar{x}_{j2} + l_{j2}, \dots, \bar{x}_{jm} + l_{jm})$ vektor a (9) feladat optimális megoldása.

A fentiek miatt a továbbiakban a redukált (10) feladattal foglalkozunk, amelynek felső korlátait alkalmazzuk a (9) feladat célfüggvényének becsléséhez. Megjegyezzük, hogy egyes esetekben a (9) feladatra ez a becslés durva (pl. ha $R_{jl} - \sum_{i=1}^m l_{ji} > 0$ és $T_{jl} - \sum_{i=1}^m \delta(l_{ji}) > 0$), azonban előnye, hogy gyorsan és egyszerűen kiszámolható.

Rendezzük át az alapanyagokat és az idomokat:

$$L_1|C_1 \geq L_2|C_2 \geq \dots \geq L_p|C_p \text{ és} \quad (11)$$

$$c_1|a_1 \geq c_2|a_2 \geq \dots \geq c_m|a_m.$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért a (10) feladatot az alábbi formába írjuk át, ahol a korábbi jelöléseket használjuk (de már redukált értékkel):

$$0 \leq x_{ji} \leq u_{ji} \quad x_{ji}, u_{ji} \text{ egészek } (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i x_{ji} \leq L_j$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ji} \leq R_{ju} \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m \delta(x_{ji}) \leq T_{ju}$$

$$\sum_{i=1}^m c_i x_{ji} \rightarrow \max.$$

A (8) feladat optimális megoldását úgy kapjuk meg, hogy először $j = 1$, majd $j = 2, \dots, j = p$ esetben megoldjuk egyenként a (12) részfeladatot. Az eljárás szekvenciális felépítése miatt két becslést kell készítenünk. A j -edik részfeladat célfüggvényértékére adunk egy felső korlátot, amellyel azt becsüljük meg, hogy a (8) feladatra az eddigi legjobb megoldásnál ez a részfeladat adhat-e jobbat. Ha igen, akkor a j -edik feladat egyes részhalmazait teszteljük szintén felső korlátokat megadva. Az egyes részhalmazok vizsgálatánál GIL-

MORE és GOMORY lexikografikus rendezésen alapuló eljárását [9] fejlesztettük tovább, amely a folytonos feladat megoldását használja fel. (Folytonosnak nevezzük a feladatot, ha az egészcértékűségtől eltekintünk.)

Előbb a legszükségesebb fogalmakat és jelöléseket adjuk meg. Tekintsük az $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ és az $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ nemnegatív vektorokat.

Definíció: Az x vektor *lexikografikus rendezésben követi* az y vektort (vagy nagyobb nála), ha van olyan q , amely $1 \leq q \leq m$ és $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{q-1} = y_{q-1}$ és $x_q > y_q$.

Definíció: Az y vektor q -szerint *lexikografikusan kisebb* az x vektornál ($1 \leq q \leq m$), ha $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_{q-1} = x_{q-1}$ és $y_q < x_q$.

Jelölje a v valós szám *egész részét* $[\]^-$, azaz a v -nél nem nagyobb legnagyobb egész számot.

Készítsük el a (12) feladat megengedett megoldásai közül a lexikografikus rendezés szerinti legnagyobbat:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j1} &= \min \{ [L_j/a_1]^-, u_{j1}, R_{ju} \} \\ \bar{x}_{jn} &= \begin{cases} \min \left\{ \left[\left(L_j - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar{x}_{ji} \right) / a_n \right], u_{jn}, R_{ju} - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_{ji} \right\} & \text{ha } \sum_{i=1}^{n-1} \delta(\bar{x}_{ji}) < T_{ju}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

$(n = 2, 3, \dots, m).$

Legyen $r = \max \{ i \mid \bar{x}_{jn} = u_{jn} \ (n = 1, 2, \dots, i) \}$.

A következőkben a 0–1 programozási feladatok körében közismert két lemma általánosítását adjuk meg (lásd pl. [23]).

2. lemma. Ha $\sum_{i=1}^r a_i \bar{x}_{ji} = L_j$,

akkor a (12) feladat optimális megoldása

$$x_{j1} = \bar{x}_{j1}, x_{j2} = \bar{x}_{j2}, \dots, x_{jr} = \bar{x}_{jr} \text{ és } x_{ji} = 0 \ (i = r + 1, \dots, m).$$

Jelölje P_j a (12) feladat optimális célfüggvényértékét.

3. lemma. Ha $\sum_{i=1}^r a_i \bar{x}_{ji} < L_j$, akkor

$$P_j \leq \sum_{i=1}^r c_i \bar{x}_{ji} + \frac{L_j - \sum_{i=1}^r a_i u_{ji}}{c_{r+1}} c_{r+1}.$$

Mindkét lemma bizonyítása triviális.

Vezessük be a célfüggvényérték korlátjának becslésére a következő jelölést, ahol az első r változó értékét lekötöttük (legyen $a_{m+1} = 1$ és $c_{m+1} = 0$):

$$M_j(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jr}) = \sum_{i=1}^r c_i x_{ji} + \frac{L_j - \sum_{i=1}^r a_i x_{ji}}{a_{r+1}} c_{r+1}.$$

A (8) feladat optimális megoldását úgy kapjuk meg, hogy sorrendben $j = 1, 2, \dots, p$ -re megoldjuk a (12) feladatot. Jelölje Z_{opt} az eddigi legjobb hányadosértéket a (8) feladatra (célfüggvényérték osztva a megfelelő alapananyag árával).

A (13) képzési szabállyal készítsük el az x_{ji} ($i = 1, 2, \dots, m$) mennyiségeket ($j > 1$). Legyen $r = \max \{i \mid x_{jn} = u_{jn} (n = 1, 2, \dots, i)\}$.

3.1. *következmény.* Ha $Z_{\text{opt}} \geq \left(M_j(x_{j1}, \dots, x_{jr}) + \sum_{i=1}^m c_i l_{ji} \right) / C_j$, akkor a j -edik részfeladat a (8) feladatra nem szolgáltat jobb megoldást a meglévőnél, tehát a j -edik részfeladatot el lehet hagyni.

Az előbbieken a (12) feladat célfüggvényére adtunk egy felső korlátot, a továbbiakban a (12) feladat megengedett megoldásainak részalmazait vizsgáljuk, tartalmazhatják-e az optimális megoldást.

A (13) szabállyal képzett lexikografikusan legnagyobb vektorból indulunk ki. Tegyük fel, hogy eljutottunk az $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm})$ megengedett megoldáshoz. Legyen $q = \max \{i \mid x_{ji} > 0 (i = 1, 2, \dots, m)\}$ és a (12) feladatra megtalált eddigi legjobb megoldás célfüggvényértéke: Z_j .

4. *lemma.* Ha $Z_j \geq M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - 1)$, akkor az x_j vektornál q -szerint lexikografikusan kisebb vektorok a (12) feladatra nem adnak jobb megoldást az eddigieknél.

Bizonyítás: Azt kell belátni, hogy az x_j vektornál q -szerint lexikografikusan kisebb $\bar{x}_{j1} = x_{j1}, \dots, \bar{x}_{jq-1} = x_{jq-1}, \bar{x}_{jq} = x_{jq-s}, \bar{x}_{ji} \geq 0$ (ahol $1 \leq s \leq x_{jq}$ és $i = q + 1, \dots, m$) megengedett megoldásra

$$M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - 1) \geq \sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_{ji}.$$

a) Először azt látjuk be, hogy

$$M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - 1) \geq M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - s).$$

Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség nem teljesül, azaz kifejtve:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q-1} c_i x_{ji} + c_q (x_{jq} - 1) + \frac{L_j - \sum_{i=1}^{q-1} a_i x_{ji} - a_q (x_{jq} - 1)}{a_{q+1}} c_{q+1} < \\ & < \sum_{i=1}^{q-1} c_i x_{ji} + c_q (x_{jq} - s) + \frac{L_j - \sum_{i=1}^{q-1} a_i x_{ji} - a_q (x_{jq} - s)}{a_{q+1}} c_{q+1}. \end{aligned}$$

Egyszerűsítve

$$(s - 1) c_q a_{q+1} - (x_{jq} - 1) a_q c_{q+1} < - (x_{jq} - s) a_q c_{q+1}$$

$$\frac{c_q}{a_q} < \frac{c_{q+1}}{a_{q+1}},$$

ami ellentmond a (11) rendezésnek.

b) Konstruáljuk meg a (12) feladat alapján az alábbi egészértékű feladatot:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \bar{x}_{jq} \leq x_{jq} - s, \quad 0 \leq \bar{x}_{ji} \leq u_{ji} \quad (i = q + 1, \dots, m) \\
 \sum_{i=q}^m a_i \bar{x}_{ji} \leq L_j - \sum_{i=1}^{q-1} a_i x_{ji} - a_q(x_{jq} - s) \\
 \sum_{i=q}^m \bar{x}_{ji} \leq R_{ju} - \sum_{i=1}^{q-1} x_{ji} - (x_{jq} - s) \\
 \sum_{i=q}^m \delta(\bar{x}_{ji}) \leq T_{ju} - \sum_{i=1}^q \delta(x_{ji}) \\
 \sum_{i=q}^m c_i \bar{x}_{ji} \rightarrow \max.
 \end{aligned} \tag{14}$$

A fenti feladatnak legyen $\bar{x}_{jq} = x_{jq} - s, \bar{x}_{ji} \geq 0$ ($i = q + 1, \dots, m$) egy megengedett megoldása. Nyilvánvaló, hogy a (12) feladatnak $x_{j1}, \dots, x_{jq-1}, \bar{x}_{jq}, \bar{x}_{ji}$ ($i = q + 1, \dots, m$) x_j -nél q -szerint kisebb megengedett megoldása. A (14) feladatnak

$$\frac{L_j - \sum_{i=1}^{q-1} a_i x_{ji} - a_q(x_{jq} - s)}{a_{q+1}} c_{q+1}$$

egy triviális felső korlátja, ezért

$$\frac{L_j - \sum_{i=1}^{q-1} a_i x_{ji} - a_q(x_{jq} - s)}{a_{q+1}} c_{q+1} \geq \sum_{i=q}^m c_i \bar{x}_{ji}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához a

$$\sum_{i=1}^{q-1} c_i x_{ji} + c_q(x_{jq} - s)$$

mennyiséget adva (ahol $\bar{x}_{j1} = x_{j1}, \dots, \bar{x}_{jq} = x_{jq} - s$), kapjuk, hogy

$$M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - s) \geq \sum_{i=1}^m c_i \bar{x}_{ji}.$$

Az egyenlőtlenségből az a) részben bizonyítottakat felhasználva a lemma állítása adódik.

4.1. *következmény.* Ha $Z_{\text{opt}} \geq (M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - 1) + \sum_{i=1}^m c_i l_{ji}) \Big| C_j$,

akkor az x_j vektornál q -szerint lexicografikusan kisebb vektorok a (8) feladatra nem adnak jobb megoldást az ediginél.

4.2. *következmény.* Ha $Z_{\text{opt}} \geq (M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - 1) + \sum_{i=1}^m c_i l_{ji}) \Big| C_j$

és $r = \max \{i \mid x_{ji} > 0 \ (i = 1, 2, \dots, q - 1)\}$ akkor elég az $x_{j1}, \dots, x_{jr} - 1$ kötött változók mellett a 4.1. következmény feltételét megvizsgálni.

A fenti eredmények birtokában térjünk vissza a (8) feladathoz, amelynek optimális megoldását (ha létezik) a következő eljárás szolgáltatja ($a :=$ jelölés programozási értelemben értékadást jelöl):

0. lépés. (kezdeti értékek megadása)

Legyen $j := 0$ és $Z_{\text{opt}} := 0$.

1. lépés. (előzetes tesztelés és redukálás)

Legyen $j := j + 1$, ha $j = p + 1$ akkor STOP.

Legyen $L_j := L_j - \sum_{i=1}^m a_i l_{ji}$ és $a' = \min \{a_i \mid l_{ji} < u_{ji} \ (i = 1, 2, \dots, m)\}$

$$R_{ju} := R_{ju} - \sum_{i=1}^m l_{ji}; \quad T_{ju} := T_{ju} - \sum_{i=1}^m \delta(l_{ji})$$

$$u_{ji} := u_{ji} - l_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ha $a' < L_j$, $0 < R_{ju}$, $0 < T_{ju}$ és $0 \leq u_{ji} \ (i = 1, 2, \dots, m)$
akkor menj a 2. lépésre,
egyébként menj az 1. lépésre.

2. lépés. (induló megoldás elkészítése)

Legyen $x_{j1} := \min \{[L_j/a_1]^-, u_{j1}, R_{ju}\}$

$$x_{jn} := \begin{cases} \min \left\{ \left[\left(L_j - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{ji} \right) / a_n \right]^-, u_{jn}, R_{ju} - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ji} \right\} & \text{ha } \sum_{i=1}^{n-1} \delta(x_{ji}) < T_{ju} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(n = 2, 3, \dots, m).$$

Legyen $a_{m+1} := 1$ és $c_{m+1} := 0$.

3. lépés. (j -edik részfeladat célfüggvényének becslése)

Legyen $q := \max \{i \mid x_{jn} = u_{jn} \ (n = 1, 2, \dots, i)\}$.

$$\text{Ha } Z_{\text{opt}} \geq \left(M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq}) + \sum_{i=1}^m c_i l_{ji} \right) / C_j,$$

akkor menj az 1. lépésre,
egyébként menj a 4. lépésre.

4. lépés. (egy megengedett megoldás vizsgálata)

$$\text{Ha } Z_{\text{opt}} < \left(\sum_{i=1}^m c_i (x_{ji} + l_{ji}) \right) / C_j \text{ és } R_{jl} \leq \sum_{i=1}^m (x_{ji} + l_{ji}), \quad T_{jl} \leq \sum_{i=1}^m \delta(x_{ji} + l_{ji})$$

akkor legyen $Z_{\text{opt}} := \left(\sum_{i=1}^m c_i (x_{ji} + l_{ji}) \right) / C_j$ és tároljuk az

$$(x_{j1} + l_{j1}, x_{j2} + l_{j2}, \dots, x_{jm} + l_{jm}) \quad \text{vektort,}$$

egyébként menj az 5. lépésre.

5. lépés. (megengedett megoldások részhalmazának tesztelése)

5.1. legyen $q := \max \{i \mid x_{ji} > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)\}$.

Ha $\sum_{i=1}^m \delta(x_{ji}) = T_{ju}$ vagy $q = m$ akkor legyen $x_{jq} = 0$.

5.2. Legyen $q := \max \{i \mid x_{ji} > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)\}$.

Ha $Z_{\text{opt}} < \left(M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq} - 1) + \sum_{i=1}^m c_i l_{ji} \right) / C_j$,

akkor menj a 6. lépésre,
egyébként legyen $x_{jq} = 0$.

5.3. Ha $x_{ji} = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$ akkor menj az 1. lépésre,
egyébként menj az 5.2. lépésre.

6. lépés. (q -szerint lexikografikusan kisebb vektor előállítás)

Legyen $x_{jq+1} = \min \left\{ \left[\left(L_j - \sum_{i=1}^q a_i x_{ji} \right) / a_{q+1} \right]^-, u_{jq+1}, R_{ju} - \sum_{i=1}^q x_{ji} \right\}$

$x_{jn} := \begin{cases} \min \left\{ \left[\left(L_j - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{ji} \right) / a_n \right]^-, u_{jn}, R_{ju} - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ji} \right\} & \text{ha } \sum_{i=1}^{n-1} \delta(x_{ji}) < T_{ju} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

($n = q + 2, \dots, m$).

Menj a 4. lépésre.

Ha az eljárás végeztével $Z_{\text{opt}} = 0$, akkor a (8) feladatnak nincs lehetséges megoldása, egyébként előállítottuk az optimális megoldást.

5. állítás. A fenti eljárás véges sok lépésben végetér és a (8) feladatra optimális megoldást szolgáltat.

Bizonyítás: a) A lexikografikus rendezés szerinti legnagyobb vektorból kiindulva mindig lexikografikusan kisebb vektorokat vizsgálunk az 5.2. lépésben, ezért egy vektor csak egyszer fordulhat elő. Mivel a lehetséges megoldások száma is véges, ezért az eljárás véges sok lépésben végetér.

b) A (8) feladat megengedett megoldásainak részhalmazait a 3. lépésben a 3.1. következményt, az 5.2. lépésben a 4.1. és 4.2. következményt felhasználva hagyjuk el, így az optimális megoldást nem tartalmazhatják az elhagyott részhalmazok.

Az eljárás a (8) feladatot $0, 1, \dots, R_{jl}$ és $0, 1, \dots, T_{jl} \ (j = 1, 2, \dots, p)$ alsó korlátokra is megvizsgálja, azonban csak a megfelelő alsó korlátoknak elegendő vektorokat fogadja el a 4. lépésben.

A fenti alapeljárás gyorsítható az alábbiak felhasználásával:

(i) Legyen $\text{MIN}_i = \min \{a_n \mid i \leq n \leq m\}$ és $\text{MAX}_i = \max \{a_n \mid i \leq n \leq m\}$.

Az 5.2. lépésben a felsőkorlát becslésénél a

$$\text{MIN}_{q+1} \leq L_j - \sum_{i=1}^q a_i x_{ji}$$

$$\text{és a } Z_{\text{opt}} \leq \left(\sum_{i=1}^q c_i x_{ji} + \left(R_{ju} - \sum_{i=1}^q x_{ji} \right) \text{MAX}_{q+1} \frac{c_{q+1}}{a_{q+1}} \right) / C_j$$

feltételeket is figyelembe vesszük, ekkor a fabejárásnál nem kell lemenni a levélig akkor sem, ha a folytonos megoldásból adódó becslés ezt lehetővé tenné.

- (ii) Egyszerű eszközökkel igazolható, ha $a_i \leq a_n$ és $c_i \geq c_n$, valamint $u_{ji} a_i + a_n > L_j$, akkor $x_{jn} = 0$. Ezáltal a feladat mérete (az m) csökkenthető a 2. lépésben.

4. Az eljárás heurisztikus módosítása

A 3. fejezetben ismertetett eljárás a (8) feladat optimális megoldását szolgáltatja, azonban a leszabási módszerek többségénél elég egy jó közelítő megoldás megkeresése. A GGM-nél egy vektor bázisba vonhatóságának feltétele a megfelelő árnyékköltség pozitivitása, a

$$\sum_{i=1}^m c_i x_{ji} - C_j > 0$$

egyenlőtlenség fennállása. Heurisztikus szekvenciális eljárásoknál is előnyösebb az eljárás „mohósága” miatt egy megfelelő közelítő megoldás elkészítése.

Mivel a vezérlő paraméterek módosíthatásával a leszabás pillanatnyi üzemi feltételeit kielégítő szabásmintákat akarunk előállítani, ezért a darabolás helyén vagy onnan elérhető távolságban kell a számítógépnek lennie. Napjainkban ez helyben levő személyi, illetve mikroszámítógépekkel oldható meg, amelyeknek teljesítményére tekintettel kell lenni az algoritmusok és a számítógépes programok tervezése során (távadatfeldolgozásra, nagyobb számítógéphez való real-time csatlakozásra egy üzemnek kicsi az esélye).

A fentiek miatt az eljárást heurisztikus ötleteket felhasználva módosítottuk, ezáltal egy elfogadható közelítő megoldás gyorsan megtalálható (futtatási eredményeket az 5. fejezetben ismertetünk).

1. A felső korlátok eredeti becslése durvának bizonyult, ezért a 3. és az 5.2. lépésben $M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq}) - t$ módosítottuk:

$$M_j(x_{j1}, \dots, x_{jq}) = \sum_{i=1}^q c_i x_{ji} + \left[\left(L_j - \sum_{i=1}^q a_i x_{ji} \right) c_{q+1} / a_{q+1} \right]^-.$$

2. A j -edik részfeladat célfüggvényértékének becsléséhez a lexikografikusan legnagyobb vektort használjuk fel, azaz a 3. lépésben:

$$q := \max \{ i \mid x_{ji} > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m) \}.$$

3. Egy *elfogadási korlátot* ($\varepsilon > 0$) állítunk fel (amely lehet bizonyos fajlagos mutató, pl. a hulladék %-os aránya, a GGM-nél az árnyékköltség nagysága stb.). A 4. lépésben az első olyan megengedett megoldást elfogadjuk (és az eljárásból kiugrunk), amely a megadott elfogadási korlátnál nem rosszabb.

5. A számítógépes juttatások tapasztalatai

Az alapeljárást a 3. fejezet végén közölt (i) gyorsító becslésekkel (MIN_{*i*} és MAX_{*i*}) egészítettük ki, a heurisztikus módosítások közül 1. és 2., illetve esetenként a 3. változtatást vettük figyelembe. Az algoritmusra Commodore-64 mikroszámítógépen készült BASIC nyelvű program, amelyet gépi kódra fordítottunk le.

1. táblázat
Vezérlő paraméterek értékei

	R_{ju}	T_{ju}	u_{ji}	ε
a)	∞	∞	∞	—
b)	10	∞	∞	—
c)	∞	3	∞	—
d)	∞	∞	3	—
e)	10	3	3	—
f)	∞	∞	∞	0,001 L_j

2. táblázat
Az átlagos futásidő másodpercben

	$m = 50$			$m = 100$			$m = 200$		
	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$
a)	9,57	17,31	32,59	14,45	32,98	76,98	32,55	45,30	93,74
b)	5,61	10,34	22,65	6,51	17,31	39,29	8,01	27,06	73,62
c)	6,74	12,61	28,56	14,55	29,08	48,27	14,87	31,18	79,34
d)	14,24	33,34	87,22	20,96	49,01	83,11	62,64	87,49	124,92
e)	27,59	58,70	78,98	53,19	82,79	109,36	60,45	130,45	164,04
f)	3,45	8,03	9,21	3,69	4,17	7,71	3,36	5,05	15,90

A (8) feladatot a 2. táblázatban található eltérő feladatméretek (p és m) mellett oldottuk meg. A paraméterek és változók alsó korlátait zérusnak vettük, az együtthatók az alábbi korlátok között levő *valós számok* voltak, amelyeket a számítógép egyenletes eloszlású véletlenszámgenerátorával állítottunk elő:

$$\begin{aligned}
 &1000 \leq L_j \leq 3000 \\
 &L_j - 200 \leq C_j \leq L_j + 200 \\
 &10 \leq a_i \leq 400 \\
 &a_i \leq c_i \leq 5a_i.
 \end{aligned}$$

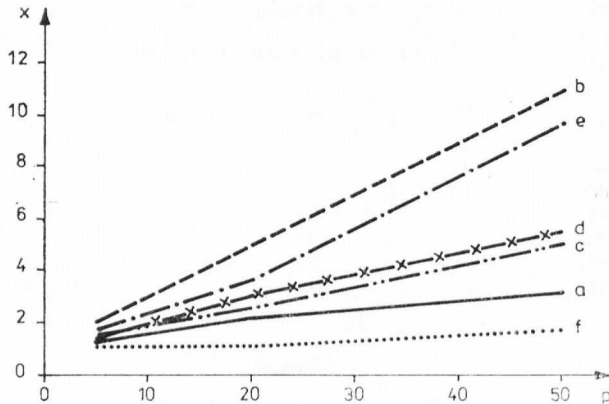
Feladatonként az 1. táblázatban megadott 6 esetet vettük figyelembe, ahol az (f) esetben ε küszöbszám a 0,1%-os hulladékot (felületvesztéséget) jelenti. Feladatméretenként és esetenként 10 feladatot generáltunk, az átlagos futásidők a 2. táblázatban találhatóak (az időket másodpercben adtuk meg). A szórások jelentősek voltak, ezért az átlagok csak mérvadó becslések.

A 2. táblázatban közölt futásidőkhöz bizonyos támpontot nyújt a (11) rendezéshez szükséges idő (ahol a kapcsolódó tömböket is rendeztük), amely $m = 50$ és $p = 50$ esetben 30–33 sec, $m = 100$ és $p = 50$ esetben 60–65 sec míg $m = 200$ és $p = 50$ esetben 180–190 sec buborékrendező algoritmussal.

Az 1. ábra szemlélteti azt, hogy a vezérlő paraméterek eltérő értékei esetén a $j = 1$ -hez szükséges időnek hányszorosa kell a feladat teljes megoldásához.

Az (f) esetben, ha $L_j - \sum_{i=1}^m a_i x_{ji} \leq 0,001 L_j$, akkor az eljárás befejeződik.

Egy alkalmas küszöbszámmal a feladatnak egy közelítő megoldása, azaz egy elfogadható szabásminta gyorsan előállítható. Mivel az üzemi gyakorlatban



I. ábra. Az 1. alapanyag idejének átlagosan hányszorosa szükséges a teljes feladat megoldásához ($m = 100$)

hulladékmentes leszabás ritkán fordul elő, ezért egy megfelelő küszöbszám az esetek többségében megadható.

Az algoritmus időigénye legnagyobb az (e) esetben, amikor minden feltétel szoros, és a (d) esetben, ahol az egyedi korlátok kis értékűek. Ha az R_{ju} vagy T_{ju} paramétert vesszük szükségosnek [(b) és (c) eset], akkor a korlát nélküli (a) esetnél csak kevéssel kapunk jobb futásidőt. Szembetűnő, hogy az (f) esetben (ahol $\varepsilon = 0,001$) mennyire kicsi az időszükséglet, az (e) esethez képest egy nagyságrenddel jobb. Az 1. ábrából látható, hogy az (f) esetben általában már az első alapanyagra találunk elfogadható megoldást, nem kell minden alapanyagot végignézni.

Megjegyezzük, hogy a 3. fejezet végén megadott (i) becslések (MIN_i és MAX_i) a (b) esetben előnyösek, mivel használatukkal egy nagyságrenddel javult a leszámolás időszükséglete.

Az algoritmus programját három programrendszer tartalmazza. Egydimenziós esetben egyrészt a GGM-ben, másrészt egy heurisztikus szekvenciális eljárásban szerepel. A harmadik programrendszer a kétdimenziós két-ütemű guillotine-vágásra készült, amely heurisztikus eljárás alapján működik. Ebben az esetben nem a (8), hanem a (7) feladatot kell minden csíkszelelésre és alaptáblaméretre megoldani [ha minden idom és alaptábla elforgatható, akkor a (7) feladatot maximálisan $2p$ ($2m + 1$)-szer kell megoldani]. Az alábbi vezérlő paramétereket vettük még figyelembe:

- csíkban az idomok maximális számát,
- csíkban az idomfeleségek maximális számát,
- a csíkok maximális számát egy alaptáblán,
- az eltérő csíkok maximális számát egy alaptáblán.

Köszönetnyilvánítás: Ezúton mondok köszönetet a Békés megyei Tanács Tudományos Koordinációs Szakbizottságának, elsősorban Dr. Köteles Lajos titkárnak azért, hogy ösztöndíjjukkal lehetővé tették a témakörben való elmélyülést, a fenti eredmények kidolgozását.

(Beérkezett: 1986. február 15-én.)

IRODALOM

1. ADAMOWICZ, M.—ALBANO, A.: A solution of the rectangular cuttingstock problem. *IEEE Transactions on Sys. Man. Cyb.* 6 (1976), 302—310.
2. AKINC, U.: An algorithm for the knapsack problem. *IIE Transactions* 15 (1983), 31—36.
3. BIRÓ M.: A bináris hátizsák feladat. *Alkalmazott Mat. Lapok* 9 (1983) 1—2., 113—136.
4. DOWSLAND, W. B.: Two and three dimensional packing problems and solution methods. *NZ Oper. Res.* 13 (1985), 1—18.
5. DYCKHOFF, H.—KRUSE, H. J.—ABEL, D.—GAL, T.: Trim loss and related problems. *Omega* 13 (1985), 59—72.
6. FORGÓ F.: *Nemkonvex és diszkrét programozás*. Közgazdasági és Jogi Kk., Budapest, 1978.
7. GILMORE, P. C.: Cutting stock, linear programming, knapsacking, dynamic programming and integer programming, some interconnections. *Annals of Discrete Mathematics* 4 (1979), 217—235.
8. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research* 9 (1961), 849—859.
9. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: A linear programming approach to the cutting stock problem. — Part II. *Operations Research* 11 (1963), 863—888.
10. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research* 13 (1965), 94—120.
11. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research* 14 (1966), 1045—1074.
12. GOLDEN, B. L.: Approaches to the cutting stock problem. *AIIE Transactions* 8 (1976), 265—274.
13. GREENBERG, H.—HEGERICH, R. L.: A branch algorithm for the knapsack problem. *Management Science* 16 (1970), 327—332.
14. GREENBERG, H.—FELDMAN, I.: Better step-off algorithm for the knapsack problem. *Discr. Appl. Math.* 2 (1980), 21—25.
15. HAESSLER, R. W.: An heuristic programming solution to a non-linear cutting stock problem. *Management Science* 17 (1971), B793-B802.
16. HAESSLER, R. W.: Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems. *Operations Research* 23 (1975), 483—493.
17. HAESSLER, R. W.: A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. *Operations Research* 28 (1980), 1001—1004.
18. HINXMAN, A. I.: A two-dimensional trim-loss problem with sequencing constraints. *Advance papers of IJCAI-77, MIT* (1977), 859—864.
19. HINXMAN, A. I.: The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Opt. Res.* 5 (1980), 8—18.
20. INGARGIOLA, G. P.—KORSH, J. F.: A general algorithm for one-dimensional knapsack problems. *Operations Research* 25 (1977), 752—759.
21. JOHNSTON, R. E.: Bounds for the one dimensional cutting stock problem. *Working paper*, Footscray Ins. of Tech., Victoria, Australia (dec. 1980).
22. KALMÁR J.—LENGYEL I.: A raktárkészlet figyelembevétele a Gilmore-Gomory módszerénél. *Sigma* 17 (1984), 167—183.
23. KOVÁCS L. B.: *A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei*. Bolyai J. Matematikai Társulat jegyzete (1969).
24. KREKÓ B.: *Optimumszámítás*. Közgazdasági és Jogi Kk., Budapest (1972).
25. KUUTTI, M.—VOUTILAINEN, R.: A discrete optimization approach to the pattern analysis of the cutting stock problem. Paper presented at EURO III. Amsterdam (1979).
26. LENGYEL I.—KUBA A.: Síküveg szabásának optimalizálása. (I). *Sigma* 14 (1981), 169—190.
27. LENGYEL I.: Darabolás — korszerű módszerekkel. *Ipargazdaság* (1984. nov.), 19—31.
28. MARCONI, R.: Generalisation of a mathematical procedure for the optimal solution of two-dimensional cutting problems. *Technical reports* No. 7., Centro Studi IBM — Pisa (1970).
29. MARTELO, S.—TÓTH P.: Branch and bound algorithms for the solution of the general unidimensional knapsack problem. *Proceedings of the EURO II*. Stockholm (1976).
30. PEGELS, C. C.: Heuristic scheduling models for variant of two-dimensional cutting stock problem. *Tappi* 50 (1967), 532—535.

31. SALKIN, H. M.—DE KLUYVER, C. A.: The knapsack problem: a survey. *Naval Research Log. Quart.* 22 (1975), 127—144.
32. TILANUS, C. B.—GERHARDT, C.: An application of cutting stock in the steel industry. in: *Operational Research '75* (ed: K. B. HALEY), North-Holland, Amsterdam (1976), 669—675.

A PRACTICAL GENERALIZATION OF THE KNAPSACK PROBLEM FOR CUTTING STOCK

For solving the cutting problem, in addition to reduction to the commonly known linear programming problem, several heuristical procedures have also been worked out. From the methods applied, two approaches, most frequently used in practice, may be underlined:

1. The GILMORE—GOMORY method which solves the linear programming problem of cutting with a modified simplex method, so that the vector to be drawn into the base is produced by solving knapsack problems.

2. A heuristical sequential procedure (emptying procedure) is the one which produces a "best" cutting pattern according to some criterion, applying this pattern as many times as possible and then produces the "best" pattern for the remaining basic materials and profiles etc. The "best" cutting pattern is usually constructed from the exact or approximative solution to the knapsack problem.

The paper reviews a novel modelling of the practical circumstances of cutting materials, the problem derived as a generalization of the knapsack problem, and the procedure worked out for the solution of the problem. From among the cutting problems the generalization of the knapsack problem of one-dimensional cutting (paper rolls, bars, tubes, bands, etc.) is discussed in detail, which is the same in the case of both the Gilmore-Gomory method and the heuristical sequential procedure.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ РАСКРОЯ МАТЕРИАЛОВ

Для решения задачи раскроя материалов наряду с общеизвестными методами приведения к задаче линейного программирования разработан также целый ряд эвристических методов. Из применяемых методов автором выделяется два наиболее распространенных метода:

1. Метод Жилмора—Гомори (Gilmore—Gomory), решающий задачу линейного программирования для раскроя с помощью модифицированного симплексного метода так, что вектор, включаемый в базис, определяется из решения задачи о ранце.

2. Эвристический секвенциальный метод, который определяет с некоторой точки зрения „наилучший“ раскрой, этот раскрой применяется как можно чаще, потом из оставшегося материала также определяется „наилучший“ раскрой и т. д. „Наилучший“ раскрой конструируется из точного или приближенного решения задачи о ранце.

В статье рассматривается новая формулировка модели для практического раскроя материалов, обобщение задачи о ранце и метод его решения. Среди задач о раскрое материалов подробно рассматривается одномерная задача о раскрое (рулон бумаги, стержни, трубы, ленты и т. д.) с помощью обобщение задачи о ранце, которое применяется в методе Жилмора—Гомори, а также в эвристическом секвенциальном методе.

SZOFTVER

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ — BAGDY GÁBOR

Nagyméretű dinamikus nemlineáris ökonometriai modellek szabályozására alkalmas számítógépi programok

Bevezetés

A gazdaság dinamikájával és szabályozásának lehetőségeivel foglalkozó kutatások rendkívül széleskörűek; megállapítható, hogy e tudományág fejlesztéséből a magyar kutatók is kivették a részüket. Az ide tartozó tanulmányok, publikációk jelentős hányada elméleti jellegű [17], [19] stb. — sok esetben találkozunk pl. a gazdaság lehetséges szabályozó változóira vonatkozó kvalitatív megállapításokkal, melyeket a gazdasággal kapcsolatos bizonyos matematikailag megfogalmazható feltételekből lehet levezetni —, nem hiányoznak azonban azok a munkák sem, amelyekben az elméleti megfontolások alapján kialakított dinamikus modellt és vele együtt a bizonyos kritériumok szerint optimálisnak tekinthető szabályozást konkrétan számszerűsítik. Az utóbbi esetben, pontosabban, az ilyen esetek többségében általában — mind itthon, mind pedig határainkon kívül — az a jellemző, hogy a számszerűsített modellek általában kisméretűek [18], változóik erősen aggregált mennyiségekre, mutatókra vonatkoznak, s így az eredmények a felhasználók számára csupán orientáló információt jelentenek. Nyilvánvaló, hogy a gazdaság tervezői számára hasznos lenne, ha adott gazdaságpolitikai célok és adott gazdasági szabályozók mellett minél részletesebb előzetes információhoz lehetne jutni a különböző gazdaságpolitikai döntések várható következményeivel kapcsolatban; ez nagyobb méretű modellek kialakítását, számszerűsítését és szabályozását teszi szükségessé, mint amilyenekkel az optimális szabályozással foglalkozó irodalomban korábban találkozhattunk.

A nagy, vagy akár csak viszonylag nagyobb méretű dinamikus modellek létrehozásával kapcsolatos elvi és gyakorlati nehézségek széles körben ismeretek. Anélkül, hogy az ún. „nagy modellekkel” kapcsolatos számos fenntartás és kritikai észrevétel jogosságát megkérdőjeleznénk, úgy gondoljuk, hogy bizonyos esetekben érdemes engedményeket tenni az egzaktság rovására, ha történetesen olyan modellel van dolgunk, amely, ha elvileg nem is minden vonatkozásban kifogástalan, bizonyos evidenciák (pl. ex post előrejelzések) tanúsága szerint egyes jelenségeket, folyamatokat mégis helyesen ábrázol, s ily módon megfelelő keretek között értelmes következtetések levonását teszi lehetővé. Más szóval, abból indulunk ki, hogy vannak, és pedig nem is kizárólag csak l'art pour l'art szempontoknak eleget tevő, nagy vagy inkább közepes méretű, számszerűen meghatározott dinamikus ökonometriai modellek, amelyek bizonyos szabályozó funkciójú változók (pl. támogatások, adókulcsok stb.) hatásának vizsgálatára alkalmasak, ha csak rendelkezésünkre állnak az ehhez szükséges számítástechnikai eszközök, a bizonyos szempontok szerint optimális

szabályozást meghatározó gépi programok. Ebben a dolgozatban két olyan programcsomagot mutatunk be, amely ennek a feladatnak a megoldására, tehát nagy vagy inkább közepes méretű ökonometriai modell szabályozására alkalmas: az egyik GREGORY C. CHOW [5], [6], a másik ARNE DRUD [7], [8] nevéhez fűződik. (A méretekkal kapcsolatban mondottakat itt még azzal egészítjük ki, hogy szabályozás szempontjából gyakran nagyon bizonyul az a modell, amely becslési szempontból közepes méretű.) Ez idő szerint már mindkét programcsomag Magyarországon is a felhasználók rendelkezésére áll.¹ A két program két, lényegesen különböző megközelítést reprezentál: ezeket külön-külön fogjuk ismertetni, majd az eddigi hazai számítástechnikai tapasztalatokat a két program működését összehasonlítva, együtt fogjuk tárgyalni.

A Chow- és a Drud-féle programcsomag — ez utóbbinak a neve CONOPT (= *Control Optimal*) — már a megoldandó feladatok definíciójában is eltér egymástól, ezeket — ti. a megoldható feladatok típusát — azonban célszerű egyidejűleg tárgyalni, mivel így mind a közös, mind pedig az eltérő vonások jól érzékelhetők. Induljunk ki azokból a dinamikus nemlineáris ökonometriai modellekből, amelyek az alábbi alakba írhatók:

$$(0.1) \quad g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-\tau}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\theta}) = \varepsilon_t, \\ t = 1, 2, \dots, T,$$

ahol

t jelöli az időt, $t = 1, 2, \dots, T$, és T a vizsgált időszak hossza (időhorizont);

$y_t = (y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{n,t})'$ a modell *endogén* változóinak n -dimenziós vektora a t időszakban (a vessző transzponálást jelöl);

$x_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{m,t})'$ a modell *szabályozó* változóinak m -dimenziós vektora a t időszakban;

τ illetve θ a késleltetés maximális mértékét jelöli a modellben az endogén, ill. a szabályozó változókra vonatkozóan;

$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ a véletlen zavarások nulla várható értékű vektora a t időszakban. Fel fogjuk tenni, hogy a $V = (\text{cov}(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,s}))$ kovariancia-mátrix nullával egyenlő, hacsak $t \neq s$; $t = s$ esetén V értéke nem függ az időtől, és azt is feltesszük, hogy rendelkezésünkre áll V valamilyen becslése;

$g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_n(\cdot))'$ folytonos leképezés $R^{(\tau+1)n + \theta + 1}m$ -ből R^n -be, kétszer folytonosan differenciálható komponensekkel.

Az eddig elmondottakat a következőkkel kell kiegészítenünk. (0.1) skalár alakba — tehát g_1, g_2, \dots, g_n segítségével — átírva, nyilvánvalóan fölfogható, mint egy dinamikus nemlineáris ökonometriai modell szimultán egyenleteinek rendszere, egyszerű átrendezéstől eltekintve strukturális formában. A g leképezésben — bár ezt a jelölés nem tükrözi — bizonyos becslt, tehát adottnak tekinthető együtthatók, paraméterek függhetnek a t időtől. Ami a modell változóinak endogén és szabályozó változókra való felosztását illeti, ez szokatlannak tűnhet, mivel az ökonometriában a modellek változóit endogén és predeterminált változókra, és ezen belül az utóbbiakat késleltetett endogén és exogén változókra szokás felosztani. A kétféle terminológia között a kapcsolat a következő. A szabályozás szempontjából az endogén változóknak a vizsgált időszakhoz

¹ A programokat az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet IBM 3031 számítógépén installáltuk.

($t = 1, 2, \dots, T$) tartozó összes értékét változónak (ismeretlennek) kell tekinteni, és ezen kívül az exogén változók közül ki kell választani azokat, amelyeknek az értékét befolyásolni lehet. Ez utóbbiak, esetleges késleltetéseikkel együtt, lesznek a szabályozó változók, míg az összes többi exogén változó $t = 1, 2, \dots, T$ időszakhoz tartozó értéke a szabályozás szempontjából adott-ság, paraméter lesz. *Fontos követelmény, hogy mind az endogén, mind pedig a szabályozó változóknak a $t = 1$ időszakot megelőző értékeit ($y_0, y_{-1}, \dots, y_{1-T}, x_0, x_{-1}, \dots, x_{1-t}$) ismernünk kell, egyébként a feladat határozatlan lenne.*

Rendeljünk mármost minden endogén és szabályozó változóhoz egy alsó és egy felső korlátot a következőképpen:

$$(0.2) \quad \underline{y}_t \leq y_t \leq \bar{y}_t, \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

$$(0.3) \quad \underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t.$$

Nem zárjuk ki azt a lehetőséget, hogy bizonyos alsó határok mínusz végtelennel, bizonyos felső határok pedig plusz végtelennel legyenek egyenlők, nyilvánvaló viszont, hogy a változók egy részének értéke csak akkor lehet értelmes, ha bizonyos véges határok közé esik.

Megengedett szabályozásnak v. *vezérlésnek* nevezve mármost a szabályozó változók értékének bármely, a (0.3)-at kielégítő rendszerét, fel fogjuk tenni, hogy (0.1)-nek az endogén változókra vonatkozóan minden megengedett szabályozás mellett van megoldása.

A (0.1) modellből és a (0.2)–(0.3) feltételekből úgy jutunk optimális szabályozási feladathoz, hogy kijelölünk valamilyen gazdaságpolitikai célt, amely kifejezhető, mint az endogén és a szabályozó változóknak valamilyen valós skalár értékű függvénye a vizsgált időszakban. Legyen ez a függvény $f(y_1, y_2, \dots, y_T, x_1, x_2, \dots, x_T)$; a gazdaságpolitikai optimalitás ennek valamilyen szélsőértékével kapcsolatos, tegyük fel, hogy minimumról van szó. Mivel $y_1, \dots, y_T, x_1, \dots, x_T$ az ε_t véletlen zavaráson keresztül a véletlentől is függ, f értéke is valószínűségi változó, és ezért a várható értékének a minimalizálására kell törekednünk:

$$(0.4) \quad M(f(y_1, y_2, \dots, y_T, x_1, x_2, \dots, x_T)) = \min!$$

Technikai szempontból az f célfüggvényről ugyanazt tesszük fel, mint a (0.1) modell egyenleteiben szereplő függvényekről, azaz, kétszeri folytonos differenciálhatóságot. Ettől eltekintve a célfüggvény alakjára vonatkozóan általában nincs semmi megszorítás, és így igen sokféle gazdasági célkitűzés megfogalmazására van lehetőség (külkereskedelmi mérleghiány minimalizálása a vizsgált időszakra vonatkozóan, az import minimalizálása bizonyos relációban stb.). Széles körben használják az ún. kvadratikus célfüggvényt, amelynél az endogén változókra vonatkozóan² előírnak egy optimálisnak tekintett

$$\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_T$$

értékek által meghatározott pályát, és a követelmény ebben az esetben az, hogy a modell változói ezeket a célértékeket minél jobban megközelítsék. A

² Bizonyos esetekben technikai okokból a szabályozó változókhoz — vagy ezek egy részéhez — is rendelnek célkitűzéseket.

közelítés mértékét a célfüggvény méri, amely ekkor — a várható érték operátorától eltekintve —

$$(0.4a) \quad f = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)' K_t (y_t - \hat{y}_t)$$

alakú, ahol $t = 1, 2, \dots, T$ esetén K_t adott pozitív szemidefinit mátrix. Az a körülmény, hogy a K_t mátrixoknak nem kell pozitív *definitnek* lenniök, azt jelenti, hogy nem szükséges minden egyes skalár értelemben vett endogén változóhoz célkitűzést rendelnünk. A szabályozási feladat meghatározásának teljessé tételéhez most már csak azt kell megjegyeznünk, hogy y_t és x_t ($t = 1, 2, \dots, T$) valószínűségi változó jellege miatt a (0.2)–(0.3) feltételek teljesülését nem vehetjük biztosra, és így ezeket a

$$(0.2a) \quad P(\underline{y}_t \leq y_t \leq \bar{y}_t) > p_t$$

$$(0.3a) \quad P(\underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t) > q_t$$

követelményekkel kell helyettesítenünk, ahol $p_1, p_2, \dots, p_T, q_1, q_2, \dots, q_T$ alkalmasan választott (egynél kisebb) valószínűségek. Ily módon tehát a következő feladathoz jutottunk:

minimalizáljuk az $f(y_1, \dots, y_T, x_1, \dots, x_T)$ célfüggvény várható értékét (lásd (0.4)) a (0.1) modell valamint a (0.2a)–(0.3a) feltételek mellett.

Ebből a *sztochasztikus programozási feladathoz* bizonyos, és pedig lényeges egyszerűsítések révén jönnek létre azok a feladatok, amelyeket a Chow-féle programmal, illetve a CONOPT segítségével meg lehet oldani. G. C. CHOW felfogása szerint ([5], 161–163. oldal) az ökonometriai modellek szabályozásánál a véletlen szerepének figyelembe vétele sokkal fontosabb, mint a változók (0.2)–(0.3), illetve (0.2a)–(0.3a) típusú feltételekkel való korlátozása, e feltételek ugyanis helyes modell-specifikáció esetén eo ipso teljesülnek, kivált ha teljesen általános alakú célfüggvények helyett (0.4a) alakú kvadratikus célfüggvényekre szorítkozunk. Ilyen típusú célfüggvények esetén a K_t mátrixok alkalmas választásával valóban befolyásolható a változók értékének alakulása, és így az irreális értékek kiküszöbölése; szükség esetén a szabályozó változókat is be lehet venni a célfüggvénybe. Ennek a megközelítésnek a kritikájára később még visszatérünk, egyelőre azt szögezzük le, hogy a Chow-féle program, illetve algoritmus esetén egy (0.4a) típusú függvény várható értékének a minimalizálása a feladat a (0.1) modell mint korlátozó feltétel mellett.

A. DRUD, a CONOPT programcsomag tervezője más megoldást választott. Ő a véletlen hatások vizsgálatáról mondott le, és ily módon egy determinisztikus feladathoz jutott, melynek célfüggvénye $f(y_1, \dots, y_T, x_1, \dots, x_T)$, feltételrendszere egyrészt (0.2)–(0.3)-ból, másrészt pedig a (0.1) modelltől áll, ennél azonban a jobb oldalon álló ε_t véletlen zavarást most 0-val kell helyettesíteni. A következőkben először a Chow-féle algoritmus, azután pedig a CONOPT főbb sajátosságait fogjuk ismertetni. Megjegyezzük, hogy mindkét program szempontjából a modell egyenletei a bennük szereplő paraméterekkel együtt a bemenő adatokhoz tartoznak, azokat tehát valamilyen további program segítségével kell becsülni.

I. Kvadratikus célfüggvény várható értékének minimalizálása nemlineáris sztochasztikus modell esetén (G. C. Chow algoritmus)

Az előzőekben alkalmazott jelölések kismérvű módosításával a vizsgált feladat az alábbi alakba írható:

minimalizáljuk az

$$(1.1) \quad M \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)' K_t (y_t - \hat{y}_t)$$

kifejezést az

$$(1.2) \quad y_t = g(y_t, y_{t-1}, x_t, w_t) + \varepsilon_t, \\ t = 1, 2, \dots, T$$

modell mint feltételrendszer mellett.

Mielőtt tisztáznánk (1.2) és a bevezetésben felírt (0.1) modell kapcsolatát, néhány általános jellegű észrevételt kell elmondanunk a Chow-féle szabályozási koncepcióval kapcsolatban. Az (1.1) célfüggvényt, amely a gyakorlatban sok esetben súlyozott négyzetösszegre redukálódik, gyakran kifogásolják — többek között hazai kutatók is — mondván, hogy az szimmetrikus jellege miatt nem tesz különbséget a kitűzött céloktól felfelé vagy lefelé való eltérés között, holott nyilván nem mindegy az „összjólét” szempontjából, hogy pl. a nem rubel elszámolású külkereskedelmi mérleg aktívuma a tervezett 400 millió dollár helyett 200 vagy 600 millió lesz. Ezen kívül sokszor megemlítik, hogy (1.1) mint a gazdasági tervezés segédeszköze, igen sok szubjektív elemet tartalmaz. Ez a megállapítás elsősorban a súlyok megválasztásának kérdésére vonatkozik, és lényegében nem vitatható. Tovább rontja a helyzetet az, ha a súlyoknak eredeti feladatuk mellett még azt a szerepet is be kell tölteniük, hogy megakadályozzák irreális értékek létrejöttét a szabályozás során, vagyis, amikor a súlyoknak a (0.2a)–(0.3a) egyenlőtlenségeket is helyettesíteniük kell. Ezekkel a jogos kifogásokkal szemben azt kell megemlíteni, hogy az Egyesült Államokban és Nyugat-Európában számos esetben alkalmazták a Chow-féle szabályozási programot, és általában eredményesen. A sikeres alkalmazások példaként megemlítjük

- a Michigan-i Egyetem negyedéves ökonometriai modelljét [6],
- a SOVMOD modellcsalád egyes változatait³ [14],
- J. BRADA, A. KING és D. SCHLAGENHAUF (Egyesült Államok) cseh-szlovákiai modelljét [2],
- a Rheinisch-Westfälisches Institut für Wirtschaftsforschung (NSZK) negyedéves konjunktúra-modelljét [10],

³ Az Egyesült Államokban a hetvenes években dolgozták ki Donald Green professzor vezetésével az ún. SOVMOD (= *Soviet Model*) modelleket, elsősorban a szovjet–amerikai külkereskedelem alakulásának prognosztizálására. Green véleménye szerint az ex post jellegű vizsgálatokban a megfelelően választott súlyok többek között pl. egyértelműen tükrözték a különbséget N. Sz. Hruscov és L. I. Brezsnjev személyisége között; ezt a következtetést azonban célszerű bizonyos óvatossággal fogadnunk.

- az NSZK gazdaságát leíró, Keynes-i alapokon nyugvó ökonometriai modellt [12],
- az osztrák OPTPOL-1 modellt [20] stb.

E tapasztalatok fényében célszerűtlen lenne a Chow-féle megközelítést heurisztikus elemeire való hivatkozással elvetni; közismert, hogy az alkalmazott matematika számos területén használunk részben vagy egészen heurisztikus alapon működő módszereket.

Áttérve mármost az (1.2), illetve a korábban felírt (0.1) modell közötti formális különbségekre, azt látjuk, hogy (1.2)-ben

- az endogén változók egynél magasabb rendű késleltetett értékei nem szerepelnek a modellben;
- a szabályozó változók késleltetett értékei nem fordulnak elő;
- szerepel egy w_t paraméter.

Ez utóbbi most — mint vektor — azoknak az exogén változóknak az összességét jelöli, amelyek a modell becslésénél szerepeltek, szabályozó funkciójuk azonban nincsen. Könnyen belátható, hogy amennyiben egy modellben az $y_{t-2}, y_{t-3}, \dots, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ stb. változók is szerepelnek, akkor azokat egyszerű *azonosságok* segítségével ki lehet küszöbölni — pl. $y_{1, t-2}$ helyett $y_{n+1, t-1}$ -et írunk, ha az endogén változók vektora ez ideig n -dimenziós volt, s. í. t. — s így módon minden dinamikus modell az (1.2) alakra hozható. Amennyiben ilyen kiküszöbölésre szükség van, akkor ezekhez — mint a modell azonosságaihoz — értelemszerűen nem tartozik véletlen zavarás, vagyis ilyen esetben ε_t bizonyos komponensei és ennek megfelelően a kovariancia-mátrix bizonyos sorai, ill. oszlopai nullával lesznek egyenlők. A modellben egyébként természetesen szerepelhetnek a kiküszöbölés céljára bevezetett azonosságok mellett egyéb azonosságok is. Az a körülmény, hogy (1.2)-ben a bal oldal az egyes endogén változók kifejezését adja meg, a strukturális forma eredetére (a becslés folyamatára) utal.

G. C. Chow-nak az (1.1)–(1.2) nemlineáris szabályozási feladatra adott eljárása egy lineáris modell szabályozására kidolgozott algoritmus általánosítása. Célszerű ezt az eredeti — egyébként ugyancsak Chow nevéhez fűződő — eljárást bemutatni, és pedig nemesupán azért, mert így a nemlineáris módszer leírását is áttekinthetőbbé lehet tenni, hanem azért is, mivel az eredeti eljárás minden tekintetben korrekt, míg a nemlineáris feladatra adott eljárás egy sor heurisztikus elemet is tartalmaz. Tekintsük tehát azt az esetet, amikor (1.2) szerepét a következő lineáris modell veszi át:

$$(1.3) \quad y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + \varepsilon_t, \\ t = 1, 2, \dots, T;$$

itt A_t és C_t adott mátrixok, b_t pedig adott vektor, amely a nem szabályozó funkciójú exogén változók valamilyen lineáris kifejezése — az (1.2)-ben szereplő w_t megfelelője —; az a körülmény, hogy (1.2)-vel ellentétben y_t most nem szerepel a jobb oldalon, esetleges átrendezést jelent a strukturális formához képest.

A Chow által javasolt megoldás az ún. Bellman-elven alapul. Ez azt mondja ki, hogy amennyiben adott a $t = 1, 2, \dots, T$ időhorizonton az (1.1), (1.3)

feladatnak egy optimális

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_T, y_T$$

megoldása, akkor ez optimális az időhorizont bármely részére vonatkozóan is. Ebből az következik, hogy a T időszakra vonatkozóan az x_T optimális vezérlés és az ehhez tartozó y_T trajektória-elem meghatározható mint $x_1, y_1, \dots, x_{T-1}, y_{T-1}$ függvénye, hiszen y_T -től az (1.1) célfüggvénynek csupán az utolsó tagja függ. Ezzel kapcsolatban a következő segédtételekre lesz szükségünk:

1. lemma. Legyen

$$(1.4) \quad y = Ay_{-1} + Cx + b + \varepsilon$$

az (1.3) modellnek valamelyik $1 \leq t \leq T$ időszakhoz tartozó egyenlete; itt tehát — későbbiekben nyilvánvalóvá váló szempontok miatt — elhagytuk a t indexet, és y_{t-1} helyett y_{-1} -et írtunk. Legyen továbbá \hat{y} tetszőleges, y -nal megegyező dimenziójú konstans vektor, K pedig olyan, az y -nak megfelelő méretű pozitív szemidefinit mátrix, amelyre $C'KC$ nemszinguláris. Állítás: tetszőleges y_{-1} esetén az

$$(1.5) \quad M(y - \hat{y})' K(y - \hat{y})$$

kifejezés az (1.4) feltétel mellett akkor és csak akkor lesz minimális, ha

$$(1.6) \quad x = Gy_{-1} + q,$$

ahol

$$(1.7) \quad G = -(C'KC)^{-1}C'KA, \quad q = (C'KC)^{-1}C'K(\hat{y} - b - \varepsilon).$$

*Bizonyítás.*⁴ Mivel K pozitív szemidefinit, van olyan pozitív szemidefinit L mátrix, amelyre $K = L'L$.

Ennek következtében a

$$z = (y - \hat{y})' K(y - \hat{y})$$

kifejezést $z = r'r$ alakba írhatjuk, ahol

$$r = LAy_{-1} + LCx + Lb + L\varepsilon - L\hat{y};$$

itt y -nak (1.4) alatti előállítását is figyelembe vettük.

Legyen

$$Q = LC(C'KC)^{-1}C'L';$$

$L'L = K$ miatt ez éppen az LC mátrix képterére vonatkozó szimmetrikus projektor. Mivel nyilván $r = Qr + (E - Q)r$, ahol E jelöli a megfelelő méretű egységmátrixot, a z kifejezést a következő alakba is írhatjuk:

$$z = r'Qr + r'(E - Q)r.$$

⁴ Mivel dolgozatunk ismertető jellegű, bizonyításokat csak elvéve közlünk, és csak olyan esetekben, amikor ezt valami külön szempont indokolja. A jelen esetben azért került erre sor, mivel G. C. Chow bizonyítása pontatlan.

Itt most a második tag a jobb oldalon egyrészt nemnegatív, másrészt

$$(E - Q)LC = 0$$

miatt x értékétől független. Ily módon, mivel $r'Qr$ is nemnegatív,

$$z \geq r'(E - Q)r,$$

és itt egyenlőségjel akkor és csak akkor fog állni, ha $r'Qr = 0$, vagyis, ha

$$Qr = QLAy_{-1} + QLCx + QL(b + \varepsilon - \hat{y}) = 0.$$

Ezt az egyenletet balról $C'L'$ -vel szorozva, a vele ekvivalens

$$C'KAy_{-1} + C'KCx + C'K(b + \varepsilon - \hat{y}) = 0$$

egyenlethez jutunk, amely, mint könnyen belátható, éppen akkor teljesül, ha x -et (1.6) és (1.7) határozza meg. Ez tehát az az x vektor, amelyre a z kifejezés tetszőleges y_{-1} mellett minimális lesz, és a várható érték monotonitása miatt ugyanerre az x -re veszi fel (1.5) is a minimumát. Konvex célfüggvényről lévén szó, megfontolásainkból egyidejűleg következik a feltételeknek mind a szűkségessége, mind az elegendősége.

A Bellman-elv alapján mármost ahhoz, hogy az x_t szabályozás a $t = 1, 2, \dots, T$ időhorizonton optimális legyen, $t = T$ -re teljesülniök kell a következő összefüggéseknek:

$$(1.8) \quad x_T = G_T y_{T-1} + q_T$$

$$(1.9) \quad G_T = -(C'_T K_T C_T)^{-1} C'_T K_T A_T, \quad q_T = (C'_T K_T C_T)^{-1} C'_T K_T (\hat{y}_T - b_T - \varepsilon_T).$$

A lényeg itt az, hogy G_T és q_T értékét x_T és y_{T-1} értékétől függetlenül meg lehetett határozni. (1.8)-nak t tetszőleges értékéhez tartozó

$$(1.10) \quad x_t = G_t y_{t-1} + q_t$$

általánosítását *lineáris visszacsatolásnak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy amennyiben G_t és q_t minden t időszakra ismert, akkor az endogén és a szabályozó változók értéke az (1.3) modell alapján $t = 1$ -ből kiindulva, szukcesszive meghatározható. Könnyen belátható a következő segédétel helyessége:

2. lemma. Ha az (1.3) modell esetén minden időszakra fennáll (1.10), továbbá G_t minden véletlen hatástól független, míg q_t csupán a t -edik időszakhoz tartozó véletlen zavarástól, ε_t -től függ, akkor y_t csak ε_1 -től, ε_2 -től, \dots , ε_t -től függ. Ebből következően y_{t-1} és ε_t statisztikailag független egymástól.

Az (1.3) modell valamint (1.8)–(1.9) segítségével y_T az (1.1) célfüggvényből kiküszöbölhető úgy, hogy az formálisan már csak y_1 -től, y_2 -től, \dots , y_{T-1} -től fog függni. Ehhez azt kell megjegyezni, hogy

– egyrészt a 2. lemma miatt

$$M \varepsilon'_T K_T (A_T + C_T G_T) y_{T-1} = 0,$$

– másrészt az 1. lemma bizonyításából következően

$$q'_T C'_T K_T (A_T + C_T G_T) = 0.$$

Ennek, valamint az előbb mondottaknak figyelembe vételével (1.1) utolsó két tagja így írható:

$$(1.11) \quad M(y_{T-1} - \hat{y}_{T-1})' K_{T-1}(y_{T-1} - \hat{y}_{T-1}) + \\ M[(A_T + C_T G_T)y_{T-1} + C_T q_T + b_T + \varepsilon_T - \hat{y}_T]' K_T [(A_T + C_T G_T)y_{T-1} + \\ + C_T q_T + b_T + \varepsilon_T - \hat{y}_T] = M\hat{y}'_{T-1} [K_{T-1} + (A_T + C_T G_T)' K_T (A_T + \\ + C_T G_T)] y_{T-1} - 2M[\hat{y}'_{T-1} K_{T-1} + (\hat{y}_T - b_T)' K_T (A_T + C_T G_T)] y_{T-1} + c_{T-1},$$

ahol c_{T-1} egy az ε_T kovariancia-mátrixától függő konstans. Egy additív konstanstól eltekintve tehát (1.11) bal oldala az

$$M(y_{T-1} - \tilde{y}_{T-1})' H_{T-1} (y_{T-1} - \tilde{y}_{T-1})$$

kifejezéssel egyenlő, ahol

$$H_{T-1} = K_{T-1} + (A_T + C_T G_T)' K_T (A_T + C_T G_T),$$

$$H_{T-1} \tilde{y}_{T-1} = K_{T-1} \hat{y}_{T-1} + (A_T + C_T G_T)' K_T (\hat{y}_T - b_T).$$

Ebből egyrészt az következik, hogy az y_T -re, illetve x_T -re vonatkozó megmondolás — az 1. lemma alkalmazása — most megismételhető y_{T-1} -re, illetve x_{T-1} -re (majd később y_{T-2} -re és x_{T-2} -re, s i. t.), másrészt pedig, az utolsó két egyenletből egy minden t -re általánosítható rekurzív összefüggés adódik, ha bevezetjük a következő jelöléseket:

$$H_T = K_T, \quad k_T = h_T = H_T \hat{y}_T$$

$$h_{T-1} = H_{T-1} \tilde{y}_{T-1}, \quad k_{T-1} = K_{T-1} \hat{y}_{T-1}.$$

Ezekkel a jelölésekkel (1.9) tetszőleges t -hez tartozó megfelelője a következő lesz:

$$(1.12) \quad G_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' H_t A_t$$

$$q_t = (C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' (h_t - H_t b_t - H_t \varepsilon_t).$$

Ezzel tehát az (1.1) kifejezés lineáris modell melletti minimalizálásának algoritmusát meg van határozva: a lineáris visszacsatolásban szereplő mátrixokat és vektorokat a $t = T, T - 1, T - 2, \dots$ sorrendnek megfelelően kell kiszámítani, majd ezek birtokában az endogén és a szabályozó változók értékét a $t = 1$ időponttól kezdve, az időben előre haladva lehet meghatározni. Bár a módszerrel kapcsolatos számítástechnikai tapasztalatainkat a dolgozat 3. részében fogjuk ismertetni, már itt megjegyezzük, hogy ez az egyszerűsége révén elegáns eljárás (1.12) valamint a H_t -re, illetve h_t -re vonatkozó rekurzív formulák következtében „elrontja” a modellben szereplő A_t és C_t mátrixok „ritkás” tulajdonságát, és már néhány iteráció után sűrű, teli H_t és G_t mátrixokat generál. Úgy tűnik, hogy ezen a számítástechnikai szempontból kedvezőtlen adottságon nemigen lehet segíteni.

A következőkben G. C. Chow-nak a nemlineáris modellek szabályozására adott algoritmusát ismertetjük vázlatosan. Feladatunk tehát az

$$M \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)' K_t (y_t - \hat{y}_t)$$

kifejezés minimalizálása az

$$(1.2) \quad y_t = g(y_t, y_{t-1}, x_t, w_t) + \varepsilon_t, \\ t = 1, 2, \dots, T$$

modell mint feltételrendszer mellett. Az eljárás a következő.

Inicializálás: kiindulópontunk a szabályozó változók valamilyen $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T$ kezdeti értéke.

1. lépés. A szabályozó változók adott értéke mellett $t = 1, 2, \dots, T$ esetén Gauss-Seidel módszerrel meghatározzuk az endogén változók olyan $y_1^0, y_2^0, \dots, y_T^0$ értékét, amelyek kielégítik az (1.2) nemlineáris modellt $\varepsilon_t = 0$ esetén.
2. lépés. Linearizáljuk a modellt az $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T, y_1^0, y_2^0, \dots, y_T^0$ megoldás körül, és a linearizált modellt átrendezéssel hozzuk a következő alakra:

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

3. lépés.

A célfüggvényt minimalizáljuk a lineáris modell mellett. Legyen az optimális szabályozás x_1, x_2, \dots, x_T ; ha ez bizonyos hibahatáron belül megközelíti \tilde{x}_1 -et, \tilde{x}_2 -t, \dots , \tilde{x}_T -t, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T$ új értéke rendre x_1, x_2, \dots, x_T , és folytassuk az eljárást az 1. lépésnél.

2. Determinisztikus diszkrét szabályozási feladatok megoldása az általánosított redukált gradiensek módszerével

A bevezetésben mondottaknak megfelelően ebben a fejezetben a következő programozási feladat megoldásával foglalkozunk:

$$g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-\tau}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\theta}) = 0, \\ t = 1, 2, \dots, T;$$

$$y_t \leq y_t \leq \bar{y}_t, \quad x_t \leq x_t \leq \bar{x}_t,$$

$$f(y_1, y_2, \dots, y_T, x_1, x_2, \dots, x_T) = \min!$$

Az itt alkalmazott jelölések értelemszerűen azonosak azokkal, amelyeket a dolgozat bevezetésében használtunk. Mint arra az előzőekben utaltunk, A. DRUD a tekintett feladat megoldására az általánosított redukált gradiensek módszerét [1], [9], [24] stb. látta a leginkább célravezetőnek, és ennek alapján dolgozta ki a CONOPT programcsomagot, melynek elvi alapjait a következőkben ismertetjük. Érdemes megjegyezni, hogy a CONOPT első változata a hetvenes évek végén készült el, amikor a matematikai programozás művelői között általános volt az a vélemény, hogy a nagyméretű nemlineáris programozási feladatok numerikus megoldásának a leghatékonyabb eszköze, kivált nagy méretek esetén, az általánosított redukált gradiensek módszere. Az utóbbi években azonban, többek között K. SCHITTROWSKI különböző programozási módszereket összehasonlító munkája [22] nyomán, előtérbe kerültek az ún. SLC eljárások (SLC = sequence of linearly constrained problems), amelyek az

általános nemlineáris programozási feladatok megoldását lineárisan korlátozott és többnyire kvadratikus célfüggvényű részfeladatok sorozatának megoldására vezetik vissza. Az általánosított redukált gradiensek módszerének fontosságával kapcsolatos elképzelések ezáltal módosultak, ami természetesen nem azt jelenti, hogy ezek a módszerek nem maradnak továbbra is rendkívül fontosak a matematikai programozási feladatok numerikus megoldása szempontjából. A CONOPT-tal kapcsolatban emellett azt is le kell szögezni, hogy folyamatosan tökéletesítik; ismertetésünk a legfrissebb verzió koncepcióját tartalmazza.

Az általánosított redukált gradiensek módszerének leírásához néhány új jelölést kell bevezetnünk, sőt, az eddigi jelöléseket is bizonyos mértékig módosítanunk kell. Mindenekelőtt a módszer szempontjából nincs különbség endogén és szabályozó változók között, és ezért az y_t és x_t vektorokat egyetlen vektorrá vonjuk össze, s a továbbiakban ezt a vektort jelöljük x_t -vel. Így módon a fenti programozási feladat a következő alakot ölti:

$$(2.1) \quad g(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau}) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$(2.2) \quad \underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$(2.3) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_T) = \min !$$

x_t most m -dimenziós, — ahol m a korábbi $m + n$ -nek felel meg — $g(\cdot)$ továbbra is n -dimenziós vektor. Emlékeztetünk arra, hogy — bár ezt a jelölés nem tükrözi — g nem csupán az x_t vektoron keresztül függhet t -től, és így pl. (2.1) magában foglalja a következő lehetőséget is:

$$A_{1t}x_t + A_{2t}x_{t-1} + \dots + A_{\tau+1,t}x_{t-\tau} = b_t, \\ t = 1, 2, \dots, T,$$

ahol $A_{1t}, A_{2t}, \dots, A_{\tau+1,t}$ és b_t adott, t -től függő mennyiségek. (2.1), ill. g Jacobi-mátrixának jelölésénél természetesen nem feltételezhetünk kapcsolatot az argumentumok között, ezért x_t és késleltetett értékei helyére rendre $u_{1-t}, u_{2-t}, \dots, u_{\tau+1-t}$ -et írunk; ezek értelemszerűen m -dimenziós vektorok, melyek között semmilyen kapcsolat sincsen. A $(\tau + 1)m$ -dimenziós $(x'_t, x'_{t-1}, \dots, x'_{t-\tau})'$ helyett röviden z_t -t írva mármost a következő jelölést vezetjük be:

$$G_j(z_t) = \left. \frac{\partial g}{\partial u_j} \right|_{z_t}$$

$$j = 1, 2, \dots, \tau + 1, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

A teljes (2.1) feltételrendszerhez tartozó Jacobi-mátrixot egyszerűen G -vel jelöljük, azaz, pl. $\tau = 2$ és $T = 4$ esetén G a következő képet mutatja:

$$G = \begin{bmatrix} G_1(z_1) \\ G_2(z_1) & G_1(z_2) \\ G_3(z_1) & G_2(z_2) & G_1(z_3) \\ & G_3(z_2) & G_2(z_3) & G_1(z_4) \end{bmatrix}.$$

Az általánosított redukált gradiensek módszerének, ill. a CONOPT-program elvi alapjainak leírásához az eddigieknél tömörebb írásmódra is szükségünk

lesz. A Tm -dimenziós $(x'_1, x'_2, \dots, x'_T)'$ vektor helyére egyszerűen y betűt írva, (2.1)–(2.3) a következő alakú lesz:

$$(2.4) \quad F(y) = 0,$$

$$(2.5) \quad y \leq \bar{y} \leq \bar{y},$$

$$(2.6) \quad f(y) = \min!$$

Itt $F(y)$ azt a hipervektort jelöli, melynek komponensei $g(z_1), g(z_2), \dots, g(z_T)$. A (2.1)–(2.3) rendszert a továbbiakban *dinamikus*, a (2.4)–(2.6) rendszert pedig *statikus modellnek* fogjuk nevezni. Az y vektor komponenseinek jelölésére az y_1, y_2, \dots, y_{mT} jeleket is fogjuk használni; ezek korábbi jelentése feltehetően nem fog zavart okozni. Eddigi jelöléseinket még a következőkkel kell kiegészítenünk:

$$h' = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad h'_t = \frac{\partial f}{\partial x_t}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad G(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y},$$

tehát a statikus rendszer Jacobi mátrixát ugyanúgy jelöljük, mint a dinamikus rendszerét. Az általánosított redukált gradiens módszerének sémáját a következőkben a statikus modell jelöléseivel írjuk le.

1. Legyen y^0 egy megengedett induló megoldás, és legyen $k = 0$.
2. Határozzuk meg az aktuális $G = G^k$ Jacobi-mátrixot.
3. Válasszunk ki egy B bázist a következő feltételek mellett:
 - (a) G -nek a B -hez tartozó része, G_B legyen invertálható;
 - (b) y^k -nak B -hez tartozó részére, y_B^k -re teljesüljön az $\underline{y}_B^k < y_B^k < \bar{y}_B^k$ egyenlőtlenség.

Legyen N a B komplementer halmaza: $B \cup N = \{1, 2, \dots, mT\}$. Az oszlopok, ill. komponensek sorrendjétől eltekintve fennállnak a $G = (G_B, G_N)$ és a $h' = (h'_B, h'_N)$ összefüggések.

4. Határozzuk meg a duál változók $w' = h'_B G_B^{-1}$ vektorát és a $d' = h'_N - h'_B G_B^{-1} G_N$ redukált gradienst.⁵
5. Ha minden olyan $i \in N$ esetén, amelyre $d_i \neq 0$, $d_i > 0$ esetén $\underline{y}_i^k = y_i$, $d_i < 0$ esetén pedig $y_i^k = \bar{y}_i$ teljesül, akkor y^k Kuhn-Tucker-pont és az eljárás befejeződött.
6. Legyen az S szuperbázis azoknak a változóknak a halmaza, amelyekre $i \in N$ és $d_i \neq 0$, azonban $d_i > 0$ esetén $y_i^k > y_i$, illetve $d_i < 0$ esetén $y_i^k < \bar{y}_i$. Az $N \setminus S$ halmazt jelöljük továbbra is N -nel, y^k megfelelő részei pedig legyenek y_S^k és y_N^k . Keressünk d ismeretében olyan megengedett $c = c^k$ irányt, melyre vonatkozóan f mint y_S függvénye y_S^k egy környezetében növekvő.
7. $\alpha > 0$ különböző értékei mellett keressük a feladat egy új megengedett megoldását: rögzített α esetén határozzuk meg a bázisváltozók y_B vektorát az $F(y_B, y_S^k - \alpha c^k, y_N^k) = 0$ egyenletből Newton-módszerrel.
8. A 7. pontban meghatározott megengedett megoldások közül a legjobb cél-függvényértékű megoldást jelöljük y^{k+1} -gyel, növeljük k értékét 1-gyel, és folytassuk az eljárást a 2. lépésnél.

Mint a 2. Drud is megjegyzi, egy az általánosított redukált gradiens módszerén alapuló gépi program hatékonysága nagymértékben függ attól, hogy a cél-függvény javításának irányát (c^k) hogyan választjuk, milyen eljárást alkalma-

⁵ A gradienst sorvektornak fogjuk fel, így d , a redukált gradiens transzponáltja, oszlopvektor.

zunk a választott irányban való keresésnél stb.; nagyméretű feladatok esetén emellett kitüntetett szerepe van annak, hogy milyen mértékben sikerül kihasználni a Jacobi mátrix ritkás tulajdonságát, ami általában az ilyen feladatok velejárója. A következőkben azokat a részalgoritmusokat, eljárásokat fogjuk áttekinteni, amelyek a CONOPT programcsomag hatékony működését biztosítják; ennek során azonban, főként terjedelmi szempontok miatt, egyes technikai megoldásokat részletesebben, másokat vázlatosabban ismertetünk. Többnyire a *statikus feladattal* fogunk foglalkozni, a *dinamikus feladatot* csupán olyan esetekben vizsgáljuk részletesen, amikor az eredeti — tehát a (2.1)–(2.3) — feladat strukturális sajátosságaiból adódó lehetőségek kiaknázása nem magától értetődő, ilyen eset például a bázis kiválasztása és a bázismátrix invertálása. A jobb áttekinthetőség érdekében a további mondanivalónkat alfejezetekre tagoljuk a következők szerint:

- bázis kiválasztása és invertálás statikus feladat esetén;
- bázis kiválasztása és invertálás dinamikus feladat esetén;
- megengedett irány meghatározása a redukált gradiens segítségével (statikus feladat);
- a célfüggvényérték javítása adott irány mentén (statikus feladat);
- induló megengedett megoldás meghatározása.

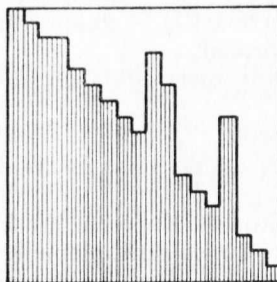
2.1. *Bázis kiválasztása és a bázismátrix invertálása statikus feladat esetén*

Ezt a részfeladatot a CONOPT programban ugyanúgy oldották meg, mint a kereskedelmi forgalomban levő lineáris programozási kódoknál, vagyis az inverz szorzatalakjának és a gyakorlatilag optimális pivotelem-kiválasztást biztosító HELLERMAN—RARICK-eljárás [15] felhasználásával. Mint ismeretes, ez a következőket jelenti:

- a) adott $\bar{n} \times \bar{m}$ -es A mátrixból, feltéve, hogy $\bar{n} < \bar{m}$ és $\text{rang}(A) = \bar{n}$, az eljárás kiválaszt \bar{n} független pivotelemet oly módon, hogy az ezek által meghatározott $\bar{n} \times \bar{n}$ -es A_B bázismátrix a sorok és oszlopok sorrendjétől eltekintve a lehető legkisebb mértékben tér el egy alsó háromszögmátrixtól;
- b) az eljárás előállítja A_B inverzét, éspedig

$$(2.7) \quad A_B^{-1} = E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1$$

alakban, ahol E_1, \dots, E_r ún. η -mátrixok, amelyek az egységmátrixtól csupán egy-egy oszlopban különböznek; ezeket az egységvektortól különböző oszlopokat η -vektoroknak nevezzük. Az alsó index itt a keletkezés sorrendjére utal, $r = \bar{n}$ nem feltétlenül teljesül.



1. ábra

Az eljárás által kiválasztott A_B bázismátrix sorainak és oszlopainak alkalmas átrendezésével elérhető, hogy a pivotelemek a főátlóba kerüljenek, és akkor a mátrix az 1. ábrán látható képet mutatja; a vonalkázatlan részek csupa nullaelemnek felelnek meg, emellett természetesen lehetnek nulla-elemek a főátló alatt is. Azokat az oszlopokat, amelyekben a főátló felett csak nulla-elemek vannak, *trianguláris oszlopoknak*, a többit — tehát a „kilógó” oszlopokat — *extrém oszlopoknak* nevezzük; ez utóbbiak közhasználatú angol neve *spike*. A Hellerman — Rarick (a következőkben: HR) eljárás arra törekszik, hogy az extrém oszlopok minél rövidebbek legyenek, vagyis, hogy — az ábrán látható elrendezésben — minél kevesebb nullától különböző elemük legyen a főátló felett.

A HR-eljárás során a pivotelemek kiválasztása és A_B^{-1} szorzatalakban való előállítás, legalábbis a legtöbb gyakorlati megvalósítás esetén, egyidejűleg megy végbe. Ha történetesen A_B -ben a pivotelemek — úgy, mint az 1. ábrán — a főátló mentén helyezkednek el, akkor (2.7)-ben $r = \bar{n}$, bármely E_k -ban ($1 \leq k \leq \bar{n}$) az η -vektor pontosan a k -adik helyen áll, és azt a következő képlettel lehet kiszámítani:

$$(2.8) \quad (\eta_1^k, \eta_2^k, \dots, \eta_n^k)' = \frac{1}{a_{kk}^{k-1}} (-a_{1k}^{k-1}, \dots, -a_{k-1,k}^{k-1}, 1, -a_{k+1,k}^{k-1}, \dots, -a_{nk}^{k-1})',$$

ahol

$$(a_{1k}^{k-1}, a_{2k}^{k-1}, \dots, a_{nk}^{k-1})'$$

az

$$E_{k-1}E_{k-2} \dots E_2E_1A_B$$

mátrix k -adik oszlopát jelöli ($E_0A_B = A_B$). Ha ezt a mátrixot balról E_k -val megszorozzuk, akkor csak az *extrém oszlopok* transzformálódnak, a *trianguláris oszlopok* változatlanul maradnak. Ez a szabály az általános esetben is érvényes, és a fenti algoritmus, illetve a CONOPT-program szempontjából azt jelenti, hogy a Jacobi-mátrixból kiválasztott bázismátrixnak csupán az extrém oszlopaít kell transzformálni az η -mátrixok segítségével, a trianguláris oszlopokat nem; ez utóbbiak transzformáltja (2.8) alapján szükség esetén bármikor előállítható.

Az általános elvek alkalmazása mellett a CONOPT-ban az invertálás vonatkozásában még a további, többé-kevésbé speciális szempontok is érvényesültek. Először is, az invertálás kétféle „üzemmódját” alkalmazza a program, és pedig a *báziskeresést* és az *újrainvertálást*. Báziskeresésre — amely természetesen magában foglalja az invertálást is — akkor van szükség, ha

- induló bázist kell meghatározni,
- báziscserét kell végrehajtani, mert egy vagy több bázisváltozó elérte alsó v. felső korlátját,
- az újrainvertálás nem sikerült.

Újrainvertálásról akkor beszélünk, ha a bázisváltozók halmaza ugyanaz, mint az előző megengedett megoldás esetén volt, és csak a konstanstól különböző Jacobi-elemek értéke változott. Ebben az esetben az η -mátrixok, ill. η -vektorok struktúrája, azaz, nulla- és nem nulla elemeik száma és pozíciója is változatlan, csupán a nullától különböző elemek numerikus értéke változik. Figyelembe véve, hogy — mint előbb említettük — a HR eljárás szempontjából csak

a bázismátrix extrém oszlopaít kell transzformálni, az újrainvertálás a báziskereséshez viszonyítva igen gyorsá tehető. Célszerű tehát egy már meghatározott bázist addig használni, amíg csak lehetséges. A tapasztalatok szerint ez a lehetőség sok esetben adva van, ugyanis a (2.4)–(2.6) feladat nemlineáris voltából következően az irány menti keresések mintegy 80%-a belső pontban fejeződik be, amikor is báziscserére nincs szükség, s így újrainvertálást lehet alkalmazni.

A CONOPT-program készítése során célszerűnek bizonyult néhány módosítás alkalmazása a HR eljárás implementálásánál. A fontosabb változtatások a HR eljárás eredeti változatához képest a következők voltak:

- a bázis kiválasztása során a szóba jövő extrém oszlopoknál nem csupán a háromszögmátrixból való „kilógás” mértékét kell figyelembe venni, hanem a megfelelő változónak a korlátaitól mért távolságát is;
- a pivotelem kiválasztásánál numerikus toleranciát kell megadni az elem abszolút értékére vonatkozóan;
- a bázismátrix trianguláris oszlopaít elegendő megjelölni a Jacobi-mátrixban, az extrém oszlopokat azonban transzformálni kell, és az így adódó oszlopok logikai struktúráját ugyanúgy kell tárolni, mint a Jacobi-mátrix oszlopaít.

Ha báziskeresés vagy újrainvertálás során egy lehetséges pivotelem abszolút értéke nem éri el az adott toleranciaszintet, akkor a megfelelő oszlop nem kerülhet a bázisba, illetve újrainvertálás esetén ki kell hagyni a bázisból. Ekkor további oszlopokban kell pivotelemet keresnünk, ami azt is jelentheti, hogy bővítenünk kell a bázisba bevehető változók halmazát, vagyis enyhítjük a változóknak a hozzájuk tartozó korlátoktól mért eltéréseire vonatkozó megszorítást. Ha már semmiképpen sem lehet a bázisba bevonható változók körét bővíteni, akkor egy bizonyos határig csökkenteni lehet a pivotelem abszolút értékéhez tartozó alsó korlátot, ezen túl azonban az invertálást sikertelennek kell minősítenünk, azzal a következtetéssel, hogy a Jacobi-mátrix nem tesz eleget a rangra vonatkozó kikötésnek. A báziscserével kapcsolatban megjegyezzük, hogy az ugyanúgy megy végbe, mint lineáris programozás esetén: a belépő vektort transzformáljuk az η -mátrixokkal, majd — pozíciójának megjegyzésével — $(r + 1)$ -edik elemként az η -vektorok közé soroljuk.

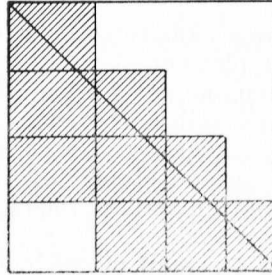
2.2. Báziskeresés és invertálás dinamikus feladat esetén

Természetesnek tűnik, hogy a (2.1)–(2.3) feladat speciális struktúráját célszerűen ki lehet használni báziskeresésnél és az inverznek szorzat alakban való előállításánál. Ezzel kapcsolatban mindenképp azt kell tisztáznunk, hogy mit állíthatunk általánosságban a bázismátrixok felépítéséről dinamikus feladatok esetén.

A feladat Jacobi-mátrixa, mint korábban láttuk, alsó blokkháromszögmátrix, melyben minden egyes blokk n sorból és m oszlopból áll. Kézenfekvőnek látszik a feltételezés, hogy minden egyes G_B bázismátrix is ilyen felépítésű, azzal az eltéréssel, hogy most a blokkok $n \times n$ -es méretűek. Ha ez igaz lenne, akkor nagyon egyszerű, elegáns formában lehetne előállítani a bázis inverzeket, sajnos azonban a bázismátrixok felépítése olyan, mint ahogyan a 2. ábrán látható.

A bázisokat tehát az a körülmény jellemzi, hogy a főátló mentén elhelyezkedő blokkok jobb alsó sarka vagy a főátlón, vagy pedig a főátló fölött helyezkedik el.

A pivotelemek elhelyezkedése szempontjából ez a következőt jelenti: a korábban bevezetett jelöléseket használva nevezzük a teljes Jacobi-mátrix $G_1(z_1)$, $G_1(z_2)$, \dots , $G_1(z_T)$ blokkjait *egyidejű* vagy *késleltetés nélküli* blokkoknak, az összes $G_i(z_i)$ alakú blokkot pedig, ahol $i \geq 2$, *késleltetett* blokkoknak; ekkor azt mondhatjuk, hogy a pivotelemek egy része a késleltetett blokkokhoz tartozik.



2. ábra

Az eddigiek figyelembevételével a dinamikus báziskiválasztás és invertálás algoritmus $t = 1, 2, \dots, T$ külső ciklusból áll, és a t -edik ciklus eredménye egy $nt \times nt$ méretű bázismátrix kiválasztása és az inverznek szorzat alakban való előállítás. Az algoritmus 1. ciklusában a G Jacobi-mátrix első n sorából és első m oszlopából, más szóval: a $G_1(z_1)$ blokkból a 2.1. alfejezetben mondottak figyelembe vételével kiválasztunk egy $n \times n$ -es B_1 bázismátrixot, és természetesen előállítjuk ennek inverzét is.

Az első t ciklus végrehajtása után az oszlopok sorrendjétől eltekintve G első $n(t+1)$ sora és első $m(t+1)$ oszlopa a 3. ábrán látható képet mutatja. A blokkok jelentése a következő:

A_t	B_t	0
C_t	D_t	$G_{1,t+1} = G_1(z_{t+1})$

3. ábra

B_t az első t időszakhoz tartozó, már meghatározott bázismátrix inverze abban az értelemben, ahogyan az előző alfejezetben leírtuk (csak az extrém oszlopok transzformálására van szükség); B_t már tartalmazhat olyan pivotelemeket, melyek késleltetett blokkhoz tartoznak;

D_t olyan részmátrix, melyet G $(nt+1)$ -edik, $(nt+2)$ -edik, \dots , $n(t+1)$ -edik sorai és B_t oszlopai határoznak meg;

A_t és C_t a G első $n(t+1)$ sorának olyan oszlopaiból áll, melyek az első t időszakhoz tartoznak, és nem kerültek a bázisba;

$G_{1,t+1} = G_1(z_{t+1})$ G -nek a $(t+1)$ -edik időszakhoz tartozó, késleltetés nélküli blokkja.

A $(t+1)$ -edik cikluson belül az 1. lépésben a $G_{1,t+1}$ blokkon belül keresünk pivotelemeket a HR eljárással. Tegyük fel, hogy $n^* < n$ elfogadható pivotelemet sikerül meghatározni; a hiányzó $n - n^*$ számú pivotelemet *ideiglene-*

sen egyesekkel, a megfelelő oszlopokat pedig az egységmátrix oszlopaival pótoljuk. A 3. ábrán látható részmatrix ezután a 4. ábrán látható részmatrixba megy át; a vonalkázott (E_t, I) mátrix itt a kiválasztott $n \times n$ -es mátrix inverzét reprezentálja, I most $(n - n^*) \times (n - n^*)$ rendű egységmátrix $\bar{G}_{1,t+1}$ a $G_{1,t+1}$ mátrixnak az a része, amelynek oszlopai nem kerültek be a bázisba. Jelöljük azt a mátrixot, amely az ábrán vastagon bekeretezett részből D_t -nek

A_t	B_t	O	O
C_t	D_t	E_t	$\bar{G}_{1,t+1}$

4. ábra

— $(E_t, I)D_tB_t$ -vel való helyettesítésével adódik, B_{t+1} -gyel. A továbbiakban báziscserét fogunk végrehajtani oly módon, hogy az egységmátrixhoz tartozó oszlopok helyére az A_t és C_t részmatrixokhoz tartozó oszlopok kerüljenek; ekközben mind a közbülső eredményeket, mind a végeredményt továbbra is B_{t+1} -gyel fogjuk jelölni

A $(t + 1)$ -edik ciklus 2. lépése tehát a következő: legyen e_j az aktuális B_{t+1} -nek az az — egységmátrixhoz tartozó — oszlopa, amelyet $(A'_t, C'_t)'$ valamelyik oszlopával szeretnénk kicserélni. Ebben az esetben, mint könnyen belátható, az $e'_j B_{t+1} (A'_t, C'_t)'$ sorvektorban kell pivotelemet keresni. Ha megfelelő pivotelemet nem találunk, akkor a 2.1. alfejezetben megadott módon kell eljárni, egyébként következzen a 3. lépés.

A $(t + 1)$ -edik ciklus 3. lépésében a pivot oszlopot transzformálni kell B_{t+1} -gyel, ezáltal megkapjuk B_{t+1} új értékét, és amennyiben a mátrix több egységmátrixhoz tartozó oszlopot már nem tartalmaz, a ciklust befejeztük; ellenkező esetben az algoritmus a 2. lépésnél folytatódik.

Az eljárásból következően a T -edik külső ciklus után $B_T = G_B^{-1}$.

2.3. Megengedett irány meghatározása a redukált gradiens ismeretében

A célfüggvény javításának irányával kapcsolatban a (2.4)–(2.5) statikus feladat vizsgálatára szorítkozunk, mivel az egyetlen dolog ezzel kapcsolatban, amiben a feladat, illetve a bázismátrix dinamikus struktúrája szerepet játszik, a duál változók, ill. a redukált gradiens kiszámítása $w' = h'_B G_B^{-1}$, ill. $d' = h'_N - w' G_N$ alakban. Erre vonatkozóan elegendő azt megjegyeznünk, hogy a (2.7) képlet értelmében a h'_B vektort az η -mátrixokkal jobbról a következő sorrendben kell megszorozni: E_r, E_{r-1}, \dots, E_2 és E_1 . A CONOPT egyébként az inverz numerikus stabilitásának ellenőrzése céljából a $h'_B - w' G_B$ vektort is kiszámítja, melynek elvben nullával kell egyenlőnek lennie.

Az általánosított redukált gradiens módszerének fenti algoritmusában a bázisba nem tartozó változókat *szuperbázisra* (S) és ezen kívüli változók halmazára (N) bontottuk fel (6. lépés). Az aktuális megengedett megoldás mellett az f célfüggvényt a szuperbázis-változók függvényének tekintjük, és így

amennyiben sikerül több, egymást követő megengedett megoldás esetén ugyanazt a bázis-szuperbázis-halmazt használnunk, akkor ezekben a lépésekben gyakorlatilag feltétel nélküli szélsőérték-feladattal van dolgunk. Az első megengedett megoldásnál az S szuperbázist úgy definiáljuk, mint azoknak a bázisban nem tartozó y_i változóknak a halmazát, amelyekre $\underline{y}_i < y_i < \bar{y}_i$, és a továbbiakban a következők szerint módosítjuk:

- y_i kilép a szuperbázisból, ha elérte alsó vagy felső korlátját, illetve, ha belép a bázisba, valamely y_j változó helyére, amely elérte alsó vagy felső korlátját;
- y_i belép a szuperbázisba, ha azokra a $j \in N$ indexekre, amelyekre $y_j^k - \alpha d_j$ kellőképpen kis pozitív α -értékek mellett \underline{y}_j és \bar{y}_j közé esik, d_i — a redukált gradiens megfelelő komponense — abszolút értékben maximális, és ezen túlmenően még egy dinamikus változó küszöbértéket is meghalad.

A CONOPT célfüggvény javítását kvázi-Newton módszerrel végzi, az egymást követő keresési irányok meghatározására pedig a C. G. BROYDENTÓL [3], R. FLETCHERTŐL [11], D. GOLDFARBÓL [13] ÉS D. F. SHANNOTÓL [23] SZÁRMAZÓ BFGS formulát alkalmazza. Abban az esetben, amikor az algoritmus működésének egy szakaszában változatlan bázis-szuperbázis halmazzal dolgozunk, ez a következőket jelenti. Legyen

$\Phi = \Phi(y_S) = f(y_B(y_S), y_S, y_N)$ a célfüggvény mint a szuperbázis változóinak a függvénye;

$y_S^0, y_S^1, y_S^2, \dots$ a szuperbázis változók vektorának egymás utáni értékei változatlan S szuperbázis mellett;

d^0, d^1, d^2, \dots a redukált gradiens, vagyis a Φ függvény y_S szerinti gradiensének egymást követő értékei;

c^0, c^1, c^2, \dots a célfüggvény javítása irányának egymás utáni értékei;

M_0, M_1, M_2, \dots a $\Phi(y_S)$ függvény Hesse-féle mátrixának ($M = \partial^2 \Phi / \partial y_S^2$) egymást követő approximációi; M_0 vagy az egységmátrixszal egyenlő, vagy pedig egy korábbi szuperbázis halmazhoz tartozó M mátrixból alkalmas transzformációval áll elő (1. a későbbiekben).

Ezekkel a jelölésekkel az eljárást a következőképpen írhatjuk le. $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén legyen

$$c^k = M_k^{-1} d^k;$$

$$y_S^{k+1} = y_S^k - \alpha_k c^k, \text{ ahol } \alpha_k \text{ a } \Phi(y_S^k - \alpha c^k) \text{ függvény}$$

egy minimumhelye;

$$(2.9) \quad v^k = y_S^{k+1} - y_S^k, \quad u^k = d^{k+1} - d^k;$$

$$(2.10) \quad M_{k+1} = M_k + \frac{u^k (u^k)'}{(u^k)' v^k} - \frac{M_k v^k (v^k)'}{(v^k)' M_k v^k}. \quad (\text{BFGS formula})$$

Abban az esetben, amikor Φ szigorúan konvex kvadratikus függvény, a kvázi-Newton módszernek ez a változata n^* lépésen belül megtalálja az optimumhelyet, feltéve, hogy az α_k értékek meghatározása pontos eljárással megy végbe [11]; n^* itt az y_S komponenseinek a számát jelöli.

A Hesse-mátrix M_k közelítése hasznos információt tartalmaz a célfüggvény viselkedéséről, és ezért célszerű ebből az információból minél többet megőriznünk abban az esetben, amikor a bázis- és szuperbázis változók halmazának

megváltoztatására van szükség. A CONOPT-ban a következő megoldást alkalmazták:

- (i) ha egy új változó belép a szuperbázisba, akkor M_k egy sorral és egy oszloppal bővül: az új diagonálelemet az eddigi diagonálemek mértani közepével egyenlőnek választjuk, az új sor és oszlop többi eleme kezdetben nulla;
- (ii) ha egy változó kilép a szuperbázisból, akkor a megfelelő sort és oszlopot kihagyjuk M_k -ből;
- (iii) ha a j -edik szuperbázis változó helyét cserél az i -edik bázis változóval, akkor két esetet különböztetünk meg: ha több ilyen i, j indexpár van, akkor M_0 értékét az új szuperbázisban az egységmátrixszal tesszük egyenlővé, míg az egy ilyen indexpár esetére vonatkozó teendőket a következőkben részletezzük.

Eljárásunknak az az alapja, hogy feladatunk $F(y) = 0$ feltételrendszerét az aktuális y^k megengedett megoldás körül linearizáljuk. Ekkor, mint könnyen belátható, a régi szuperbázis változók (y_S) és az új szuperbázis változók (\bar{y}_S) között a következő kapcsolat áll fenn:

$$E\bar{y}_S = y_S,$$

ahol E most olyan transzponált η -mátrix, amelynek j -edik sora

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n^*}) = -\frac{1}{\gamma} e_i' G_B^{-1} G_S + \frac{\gamma - 1}{\gamma} e_j'$$

és

$$\gamma = e_i' G_B^{-1} G_S e_j;$$

e_i és e_j az $n^* \times n^*$ méretű egységmátrix i -edik, ill. j -edik oszlopa. A Hesse-mátrix közelítésének transzformálását mármost a következőképpen kell elvégezni:

- (a) ki kell számítani a redukált gradienst az új szuperbázis-térben, legyen ez \bar{d}' ;
- (b) a redukált gradienst vissza kell transzformálni a régi szuperbázis-térbe:

$$(d^{k+1})' = d' = \bar{d}' E^{-1},$$

majd a (2.9)–(2.10) képletekkel kiszámítjuk a Hesse-mátrix M_{k+1} közelítését;

- (c) a mátrixot transzformáljuk az új szuperbázis-térbe:

$$\bar{M}_{k+1} = E' M_{k+1} E,$$

majd elhagyjuk azt a változót, amely a báziscserét szükségessé tette.

2.4. A célfüggvényjáték javítása adott egyenes mentén

Ezzel, az általánosított redukált gradiensek módszere szempontjából kulcsfontosságú, részfeladattal kapcsolatban a következő kérdéseket fogjuk megvizsgálni:

- a Newton-módszer implementálásának szempontjai, különös tekintettel a hatékonyságra;
- a lépésköz korlátjának becslése a bázis- és szuperbázis változók egyéni korlátainak függvényében;

- az adott egyenes mentén való keresés befejezésének kritériumai;
- a numerikus pontatlanságból származó eredménytelenség kivédésének módszerei.

A Newton-módszer alkalmazására a bázis változók meghatározásához, tehát az

$$F(y_B^k, y_S^k - \alpha c^k, y_N^k) = 0$$

egyenletnek y_B^k -re való megoldásához van szükségünk, a bázison kívüli változók y_N^k , a szuperbázis változók y_S^k , a keresési irány c^k és a lépésköz α rögzített értéke mellett. A következőkben $y_S^k - \alpha c^k$, y_N^k helyett egyszerűen y_N -et, y_B^k helyett y_B -t írunk. A Newton-módszer elvben a következőket jelenti:

- kiindulunk egy $y_B = y_B^0$ induló megoldásból (ennek megválasztására még visszatérünk);
- $l = 0, 1, 2, \dots$ esetén az

$$(2.11) \quad y_B^{l+1} = y_B^l - G_B^{-1} F(y_B^l, y_N)$$

iterációt alkalmazzuk egy alkalmasan választott megállási kritérium teljesüléséig.

Ezen a ponton röviden utalunk a *dinamikus feladattal* kapcsolatos legfontosabb tudnivalókra. G_B^{-1} minőségében ugyanazt a mátrixot használjuk, amely a redukált gradiens kiszámításánál szerepelt (l. az erre vonatkozó megjegyzést a 2.3. alfejezet elején); az ott követett eljárással ellentétben most az F vektort az η -mátrixokkal a következő sorrendben kell megszorozni: E_1, E_2, \dots, E_{r-1} és E_r . Ehhez még azt kell megjegyeznünk, hogy annak megfelelően, ahogyan a dinamikus bázis inverz, $G_B^{-1} = B_T$ létrejött (2.2. alfejezet), most a (2.11) iterációs képlet alkalmazása $t = 1, 2, \dots, T$ külső ciklus, és ezeken belül l szerinti *belső* ciklusok elvégzését fogja jelenteni. Mivel a bázismátrixok nem igazi blokk-háromszögmátrixok, hanem olyanok, mint a 2. ábrán látható mátrix, ez azt jelenti, hogy $t_1 < t_2$ esetén a t_2 -edik külső ciklus elronthatja az előző eredményét, G_B azon oszlopai ugyanis, amelyek valamely korábbi időszakhoz tartoznak, pivotelemük viszont a t_2 -edik időszaknak megfelelő sorok valamelyikében van, módosítják az y_B -nek $t = 1$ és $t = t_2 - 1$ közötti részére kapott eddigi értékét. Amennyiben ezáltal egyes változók jelentős mértékben túllépnek alsó vagy felső korlátjukon, a Newton-módszer alkalmazását előlről kell kezdeni, kisebb lépéshossz alkalmazása mellett.

A továbbiakban mármost csak a (2.4)–(2.6) statikus feladattal foglalkozunk. A CONOPT-ba a divergencia, illetve az abból adódó fölösleges számítások kivédésére a következő kritikus értékek vizsgálatát építették be:

l az iterációk száma;

$\delta_1 = F(y_B, y_N)$ normája, a komponensek abszolút értékének összege;

$\delta_2 = \sum_i w_i g_i = h'_B G_B^{-1} F$, a célfüggvényértéknek a korlátozó feltételek megsértéséből származó hibája (becslés);

$\delta_3 = \max_i \{(y_i - \underline{y}_i)/(1 + |\underline{y}_i|), (\bar{y}_i - y_i)/(1 + |\bar{y}_i|)\}$, a korlátok megsértésének mértéke.

Ezekhez a mennyiségekhez rendre a következő felső korlátok tartoznak: l_{\max} , ε_1 , ε_2 , illetve ε_3 . Ahhoz, hogy a Newton-módszer működését sikeresnek könyveljük el, a következő feltételeknek kell teljesülniök:

$$l \leq l_{\max}, \delta_1 \leq \varepsilon_1, \delta_2 \leq \varepsilon_2, \delta_3 \leq \varepsilon_3,$$

továbbá, hogy

$$(\delta_1^{l+1}/\delta_1^{l+1})^{(l_{\max}-l+1)/2} < \varepsilon_1, \quad (\delta_2^{l+1}/\delta_2^{l+1})^{(l_{\max}-l+1)/2} < \varepsilon_2,$$

ahol az l felső index az iteráció sorszámára utal; ez a két utóbbi kikötés a túlságosan lassú konvergencia ellen nyújt védelmet. ε_1 és ε_2 alapértéke $n \cdot 10^{-3}$, ill. 10^{-5} . Ezeket kívülről meg lehet változtatni; kísérletek folynak arra, hogy maga a program változtassa dinamikusan ezeket a küszöbértékeket, azonban végérvényes megoldás ebben a részletkérdésben még nincsen. ε_2 dinamikusan változik, és pedig a célfüggvény adott irányban való várható változása becslésének századrészétől és a célfüggvény egy abszolút alsó korlátjától függ. A $\delta_2 \leq \varepsilon_2$ követelmény ennél fogva olcsó és pontatlan Newton-megoldások elfogadását teszi lehetővé, ha még távol vagyunk az optimumtól, és pontos megoldások kiszámítását eredményezi az optimum közelében.

A fölsőleges számolás elkerülésének egyik fontos lehetősége a lépéshossz korlátozása annak érdekében, hogy a Newton-módszerrel meghatározott új megoldások a megengedett tartományon belül maradjanak. Az y^k aktuális megoldásnál y_s^k a szuperbázis változók vektora és c^k a célfüggvény javításának iránya. A lépéshossz egy α^* felső korlátja adódik az

$$y_s \leq y_s^k - \alpha c^k \leq \bar{y}_s$$

egyenlőtlenségből, az $\alpha \leq \alpha^*$ lépéshossz azonban még nem garantálja a bázis változók megengedettségét. A CONOPT ezért extrapolálja a bázisváltozók értékét, és ennek figyelembe vételével határozza meg a lépéshossz α_{\max} végleges korlátját. Az extrapoláció az irány menti keresés kezdetekor lineáris, az y_B^k kezdőpont és a $c_B^k = -G_B^{-1}G_S c^k$ irány alapján, a későbbiekben pedig kvadratikusan, a c_B^k irány és két pont, vagy az időrendben három utolsó pont alapján.

A kezdeti lépéshosszt a CONOPT-ban a célfüggvényérték várható megváltozásának és a c^k keresési irány meredekségének hányadosával határozzák meg, ha ez az előbb meghatározott felső korláton belül van; a célfüggvényérték várható változása korábbi változások mértani közepe, a meredekség pedig a redukált gradiens és c^k skalár szorzatával egyenlő. A tekintett irányban való keresés a Newton-módszer ismételt alkalmazásából áll, és ennek megfelelően a következő esetek következhetnek be:

- a Newton-módszer alkalmazása sikeres volt, új megengedett megoldást határoztunk meg, amelyre $f(y) < f(y^k)$;
- a Newton-módszer alkalmazása divergencia vagy túl lassú konvergencia miatt sikertelen volt;
- a Newton-módszer alkalmazása sikertelen volt, mert valamilyen változó lényegesen túllépte alsó vagy felső korlátját.

Az (a) esetben tovább folytatjuk az adott egyenes mentén a keresést, és az új lépéshosszt kvadratikusan interpoláció alapján határozzuk meg; ez azonban nem lehet nagyobb, mint az előző lépéshossz $\hat{\alpha}$ -szorosa, ahol $\hat{\alpha}$ kezdeti értéke 4. A keresésnek határt szab, ha

- egy lépésben a célfüggvényérték javulása kisebb, mint az eddigi javulás 20%-a;
- bekövetkezik a (b) és (c) esetek valamelyike.

A (b) esetben követendő eljárás attól függ, hogy az aktuális irány menti keresés során találtunk-e már y^k -nál jobb célfüggvényértékű megengedett megoldást, vagy nem. Ha igen, akkor csökkentjük a lépéshosszt, és $\hat{\alpha}$ értékét a

négyzetgyökével helyettesítjük, majd újból próbálkozunk a Newton-módszer alkalmazásával. Ha ez a módosítás kétszer egymás után alkalmazva sem hoz eredményt, az adott irány menti keresést befejezzük. A másik esetben, vagyis ha még nem találtunk y^k -nál jobb, új megengedett megoldást, akkor a lépéshosszt α -pal elosztjuk, és így próbálunk új megengedett megoldást meghatározni. Ily módon előbb-utóbb bekövetkezik az (a) eset, vagy pedig a lépéshossz egy kritikus érték alá csökken, amikor is speciális kivezető utat kell találnunk; rövidesen ezzel a kérdéssel is foglalkozunk.

A (c) esetben egységesen $9/10$ -részére csökkentjük a lépéshosszt és így kísérjük meg a Newton-módszer ismételt alkalmazását. Ez biztosítja azoknak az eseteknek a numerikus szempontból való helyes kezelését, amelyekben az egyenes mentén való keresésnek a megengedett tartomány határa szab korlátot.

Az egyenes mentén való keresés során előfordulhat, hogy a Newton-módszer konvergenciájának biztosítása érdekében olyan rövid lépéshosszal kell dolgoznunk, hogy a célfüggvény javulásának mértéke nagyságrendben azonos a numerikus számítás pontatlanságából adódó torzítással. Ilyenkor a CONOPT a következő speciális szabályok alkalmazásával próbálja kimozdítani a számítást a holtpontról.

A: visszatérünk az előző iterációhoz és a pontossággal kapcsolatos toleranciát tizedrészére csökkentve, újra meghatározzuk az y^k megoldást;

B: a javított y^k pontban újra kiszámítjuk a G_B^{-1} inverzet, és új keresési irányt határozzunk meg;

C: a minimum-keresésben áttérünk egyszerű gradiens módszerre;

D: bővítjük a szuperbázist, ha lehetséges;

E: a pivotelemekre vonatkozó tolerancia növelésével új bázisra térünk át.

Ezeket a szabályokat egymás után kell alkalmazni, tehát a B szabályt csak akkor, ha A nem vezetett célhoz, a C szabályt csak olyankor, ha B sem segített. Ha még E után sem oldódott meg a probléma, akkor még egyszer megismételjük az egészet A-tól E-ig, és újabb sikertelenség esetén a program ilyen értelmű üzenettel abbahagyja a számítást.

2.5. Induló megengedett megoldás meghatározása

Ezt a feladatot a legtöbb nemlineáris programozási algoritmus a lineáris programozásban szokásos módon oldja meg, az ún. 1. fázis keretei között. Ennek, mint ismeretes, az a lényege, hogy egy az eredeti feladat szempontjából nem megengedett x megoldáshoz egy olyan módosított feladatot rendelnek, melynek x megengedett megoldása, és amelynek optimális megoldása szükség-szerűen megengedett az eredeti feladatra nézve. Ezt a módosított feladatot oldják meg a rendelkezésre álló eljárással az 1. fázisban.

A CONOPT-ban induló megengedett megoldás meghatározására más módszert alkalmaztak, és pedig a Newton-módszer egy változatát. Szokásos jelöléseink segítségével ezt az eljárást a következőképpen lehet leírni.

1. lépés. Válasszunk egy y induló megoldást (a gyakorlati feladatok többségénél kézenfekvő ennek megadása).
2. lépés. Válasszunk ki egy B bázist a HR eljárással, emellett természetesen y_B -re teljesüljön az $y_B < y_B < \bar{y}_B$ egyenlőtlenség.
3. lépés. Számítsuk ki a bázisváltozók növekményét a Newton-módszernek megfelelően: $\Delta y_B = -G_B^{-1}F(y_B, y_N)$.

4. lépés. Ha $y_B + \Delta y_B$ a bázis változókhöz tartozó korlátok közé esik, legyen ez a kifejezés y_B új értéke, és következzen a 3. lépés.
5. lépés. Legyen α az a legnagyobb valós szám, amelyre $y_B + \alpha \Delta y_B$ még nem sérti meg az alsó és felső korlátokat, és legyen y_B új értéke ez a kifejezés. Cseréljük ki azt a bázis változót, amely most alsó v. felső határon van, egy olyan változóra, amely az eljárás folytatásakor nem ütközik egyik korlátjába sem. Több lehetőség esetén olyan változót vonjunk be a bázisba, amely a pivotelem nagysága és a korlátoktól való távolsága alapján a legkedvezőbb. Számítsuk ki az új G_B^{-1} mátrixot, és következzen a 3. lépés.

Az algoritmus konvergenciáját a CONOPT természetesen hasonló módon ellenőrzi, mint ahogyan azt a 2.4. alfejezetben leírtuk. Az eljárás megengedett megoldások hiányának jelzésével fejeződik be akkor, ha az 5. lépésben nem sikerül olyan báziscserét végrehajtani, amely a folytatást lehetővé tenné. Az induló bázis megoldás meghatározásának ez a módja A. Drud tapasztalatai szerint számos esetben nagyon jól bevált, viszont bizonyíthatóan eredménytelenül működik olyan esetekben, amikor az $F(y)$ függvény erősen nemlineáris a megengedett tartomány határának közelében. Kutatás folyik abban a vonatkozásban, hogy hogyan lehetne a CONOPT-ban ezt az eljárást még hatékonyabb, szélesebb körben alkalmazható eljárássá helyettesíteni.

3. A szabályozási programcsomagok hazai alkalmazásának tapasztalatai

Mind Chow szabályozási eljárásáról, mind pedig az általánosított redukált gradiensek módszerén alapuló CONOPT programról elmondhatjuk, hogy egyrészt gondosan tesztelték őket, másrészt több esetben alkalmazták konkrét gazdasági feladatok elemzésére. A Chow-féle program — melynek neve OPTNL — alkalmazásaira az I. fejezetben utaltunk; a CONOPT-tal kapcsolatban most csak azt emeljük ki, hogy számos tesztfeladat mellett olyan gyakorlati feladatokat is sikeresen megoldottak vele, melyekben az ismeretlenek és a korlátozó feltételek száma ezren felül volt. „A világ kávé-modellje”-nek [4] egyik változatában például 80 időszak, időszakonként 35 változó és 34 korlátozó feltétel szerepelt, s így az összes változó és feltétel száma 2800, ill. 2720 volt, és a program a CDC Cyber 176 számítógépen 334,7 CPU másodperc alatt talált meg egy optimális megoldást. Eredményesen alkalmazták a CONOPT-ot a kanadai gazdaság 35 egyenlethől álló CLEAR nevű negyedéves ökonometria modelljének szabályozására is [21]. A CONOPT-tal kapcsolatos további külföldi számítástechnikai tapasztalatok ismertetése megtalálható [8]-ban; a következőkben a hazai tapasztalatokról számolunk be. Ezek jelenleg még egyértelműen a kezdeti stádium jegyeit mutatják, megítélésünk szerint azonban így is alkalmasak arra, hogy a potenciális jövőbeni felhasználók figyelmét felhívják a lehetőségekre.

A CONOPT és az OPTNL alkalmazásával két ökonometria modellt szabályoztunk az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének Ökonometria Laboratóriumában. Ugyanitt készültek a szabályozási számítások kiinduló pontjául szolgáló ökonometria modellek is, ezek főbb jellemzői a következők.

A kisebb méretű modell a magyar gazdaság legfontosabb összefüggéseit teljesen aggregált formában, egyetlen szektor feltételezésével írta le. A szimultán összefüggések rendszerét alkotó egyenletekkel nyomon követhető a pénzbefek-

tetéseknek a beruházások üzembe helyezésére, azon keresztül pedig a termelésre gyakorolt hatása. A bérek és más lakossági jövedelmek határozzák meg a fogyasztást, ez utóbbi, a termeléssel együtt magyarázza a külkereskedelem alakulását. A gazdálkodás eredményességét mutatja a nyereség nagysága, s az egyszersmind visszahat a vállalati beruházási lehetőségekre. A modell időszakonként

31 egyenletet,
31 endogén
22 egzogén és
8 szabályozó változót

tartalmazott. A fontosabb szerepet játszó szabályozó változók között szerepelt a közösségi fogyasztás, a lakossági vásárolt fogyasztás deflátorá, a bruttó nemzeti termék deflátorá és az állami döntéskörbe tartozó beruházások. A modellel végzett kísérleti jellegű számításoknak a célja az volt, hogy olyan növekedési pályát generáljon a szabályozó változókon keresztül, amely biztosítja a nem rubel elszámolású fizetési mérleg megfelelő alakulását, nem sérti a modellben megfogalmazott gazdasági összefüggéseket, és mindenekelőtt — a lehetőségek határain belül — egyenletes növekedést tesz lehetővé. Ennek a modellnek a leírása és a szabályozási számítások eredményei — amelyek az OPTNL felhasználásával készültek, 4 időszakra — [16]-ban találhatóak.

Az első kísérlet tapasztalatai az ökonometriai modellek szabályozásának további alkalmazására ösztönöztek. A rendelkezésre álló számítógépi programok a jelek szerint a korábbinál valamelyest nagyobb feladat megoldására is alkalmasnak tűntek. Ennek alapján elkészült egy olyan — az előbb ismertetetthez sok tekintetben hasonló — modell, amely a termelésben öt, a külkereskedelemben három ágazatra bontotta a gazdaság tevékenységét, és így részletesebb vizsgálatra nyílt lehetőség. A modell kialakításánál célszerűen ki lehetett használni azt, hogy nem előrejelzés, hanem szabályozás céljára készült, és így lehetséges volt néhány, a modellezés során gyakran felvetődő problémának — mint pl. a termelés kinálati és keresleti oldalról való meghatározása közötti összhang megteremtésének — a szokásosnál egyszerűbb megoldása a szabályozás időhorizontján. A szabályozási feladat időszakonként

45 egyenletet,
45 endogén
27 egzogén és
13 szabályozó változót

tartalmazott. A modell méreteivel együtt erősödött annak nemlineáris jellege is: az egyenletek közül kilenc volt nemlineáris, ezekben egyébként egyszerű, alacsony fokszámú polinomok szerepeltek. A szabályozó változók köre az ágazati beruházásokkal és az aktív keresők ágazatonkénti számával bővült, a bruttó termelés deflátorát pedig felváltotta a hozzáadott érték deflátorá.

Háromféle célfüggvénnyel, különböző időhorizonton végeztünk szabályozási számításokat. Az OPTNL segítségével 6, 9 és 10, a CONOPT-tal pedig 4, 6 és 9 időszakra vonatkozóan kíséreltük meg a modell szabályozását. Mivel mindkét programmal ugyanazt a feladatot akartuk megoldani, kvadratikus célfüggvények alkalmazására szorítkoztunk, tehát nem használtuk ki azt a lehetőséget, amelyet a CONOPT esetén a gyakorlatilag tetszőleges célfüggvény alkal-

mazása jelent; ezen túlmenően, a jobb összehasonlíthatóság érdekében, az OPTNL-nél lemondunk a véletlen hatások vizsgálatáról. A célfüggvények háromféle gazdasági alternatívát képviseltek; mind a háromban közös elem volt a nem rubel elszámolású külkereskedelmi mérleg megfelelő aktívumának biztosítása. Ezen túlmenően az egyik változat elsősorban a termelés fejlesztését, a második elsősorban a fogyasztás fejlesztését, míg a harmadik a termelés, a fogyasztás és a beruházások egymással arányos fejlesztését tűzte ki célul. A vizsgálat arra irányult, hogy hogyan függ a magyar gazdaság optimálisnak tekintett növekedési pályája a szabályozás időhorizontjának hosszától, illetve a CONOPT és az OPTNL alapjául szolgáló különböző matematikai módszerektől. Számítási eredményeinket közgazdasági szempontból is jól lehetett interpretálni, a következőkben azonban, főként terjedelmi okokból, csupán a programok működésével kapcsolatos tapasztalatokról lesz szó.

A CONOPT-tal való szabályozáshoz 4 időszak esetén 409 CPU másodpercre, 6 időszak esetén 1209 CPU másodpercre volt szükség,⁶ 9 időszak esetén a program közel degenerált megengedett megoldáshoz jutott, és erről a holtpontról nem sikerült kimozdítanunk, elsősorban azért, mert a szabályozási számításonkkal különböző — de nem módszertani jellegű — okok miatt egyelőre le kellett állnunk. Az OPTNL alkalmazásánál a felhasználó nem értesül az elhasznált CPU-időről, tehát ilyen jellegű összehasonlításra nem volt mód a kétféle programnál, az „összes” elhasznált gépidő azonos, ill. hasonló nagyságú feladatokról viszont hozzávetőleg megegyezett a két programra vonatkozóan (emlékeztetünk arra, hogy a modell minden esetben ugyanaz volt). Ehhez az összehasonlításhoz azt is hozzá kell tenni, hogy az OPTNL esetén a konvergencia nagyon lassú volt, és a számítást a pontos optimum megtalálása előtt le kellett állítanunk, gyakorlatilag minden esetben; az így kapott „közel optimális” megoldások viszont, mint előbb említettük, minden további nélkül alkalmasak voltak a gazdasági elemzés céljára.

A kétféle programmal meghatározott megoldások igen jól közelítették egymást, az eltérés lényegesen kisebb volt, mint a célfüggvénynek az optimális pályára gyakorolt hatása. A választott célfüggvények mellett a gazdasági növekedés pályájára az időhorizont hossza erősebb hatást gyakorolt, mint a célfüggvény.

Ezzel az OPTNL és a CONOPT első hazai alkalmazásaival kapcsolatos leglényegesebb tapasztalatainkat el is mondtuk. Jogos lehet az az igény, hogy további kísérleti számításokra, tapasztalatokra lenne szükség, legalábbis ami a magyar modellekhez kapcsolódó alkalmazásokat illeti, mivel — mint láttuk — külföldi alkalmazásokban és az ezekre vonatkozó tapasztalatokban nincs hiány. Mindent figyelembe véve, megítélésünk szerint már az eddigi hazai tapasztalatok birtokában is kijelenthetjük, hogy mind a két szóban forgó programcsomag a magyarországi gazdasági tervezés hasznos segédeszköze lehet. A két program összehasonlításával kapcsolatban még egy megjegyzés kívánkozik ide, ez a következő.

Az 1. és 2. fejezetben mondottak alapján, kivált a matematikai programozás művelői számára az a következtetés a kézenfekvő, hogy a CONOPT lényegesen jobb kód, mint az OPTNL. Ezzel a véleménnyel lényegében véve egyet lehet érteni — hiszen a CONOPT sokkal többet tud, mint az OPTNL: tetszőleges célfüggvény mellett lehet alkalmazni, egyenlőtlenségeket lehet vele kezelni

⁶ Mint említettük, a számításokat az MTA SZTAKI IBM 3031 számítógépen végeztük.

stb. —, ez a különbség azonban az általunk végzett számítások során nem volt szembeszökő. Ennek az az oka, hogy bizonyos esetekben egy adott feladatot egy „jó” algoritmus kevésbé hatékonyan old meg, mint egy egyszerűbb, és ennél fogva kevésbé jónak tekintett eljárás. Ézzel kapcsolatban megemlítjük, hogy a 31 egyenletről álló modellünkben [16] eredetileg semmilyen egyéni korlát nem szerepelt a változókra vonatkozóan, mivel akkor egyértelműen csak az OPTNL alkalmazására gondoltunk. Mint arra előbb már utaltunk, a számítás jól sikerült. Abban az időben a CONOPT-program még egyetlen hazai számítóközpontban sem állt rendelkezésre, lehetőségünk nyílt azonban arra, hogy a szóban forgó modellt kísérleti célra kiküldjük Washingtonba. A CONOPT-programmal való ottani futtatást személyesen A. Drud irányította. Mint később megtudtuk, az első kísérlet sikertelen volt, mivel — korlátok hiányában — az optimumkeresés során az egyik változó nulla értéket vett fel, és a számítás nullával való osztás miatt megállt. A sikeres futtatást ezután megfelelő alsó korlát beépítésével lehetett biztosítani.

(Beérkezett: 1986. március 12-én.)

IRODALOM

1. ABADIE, J.—J. CARPENTIER: Generalization of the Wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints. In: R. Fletcher (ed.): *Optimization*, Academic Press, New York, 1969, 37—47.
2. BRADA, J.—A. KING—D. SCHLAGENHAUF: The optimality of socialist development strategies: An empirical inquiry. *Journal of Economic Dynamics and Control* 2 (1981) 1—27.
3. BROYDEN, C. G.: The convergence of a class of doublerank minimization algorithms. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 6 (1970) 76—90.
4. CAUCHOIS, T.: The World Coffee Model. *Disszertáció*, M. I. T., 1980.
5. CHOW, G. C.: *Analysis and control of dynamic economic systems*. Wiley, New York, 1975.
6. CHOW, G. C.: *Econometric analysis by control methods*. Wiley, New York, 1981.
7. DRUD, A.—A. MEERAUS: *CONOPT — A system for large scale dynamic optimization — User's Guide*. Development Research Center, The World Bank, 1980.
8. DRUD, A.: *CONOPT — A GRG-code for large sparse dynamic nonlinear optimization problems*. Development Research Department, The World Bank, 1983.
9. FAURE, P.—P. HUARD: Résolution des programmes mathématiques à fonction non-linéaire par le méthode du gradient réduit. *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 9 (1965) 167—205.
10. FISCHER, J.-G. UEBE: The “optimal” control of the RWI Model. In: J. GRUBER (ed.): *Econometric decision models*. Springer, 1983.
11. FLETCHER, R.: A new approach to variable metric algorithms. *Computer Journal*, 13 (1970) 317—322.
12. FÖRMMHOLTZ, H.-J. WOLTERS: A control-theoretic analysis for a small econometric model of the Federal Republic of Germany. In: J. GRUBER (ed.): *Econometric decision models*. Springer, 1983.
13. GOLDFARB, D.: A family of variable metric updates, derived by variational means. *Mathematics of Computation*, 24 (1970) 23—26.
14. GREEN, D. W.—C. I. HIGGINS: *A macroeconomic model of the Soviet Union*. Academic Press, New York, 1977.
15. HELLERMAN, E.—D. RARICK: Reinversion with the preassigned pivot procedure. *Mathematical Programming*, 1 (1971) 195—216.
16. Kísérlet a H-4/B/1—83 egyszektoros ökonometriai modell szabályozására. *Munkaanyagok* 8., MTA Közgazdaságtudományi Intézet, Ökonometriai Laboratórium, Budapest, 1983. november.
17. KÖRNAI J.—MÁRTOS B. (szerk.): *Szabályozás árjelzések nélkül*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
18. LIGETI I.—GYURKOVICS É.—KLEMENCICS M.—VÖRÖS T.: A makrostruktúra és a

nem rubel külkereskedelmi mérleg. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet, Budapest, 1985.

19. LIGETI I.—SIVÁK J.: *Növekedés, szabályozás és stabilitás a gazdasági folyamatokban*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.
20. NECK, R.—Ü. POSCH: On the "optimality" of macroeconomic policies: an application to Austria. In: G. Feichtinger (ed.): *Optimal control theory and economic applications*. North Holland, Amsterdam, 1982.
21. SANDBLOM, C. L.—J. BANASIK: Economic policy with bounded controls. *Economic Modelling* 2 (1985) 135—148.
22. SCHITTKOWSKI, K.: *Nonlinear programming codes — Information, tests, performance*. Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1980.
23. SHANNO, D. F.: Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, 24 (1970) 647—656.
24. WOLFE, P.: Methods for linear constraints. In: *Nonlinear programming* (ed. J. Abadie et al.) North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

KÖNYVEKRŐL

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1986. 525 p.

Hazánkban az utóbbi években elsősorban a kutatócsoportok és számítóközpontok berkeiben az érdeklődés előterébe kerültek a sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei. Közülük főként a faktoranalízis terjedt el, de gyakran találkozhatunk más sokváltozós eljárások alkalmazásával is. Ez a kézikönyv az első Magyarországon, amely átfogóan tárgyalja a sokváltozós adatelemzést és az egyes elméleti eredmények gyakorlati alkalmazási lehetőségeit.

A könyv az általános bevezető részt követően a sokváltozós adatelemzés helyét világítja meg az általános statisztikai módszertanban és az alkalmazásokban. Rámutat arra, hogy a gazdasági valóság bonyolult összefüggéseit miért célszerű sok változóval leírni. Ellenkező esetben ugyanis — kevés változót tartalmazó modellek esetében — igen nehéz lehet a leglényegesebb jellemzőket megtalálni, hiszen a gazdasági környezetnek jelentős részére a vizsgálódás köre nem is terjed ki. Értékes része ennek a fejezetnek a módszerek osztályozása, amely elősegíti az eligazodást az alkalmazási lehetőségek, kérdésfeltevések között. Érdekes a gondosan elvégzett osztályozás azért is, mert minden fejlődésben levő, új területen lassan alakul ki az általános elfogadott rendszerkép, s a sokváltozós statisztika még a fejlődésnek ebben a stádiumában van. Különböző kísérletekkel találkozhatunk pl. amelyek megpróbálják egyik-másik módszer családát — LISREL-modell, MDS eljárások stb. — a középpontba helyezni, azután erre támaszkodva építeni fel a sokváltozós statisztikai módszerek rendszerét. A „győztes rendszer” végül egyszerű logikai szépségére támaszkodva, egyben használhatóságára, minden kívánatos részterület átfogására építve vá-

lik széles körben elfogadottá a tudományos gyakorlatban.

A könyv harmadik fejezete a főkomponens-elemzés módszerével foglalkozik. Az eredeti változók lineáris transzformációjával olyan egyező darabszámú, korrelálatlan, mesterséges változókat állít elő, amelyek információvesztés nélkül jellemzik az induló rendszert. A főkomponens elemzés a talán leggyakrabban alkalmazott sokváltozós statisztikai eljárásnak, a faktoranalízisnek speciális esete. Nem tűzi ki célul a változók számának csökkentését, így várni, remélni lehet, hogy az új, leszámított változók is könnyen értelmezhetők lesznek.

A negyedik fejezet a faktoranalízis elméleti és alkalmazási módszereit tárgyalja, rávilágítva arra, hogy a társadalmi-gazdasági jelenségek közötti kapcsolatokat a különböző mértékű kölcsönös függőség jellemzi. Kitér a faktor-súlyok becsülésére maximumlikelihood módszerrel és a faktorok száma felső korlátjának meghatározására is. A faktoranalízis szép számmal tárgyalt speciális problémái közül az illeszkedési vizsgálatok fontosságát érdemes külön kiemelni. Ez a fejezet, éppen a téma iránti széles körű érdeklődésre való tekintettel, aránylag terjedelmesebb, amit még változatosan egészítenek ki a könyv végén található esettanulmányok, alkalmazások is.

Az ötödik fejezet a kanonikus korrelációelemzés módszereit tárgyalja, közvetlen alkalmazásaként, a KSH megyei évkönyveinek adatait felhasználva, 82 város infrastrukturális fejlettségét, foglalkozási, kereseti adatait, egészségügyét és iskolarendszerét teszi vizsgálat tárgyává.

A kanonikus korrelációs számítás a sokváltozós módszertannak elég mostohán kezelt fejezete hazai gyakorlatunkban. Sok év alatt is csak egy mélyebb cikk jelent meg éppen a SZIGMA-ban e témakörből (SZIGMA 1972. V. évf. 3—4. sz. 273—291. old.), ezt is helyesbítő-kiegészítő cikk követte ugyanitt (SZIGMA 1972. VII. 3. sz. 191—193. old.)! Nem volna túl nehéz össze-

gyűjteni a gyér számú tényleges alkalmazásokat sem. Éppen ezért érdemes felhívni a figyelmet a könyv negyedik esettanulmányára, a szakmai és munkahelyi struktúra kapcsolatának vizsgálatára, ami teljes egészében a kanonikus korreláció számítására támaszkodik. Széles körben tanulgóssá még az teszi ugyanezt az esettanulmányt, hogy a felvetett téma igen messze állónak látszik minden számszerűsítési lehetőségtől. Módszeresen mutatják be a szerzők, hogyan lehet eljutni egy leíró szituációtól lépésről lépésre a kvantifikáció megvalósításáig. Hasonló módon sok más számszerűen látszólag nem kezelhető eset is hozzáférhetővé válhatna.

A kanonikus faktoranalízist a könyv hatodik fejezete ismerteti, *C. R. Rao* eredményei alapján. Már a kanonikus korrelációs számításhoz kapcsolódva is elmondhatjuk volna, hogy a könyv végig gondot fordít az egyes eljárások kanonikus „változatainak” tárgyalására. Minderre azért érdemes ráirányítani a figyelmet, mert — amint azt említettük is — a kanonikus korrelációs számítás is alig-alig alkalmazott részfejezet, a többi kanonikus eljárás pedig szinte teljesen kívül esik az alkalmazók látókörén. Tisztán elméleti szempontból is: a kanonikus szemléletmód alkalmazásával bizonyos rokonság észírási fedezhetőek fel több eljárás között.

A hetedik fejezet a többváltozós szórás-elemzéssel foglalkozik, egy példa a család-fők integrációs mobilitás vizsgálya ezzel a módszerrel.

A szórás-elemzés az a statisztikai módszer, melyet egy függő változó és egy vagy két szempont esetében már jól használhatunk az elemi vizsgálatokban is. A legalább intervallum szintű skálákon mért függő változók számának növelésével már a klasszikus matematikai statisztika módszertani változataihoz jutunk (többváltozós variancia, kovariancia analízis), majd ide kapcsolódnak a már kimondottan sokváltozós statisztikai eljárások (diszkriminancia, faktorális diszkriminancia analízis). Érdekes, ritka tulajdonsága e módszernek az is, hogy segítségével ellenőrizni lehet olyan hipotéziseket, amelyek egymástól távolos szintű mérési skálákon (nominális, illetve intervallum, arány), mért változók között tételeznek fel sztochasztikus kapcsolatot. A legtöbb eljárás nem nagyon kedveli a különböző szintű mérési skálák vegyes előfordulását. A könyv a hetedik és az ezt követő néhány fejezetben valamennyi vizsgálati szinttel részletesen foglalkozik.

A nyolcadik fejezet a diszkriminancia analízist tárgyalja. Érdemes röviden rávilágítani a 8. és 14. fejezet távoli „rokonsá-

gára” is. Valójában mindkét esetben statisztikai döntéshívővények előállításáról van szó. A diszkriminancia analízis ugyanakkor erősen kötődik a szórás-elemzéshez, ami indokolja kapcsolódó tárgyalását. Az eltérő elvi alapokon megvalósuló két konstrukció még egy érdekes sajátossággal rendelkezik. Amíg a diszkrimináló függvények gyakorlatilag mindig megalkothatók, bár zavaros, konfuz rendszerek esetén hatékonyságuk erősen lecsökken, addig a szeparáló algoritmusok könnyen negatív eredményre vezethetnek, bár ilyenkor is megadják a szétválasztást akadályozó „zavaró pontok” felsorolását. E megfigyelések zavaró jellegének kivizsgálása számos érdekes körülményre hívhatja fel a figyelmet. A nehézségeket okozó megfigyelések elhagyása után azonban ezen az úton is előállíthatók lesznek a döntéshívővények. A két eljárás jól használható egymás kiegészítésére, ellenőrzésére, más-más részletkérdés megválaszolására.

Összhangban a széles körű gyakorlati érdeklődéssel a clusteranalízissel (12. fejezet) a könyv különösen részletesen foglalkozik. Ami a klasszifikációs valószínűségeket illeti — bár a jobb nagygépes statisztikai programcsomagok készen szolgáltatják ezeket az eredményeket —, még ugyancsak idő kell hozzá, amíg az alkalmazók kiaknázzák őket a különböző automatikus osztályozási technikák által szolgáltatott csoportosítások elemzésénél. Ami egyébként még a clusteranalízis (a szerzők kissé félve, tartózkodóan, csak éppen felvetett magyartásával; fürtelemezés) módszerét illeti, hangsúlyozni szeretnénk, hogy ez a fejezet — alkotó módon használva fel a külföldi eredményeket — különösen sok megállapítással gazdagítja a magyar szakirodalmat.

A könyvnek külön kiemelésre érdemes része a 13. fejezet, az MDS, a sokdimenziós skálázó eljárások népes változatainak ismertetése. Bár az átfogott nagy anyag miatt a leírások nem elég részletesek ahhoz, hogy komoly előképzettség nélkül bárki számára könnyen érthetőek legyenek, ebből az igen nagy érdeklődésre számot tartó és sokrétűen alkalmazható szférából hazai szakkönyveinkben még semmit sem olvashattunk. (Az egydimenziós outputtal rendelkező eljárásokról szól *Kindler-Papp: „Komplex rendszerek elemzése”* című könyve.) Ezek után nem nagyon kell hangsúlyoznunk, hogy a sokváltozós statisztika egyik — igaz még kiforratlan, de igen dinamikus fejlődő —, nagy fejezete, mely egyik pályázója az egész területet rendszerező elmélet alappilléreinek is, milyen mértékben kihasználatlan hazai alkalmazói gyakorlatunk egészében (MI-

NISSA, MINIRSA, MRSCAL, INDSICAL, IDIOSICAL, PREFMAP, PARAMAP, PROFIT stb. eljárásokra gondoltunk az elmondottak során).

Igen fontos a 15. fejezet is, amely a változók (jellemzők) mérési skáláiról és a kevert változóhalmaz feldolgozását biztosító skálatranszformációkról ad összefoglalást. A statisztikai könyvek gyakran nem részletezik a különböző mérési szintű változók kezelésének szabályait, így könnyen elképzelhető, mennyi kihasználatlan, rejtett tartalék húzódik meg ezen előírások felhasználásában.

Egy kézenfekvő kérdés merülhet fel itt, miért a könyv 15. fejezete foglalkozik a skálatranszformációkkal? Hiszen ezek a problémák szinte minden sokváltozós eljárás alkalmazásánál előfordulhatnak! Belelapozva viszont a fejezetbe, azt is tüstént érzékelhetjük, hogy a különböző skálatranszformációkhoz az előzőekben tárgyalt eljárások jelentős részére szükség van. Így magyarázat adódik, miért került ez az anyag a könyv végére, de egyben arra is, miért kezelte az irodalom kissé mostohán ezt a problémakört.

Egy érdekes dologra itt azért még szeretnénk felhívni a figyelmet. Az elmúlt évtizedek során sok vád érte a modellezők tevékenységét amiatt, hogy a gyakorlati rendszerek modelljeiben technikai okokból gyakran nem kaptak helyet és szerepet az ún. „minőségi” jellemzők, az ordinális és nominális skálán mért változók által hordozott információk. Mivel az élet tele van ilyen természetű ismérvekkel, az őket nélkülöző modellek elmarasztalása jogosult volt. A skálatranszformációknak és megfelelő referencia változóknak az alkalmazásával ezek a vádak hatásosan elháríthatók.

A 16. fejezet a könyvnek *gyakorlati szempontból* legérdekesebb része, mivel eset-tanulmányokat mutat be a módszerek *összetett* alkalmazására. Nehézipari vállalatok sorbarendezése, illetve csoportosítása sok szempont alapján, az alakfelismerés módszereinek alkalmazása, neurotikus megbetegedések differenciál diagnosztikájában; a nagyberuházások jellemzői közötti kapcsolatok statisztikai értékelése; valamint a szakmai és munkahelyi struktúra kongruenciájának sokváltozós elemzése szerepelnek a négy, részletesen tárgyalt esettanulmány anyagában.

A terület újdonsága miatt a szakkifejezések nem közismertek. Ezért nagy segítség az olvasónak, még, hogy a könyvet részletes név és tárgymutató zárja.

A fentiekben vázolt elméleti eredmények, gyakorlati alkalmazások, példák és esettanulmányok olyan kézikönyv szintű is-

meretanyagot szolgáltatnak a sokváltozós elemzéssel foglalkozó magyar szakemberek (alkalmazott matematikusok, közgazdászok és műszakiak) számára, amelyek egyértelműen nélkülözhetetlenek napjaink gyakorlatában. A könyv így a hazai szakirodalom igen értékes elméleti és gyakorlati nyereségének tekintendő.

BALOGH ALBERT

KI HANG KIM—FRED W. ROUSH: *Competitive Economics: Equilibrium and Arbitration*. (Versenygazdaság: egyensúly és döntés) North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1982. 283 o.

1985-ben A. Bensoussan és P. A. Naert szerkesztésében új monográfia sorozatot indított a North Holland kiadó. A sorozat címe: *Advanced Series in Management*. Első kötetként a koreai Kim és az amerikai Roush valóban haladóknak szóló könyvét jelentették meg a játék- és a döntéselméletről.

A szerzők azt a célt tűzték maguk elé, hogy bemutassák a gazdaságmatematika két fontos ágának, a játékelméletnek és a társadalmi döntések elméletének mai állását. A társadalmi döntések célja a társadalmi jólét, ami normatív értelemben több pl. a Pareto-optimumnál, különbözik a játékelméletben szokásosan használt egyensúlyfogalmaktól, ezért kezeléséhez saját matematikai apparátusra van szükség. Bevezetük a Nash-féle megoldáshoz közeli ún. társadalmi döntési függvényeket, segítséggel keresnek és kapnak választ néhány tisztázatlan kérdésre.

A könyv — az USA gazdaságának fejlődése során felmerült problémák sokaságát (infláció, városok és vállalatok csőd-közeli helyzete, munkanélküliség, nyomott mezőgazdasági árak, a farmerek eladósodása, magas adók, nemzetközi pénzügyi helyzet) ismertetik annak igazolására, hogy a klasszikus közgazdasági elméletek nem képesek a modern gazdaság problémáinak megoldására. Erőményesebbnek tartják az ideális elosztási normatívákat leíró társadalmi jóléti függvények elméletének és a játékelméletnek alkalmazását, amely lényegében arra a kérdésre keres választ, hogy milyen elosztást eredményez egy adott érdek-struktúra.

E két koncepció szükségességének „bizonyítása” után következik magas színvonalú, a legújabb eredményeket is tükröző, sok példával illusztrált ismertetésük.

Az egyensúly, egyéni preferencia, hasznosság, egyszerű piaci árstruktúra fogalmi definíciói után a szerzők, megfelelő felté-

telek teljesülése esetén, egyensúlyi állapotok létezését bizonyítják, majd ezek tulajdonságait vizsgálják. Megmutatják, hogy a tökéletes piaci verseny mellett létezik Pareto-optimum, sőt, bizonyos feltételek mellett csak ez a piaci rendszer Pareto-hatékony és ösztönzés-kompatibilis, azaz egyetlen résztvevőt sem kényszerít semmi sem arra, hogy közvetlen érdekei ellen cselekedjék. Ez a feltétel oligopoliumok működése esetén nem teljesül.

A nem-kooperatív játékokkal foglalkozó rész kapcsolatot teremt a maxmin, Nash, Stackelberg, Pareto stratégiák között, ismerteti a különböző megoldáskonceptiókat és ezek viszonyát, a kevert és hibrid stratégia fogalmát. Hasonló terjedelemben foglalkoznak a szerzők a kooperatív játékok, ill. a nem-kooperatív játékok kooperatív lejátszásának elméleti és gyakorlati kérdéseivel. Áttekintik a használatban levő tucatnyi megoldás-konceptiót, tulajdonságaikat vizsgálják különféle feltételek mellett. Az érthetőséget és szemléletességet számpéldák szolgálják. A szerzők itt saját konstrukciójukat, az ún. parciálisan kooperatív játékok fogalmát is bevezetik és vizsgálják. Parciálisan kooperatív egy játék akkor, ha a kooperáció nem terjedhet ki a teljes cselekvési spektrumra. Természetesen ez a megközelítés is az egyes szituációk pontosabb leírását szolgálja.

Az egyensúlyi kereslet-kínálat viszonyokon kívül a disequilibrium modellezése, a dinamikus rendszerfejlődés stabilitása is tárgya egy fejezetnek.

Különösen érdekes a könyvnek az a része, amelyik társadalmi jóléti függvényeket, társadalmi döntéseket, csoport preferenciát, többségi és optimális döntések közötti összefüggéseket ír le. Találkozhatunk itt a preferencia-relációk különböző erősségű rendezési koncepcióival, a társadalmi döntések mechanizmusának modellezésével (csoportos döntés, többségi szavazás, társadalmi választási függvény stb.) és néhány figyelemfelkeltő paradoxonnal a szavazásemélet tárgyköréből.

Az ösztönzés-kompatibilitás (incentive-compatibility) fogalmának bevezetésével a szerzők olyan modellt leírására törekednek, ahol az egyén saját érdekei alapján cselekszik, a társadalmi összhatás viszont az adott megoldás-konceptió alapján optimális. A szerzők ismertetik az ezen a területen használatos elveket, a bebizonyított tényeket, ezeket példákon szemléltetik. Külön fejezet foglalkozik a társadalmi döntések és ösztönzés-kompatibilitás elméletének alkalmazásával (pl. Lindahl-egyensúly).

A könyvet nemcsak a játékelmélet művelőinek érdemes elolvasni. Koncepcionális gazdagsága, a példák sokasága sok ötletet, újszerű szemléletet nyújthat a közgazdászoknak, szociológusoknak, minden társadalomtudósoknak, egyáltalán mindenkinek, aki szereti a magas szintű intellektuális élményt. A matematikusok is elégedettek lehetnek a könyv precizitásával, matematikai igényességével, áttekintésével.

RACSKÓ PÉTER

TUDOMÁNYOS ÉLET

Elitképzés Franciaországban

A francia oktatási rendszer különös sajátossága a felsőfokú képzésbe beépülő „Nagy iskolák” (*Grandes Ecoles*) intézménye. Funkciójuknál és hagyományuknál fogva (eltérően a hasonló nevű angol—amerikai high-schooloktól) ezek minden téren az elitképzés bázisai, bástyái. Egy ilyen iskolába bekerülni mind hallgatóként, mind oktatóként olyan nagy erőfeszítést kíván és olyan presztízst ad, hogy bizonyos korcsoportoknál hosszú éveken át ez a fő aspirációs szint.

A „Nagy iskolák” megjelenése szorosan összefügg Franciaország történelmével és a polgári közigazgatás elterjedésével. Eredeti funkciójuk szerint a fejlődő, terebélyesedő és korszerűsödő közigazgatási intézmények megnövekedett szakember-igényének a kielégítésére törekedtek. Ennek megfelelően az egyes történelmi múltú iskolák a nagy államigazgatási egységekhez kapcsolódtak (mint például az *Ecole Polytechnique* a hadsereghez, az *Ecole Nationale des Ponts et Chaussées* a területi közigazgatáshoz stb.).

E képzési rendszer igazi meggyökeresedése és általános elterjedése a napóleoni közigazgatás bevezetéséhez fűződik, s ez rögtön érthetővé teszi, hogy miért váltak ezek az intézmények az elitképzés oltáraivá. Az elit szó itt eredetileg mind a hallgatók-oktatók származására, mind a képzés színvonalára és a „munkába állás” lehetőségeire utalt.

Természetesen az évszázadokon át e sajátos iskolák nagy változásokon mentek keresztül, számos iskola megszűnt (elsősorban a gyarmati közigazgatáshoz kapcsolódók) és sok új jött létre (főleg a társadalomtudományokat és a gazdasági adminisztrációt érintő területeken). De főbb vonásaikat, a nagy intézményekhez való kapcsolódásukat, presztízsiüket, oktatásuk színvonalát az idő érintetlenül hagyta.

A képzési idő ezekben az iskolákban napjainkban meglepően rövidnek tűnik: általában három év. Ez egyrészt lehetővé teszi (sőt megköveteli), hogy a — volt vagy jövőendő — hallgatók más oktatási intézményekben (egyetemen stb.) is hallgassanak néhány évet, másrészt pedig nyilvánvalóvá teszi, hogy ezek az iskolák a felsőoktatási időnek csupán egy részében vállalják (át) az oktatást; jellegüktől függően vagy az általános alapisztványnál (mint például az *Ecole Polytechnique*) vagy a végső specializálódásnál (mint például az *Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique*, ENSAE).

Az *Ecole Polytechnique* a mérnök-képzés és természettudományos alapképzés „nemzeti” intézménye. Általában az érettségi és 2—4 éves előkészítő után kerülnek az iskola padsoraiba a növendékek (akik között csupán az utóbbi éveken — és elvéve — akadnak nők), s ahol matematikacentrikus, de mindenre kiterjedő és viszonylag kevésbé specializálódott képzés folyik. Ennek folytán nevezi a köznyelv az itt végzeteket „X”-eknek, ami arra utal, hogy bárhol, bármilyen területen folytathatják pályafutásukat. Az *Ecole Polytechnique* alapisztvánja jellegére utal, hogy a felvételi korhatár 23 év. Magától értetődik, hogy az „X”-ek bárhol folytathatják tanulmányaikat (egyetemen vagy egyéb Nagy Iskolában), minden felvételi vagy egyéb szelekció nélkül.

Befejező (vagy specializáló) jellegű képzés folyik például az ENSAE-ban, a gazdasági „csúcs”-minisztérium és a „francia KSH” az *Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques* (INSEE) Nagy iskolájában (mely nem „történelmi” iskola: elődjét 1942-ben, magát az iskolát 1960-ban alapították).

Mivel a szerző fél évet töltött itt kutató-növendékként, szeretné részletesebben bemutatni az ENSAE felépítését, működését, ami sok tanulsággal szolgálhat.

Az ENSAE-t a második világháború utáni gazdasági fellendülés idején hozták létre azzal a céllal, hogy kielégítse az állami (és gazdasági) igazgatás, valamint a nagy vállalatok, intézmények igényét gazdaságelméletben és statisztikában-ökonometriában jártas szakemberek iránt. Annak érdekében, hogy az iskola megfelelő anyagi és szellemi infrastruktúrával rendelkezzen, az alapító levélben a gazdasági miniszter az INSEE-t jelölte ki

anyaintézménynek. Az ENSAE szoros összefonódását a bázis(anya-)intézményével jól szemlélteti, hogy egy épületben van az INSEE-vel, és hogy például egy kutatónövendék fizetésemelését elrendelő határozatot is magának a gazdasági miniszternek kell aláírni. Az iskola költségvetése is a gazdasági minisztériumtól származik, amit csak nagyon kis hányadban és alkalmasszerűen egészítenek ki más intézményektől, vállalatoktól kapott anyagi támogatások.

Szervezetileg az ENSAE-n belül gyakorlatilag három „kar” működik. Az egyik a fejlődő országok európai statisztikai iskolája, a Közös Piac brüsszeli bizottságának támogatásával létrehozott iskola, mely a fejlődő országok ez irányú szakemberigényét van hivatva kielégíteni, de csupán az ENSAE oktatási infrastruktúrájára épül, tőle lényegében elkülönül. A másik „kar” a gazdasági minisztériumban és az INSEE-ben már dolgozó munkatársak át- és továbbképzésével foglalkozik, olyan formában, hogy mivel bizonyos hierarchiabeli pozíciók elfoglalásához követelmény (lehet) az ENSAE végzettség, így azok számára, akik ezzel nem rendelkeznek lehetővé tesszik, hogy e „karon” két éves, teljes idejű (tehát nem munka melletti) oktatásban ezt a képesítést megszerezzék. Végezetül a harmadik (legnépesebb) „karon” folyik az igazi, teljes értékű képzés, melynek végén a hallgatók közgazdász-statisztikus oklevelet kapnak.

A hallgatók sorába kétféleképpen lehet bekerülni. Az egyik lehetőség felvételi útján, amikor is matematikára és közgazdaságtanra alapozott írásbeli és szóbeli vizsga dönt a felvételt kérelmezők között. A másik lehetőség végzettség alapján. Ha ugyanis valaki rendelkezik matematikus vagy közgazdász diplomával (öt éves tanulmányokat igazoló *maitrise* szinten), vagy egy másik Nagy iskola elvégzését tanúsító oklevéllel (általában az Ecole Polytechnique jöhet szóba), akkor kérvényezheti felvételét, s erről a jelentkező „dossierja” alapján döntenek. A képzési idő általában három év, de akit „dossier” alapján vettek fel, az rögtön a második évet kezdheti, ha bizonyos kiegészítő tárgyakat hallgat az első évfolyamról (ilyen kiegészítő tárgyak például a matematikusok részére a közgazdasági alaptárgyak, illetve fordítva). E rendszerből következik, hogy a hallgatók átlagéletkora 24–25 év körül mozog, de nem ritka a 30 év feletti hallgató sem.

Az oktatásra a nagyfokú specializálódás a jellemző. Az első évben még jelentős a törzsanyag, ami a szilárd matematikai és makro-mikro közgazdaságtani alapok megteremtését szolgálja, de másod-, s főleg harmadévben a törzsanyag 2–3 tárgyra redukálódik, míg a többi tárgy ennek megfelelően igen speciális jellegű. (A tantárgy struktúráról lásd bővebben a mellékelt táblázatban.) A specializálódás harmadévben már oda vezet, hogy egy-egy tárgyat néha csupán 3–5 diák hallgat, annak ellenére, hogy az évfolyamok létszáma (a harmadik „karon”) 40–50 fő.

Általános jellegzetesség, hogy mivel a Nagy iskolák nem állíthatnak ki hivatalosan az egyetemi oklevéllel egyenértékű diplomát, a hallgatók egy része (akiknek nincs egyetemi végzettségük) az első év végén az ENSAE-val szerződésben levő *Université de Paris Dauphine*-ben leteszik az első egyetemi ciklust (2–3 tanulmányi év) lezáró vizsgákat; a második év végén a második ciklus (+2 év) záróvizsgáit, ami után *maitrise* szintű oklevelet kapnak; míg a harmadik év végén a DEA (+2–3 év) egyetemi doktori vizsgáit, így mire befejezik az ENSAE-t, az egyetemi doktori címmel megfelelő tudományos fokozattal is rendelkeznek, minden különösebb „extra” tanulmányi ráfordítás nélkül.

Szinte magától értődik, hogy az itt végzett hallgatóknak semmiféle elhelyezkedési problémájuk sincs. A munkábaállítás úgy megy, hogy az iskola összegyűjti az állásajánlatokat és ezeket „kiközvetíti” a végzősöknak. A másod- és harmadéves hallgatók számára kötelező 4–5 hetes szakmai gyakorlat folytatása vállalatoknál, intézményeknél (akik tolonganak a szakmai gyakorlatos hallgatókért, mivel egyrészt olcsó munkaerőhöz jutnak az idény jellegű feladatok megoldásánál, másrészt lehetővé tessz egy kölcsönös ismerkedést az esetleges későbbi állandó munkavállalás szempontjából), így számos végzős hallgató annál az intézménynél helyezkedik el, ahol szakmai gyakorlatát végezte. A volt hallgatók szervezete is hozzájárul az intézmények, vállalatok és az ENSAE kapcsolatainak ápolásához, így évről évre több a felkínált állások száma. Természetesnek tűnik, hogy a végzetek 20–25%-át az INSEE és a gazdasági minisztérium alkalmazza, ami nagy szó Franciaországban, mivel ezek örökös státust nyújtanak, vagyis biztos és „életre szóló” munkát, s mivel e munkát jól meg is tudják fizetni, így az anyaintézmények sokszor leföldözik a végzetek tábortát.

Ami az oktatói gárdát illeti, jellemző, hogy rendkívül kevés a főállású oktató, összesen 12–15 fő. A főállású oktatók az oktatási feladatokon kívül adminisztratívkat is ellátnak, így az iskola dolgozóinak létszáma nem több 20–25 főnél, ami rendkívül gazdaságos működést tesz lehetővé, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy a fő működési költség a munkabérek. Az oktatói feladatok jelentős részét külsősök bevonásával oldják meg (lásd erről a mellékelt táblázatot). Ennek számos előnye van. Egyrészt lehetővé teszi egy adott

Az ENSAE oktatási programja
Első év
Közgazdaságtan opció*

Tárgy	Óraszám (70 perces órák)		A tárgyvezető tanár munkahelye
	előadás	gyakorlat	
Integrál és differenciál-számítás	34	—	ENSAE
Algebra	56	—	ENSAE
Topológia és analízis	100	—	szabadfoglalkozású
A fenti három tárgy gyakorlatai		72	—
Optimalizálás	22	—	Université de Paris I.
Valószínűségszámítás	26	14	INSEE
Valószínűségelmélet	48	26	INSEE — ENSAE
Leíró (általános) statisztika	—	11	INSEE
Bevezetés az informatikába és a számítástechnikába	36	—	INSEE
Gazdaságelmélet	28	—	INSEE
Idegen nyelv	—	60	ENSAE

* Azok számára, akik közgazdaságtan-orientált előképzettséggel rendelkeznek

Az ENSAE oktatási programja
Első év
Matematika opció*

Tárgy	Óraszám (70 perces órák)		A tárgyvezető tanár munkahelye
	előadás	gyakorlat	
Topológia és konvex analízis	27	18	Université de Nice
Differenciálszámítás, optimalizálás	25	18	Université de Paris I.
Numerikus analízis	12	14	Université de Nice
Valószínűségszámítás	24	14	Electricité de France
Valószínűségelmélet	36	15	ENSAE
Leíró (általános) statisztika	16	—	ENSAE
Adatbázis elemzés	24	—	ENSAE
Leíró gazdaságtan	36	5	ENSAE
Nemzetközi leíró gazdaságtan	12	12	Ecole Normale Supérieure
Bevezetés a mikro-gazdaságtanba	18	—	INSEE
Bevezetés a makro-gazdaságtanba	18	12	Université de Rouen
Kereskedelmi jog	16	—	Rhone-Poulenc
Bevezetés a vállalati könyvvitelbe	14	10	ENSAE
Nemzetgazdasági mérlegek	16	—	INSEE
Bevezetés az informatikába és a számítástechnikába	36	—	INSEE
Idegen nyelv	—	60	ENSAE

* Azok számára, akik matematika-orientált előképzettséggel rendelkeznek

szakterület legjobb szakembereinek célorientált „megvásárlását” (például a szocialista országok gazdaságával foglalkozó, igen népszerű tárgyat egy angol oktató tanítja, aki csupán azért utazik minden pénteken Londonból Párizsba, hogy óriáit megtartsa), másrészt élő kapcsolatban marad az elmélet és a gyakorlati alkalmazás, s végül (ez sem elhanyagolható szempont) jövedelemkiegészítés a külsős oktatók számára. Ez bizonyos formában az iskolához kapcsolja őket, növelve az ENSAE társadalmi beágyazódásának érhálózátát. Általában is jellemző, hogy egy-egy Nagy iskola oktatóinak számos egyéb iskolában s egyetemen van (státusszal nem járó) állása, ami jövedelmének növelését, kapcsolatainak ápolását teszi lehetővé. A — magyar fül számára is ismerősen csengő — „te adsz jól fizető munkát nekem, én adok jól fizető munkát neked” mechanizmus Franciaországban is virágzik.

Az ENSAE főállású oktatói és az INSEE kutatói között kötelező rotáció érvényesül. Az ENSAE igazgatója például hat évnél tovább nem maradhat pozíciójában, ezután kötelezően vissza kell mennie az INSEE-be. Ez érvényes az alacsonyabb beosztású oktatókra is, akiknél a rotáció rövidebb idejű, így az oktatók tábora öt-hat év alatt gyakorlatilag kicserélődik. Az új oktatók szinte kivétel nélkül az INSEE kutatóiból kerülnek ki. Ez a rendszer lehetővé tesz egy egészséges vérkeringést a kutatók és oktatók között, amit a hallgatók közvetlenül is érzékelhetnek, mivel még a legelméletibb témákról szóló előadásokat, szemináriumokat is számtalanszor fűszerezik az oktatók a legfrissebb alkalmazások, felhasználások érdekességeivel. A rotáció további előnye az oktatás szempontjából az oktatott tanyanyag természetes kiválasztódása. Mivel a tárgyat vezető tanárnak viszonylag nagy szabadsága van a tárgy tartalmának meghatározásánál, ez az évek során a tárgyak (s a jegyzetek) rendkívüli kikristályosodáshoz vezet. Nem véletlen, hogy az iskolai jegyzetek többsége könyv formájában is megjelenik kettő-három-négy társszerző tollából (akik a tárgyat tanították az utóbbi években).

*Az ENSAE oktatási programja
Másodév*

Tárgy	Óraszám		A tárgyvezető tanár munkahelye
	előadás	gyakorlat	
Matematikai statisztika	44	34	INSEE — ENSAE
Alkalmazott statisztika	20	—	ENSAE
Leíró (általános) statisztika*	12	—	INSEE
Algoritmusok	8	10	Université de Nice
Mikro-gazdaságtan	20	9	INSEE — Université de Paris-Dauphine
Makro-gazdaságtan	22	10	Banque de France
Állam és gazdaság	14	7	Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales
Gazdaságtörténet	24	—	Université de Paris-Sorbonne
(Gazdaság)elmélet történet	24	—	Université de Paris-Dauphine- Université de Lille
Állami költségvetés	16	—	Direction du Budget — INSEE
Pénzügyi rendszer	13	—	Banque de France
Nemzetgazdasági mérlegek*	16	—	INSEE
Bevezetés a vállalati könyvvitelbe*	10	10	ENSAE
Vállalati pénzügyek	12	—	Université de Paris-Dauphine
Pénzügyi elemzés	14	—	Université de Paris-Dauphine
Demográfia	18	—	Institut National des Etudes Démographiques
Szociológia	18	—	ENSAE — Université de Paris VIII.
Informatika	12	—	INSEE
Számítástechnika	28	—	ENSAE — INSAE
Idegen nyelv		52	ENSAE

* Azok számára, akik első évben közgazdaságtan opciót hallgattak.

*Az ENSAE oktatási programja
Harmadév*

Tárgy	Óraszám		A tárgyvezető tanár munkahelye
	előadás	gyakorlat	
<i>Törzsanyag</i>			
Ökonometria	19	16	ENSAE
Adatbázis elemzés*	19	10	Conservatoire National des Arts et Metiers
Gazdasági növekedés	14	5	INSEE
Informatika és számítástechnika	12	—	INSEE
Idegen nyelv	—	48	ENSAE
<i>Blokkok**</i>			
A) Statisztikai módszerek			
Sztochasztikus folyamatok	16	8	Electricité de France
Sztochasztikus folyamatok II.	22	—	INSEE
Előrejelzés idősorokból	14	8	ENSAE
Aberráns pontok statisztikája	12	—	ENSAE
Nem paraméteres statisztikák	20	—	Université de Paris — Sorbonne
B) Ökonometria			
Adatbázis elemzés	18	—	Conservatoire National des Arts et Metiers
Mintavétel	19	5	INSEE
Gazdasági kísérlet	16	—	Université de Paris — Dauphine
Alkalmazott szociológia	44	—	INSEE
Gazdasági felmérések feldolgozása	10	14	INSEE
Ökonometria	30	—	INSEE — ENSAE
Alkalmazott ökonometria	16	—	INSEE — ENSAE
C) Számítástechnika informatika optimalizálás			
Optimalizációs eljárások	16	8	Electricité de France
Informatikai rendszerek	14	—	Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications de Paris
Számítástechnika és szervezés	16	—	Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications de Paris
Organikus analízis	22	—	Thomson — IBM
D) Gazdaságelemzés			
Gazdaságtörténet	16	—	Université de Paris I.
Tervezés-elmélet	18	—	CEPREMAP-CNRS
A tervgazdálkodást folytató országok gazdasága	16	—	University of London
Pénz- és munkaelmélet	16	—	CNRS
Világgazdaságtan	16	—	ENSAE
Nemzetközi pénzügyi rendszer	18	—	Université de Paris-Dauphine
Erőforrás allokáció	14	—	Université de Paris I.
Háztartások viselkedése	18	—	INSEE
Konjunktúra-ciklusok a II. világháború után	12	—	INSEE
E) Ipargazdaságtan és vállalatvezetés			
Ipari stratégiák	18	—	OECD
Szervezetek szociológiája	21	—	Institut d'Etudes Politiques
Gráfelmélet	10	—	Ecole Polytechnique

Tárgy	Óraszám		A tárgyvezető tanár munkahelye
	előadás	gyakorlat	
Játékelmélet	16	—	Université L. Pasteur
Termelés menedzselés	14	—	Ecole Nationale Supérieure des Mines
Pénzügyi menedzselés	18	—	Université de Paris I.
Marketing	16	—	Dorset Development
Kereskedelmi jog	16	—	Rhone — Poulenc
Munkajog	22	—	Rhone — Poulenc
F) Gazdaságpolitika			
Kvantitatív makro-gazdasági modellezés	14	8	Banque de France — INSEE
Konjunktúra-elemzés	20	—	INSEE
Gazdaság- és szociálpolitika	12	—	Gazdasági minisztérium
Pénzpolitika	8	—	Banque de France
Aktuális gazdaságpolitikai kérdések	18	—	Gazdasági minisztérium
Szervezeti, intézményi rendszer	12	—	Állam Tanács

*A dosszié alapján felvett hallgatók számára, akik egyenesen másodévből kezdték tanulmányaikat.

** Minden hallgató minimum egy blokkot köteles választani.

Az oktatók és a hallgatók közötti szint áthidalását szolgálja a kutató-növendékek rendszere. A végzős hallgatók között pályázatot hirdetnek évente 2–4 ilyen állásra, s a benyújtott pályázatokat a jelentkező előlétele és a benyújtott téma alapján bírálják el. A kutató-növendékek nem ösztöndíjban, hanem tisztes fizetésben részesülnek (ez több, mint az átlagos — külföldieknek szóló — ösztöndíj háromszorosa) és elvben semmilyen oktatási kötelezettségük sincs. Egyedüli feladatuk, hogy a két év alatt tudományos fokozatuk megszerzésén munkálkodjanak. Erre általában a két év kevés, de intézményes lehetőség van arra, hogy további két évig (most már fizetés nélkül) az iskola infrastruktúráját használhassák. Általában a két + két év elegendő arra, hogy a kutató-növendékek bizonyos szakmai nevet és a tudományos fokozatot megszerezzék. Ezután többségük valamely neves egyetem vagy kutatóintézet kebelén folytatja pályafutását. Természetesen a kutató-növendékek az oktatásban is részt vesznek, sok szemináriumot, gyakorlati foglalkozást vezetnek, de ennek fejében külön óradíj jár. Minden kutató-növendék — kötelezően — választ magának egy témavezetőt, de ez nem kell, hogy az ENSAE oktatója legyen. Így gyakran az a furcsa helyzet áll elő, hogy valaki az ENSAE-ban van alkalmazásban, egy vidéki egyetemre jár konzultálni és egy másik egyetemen oktat félállásban, annak reményében, hogy ezt „egésszé” változtathatja. Látható, hogy már a fiatal kutató-növendékek kóstolgatják az „oszd meg időd és az intézményeket, hogy egy valamivel foglalkozhass” elvet.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

Rendszer — modellezés és optimalizálás

IFIP konferencia Budapesten

A sok tagszervezetet számláló jelentős nemzetközi számítógépes társulat, az IFIP TC 7-es rendszermodellezési munkacsoportja 1985 szeptemberében Budapesten tartotta kétvétenkénti konferenciáját. A szervezést a Neumann János Számítógéptudományi Társaság végezte.

A konferencia tárgyköre a műszaki, technikai és gazdasági rendszerek modellezése és működésük optimalizálása volt. Ez a széles témakör az előadásokra való felhívásban az irányításelmélet, a matematikai programozás és ezek alkalmazási és software kérdései köré csoportosult. A beküldött 370 előadáskivonatból 260-at fogadott el a nemzetközi programbizottság, 14 szekcióba osztva.

A konferencián 265-en jelentek meg 220 előadással. Közöttük 29 országból 200 külföldi résztvevő volt. Öt nap alatt a délelőttökön 10 plenáris előadás hangzott el, melyeket a szakma vezető kutatói tartották a programbizottság felkérése alapján. Az előadások a legújabb irányzatok és kutatási eredmények összefoglalását nyújtották a következő területeken:

- hozzárendelési feladat új megoldási módszerei és alkalmazásai (*R. Burkard*),
- geometriai számítási módszerek és alkalmazásai (*M. Iri*),
- szerkezetek megbízhatósági modellezése (*P. Thoft—Christensen*),
- sztochasztikus irányításelmélet és számítási módszerei (*M. Arató*),
- erőforrás elosztási problémák dekompozíciója (*S. M. Robinson*),
- matematikai programozási software (*K. Schittkowski*),
- peremérték feladatok optimális irányítása (*C. Saguez*),
- hiperbolikus parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek peremérték irányítási feladatai (*I. Lasićka*),
- nagy energiarendszerek tervezésének és működtetésének irányításelméleti módszerei (*P. Sandrin*)
- orvosi biológiai rendszerek matematikai modellezése (*A. Garlianskas*).

A szekció előadások párhuzamosan négy teremben folytak, emellett egy poszter szekció is volt, melyen 8 optimalizálási software előadás és bemutató szerepelt. A szekciókban elhangzott előadások fő érdeklődési területeit, tendenciáit megpróbáljuk röviden jellemezni, kiemelve a közgazdasági jellegű kérdéseket.

A „Dinamikus rendszerek irányítása” szekcióban volt a legtöbb előadás, a 8 ülésen 36-an foglalkoztak a modellezés, identifikálás, irányíthatóság, stabilitás, optimális irányítás különböző elméleti és módszertani kérdéseinek megoldásával. Az „Elosztott rendszerek irányítása” szekciónak a 4 ülésén a parciális differenciálegyenletekhez kapcsolódó irányítási problémák és ezek megoldási módszerei szerepeltek. A „Sztochasztikus rendszerek” szekció 14 előadása elsősorban a sztochasztikus programozás algoritmikus kérdéseivel, megoldási módszereinek javításával, összehasonlításával foglalkozott, de az alkalmazási lehetőségek is jelentős súlyt kaptak az algoritmusok hatékonyságának növekedésével együtt.

A klasszikus matematikai programozási feladatok új variánsai, modellek és megoldási módszerek szerepeltek a lineáris, nemlineáris és diszkrét programozás három szekciójában, melyeknek együttesen 12 ülése volt 60 előadással. Három előadás foglalkozott speciális lineáris programozási módszerekkel. Sok nemlineáris programozási előadás szerepelt. Általános vélemény volt, hogy inkább a meglévő algoritmusok finomításával és hatékonyságának fokozásával lehetne jó alkalmazási eredményeket elérni, mintsem újabb algoritmusok konstruálásával. Ennek ellenére sok új speciális probléma is felvetődött, melyek megoldása új modellezési, elméleti vizsgálati és algoritmikus eredményt kíván. Ilyen területen mutatott jelentős előrehaladást ez a szekció. A diszkrét programozás, gráfok és hálózatok vizsgálati módszerei és algoritmusai egy szekcióban szerepeltek. Az utazó ügynök probléma, a hozzárendelési feladat, az ütemezés és az erőforrás elosztási feladatok jólismert körét is gazdagította több új, elsősorban speciális esetekre alkalmazható algoritmus, illetve komplexitási vizsgálat. Fűtési, távközlési hálózatok optimalizálásának elvi kérdései mellett a számítógéppel segített modellezésről is volt szó.

Számítógéprendszerekkel kapcsolatos optimalizálási kérdésekkel öt előadás foglalkozott, részben a multiprocesszoros gépekkel, részben az osztott rendszerek tervezésével kapcsolatban.

Az alkalmazási orientáltság az eddig említett szekciók igen sok előadására is jellemző volt, de a programbizottság az alkalmazások súlyát kiemelve 7 szekciót szervezett a különböző alkalmazási területekről érkező előadásoknak.

A közlekedés és szállítás alkalmazási területéről 14 előadás hangzott el. Autóbusz-, vasúti- és légi közlekedés menettervezésével, személyzetének beosztásával, alkatrészellátásával foglalkoztak, számítógépes megoldásokat, döntéselőkészítő rendszereket ismertettek. Az ipari, műszaki alkalmazásokkal foglalkozó előadások széles alkalmazási kört öleltek fel. A termelési tervezés, sorozatnagyságok optimalizálása, sorbarendevezések, termelési-készletezési rendszerek tervezése, irányítása, szimulálása volt az egyik terület, számítógépes döntéselőkészítő rendszerekkel alátámasztva. Az általános termelési problémák mellett speciális műszaki irányítási feladatok megoldásai szerepeltek, így vízellátási, szennyvízelvezetési, vízminőség-vizsgáló, javítási rendszerek, építőipari projektek modellezése, optimalizálása. Külön szekcióban hangzottak el a strukturált rendszerek optimalizálásáról szóló előadások a mechanikai, acélipari, meteorológiai rendszerek és az idegrendszer modellezéséhez kapcsolódóan.

Mint az eddigi áttekintésből is láthattuk, igen sok előadás közvetett témájaként szerepeltek a különböző gazdaságossági vizsgálatok, közgazdasági mérlegelések és modellezési elvek. Egy külön alkalmazási szekció is volt a gazdasági rendszerek témájában. Itt öt előadás hangzott el, ezeket a következőkben lehet röviden összefoglalni. Ismertettek egy vállalati integrált információs rendszert a pénzügyi, marketing és termelési folyamatok együttesére, melyet a vállalati döntési folyamatok alapján terveztek. Alkalmazása és értékelése egy fémfeldolgozó vállalatnál történt. Egy hosszú távú tervezést szolgáló számítógépes dialógus rendszer működéséről számoltak be, mely statisztikai előrejelzési, gazdasági mérlegelési és matematikai döntésméleti eszközökre épül. Három előadás foglalkozott hosszú távú beruházások tervezésével. A környezetvédelem, a természeti kincsek kiaknázása és az energiaellátás volt a három vizsgált terület. Közös jellegzetességük volt a gazdaságossági mérlegelések, a hasznossági függvények és a véletlen hatások súlyponti figyelembevétele.

Az energiarendszerekről különösen sok (18) és színvonalas előadást tartottak. Különböző időhorizontokon a rövidtávú irányítástól a hosszú távú tervezésig, vizsgálták a villamosenergia-rendszerek együttműködését, bővítését, terheléelosztását. Az energiafajták optimális felhasználása, az atomenergia felhasználás modellezése, vízierőművek működtetéséhez a víztározók optimális szabályozása is egy-egy előadás témája volt. A biológiai, orvosi rendszerek modellezése és optimalizálása is két ülészak témájaként szerepelt.

A tudományos programmal párhuzamosan 9 hazai cég állította ki software kínálatát és a mikrogépes termékeket a helyszínen bemutatta.

A konferencián a témakör legkiválóbb nemzetközi szakemberei nagy számban jelentek meg, sok színvonalas előadás is elhangzott. Az előadások mintegy fele referálva meg fog jelenni könyv formájában a *Springer* kiadónál. A témakör iránt érdeklődők ebből széles körű áttekintést nyerhetnek a legújabb modellezési, számítástechnikai és alkalmazási eredményekről.

KELLE PÉTER

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat a nyomdába érkezett: 1986. december 9. — Terjedelem: 8,4 (A/5 ív)
87.16220 Akadémiai Kiadó és Nyomda Budapest — Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

ANDRÁS SIMONOVITS: Growth, control and tensions in an open socialist economy ..	155
OKUGUCHI KOJI—SZIDAROVSKY FERENC: On the stability of the multiproduct oligopoly problem	177
ZSUZSANNA FLUCK—FERENC SZIDAROVSKY: The oligopoly game in the case of uncertain coalitions	185
IMRE LENGYEL: A practical generalization of the knapsack problem for cutting stock	193

SOFTWARE

LÁSZLÓ MIHÁLYFFY—GÁBOR BAGDY: Software for regulating large-scale dynamic non-linear econometric models	209
---	-----

BOOK REVIEWS

LÁSZLÓ FÜSTÖS—GYÖRGY MESZÉNA—NÓRA SIMON-MOSOLYGÓ: Statistical methods for multivariable data analysis (<i>Albert Balogh</i>)	237
KI HANG KIM—FRED W. ROUSH: Competitive economics: equilibrium and arbitration (<i>Péter Racsó</i>)	239

SCIENTIFIC LIFE

LÁSZLÓ MÁTYÁS: Élite-training in France	241
PÉTER KELLE: System modelling and optimization	247

СОДЕРЖАНИЕ

Андраш Шимонович: Рост, регулирование и напряженность в открытой социалистической экономике	155
Окугучи Коджи—Ференц Сидаровски: О стабильности многопродуктовой олигопольной проблемы	177
Жужанна Флук—Ференц Сидаровски: Олигопольная игра при образовании коалиций	185
Имре Лендел: Практическое обобщение задачи о ранце для проблемы раскроя материалов	193

СОФТВЕР

Ласло Михайффи—Габор Багди: Программы ЭВМ для регулирования крупномасштабных нелинейных эконометрических моделей	209
--	-----

О КНИГАХ

Ласло Фюштеш—Дьердь Месена—Нора Шимон-Мошойго: Статистические методы многовариантного анализа данных (<i>Альберт Балог</i>)	237
Ки Ханг Ким—Фред В. Руш: Конкурирующие экономики: сбалансированность и арбитраж (<i>Петер Рачко</i>)	239

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ласло Матьяш: Подготовка научной элиты во Франции	241
Петер Келле: Моделирование и оптимализация систем	247

Ára: 26,— Ft

Előfizetés egy évre: 104,— Ft

ISSN 0039—8128

TARTALOM

SIMONOVITS ANDRÁS: Növekedés, szabályozás és feszültségek egy nyitott szocialista gazdaságban	155
OKUGUCHI KOJI—SZIDAROVSKY FERENC: A többtermékes oligopol probléma stabilitásáról	177
FLUCK ZSUZSANNA—SZIDAROVSKY FERENC: Az oligopol játék bizonytalan koalícióalakítások esetén	185
LENGYEL IMRE: Anyagleszabási problémák hátizsákfeladatainak egy gyakorlati célú általánosítása	193

SZOFTVER

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ—BAGDY GÁBOR: Nagyméretű dinamikus nemlineáris ökonometriai modellek szabályozására alkalmas számítógépi programok	209
--	-----

KÖNYVEKRŐL

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei (<i>Balogh Albert</i>)	237
KI HANG KIM—FRED W. ROUSH: Competitive economics: equilibrium and arbitration (<i>Racsó Péter</i>)	239

TUDOMÁNYOS ÉLET

MÁTYÁS LÁSZLÓ: Elitképzés Franciaországban	241
KELLE PÉTER: Rendszer modellezés és optimalizálás	247



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST