Mátyás László

A panelmodellek becslése

Az ökonometria fejlődését napjainkig számos stáció jellemezte mind modellezési, mind módszertani szempontból, azonban e fejlődés során végig jelen volt a felhasznált és a kibocsátott információ növelésére való törekvés. Ennek ellenére csak az utóbbi tíz-tizenöt évben indult rohamos léptekkel előre a modellezéskor felhasznált információbázis szélesítésének a technikája, elsősorban a bayes-i módszerek elterjedésének és az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának köszönhetően. Ez utóbbi megközelítési mód jóval fiatalabb a bayes-i módszernél,[1] és úgy tűnik, kiteljesedésének az időszaka most zajlik.

Az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának legegyszerűbb, de legjobban kiforrott módja a panelmodellek alkalmazása. A panelmodell elnevezés onnan származik, hogy a modellben szereplő változók megfigyelései panel (más szóval: tábla) jellegűek,[2] tehát egy adott változóhoz nem csupán egy megfigyelt idősor kapcsolódik, hanem — táblaszerűen — számos, abból eredően, hogy számos egyed viselkedését figyeljük meg egyidejűleg, vagyis nem aggregáljuk őket.

Az alábbi írás a panelmodellekkel és e modellek paraméter-becsléseit előállító pooling (más szóval: egyesítő) technikákkal kíván foglalkozni. Kizárólag a legkisebb négyzetek módszeréhez kapcsolódó eljárásokat tekintjük át, egyrészt mivel ezek a legelterjedtebbek és a legkönnyebben használhatók, másrészt mivel ezek kapcsolódnak leginkább a hagyományos ökonometriai szemléletmódhoz.

Az utóbbi két-három évben számos olyan PC-re íródott statisztikai programcsomag került forgalomba (RATS, ySTAT stb.), amelyek tartalmazzák a poolingbecslések elvégzéséhez szükséges alapvető eljárásokat, transzformációkat.[3] A kívánatos mértékig ezek módszertani vonatkozásaira is kitérünk.

A továbbiakban az 1. fejezetben lefektetjük a szükséges módszertani alapokat, a 2. fejezetben megismerkedhetünk a panelmodellekkel, míg a 3. és 4. fejezetben az alapvető modelltípusok paraméterbecsléseivel foglalkozunk.

[1] Az első ez irányú publikációk Hoch [2] és Mundlak [8], [9] tollából láttak napvilágot 1961—63 körül. A szakmai közvélemény érdeklődése a kérdés iránt azonban Balestra—Nerlove [1] 1966-ban megjelent írása után élénkült csak meg.

[2] Tábla jellegükből adódóan nevezik a lakossági adatfelvételeket is panelfelvételeknek, illetve az innen származó mintákat statisztikai paneleknek.

[3] Általában a kézikönyvekben ezek a „Panel models" címszó alatt szerepelnek.

1. Módszertani alapok

Ebben a fejezetben két olyan módszertani alapvetést kell megvizsgálni, amelyekre a későbbiekben támaszkodni fogunk.

a) Varianciaanalízis

A panelmodelleknél a változók megfigyelései minden esetben a következő formában jelennek meg:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} \\ \vdots \\ X_{1T} \\ \vdots \\ X_{i1} \\ \vdots \\ X_{it} \\ \vdots \\ X_{iT} \\ \vdots \\ X_{N1} \\ \vdots \\ X_{NT} \end{bmatrix},$$

ahol az i index ($i = 1, \ldots, N$) a megfigyelt egyedet jelöli (azonosít adott háztartást, vállalatot stb.), a második t index ($t = 1, \ldots, T$) a megfigyelés időpontját jelöli.

Ismert, hogy adott X változó varianciája felbontható a következőképpen:

$$\sum_i \sum_t (X_{it} - \bar{X})^2 = \begin{cases} \sum_i \sum_t (X_{it} - \bar{X}_i)^2 + T \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \\ \sum_i \sum_t (X_{it} - \bar{X}_t)^2 + N \sum_t (\bar{X}_t - \bar{X})^2 \\ \sum_i \sum_t (X_{it} - \bar{X}_i - \bar{X}_t + \bar{X})^2 + \\ + T \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 + N \sum_t (\bar{X}_t - \bar{X})^2, \end{cases}$$

ahol

$$\bar{X}_i = \frac{1}{T}\sum_t X_{it} \quad \text{(az egyedek szerinti átlag)}$$

$$\bar{X}_t = \frac{1}{N}\sum_i X_{it} \quad \text{(az idő szerinti átlag)}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{NT}\sum_i\sum_t X_{it} \quad \text{(a főátlag).}$$

Legyenek a továbbiakban I_{NT}, I_N, I_T az $(NT \times NT)$, $(N \times N)$ és $(T \times T)$ méretű egységmátrixok, valamint J_{NT}, J_N, J_T az $(NT \times NT)$, $(N \times N)$ és $(T \times T)$ méretű csupa 1-esekből álló mátrixok, továbbá L_{NT}, L_N, L_T az $(NT \times 1)$, $(N \times 1)$ és $(T \times 1)$ méretű csupa 1-esekből álló vektorok. Könnyen kimutatható (TROGNON [11]), hogy

$$\sum_i\sum_t (X_{it} - \bar{X})^2 = X'T^*X, \quad \text{ahol [4]} \quad T^* = I_{NT} - \frac{J_{NT}}{NT}$$

$$T\sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = X'B_nX, \quad \text{ahol} \quad B_n = \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right) - \frac{J_{NT}}{NT} = \left(I_N - \frac{J_N}{N}\right) \otimes \frac{J_T}{T}$$

$$N\sum_t (\bar{X}_t - \bar{X})^2 = X'B_tX, \quad \text{ahol} \quad B_t = \left(\frac{J_N}{N} \otimes I_T\right) - \frac{J_{NT}}{NT} = \frac{J_N}{N} \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)$$

$$\sum_i\sum_t (X_{it} - \bar{X}_i)^2 = X'W_nX, \quad \text{ahol} \quad W_n = I_{NT} - \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right) = I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)$$

$$\sum_i\sum_t (X_{it} - \bar{X}_t)^2 = X'W_tX, \quad \text{ahol} \quad W_t = I_{NT} - \left(\frac{J_N}{N} \otimes I_T\right) = \left(I_N - \frac{J_N}{N}\right) \otimes I_T$$

és végül

$$\sum_i\sum_t (X_{it} - \bar{X}_i - \bar{X}_t + \bar{X})^2 = X'W^*X,$$

ahol

$$W^* = I_{NT} - \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right) - \left(\frac{J_N}{N} \otimes T_T\right) + \frac{J_{NT}}{NT} = \left(I_N - \frac{J_N}{N}\right) \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right).$$

[4] Figyelem: itt T^*-nak semmi köze az idősor hosszához, csupán a teljes varianciára utal!!

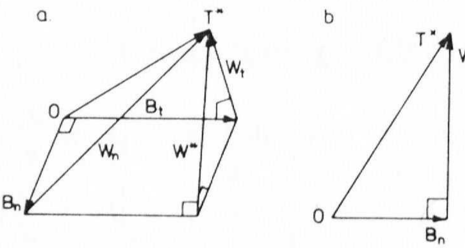
A B (between) és W (within) jelölések arra utalnak, hogy az X változó csoporton belüli, illetve csoportok közötti varianciáját állítjuk elő, ha adott egyed idősorát tekintjük egy csoportnak (ezt jelöli az n index), illetve ha egy időponthoz tartozó összes egyedet tekintjük egy csoportnak (ezt jelöli a t index).

Tekintsük a továbbiakban a B, W és T^*-al jelölt műveleteket transzformációs operátoroknak. Világos, hogy

$$T^* = \begin{cases} W_n + B_n \\ W_t + B_t \\ W^* + B_n + B_t, \end{cases}$$

továbbá $W_nB_n = W_tB_t = W^*B_n = W^*B_t = B_nB_t = 0$, valamint T^*, W^*, W_n, W_t, B_n, B_t szimmetrikusak és idempotensek.

A fenti operátorok geometriai értelmezését mutatja az 1.a), b) ábra.



1. ábra

Eddig a centrális varianciát vizsgáltuk (vagyis a főátlag körüli varianciát), nézzük meg ez után a nem centrális varianciát hasonló szempontok szerint. Világos, hogy

$$\sum_i \sum_t Y_{it}^2 = \begin{cases} \sum_i \sum_t (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 + T \sum_i \bar{Y}_i^2 \\ \sum_i \sum_t (Y_{it} - \bar{Y}_t)^2 + N \sum_t \bar{Y}_t^2. \end{cases}$$

Továbbá, ha

$$\bar{T}^* = I_{NT}, \quad \bar{B}_n = I_N \otimes \frac{J_T}{T}, \quad \bar{B}_t = \frac{J_N}{N} \otimes I_T \quad \text{és} \quad \bar{W}^* = W + \frac{J_{NT}}{NT},$$

valamint FA adott változó főátlaga $\left(\frac{J_{NT}}{NT}\right)$, akkor

$$\bar{T}^* = \begin{cases} W_n + \bar{B}_n \\ W_t + \bar{B}_t \\ \bar{W}^* + B_n + B_t \\ W^* + B_n + B_t + FA. \end{cases}$$

Az új operátorok orthogonalitási tulajdonságai a következők:
$W_n\bar{B}_n = W_t\bar{B}_t = 0$, (de $\bar{B}_n$ és $\bar{B}_t$ nem orthogonális)
$\bar{W}^*B_n = \bar{W}^*B_t = B_nB_t = TFA = W^*FA = B_nFA = B_tFA = 0.$

Az a fontos következtetés vonható le tehát a fentiekből, hogy ha nem centrális varianciákkal kényszerülünk dolgozni (mint általában a regressziószámításoknál), akkor ez minden további nélkül megtehető, a szóráselemzés főbb megállapításai érvényben maradnak, csupán arra kell ügyelni, hogy a csoporton belüli varianciák centrálisak legyenek (tehát továbbra is W_n és W_t-vel dolgozzunk).

b) Spektrálfelbontás

A kérdés, amelynek vizsgálata a továbbiak szempontjából lényeges az, hogy milyen formában bontható fel adott

$$\Omega = aI_{NT} + b(I_N \otimes J_T) + c(J_N \otimes I_T)$$

mátrix, ahol a, b és c pozitív skalárok. Az Ω-t átrendezve és újra írva adódik, hogy

$$\Omega = (a + Tb + Nc)\frac{J_{NT}}{NT} + (a + Tb)\left(\frac{I_N \otimes J_T}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}\right) +$$
$$+ (a + Nc)\left(\frac{J_N \otimes I_T}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}\right) + a\left(I_{NT} - \frac{I_N \otimes J_T}{T} - \frac{J_N \otimes I_T}{N} + \frac{J_{NT}}{NT}\right) =$$
$$= (a + Tb + Nc)FA + (a + Tb)B_n + (a + Nc)B_t + aW^*.$$

Ez egyben Ω spektrálfelbontása is, ahol az $(a + Tb + Nc)$, $(a + Tb)$, $(a + Nc)$ és (a) skalárok az Ω mátrix sajátértékei 1, $N - 1$, $T - 1$ és $NT - N - T + 1$ multiplicitással (lásd TROGNON [11]). A hozzájuk tartozó sajátvektorok értelemszerűen $\frac{J_{NT}}{NT}$, illetve a B_n, B_t és W^* operátorok oszlopvektorai. Ebből következik, hogy

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{a + Tb + Nc}\frac{J_{NT}}{NT} + \frac{1}{a + Tb}B_n + \frac{1}{(a + Nc)}B_t + \frac{1}{a}W^*.$$

Egyenes következménye továbbá a fentieknek az is, hogy ha

$$\Omega^* = aI_{NT} + b(I_N \otimes J_T),$$

akkor Ω^* spektrálfelbontása

$$\Omega^* = aW_n + (a + bT)\bar{B}_n,$$

és így

$$\Omega^{*-1} = \frac{1}{a}W_n + \frac{1}{a + bT}\bar{B}_n.$$

2. A panelmodellekről általában

Legyen a kiinduló modell

$$y = X\beta + u, \tag{1}$$

ahol — és a továbbiakban mindig —

y — az endogén változó megfigyeléseinek $(NT \times 1)$ méretű vektora,

X — az exogén magyarázó változók megfigyeléseinek ($NT \times K$) méretű mátrixa,
u — a látens változók ($NT \times 1$) méretű vektora,
K — a magyarázó változók száma,
N — a megfigyelt egyedek száma,
T — a megfigyelt idősor hossza,

tehát

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1T} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{NT} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad X = \begin{bmatrix} X_{11}^{(1)} & \dots & X_{11}^{(K)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ X_{NT}^{(1)} & \dots & X_{NT}^{(K)} \end{bmatrix}.$$

Az egyik leglényegesebb kérdés, amely további vizsgálódásainkat meghatározza, az, hogy a fenti változók megfigyelései mennyire tekinthetők homogéneknek.

A panelmodellek alapvető feltételezése, hogy a megfigyeléseket a strukturális paraméterek szempontjából homogéneknek tekinti, vagyis ugyanaz a strukturális paramétervektor írja le az összes egyed viselkedését,[5] tehát

$$y_i = X_i \beta + u_i \ \forall_i \quad (i = 1, \dots, N). \tag{2}$$

Világos azonban, hogy hiba lenne a megfigyeléseket teljesen homogéneknek tekinteni, hiszen bizonyos, hogy minden egyed rendelkezik sajátos, a többitől eltérő tulajdonságokkal is. Gondoljuk meg, hogy ha a megfigyelt egyedek termelőegységek, akkor az eltérő vállalati méretek, az eltérő földrajzi elhelyezkedés stb. egyedi bélyeget nyom a vállalatokra. A továbbiakban az ilyen egyedi jellegzetességeket egyedhatásoknak fogjuk nevezni. Hasonlóan előfordulhat, hogy a megfigyelt különböző időpontok (évek) rendelkeznek ilyen egyedi vonásokkal, a továbbiakban ezeket időhatásoknak fogjuk nevezni.

A kérdés most az, hogy az idő és egyedhatásokat hogyan építsük be az (1) modellbe, ha figyelembe vesszük a (2) feltételt.

Erre két út kínálkozik. Az egyik, hogy külön egyed (illetve idő) specifikus paramétereket határozunk meg, melyek minden egyednél (illetve időpontnál) más-más értékeket vehetnek fel, a másik, hogy az egyed (idő) specifikus hatásokat a látens változóba építjük be. Az előbbit állandó hatású, az utóbbit véletlen hatású megközelítésnek szokás nevezni.

[5] Ettől eltérő kezelést a változó koefficiensű modellek tesznek lehetővé, ahol a paraméterek egyedenként különbözőek is lehetnek (MÁTYÁS [6], [7]), de ennek vizsgálata túlnőne írásunk keretein.

A gyakorlatban mind a két megközelítési mód elterjedt, általában azonban, ha nagyszámú egyeddel van dolgunk ($N > 30-40$), szívesebben alkalmazzák a véletlen hatású megközelítést, míg ha az egyedek száma viszonylag alacsony, kedveltebb az állandó hatású megközelítés. (Lásd: MUNDLAK–YAHAR [10], LEE [5], KIEFER [4], HSIAO [3].)

3. Állandó hatású panelmodellek

Írjuk újra az (1) modellt és vegyük az egyedhatásokat állandó hatásként figyelembe:

$$y = X\beta + Z\alpha + u, \tag{3a}$$

illetve

$$y_i = X_i\beta + L_T\alpha_i + u_i, \tag{3b}$$

ahol

$Z = I_N \otimes L_T$ a vakváltozók ($NT \times N$) méretű mátrixa,
α_i — az egyedhatást kifejező paraméter,
α — az α_i-k ($N \times 1$) méretű vektora és
$E(u) = 0$, $E(uu') = \delta^2 I_{NT}$.

A feladat most az α és β paraméterek becslését előállítani. A (3a) modellt újra írva:

$$y = Z\alpha + X\beta + u = [Z, X]\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + u.$$

Jelölje: $\gamma = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, ekkor γ $KLNM$[6] becslése

$$\hat{\gamma} = \left[\begin{pmatrix}Z'\\ X'\end{pmatrix}(Z, X)\right]^{-1}\begin{pmatrix}Z'\\ X'\end{pmatrix} y = \begin{bmatrix}Z'Z & Z'X\\ X'Z & X'X\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Z'\\ X'\end{pmatrix} y.$$

A mátrixok partíciónkénti inverzét használva és figyelembe véve, hogy $W_n = I_{NT} - Z(Z'Z)^{-1}Z'$

$$\hat{\gamma} = \begin{bmatrix}(Z'Z)^{-1} + (Z'Z)^{-1}Z'X[X'X - X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1} & -(Z'Z)^{-1}Z'X(X'W_nX)^{-1}\\ -(X'W_nX)^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1} & (X'W_nX)^{-1}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}Z'\\ X'\end{pmatrix} y.$$

A kínálkozó egyszerűsítéseket elvégezve:

$$\hat{\beta}_w = (X'W_nX)^{-1}X'W_ny \tag{4a}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T}Z'(Y - X\hat{\beta}). \tag{4b}$$

[6] Klasszikus legkisebb négyzetek módszere.

Látható, hogy a β strukturális paramétervektor becslése csupán a csoporton belüli varianciát használja fel, mivel a csoportok közötti varianciát a W_n operátor segítségével kiiktattuk. A fenti $\hat{\beta}_w$ esztimátor nem más, mint a

$$W_n y = W_n X\beta + W_n u$$

transzformált modell paramétereinek $KLNM$ esztimátora.

Mint láttuk, a W_n operátor egy orthogonális vetítést hajt végre, tehát világos, hogy $W_n y = [y_{it} - \bar{y}_i]$ és ugyanaz érvényes az összes magyarázó változóra is. Ennek megfelelően a β strukturális paramétervektor állandó-hatású esztimátora rendkívül könnyen előállítható, elegendő a modellben szereplő összes változót transzformálni a fentiek szerint és e transzformált változókat magában foglaló modellre a $KLNM$-et alkalmazni.

A (4b) esztimátort szemügyre véve, kiderül az is, hogy csupán a merőleges vetítés után fennmaradó információt (tehát nagyon kevés információt) használ fel, aminek következtében számos empirikus vizsgálatban α-t ki sem számítják.

A (3) modellben csupán az egyedhatásokat vettük figyelembe. Beépítve az időhatásokat is

$$y = Z\alpha + \tilde{I}\lambda + X\beta + u, \tag{4}$$

ahol

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_T \end{bmatrix},$$ vagyis $\tilde{I} = L_N \otimes I_T$ $(NT \times T)$ méretű mátrix és

λ — az időhatások $(T \times 1)$ méretű paramétervektora.

A fent bemutatott eljárást követve, könnyen adódik a β strukturális paraméterek becslésére

$$\hat{\beta}_w^* = (X'W^*X)^{-1}X'W^*y.$$

Az $\hat{\alpha}$ és $\hat{\lambda}$ paraméterbecslések előállítása a fentiekhez hasonló és identifikációs problémák miatt szintén nemkívánatos. A β paramétervektor állandó hatású idő- és egyedhatást figyelembe vevő esztimátora minden nehézség nélkül előállítható, ha a modell minden változójára elvégezzük a W^* transzformációt és a transzformált modellre alkalmazzuk a $KLNM$-et. A W^* transzformáció (már láttuk) nem más, mint (az y változón bemutatva)

$$W^*y = [y_{it} - \bar{y}_i - \bar{y}_t + \bar{y}].$$

A legújabb számítógépes statisztikai programcsomagok lehetővé teszik a W_n és W^* transzformációk egy utasításban történő megadását, így az egyes változók transzformálása után a $KLNM$ futtatása szolgáltatja az állandó hatású panelmodellek kívánt paraméterbecsléseit.

E fejezet végén szükséges megemlíteni, hogy a W_n és W^* vetítő operátorok mind a (3), mind a (4) modellből kiiktatják a szabad konstanst, ami annyit jelent, hogy ha esetleg a modell magyarázó változói között szerepelt, akkor a transzformációs eljárás után ennek értéke automatikusan zérus lesz.[7]

[7] Természetesen ez azt jelenti, hogy ilyen esetben a modellt eleve szabad konstans nélkül kell specifikálni.

4. Véletlen hatású panelmodellek

Írjuk újra az (1) modellt és vegyük most az egyedhatásokat véletlen hatásként figyelembe:

$$y = X\beta + u = X\beta + \mu \otimes L_T + v, \tag{5a}$$

illetve

$$y_{it} = X'_{it}\beta + u_{it}, \tag{5b}$$

és u_{it} felbontható az $u_{it} = \mu_i + v_{it}$ formába, ahol μ_i az egyedhatást képviselő valószínűségi változó, μ az egyedhatások $(N \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozója és v_{it} (illetve v) a látens változó (illetve azokat összefogó v vektor).

A következő feltételezésekkel élünk:

1. A μ_i és v_{it} valószínűségi változók függetlenek minden i-re és t-re;
2. $E(\mu_i) = 0$;
3. $E(v_{it}v_{i't'}) = \begin{cases} \delta_v^2, & \text{ha } i = i' \text{ és } t = t' \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$
4. $E(\mu_i\mu_{i'}) = \begin{cases} \delta_\mu^2, & \text{ha } i = i' \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$
5. $E(v_{it}) = 0$.

Világos, hogy az $ALNM$[8] a β paramétervektor torzítatlan és hatásos becslését nyújtja. Ehhez azonban szükségünk van az u látens változó kovarianciamátrixára és annak becslésére is.

Könnyen belátható (MÁTYÁS [6], [7]), hogy

$$E(u_i u_i') = \delta_\mu^2 J_T + \delta_v^2 I_T = \Sigma$$

$$E(uu') = I_N \otimes \Sigma = \delta_v^2 I_{NT} + \delta_\mu^2 (I_N \otimes J_T) = \delta_v^2 W_n + (\delta_v^2 + T\delta_\mu)\bar{B}_n = \Omega.$$

Ennek megfelelően δ_μ^2 és δ_v^2 becslését kell előállítani ahhoz, hogy meghatározzuk az $\hat{\Omega}$ becsült kovarianciamátrixot.

Ha figyelembe vesszük a W_n és $\bar{B}_n$ operátorok tulajdonságait, akkor könnyen kimutatható, hogy

$$\hat{\delta}_v^2 = \hat{u} W_n \hat{u} / [N(T-1) - K]$$

$$T\hat{\delta}_\mu^2 + \hat{\delta}_v^2 = \hat{u}\bar{B}_n \hat{u}/(N-K),$$

ahol $\hat{u}$ — az (5a) modell $KLNM$ becsléséből számított $y - X'\hat{\beta}_{KLNM} = \hat{u}$ reziduum vektor.

A β paramétervektor $ALNM$ becslésének az előállítása tehát semmilyen gyakorlati nehézségbe nem ütközik:

$$\hat{\beta}_{ALNM} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y,$$

illetve a becsült kovarianciamátrixot használva

$$\hat{\beta}_{\overline{ALNM}} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y.$$

[8] Általánosított legkisebb négyzetek módszere.

Láttuk az 1.b) fejezetben, hogy

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\delta_v^2} W_n + \frac{1}{\delta_v^2 + T\delta_\mu^2} \bar{B}_n = \frac{1}{\delta_v^2} (W_n + \theta \bar{B}_n),$$

ahol

$$\theta = \frac{\delta_v^2}{\delta_v^2 + T\delta_\mu^2}.$$

Ujra írva az $ALNM$ esztimátort:

$$\hat{\beta}_{ALNM} = [X'(W_n + \theta \bar{B}_n)X]^{-1} X'(W_n + \theta \bar{B}_n)y,$$

és figyelembe véve a W_n és $\bar{B}_n$ operátorok 1. fejezetben áttekintett tulajdonságait:

$$\hat{\beta}_{ALNM} = (X'W_nX + \theta X'\bar{B}_nX)^{-1}(X'W_ny + \theta X'\bar{B}_ny). \tag{6}$$

Természetesen θ helyébe a $\hat{\theta}$ becslést helyettesítve a becsült kovarianciamátrixot felhasználó $ALNM$ esztimátort nyerjük.[9] Jól látható e képletből, hogy az $ALNM$ a csoporton belüli és a csoportok közötti varianciát is felhasználja, és mivel az $ALNM$ hatásos becslést nyújt, a keresett β paramétervektorra így θ az optimális lineáris kombinációját határozza meg a két varianciának.

Vegyük észre, hogy a

$$\hat{\beta}_w = [X'W_nX)^{-1} X'W_ny$$

esztimátor szintén torzítatlan becslést nyújt a β paramétervektorra, e becslés azonban nem hatásos.

Rendkívüli módon megkönnyíti az $ALNM$ gyakorlati alkalmazását, ha a modellben szereplő összes változót transzformáljuk a $(W_n + \sqrt{\theta}\bar{B}_n)$ operátor segítségével, majd a transzformált változókra alkalmazzuk a $KLNM$-et:

$$(W_n + \sqrt{\theta}\bar{B}_n)y = (W_n + \sqrt{\theta}\bar{B}_n)X\beta + (W_n + \sqrt{\theta}\bar{B}_n)u,$$

és e modell β paraméterének $KLNM$ esztimátora éppen egyenlő a (6) formulában szereplő $\hat{\beta}_{ALNM}$ esztimátorral.

A $(W_n + \sqrt{\theta}\bar{B}_n)$ transzformáció nem más, mint (az y változón bemutatva):

$$(W_n + \sqrt{\theta}\bar{B}_n)y = [y_{it} - (1 - \sqrt{\theta})\bar{y}_i].$$

Az (5a), (5b) modellben csupán az egyedhatásokat vettük figyelembe. Az időhatásokat is formalizálva, a modell:

$$y = X\beta + u, \tag{7}$$

ahol

$u = \mu \otimes L_T + \bar{I}\lambda^* + v$

λ^* — az időhatások $(T \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozója.

[9] A (6) esztimátort szokás λ-típusú esztimátornak is nevezni, ha θ helyébe λ-t írunk. Ekkor $\lambda = \theta$ az ALNM, $\lambda = 0$ a (4a) és $\lambda = 1$ a KLNM esztimátorát adja a keresett paramétervektornak.

Tegyük fel az előzőekhez hasonlóan, hogy μ, λ és v páronként független, 0 várható értékű valószínűségi vektorváltozók, valamint

$$E(\mu\mu') = \delta_\mu^2 I_N,\ E(\lambda\lambda') = \delta_\lambda^2 I_T,\ E(vv') = \delta_v^2 I_{NT}.$$

Az *ALNM* természetesen most is a β paramétervektor torzítatlan és hatásos becslését szolgáltatja. Az ehhez szükséges kovarianciamátrix

$$E(uu') = \Omega = \delta_\mu^2(I_N \otimes J_T) + \delta_\lambda^2(J_N \otimes I_T) + \delta_v^2 I_{NT}.$$

Láttuk az 1. fejezetben, hogy Ω felírható az

$$\Omega = (\delta_v^2 + T\delta_\mu^2 + N\delta_\lambda^2)\frac{J_{NT}}{NT} + (\delta_v^2 + T\delta_\mu^2)B_n + (\delta_v^2 + N\delta_\lambda^2)B_t + \delta_v^2 W^*$$

formában is. Ennek megfelelően

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\delta_v^2 + T\delta_\mu^2 + N\delta_\lambda^2}\frac{J_{NT}}{NT} + \frac{1}{\delta_v^2 + T\delta_\mu^2}B_n + \frac{1}{\delta_v^2 + N\delta_\lambda^2}B_t + \frac{1}{\delta_v^2}W^*.$$

A (7) modell paraméterének *ALNM* esztimátora ezek után a következő:

$$\hat\beta_{ALNM} = \left[X'\left(\theta_2\frac{J_{NT}}{NT} + \theta B_n + \theta_1 B_t + W^*\right)X\right]^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left[X'\left(\theta_2\frac{J_{NT}}{NT} + \theta B_n + \theta_1 B_t + W^*\right)y\right],$$

ahol

$$\theta = \frac{\delta_v^2}{\delta_v^2 + T\delta_\mu^2}$$

$$\theta_1 = \frac{\delta_v^2}{\delta_v^2 + N\delta_\lambda^2}$$

$$\theta_2 = \frac{\delta_v^2}{\delta_v^2 + T\delta_\mu^2 + N\delta_\lambda^2}$$

Az előzőekhez hasonlóan (bár ez első látásra nehezen emészthető, de könnyen ellenőrizhető), ha a (7) modell összes változóját a $\left(\sqrt{\theta_2}\frac{J_{NT}}{NT} + \sqrt{\theta}B_n + \right.$ $\left. + \sqrt{\theta_1}B_t + W^*\right)$ operátor segítségével transzformáljuk, majd a transzformált modellre a *KLNM*-et alkalmazzuk, a modell paramétereinek *ALNM* esztimátorát kapjuk.

A $\left(\sqrt{\theta_2}\frac{J_{NT}}{NT} + \sqrt{\theta}B_n + \sqrt{\theta_1}B_t + W^*\right)$ operátor hatását az y változón bemutatva:

$$\left(\sqrt{\theta_2}\frac{J_{NT}}{NT} + \sqrt{\theta}B_n + \sqrt{\theta_1}B_t + W^*\right)y = \qquad (8)$$
$$= [y_{it} - (1 - \sqrt{\theta})\bar y_i - (1 - \sqrt{\theta_1})\bar y_t + (1 - \sqrt{\theta} - \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2})\bar y].$$

Az *ALNM* gyakorlatban történő használatához szükségünk van a δ_v^2, δ_μ^2 és δ_λ^2 szórások becslésére. Ezek a *KLNM* becslés reziduumából könnyen előállíthatók, figyelembe véve a látens változó (7) modell szerinti felbontását (MÁTYÁS [6], [7]) és a W^*, B_n, B_t operátorok tulajdonságait:

$$\hat{\delta}_v^2 = \hat{u}' W^* \hat{u}/[(N-1)(T-1)-K]$$

$$N\hat{\delta}_\lambda^2 - \hat{\delta}_v^2 = \hat{u}' B_t \hat{u}/(T-K)$$

$$T\hat{\delta}_\mu^2 - \hat{\delta}_v^2 = \hat{u} B_n \hat{u}/(N-K),$$

ahol

$$\hat{u} = y - X' \hat{\beta}_{KLNM}.$$

A már említett számítógépes statisztikai programcsomagok a $\hat{\delta}_v^2$, $\hat{\delta}_\mu^2$ és $\hat{\delta}_\lambda^2$ szórásbecsléseket a *KLNM* reziduumból egy utasítással előállítják. Szintén egy utasítás, adott változóra, a (8) transzformáció végrehajtása. Mivel az utasításban szükséges a θ, θ_1, θ_2 paraméterek megadása, így ha ezek helyébe nem a *KLNM* reziduumból számított szórásbecslések segítségével előállított $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ paramétereket helyettesítjük, hanem 0 vagy 1 értéket adunk, akkor az összes eddig vizsgált transzformáció előállítható a (8) transzformációból.

Látható tehát, hogy a látszólag bonyolult becslési eljárásokat a korszerű statisztikai programcsomagok könnyen felhasználhatóvá tették.

Végezetül egy lényeges gyakorlati következménnyel járó elméleti probléma tisztázása látszik szükségesnek. Láttuk, hogy a (6) esztimátort úgy is megkaphatjuk, hogy a modell változóit a $(W_n + \sqrt{\theta} B_n)$ operátor segítségével transzformáljuk, majd a transzformált modellre alkalmazzuk a *KLNM*-et. Jelöljük a transzformált változókat *-gal. Ahhoz, hogy a becsült kovarianciamátrixot felhasználó *ALNM* esztimátor torzítatlan legyen, szükséges, hogy:

$$E[(X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} u^*] = 0. \tag{9}$$

Abban az esetben, amikor a becsült kovarianciamátrixot használjuk, a transzformációs operátorban $\sqrt{\hat{\theta}}$ szerepel.

Az $(X^{*\prime} X^*)^{-1}$ és $X^{*\prime} u^*$ szorzások során azonban keletkezik egy $(1/\hat{\theta})$, illetve $\hat{\theta}$ tag is, ami azt jelenti, hogy ahhoz, hogy (9) fennálljon, szükséges az $E(1/\hat{\theta})$ és az $E(\hat{\theta})$ várható értékek létezése.

A $\hat{\theta}$ eloszlását figyelembe véve a két várható érték létezésének feltétele:

$$N(T-1) - K \geq 5 \text{ és } N - K \geq 5.$$

Hasonló módon eljárva belátható, hogy a (7) modell becsült kovarianciamátrixot felhasználó *ALNM* esztimátorának torzítatlanságához szükséges, hogy

$$N(T-1) - K \geq 6,\ N \geq K + 6 \text{ és } T \geq K + 6.$$

Figyelembe véve, hogy T általában kicsi, a torzítatlansági feltételek számos esetben igen szigorúnak minősülhetnek.

(Beérkezett: 1987. január 19-én.)

IRODALOM

1. P. BALESTRA – M. NERLOVE: Pooling Cross-Section and Time-Series Data in the Estimation of Dynamic Model. *Econometrica*. 1966 (Vol 34) No 3.
2. I. HOCH: Estimation of Production Parameters Combining Time-Series and Cross-Section Data. *Econometrica*. 1962 (Vol 30) No 1.
3. C. HSIAO: *Benefits and Limitations of Panel Data*. University of Toronto. 1985.
4. W. M. KIEFER: Estimation of Fixed Effect Models for Time-Series of Cross-Section. *Journal of Econometrics*. 1980 (Vol 14) No 2.
5. L. F. LEE: *On the Issues of Fixed Effects vs Random Effects Econometric Models with Panel Data*. University of Minnesota. 1978. Discussion Paper No 78–101.
6. MÁTYÁS, L.: *Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban*. Agrárgazdasági Kutató Intézet, 1985/6.
7. MÁTYÁS, L.: *Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban*. Kandidátusi értekezés. 1986.
8. Y. MUNDLAK: Estimation of Production and Behavioral Functions from a Combination of Cross-Section and Time-Series Data. In Christ (ed): *Measurement in Economics*. Stanford University Press. 1963.
9. Y. MUNDLAK: Empirical Production Function Free of Management Bias. *Journal of Farm Economics*. 1961 (Vol 43) No 1.
10. Y. MUNDLAK – J. A. YAHAR: Random Effects, Fixed Effects, Convolution and Separation. *Econometrica*. 1981 (Vol 49) No 6.
11. A. TROGNON: *Econometrie II*. INSEE-ENSAE. Malakoff 1984.

ESTIMATION OF PANEL MODELS

One of the main trends in present day econometric research aims at augmenting the amount of information processed and emitted by a given model. An efficient method uses time series and cross section data concurrently, specification and estimation of panel models serves as one of the relatively simple tools. This paper presents models which extend to both steady and random, time-specific and agent-specific effects in a unified framework. It also deals with various parameter estimation techniques pertaining to these models with particular reference to some methods applied in relevant software packages. The novelty of the paper lies in the introduction of transformation operators based on the decomposition of variances. This method simplifies even the seemingly complex procedures and facilitates their comprehension and application. The use of transformation operators also enables to imbed the parameter estimation procedures of panel models into the traditional logics of econometrics and simplifies the generalizations.

ОЦЕНКА ПАНЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

В наши дни одно из основных направлений эконометрических исследований состоит в том, чтобы как можно в большей степени повысить количество используемой и выдаваемой данной моделью информации. Эффективным способом этого является одновременное использование временных рядов и средних данных, относительно простым средством чего является спецификация и оценка панельных моделей. В статье делается попытка единого представления, а также общего рассмотрения моделей, содержащих постоянные и случайные, временные и индивидуальные специфические воздействия и параметрической оценки этих моделей, в особенности связанных с этим методов и отдельных машинных пакетов программ. Новое в статье содержит введение трансформационных операторов, основанных на раздроблении данной переменной дисперсии и последовательное использование этого, что в большой степени упрощает и облегчает применение методов, кажущихся на первый взгляд сложными. Использование трансформационных операторов облегчает включение методов параметрической оценки панельных моделей в логику традиционной эконометрии, а также упрощает и обобщения.