Szigma, XX. (1987-88) 1. sz.

KIRÁLY JÚLIA

Inhomogén népesség a növekedési modellekben *

1. Bevezetés

A neoklasszikus növekedési elméletek valamifajta aranyszabály megfogalmazására törekednek, aminek betartása esetén a gazdaság az optimális fejlősési pályán haladhat. A gazdasági pálya alakulása ezekben a modellekben gyakorlatilag három tényezőtől függ: a *tőke* alakulásától, a *munkaerő* alakulásától és végül a *technikai haladástól*. A modellekben általában hallgatólagosan felteszik, hogy a munkaerő (avagy ami ezzel legtöbb esetben ekvivalens: a népesség) alakulása és a technikai haladás kivülről adott, időbeli alakulásuk a modellek legnagyobb részében exogén adottság illetve általában endogenizálásuk sem szabályozhatóságukat, hanem csak áttételes befolyásolhatóságukat jelenti.

A harmadik tényező, a *tőke* az, amelyik feltételezetten, a felhalmozási (illetve, ami a modellekben ezzel ekvivalens, a megtakarítási) ráta helyes megválasztásával kontrollálható, így a növekedési modellek megoldásai optimális felhalmozási pályákban fogalmazódnak meg. A neoklasszikus iskola alkotta meg a Megtakarítások Aranyszabályát (Golden Rule of Saving), ami egyszerű megfogalmazásánál és jó interpretálhatóságánál fogva azóta viszonyítási alapot, egyfajta sztenderdet nyújt minden dinamikus modell számára. Így vagy úgy az Aranyszabályt fogalmazzák át az eltérő feltevésekkel élő különböző modellek.

A cikk első része egy egyszerű kontrollmodell alapján röviden ismerteti a Megtakarítások Aranyszabályát.

A második részben bevezetem az inhomogén népesség fogalmát. A népesség aktív és inaktív csoportokra bomlik, akiket eltérő jövedelemszerzési és fogyasztási lehetőségek jellemeznek. Az aktív népesség sem homogén a munkavégzés szempontjából, aminek következtében a hagyományostól némileg eltérően jellemezhetjük a munkaerőpiacot.

A harmadik rész az inhomogén népesség feltevése mellett az első részben leírt kontrollmodell keretein belül elemzi az optimális felhalmozási pályát. Belátható, hogy mivel az elmélet alapvető jellegzetességeit ez a relaxáció sem változtatja meg, a megfogalmazható normatív megtakarítási pálya szoros rokonságban áll az Aranyszabállyal.

---

* A tanulmány részeredménye annak a kutatómunkának, melyet a szerző a Rotterdami Egyetem Ökonometriai Intézetében B.M.S. van Praag professzor vezetésével M. Pradhannal együtt folytatott. Ezúton is szeretném segítségüket megköszönni, a cikkben található hibákért azonban egyedül vállalom a felelősséget.

A tanulmányban alkalmazott jelölések
(az előfordulás sorrendjében)

a bruttó mennyiségeket (össznépesség, összfogyasztás...) *latin nagybetűk*, az egy főre jutó mennyiségeket és arányokat (egy főre jutó fogyasztás, megtakarítási ráta...) *latin kisbetűk*, míg az egyéb paramétereket *görög betűk* jelölik.

t	idő
$\dot{y}$	idő szerinti derivált: $\partial y/\partial t$
$K(t)$	bruttó tőkeállomány
$L(t)$	a munkaerőállomány nagysága (az első fejezetben megegyezik a népesség nagyságával)
$C(t)$	összfogyasztás
$s(t)$	megtakarítási ráta
δ	lineáris amortizációs kulcs
n	a népesség – illetve a munkaerő – növekedési üteme
$F(K,L)$	termelési függvény (felt: lineáris homogén)
$f(k)$	egy főre jutó termelés az egységnyi munkaerőre jutó tőke függvényében
$c(t)$	egy főre jutó fogyasztás – a homogén modell kontrollváltozója
$k(t)$	egységnyi munkaerőre jutó tőkeállomány – a kontrollmodell állapotváltozója
$U(\cdot)$	hasznossági függvény
ρ	diszkonttényező
q	a kontrollmodell duálváltozója
$H(\cdot)$	a kontrollmodell jelenértékű Hamilton-függvénye
$P(t)$	népesség
x	a munkavégző képesség mértéke
$\widehat{x}$	a munkaerőpiacra való belépési küszöb
$G(x), g(x)$	a munkavégző képesség szerinti/eloszlás-, illetve sűrűségfüggvény
$PA(t)$	aktív népesség
$PI(t)$	inaktív népesség
$h(x)$	relatív bérstruktúra
$c_A(x,t)$	az aktívak differenciált egy főre jutó fogyasztása
$c_I(t)$	az inaktívak átlagos egy főre jutó fogyasztása
$w(t)$	átlagos bérszinvonal (az inhomogén modell kontrollváltozója)
μ	lineáris társadalombiztosítási járulék
γ	a munkaerő és a népesség aránya
π, η	segédváltozók

1. A Megtakarítás Aranyszabálya

A neoklasszikus növekedési iskola legismertebb eredménye az ún. *aranykori* növekedés, amelyet úgy jellemezhetünk, hogy valamennyi abszolút mennyiség (népesség, termelés, tőke, munkaerő, fogyasztás) egyenletesen és egyforma ütemben nő, valamennyi relatív mennyiség (az egy főre jutó termelés, tőke, fogyasztás, valamint a felhalmozási ráta) konstans és a társadalmi összhaszon (ami valamilyen módon az egy főre jutó fogyasztás mennyiségétől függ) maximális. Ekkor a felhalmozási ráta – konstans skálahozadék feltételezése mellett – éppen megegyezik a tőke részesedésével – vagyis a tőkének határtermelékenysége alapján járó jövedelemhányaddal.

Ezt az eredményt a Solow–Swan modell alapján szokták levezetni. A modellben a tőke időbeli változását leíró összefüggés:

tőkeállomány változása = beruházás – lineáris amortizáció.

A beruházás, amit a felhalmozás szinonimájaként használok, mivel ezek a modellek általában eltekintenek a készletfelhalmozástól, az adott évi termeléstől függ:

beruházás = termelés – fogyasztás =

= termelés × megtakarítási ráta.

Látható, hogy a beruházás nagysága ekvivalens módon szabályozható a fogyasztással avagy a megtakarítási rátával, tehát az egyikre adott aranyszabály egyértelműen átfogalmazható a másikra. Az adott évi tőkeállományt K-val, a munkaerőállományt L -lel, a fogyasztást C-vel, a megtakarítási rátát s-sel, az amortizációs kulcsot δ-val jelölve, és feltéve, hogy a technikai haladástól eltekintve az adott évi termelés leírható egy lineáris homogén termelési függvénnyel, a tőke mozgásegyenletére ezt kapjuk:

$$\dot{K} = -\delta K + F(K, L) - C = -\delta K + sF(K, L)\,. \qquad (1.1)$$

Feltéve, hogy a munkaerőállomány megegyezik a népességgel, a népesség egyenletes n ütemben bővül, és kisbetűvel jelölve az egy főre jutó mennyiségeket, a fenti egyenlet egyszerű transzformációjával meghatározható az egy főre jutó tőkeállomány dinamikus pályája:

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - c = -(\delta + n)k + sf(k)\,. \qquad (1.2)$$

A gazdaság stacionárius, ha valamennyi abszolút mennyiség egyenletesen és egyforma – a népességnövekedéssel megegyező – ütemben nő, azaz ha az egy főre jutó tőke, termelés, fogyasztás... időben konstans. Ekkor tehát van olyan k, hogy $\dot{k} = 0$, azaz

$$-(\delta + n)k + sf(k) = 0\,. \qquad (1.3)$$

Belátható, hogy f-re kirótt meglehetősen általános feltételek mellett létezik ilyen k (vö. pl. RAMANATHAN, 1982). Ekkor a fenti képletből levezethető:

$$s = k(\delta + n)/f(k)\,. \qquad (1.4)$$

Eltérő s értékek különböző stacionárius pályákat generálnak. Solow és Swan aranykorinak azt a pályát nevezi, amely mentén maximális az egy főre jutó fogyasztás, azaz:

$$\max_s (1 - s)f(k)\,, \qquad (1.5)$$

vagy, ami ezzel ekvivalens:

$$\max_k f(k)\,[1 - k(\delta + n)/f(k)]\,. \qquad (1.6)$$

Így kapjuk:

$$f_k = \delta + n\,, \tag{1.7}$$

amit behelyettesítve (1.4)-be jutunk a felhalmozás Aranyszabályához:

$$s = kf_k / f(k)\,. \tag{1.8}$$

Ez éppen igazolja kiinduló állításunkat, hiszen lineáris homogén termelési függvény esetén $kf_k/f(k)$ éppen a tőke relatív részesedése a megtermelt jövedelemből.

Vegyük észre, hogy a neoklasszikus megközelítés nem foglalkozik azzal, hogyan jut el a rendszer a stacionárius pályára, csak annyit állít, hogy a stacionárius pályák közül az a legjobb, amelyet a fenti Aranyszabály jellemez. Az optimális megtakarítási rátához tartozó optimális egy főre jutó tőkeállományt az (1.3) képlet adja meg, anélkül, hogy e között és egy induló, adott k_0 érték között bármiféle kapcsolat teremtődne.

Éppen ebben térnek el a Solow–Swan-féle megközelítéstől az optimális szabályozási (növekedési) modellek (lásd pl: ARROW–KURZ, 1968), amelyek adott k_0 kiindulópont figyelembevételével határozzák meg a rendszer által követendő optimális pályát és azt vizsgálják, milyen kiindulópont választása esetén vezet ez a pálya stabil egyensúlyhoz. Erről a hosszú távú stacionárius megoldásról mutatható meg, hogy amennyiben nincs időbeli diszkontálás, éppen egybeesik az aranykori pályával. Ebben az esetben tehát nem a stacionárius pályák közötti választás a kérdés, hanem az, hogy van-e olyan optimális pálya, amelyik adott kiindulópont mellett éppen a hosszú távú stacionárius megoldást eredményezi.

Mint azt már az előbb megállapítottuk, ekvivalens módon választhatjuk kontrollváltozóként a fogyasztást avagy a megtakarítási rátát, így most az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért az egy főre jutó fogyasztást tekintjük kontrollváltozónak A Solow–Swan modellben megfogalmazott mozgásegyenlet mellett keressük azt az optimális pályát, amelyen a – diszkontált hasznossági függvénnyel mért – társadalmi jólét maximális. Így az alábbi formálisan megfogalmazott kontrollfeladathoz jutunk, ahol k az állapot- és c a kontrollváltozó:

$$\begin{aligned} &\max_{c,k} \int_0^\infty e^{-\rho t} U\left(c(t)\right) dt \qquad\qquad (1.9)\\ &\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - c \\ &k(0) = k_0\,. \end{aligned}$$

ρ jelöli a diszkonttényezőt, $U(\ )$ pedig a szokásos "jó" tulajdonságokkal rendelkező hasznossági függvényt. A feladatot a Pontrjagin maximumelv felhasználásával, a feladathoz tartozó jelen értékű Hamilton-függvény maximálásával és a duálváltozó mozgásegyenletének meghatározásával oldjuk meg. Belátható, hogy jelen esetben a szükséges feltétel egyben elégséges is (ld. SETHI–THOMPSON, 310. o.). A duálváltozót q–val jelölve, $(c^*(t), k^*(t), q^*(t))$ optimális megoldása a feladatnak, ha a jelenértékű Hamilton függvényre

$$H(k, c, q) = U(c) + q[-(\delta + n)k + f(k) - c] \tag{1.10}$$

teljesül, hogy:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \partial H^*/\partial c = 0 \\ &\text{b)} \quad \dot{q} - \rho q = -\partial H^*/\partial k \\ &\text{c)} \quad \dot{k} = \partial H^*/\partial q \\ &\text{d)} \quad \lim_{t\to\infty} k(t)q(t) = 0 \qquad \text{(transzverzalitás)}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Kis átalakítással kapjuk:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad U'(c) - q = 0 \\ &\text{b)} \quad \dot{q} = q(\rho + \delta + n - f_k) \\ &\text{c)} \quad \dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - c. \end{aligned} \tag{1.12}$$

(1.12 a)-ból q-t kifejezve $\dot{q} = \dot{c}U''(c)$, és (1.12 b)-be behelyettesítve:

$$\dot{c}U''(c) = U'(c)(\rho + \delta + n - f_k). \tag{1.13}$$

Az (1.13) képletet átrendezve jutunk a szabályozó változó optimális pályát leíró mozgásegyenlethez:

$$\dot{c} = (U'/U'')(\rho + \delta + n - f_k). \tag{1.14}$$

Egy fejlődési pálya tehát optimális, ha a kontrollváltozó kielégíti az (1.14) képlettel, a hozzá tartozó állapotváltozó pedig az (1.12.c) képlettel megadott differenciálegyenleteket, valamint az (1.11.d) transzverzalitási feltételt. A továbbiakban a rendszer optimális megoldásáról beszélve ezekre a feltételekre utalok.

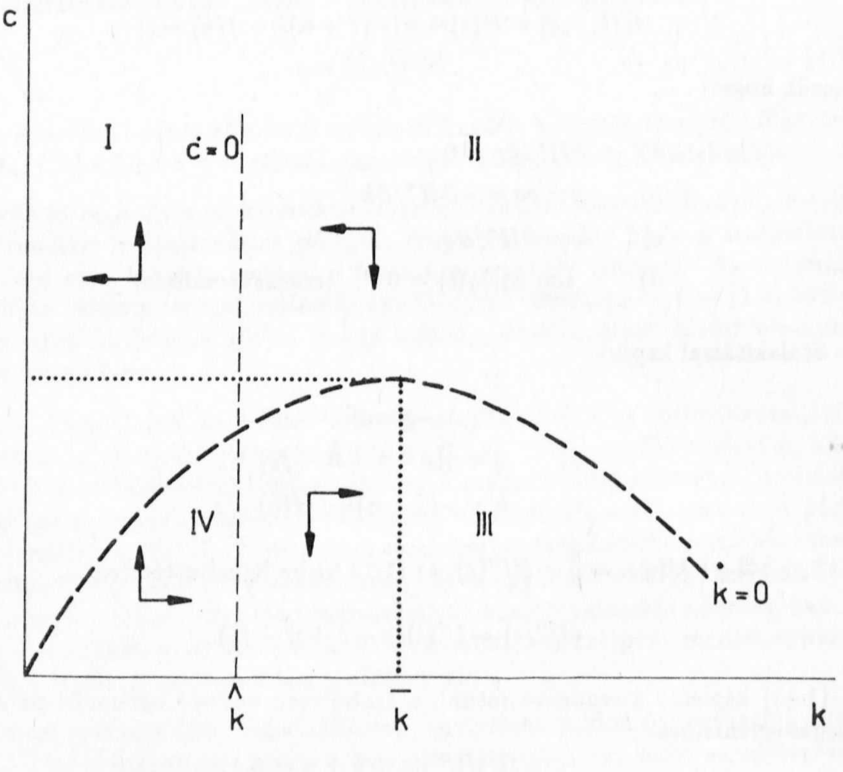
A hosszú távú stacionárius pályán teljesül, hogy mind az állapot-, mind a kontrollváltozó idő szerinti deriváltja zérus, azaz:

$$\dot{c} = 0 \longrightarrow \rho + \delta + n = f_k \tag{1.15}$$

$$\dot{k} = 0 \longrightarrow c = -(\delta + n)k + f(k) \tag{1.16}$$

A könnyebb elemzés érdekében érdemes a pályákat egy kétdimenziós fázisdiagramon ábrázolni (1. ábra).

(1.16)-ból látható, hogy az egy főre jutó fogyasztás időben változatlan, ha k egy kitüntetett $\hat{k}$ értéket vesz fel, míg a $\dot{k} = 0$ megoldását az ábrán szaggatott vonallal jelöltük. A szaggatott görbe és a függőleges egyenes metszéspontjában teljesülnek a hosszú távú stacionaritás feltételei az állapot és a kontrollváltozóra egyaránt, ebből



1. ábra Az optimális növekedési kontrollmodell megoldásának fázisdiagrammja

a "pontból" nincs elmozdulás. Íly módon a fázisteret négy tartományra oszthatjuk, amelyekben (c, k) időbeli mozgását nyilakkal ábrázoltuk.

Az egyes tartományokra jellemző mozgások szintén az (1.15)-(1.16) képletekből olvashatók ki, pl: az I. fázisban $k < \hat{k}$ így $f_k > \rho + \delta + n$, de mivel $U'/U'' < 0$ így $\dot{c} > 0$, azaz az egy főre jutó fogyasztás nő. Ugyanitt $c > -(\delta + n)k + f(k)$ tehát $\dot{k} < 0$, azaz az egy főre jutó tőkeállomány csökken. Hasonló módon elemezhetjük a többi tartománybeli dinamikus viselkedést is.

Látható, hogy I. és III. fázisbeli pályák divergensek, míg a II. és IV. tartománybeli pályák a rendszer egyensúlyi pontjába vezetnek. A transzverzalitási feltételnek (1. 11. d) csak ez utóbbi pályák tesznek eleget, tehát az optimális trajektóriák az egyensúlyi pontba futnak.

Térjünk át ennek a hosszú távú egyensúlyi pályának a jellemzésére. (1.15)-ből tudjuk, hogy

$$\delta + n = f_k - \rho\,. \tag{1.17}$$

Ezt behelyettesítve az (1.16)-ba:

$$c = (-f_k + \rho)k + f(k)\,. \tag{1.18}$$

Felhasználva, hogy $c = f - sf$, ahol s a megtakarítási ráta, (1.18) átalakításából következik, hogy:

$$\begin{aligned} f(k) - sf(k) &= (-f_k + \rho)k + f(k) \\ s &= kf_k/f(k) - \rho k/f(k)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Látható, hogy (1.19) zéró diszkonttényező ($\rho = 0$) mellett éppen a Megtakarítás Aranyszabályát adja vissza. Vegyük észre, ha a diszkonttényező zérus, akkor az 1. ábrán $\hat{k}$ jobbra tolódik és éppen az egy főre jutó fogyasztás maximumpontján metszi a másik görbét. Így tehát az alábbi összefüggésre jutottunk: végtelen időhorizont esetén az egy főre jutó fogyasztás hasznossági függvényének diszkontálás nélküli maximalizálása egyensúlyi megoldásként éppen a Megtakarítás Aranyszabályát eredményezi és az összes stacionárius pályák közül a maximális egy főre jutó fogyasztásút választja ki.

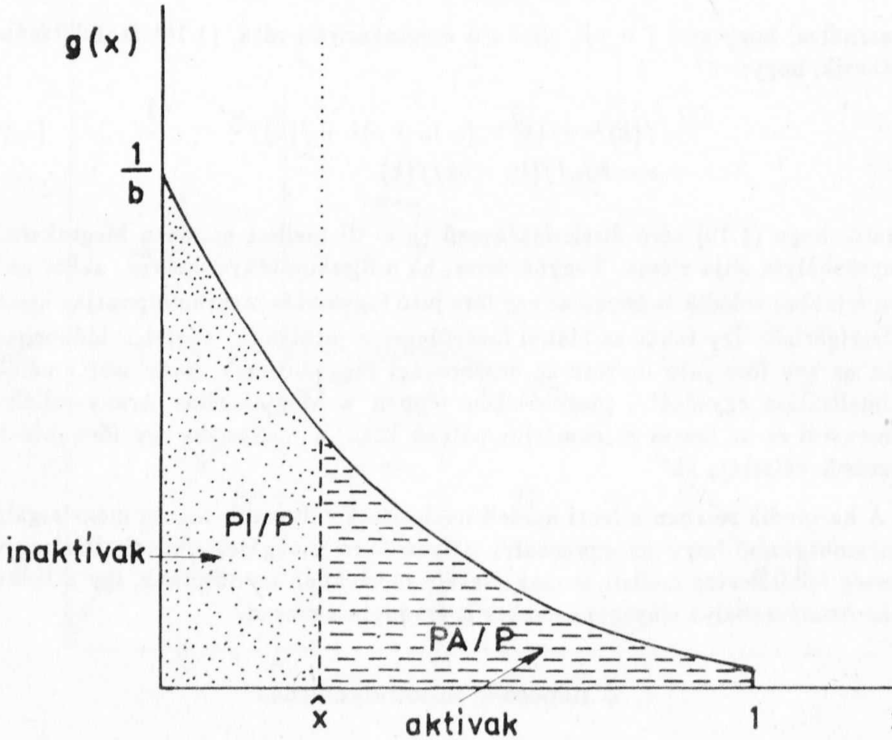
A harmadik részben a fenti modell módositott változatát fogom megvizsgálni, és megmutatom, hogy az egyensúlyi pályát leíró mozgásegyenletek inhomogén népesség feltételezése mellett is csak csekély mértékben módosulnak, így a Felhalmozás Aranyszabálya lényegében ekkor is érvényben marad.

2. A népesség inhomogenitása

Ebben a fejezetben, némileg elszakadva az előző rész elemzésétől tágabb megközelítésben vizsgáljuk a népesség inhomogenitását és ennek különböző irányú következményeit. Az előző fejezetben végig feltételeztük, hogy a népesség homogén, amelyet stabil növekedési ütem, homogén termelékenység, homogén fogyasztás jellemez. A homogenitásból következően a munkaerő éppen megegyezett a népességgel, azaz $L(t) = P(t)$ implicit feltevés húzódott meg valamennyi levezetés mögött, ahol $P(t)$ jelöli a népességet.

Ennek a feltevésnek egy lehetséges feloldását jelenti annak figyelembevétele, hogy nem minden embernek ugyanakkora a munkavégző képessége. Feltesszük, hogy ez a képesség jellemezhető egy $(0,1)$ intervallumba eső értékkel, amit x-szel jelölünk. Ez a megközelítés nincs ellentétben az inhomogenitásra vonatkozó szokásos feltevésekkel, amikor is a népességet generációk, korcsoportok, képzettségi szint stb. szerint bontják. Kézenfekvő feltevés, hogy a munkavégző képesség és a kor avagy az iskolázottsági szint szoros kapcsolatban állnak egymással.

Mivel a népesség minden tagja jellemezhető ezzel a mértékkel, így feltételezhetjük, hogy létezik a népességnek a $(0,1)$ intervallumon értelmezett x szerinti



2. ábra Egy hipotetikus sűrűségfüggvény: $g(x) = 1/(ax + b), b = a/(e^a - 1)$

eloszlása, amelynek eloszlásfüggvényét $G(x)$, sűrűségfüggvényét pedig $g(x)$ jelöli. Illusztrációként a 2. ábrán látható egy ilyen lehetséges konstruált sűrűségfüggvény.

Mivel $g(x)$ sűrűségfüggvény, következik, hogy

$$\int_0^1 g(x)dx = 1\,, \quad \text{tehát} \quad P = P\int_0^1 g(x)dx\,. \tag{2.1}$$

Feltesszük, hogy adott szint alatt az emberek be se lépnek a munkaerő piacra, azaz a népesség megoszlik aktív és inaktív keresőkre. Ha ezt a bizonyos „küszöböt" $\widehat{x}$-pal jelöljük, akkor az aktív népesség nagyságát a következő módon tudjuk meghatározni:

$$PA = P\int_{\widehat{x}}^1 g(x)dx\,, \tag{2.2}$$

míg az inaktívak számát az alábbi képlet mutatja:

$$PI = P \int_0^{\widehat{x}} g(x)dx\,. \tag{2.3}$$

A munkaerőkínálatot az aktív lakosság munkavégző képessége határozza meg, azaz:

$$L^S = P \int_{\widehat{x}}^1 xg(x)dx\,. \tag{2.4}$$

Látható, hogy a modellben az inaktívak aránya, illetőleg a munkaerő/népesség arány a $g(x)$ sűrűségfüggvény paramétereitől, illetőleg $\widehat{x}$ megválasztásától függ. Illusztrációként a mellékelt táblázatban a fentebb ábrázolt sűrűségfüggvényünk segítségével bemutatjuk a paraméterek és a különböző arányok összefüggéseit.

A táblázatból látható, hogy megfelelő paraméterválasztással viszonylag reális összefüggésekhez juthatunk. Az aktívak aránya 55-65% körül mozog, és ezzel nagyjából megegyező a munkaerő nagysága.

Az inhomogenitás bevezetésével megváltozik az összfogyasztás, illetve az egy főre jutó fogyasztás értelmezése is. Reálisnak tünő feltételezés, hogy az aktívak és inaktívak egy főre jutó fogyasztása eltér egymástól, illetve az aktívaké valamilyen módon függ munkavégzésüktől. A probléma lehetséges megoldását jelenti a megfelelő *bérrendszer* és *társadalombiztosítási rendszer* megválasztása a modellben.

1. táblázat
Demográfiai jellemzők $g(x) = 1/(ax + b)$
sűrűségfüggvény esetén, ahol $b = 1/(e^a - 1)$.

a) Az aktív népesség aránya %

a értéke $\widehat{x}$ értéke	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.25	68.8	67.7	66.6	65.4	64.3
0.30	63.3	62.1	60.9	59.6	58.4
0.35	57.9	56.6	55.4	54.1	52.9

b) Munkaerő/népesség arány (L/P) %

a értéke $\widehat{x}$ értéke	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.25	73.9	66.6	61.0	56.4	52.7
0.30	72.4	65.1	59.4	54.8	51.1
0.35	70.7	63.3	57.6	53.1	49.3

Azt a szokásos feltevést, hogy bérből nincs megtakarítás, vagyis, hogy az egész bér fogyasztásra kerül, továbbra is megtartjuk. Az összes kifizetett bértömeg tehát meghatározza az összfogyasztás szintjét, ezen belül a társdalombiztosítási rendszer keretében történik az újraelosztás; az aktívak munkabéréből levont lineáris adó finanszirozza az inaktívak fogyasztását. Mindebből az is következik, hogy a fogyasztásra rendelkezésre álló termékmennyiség az aktív népesség, illetve a munkaerő nagyságától függ: ennek elfogyasztásában azonban a *teljes* népesség részt vesz. Ezt a nem elhanyagolható körülményt a hagyományos megközelítés a $P = L$ feltétel miatt teljesen figyelmen kívül hagyja.

Legyen a munkavégzéstől, x-től függő bérfüggvény $h(x)$. Belátható, hogy a bérarányok csak abban az esetben felelnek meg a munkavégzési arányoknak, ha $h(x)$ lineáris homogén. Ezt azonban nem feltétlenül követeljük meg, ugyanis természetes jelenség, hogy a bérstruktúrát a béralku az eredeti arányoktól eltéríti. A kifizetett összbér, ami éppen megegyezik az összfogyasztással:

$$\text{összbér} = C = P \int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx\,. \tag{2.5}$$

Az aktívak egy főre jutó fogyasztása megegyezik a lineáris társadalombiztosítási járulékkal (μ) csökkentett bérükkel:

$$c_A(x) = (1 - \mu)h(x)\,. \tag{2.6}$$

Az inaktívak között az így beszedett adót számos elv alapján szét lehet osztani. A modellben, több nyugat-európai ország gyakorlatát követve, feltételezzük, hogy az inaktívak egyenlő jövedelemhez, illetve fogyasztáshoz jutnak, azaz

$$c_I = \mu C/PI = \int_{\widehat{x}}^{1} \mu g(x)h(x)dx \Big/ \int_{0}^{\widehat{x}} g(x)dx\,. \tag{2.7}$$

Vegyük észre, hogy c_I a fenn elmondottak értelmében x–től független.

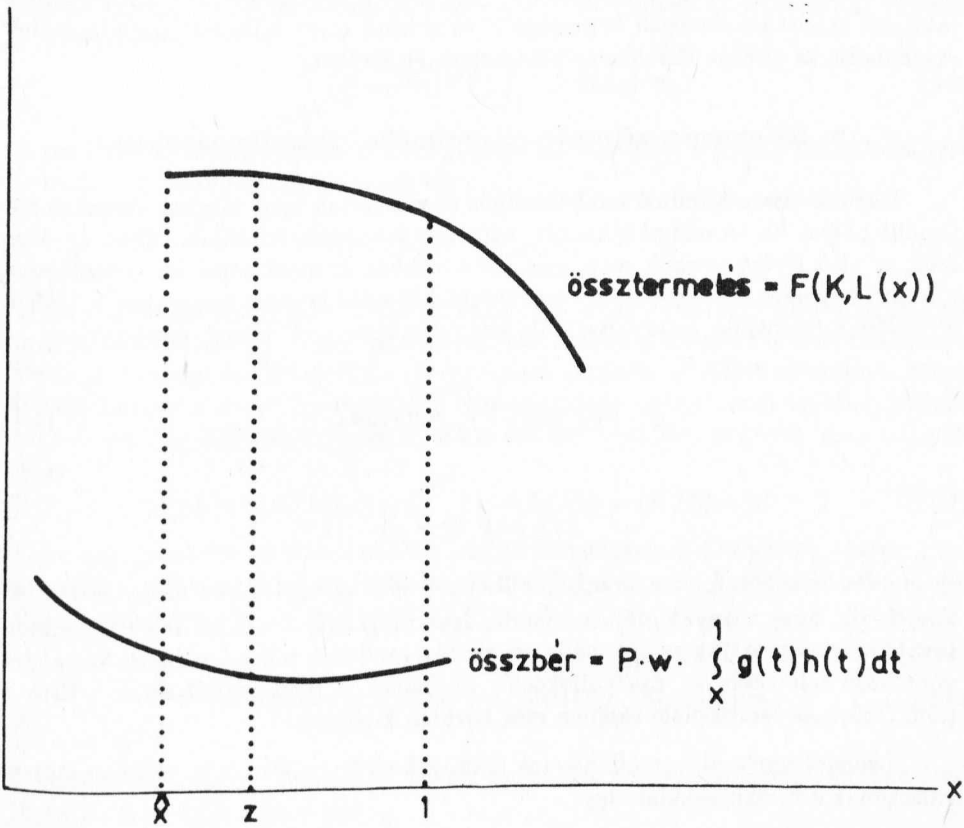
A hagyományos munkapiaci feltételek is módosulnak az inhomogenitás bevezetésével. Feltételezhetjük, hogy a munkaerő keresletét most is a profitmaximálásra való törekvés határozza meg. Rögzített tőkeállomány mellett, ha a termelési függvényt $F(K, L)$-lel jelöljük és feltesszük, hogy a termékár éppen egységnyi, a megoldandó maximumfeladat:

$$\max_z F(K, P \int_z^1 xg(x)dx) - \int_z^1 g(x)h(x)dx\,, \tag{2.8}$$

azaz azt a z munkavégzési szintet kell meghatározni, ami mellett még rentábilis a termelés.

Az egyváltozós maximalizálást elvégezve kapjuk:

$$\partial F/\partial L = h(z)/z\,. \tag{2.9}$$



3. ábra A munkaerőpiac jellemzői inhomogén népesség esetén

A $h()$ függvényre kirótt megfelelő megkötések esetén a maximum létezik és kizárólagos. Vegyük azonban figyelembe, hogy modellünk szempontjából csak az $\widehat{x} < z < 1$ megoldás releváns: ugyanis, ha $z < \widehat{x}$, akkor teljes a foglalkoztatottság (a munkaerőpiaci korlát tehát nem effektív), ha pedig $z > 1$, akkor nincs hatékony megoldás a rendszer keretein belül. A 3. ábráról leolvashatók a munkaerőpiac jellegzetességei.

Az ábrán a felső vonal a bruttó termelést reprezentálja x függvényében. Ha x nő L csökken, tehát a bruttó termelés is csökken. A bruttó bér x növekedésével szintén csökken, de csökkenő ütemben. A két görbe közötti különbség a maximumát z-nél éri el. $x > z$-re a terméktöbblet még meghaladja a bértöbbletet, máshol alatta marad. Ha $\widehat{x} > z$, teljes a foglalkoztatottság.

Amennyiben létezik munkanélküliség, úgy az inaktívak száma megnő, és módosulnak az eredeti elosztási viszonyok. Vegyük észre, hogy teljes foglalkoztatottság esetén a hatékony foglalkoztatottsági szint felett alkalmazott munkásoknak (akiknek tehát munkavégző képessége $\widehat{x}$ és z közé esik) kifizetett pótlólagos bér meghaladja az általuk létrehozott többlettermék értékét.

3. Inhomogén népesség az optimális kontrollmodellben

Térjünk vissza kiinduló modellünkhöz és vizsgáljuk meg, hogyan alakul az optimális pálya, ha az eddigi homogén népesség feltevését feloldjuk. Ezen az úton csak az első lépést tesszük meg, ugyanis továbbra is megtartjuk az egyenletesen növekvő népesség feltevését és a munkavégző képesség szerinti megoszlást is időben állandónak tekintjük. Azaz feltesszük, hogy $g(x,t) = g(x)$. Ennek megfelelően:

$$L(t) = P(t) \int_{\widehat{x}}^{1} x g(x) dx\,, \tag{3.1}$$

és így:

$$\dot{L}/L = \dot{P}/P = n\,.$$

Íly módon a népesség és a munkaerőállomány időben egyformán változik, amiből következik, hogy arányuk időben állandó, azaz $L(t)/P(t) = \gamma$ konstans. Úgyszintén továbbra is megtartjuk az optimális növekedési modellek teljes foglalkoztatottságra vonatkozó feltevését is, azaz allokációs problémával nem foglalkozunk. Erre a problémára az összefoglaló részben még röviden kitérünk.

Hasonlóképpen időben állandónak tekintjük a bérstruktúrát is, azonban időben változónak a bérszinvonalat. Így:

$$h(x,t) = w(t) h(x)\,, \tag{3.2}$$

ahol $w(t)$, a bérszinvonal, veszi át a modellben a homogén modellbeli egy főre jutó fogyasztástól, $c(t)$-től, a kontrollváltozó szerepét. Vegyük észre, hogy az inhomogén modellben lényegében $w(t)$ határozza meg az *átlagos egy főre jutó fogyasztás* szintjét.

Feltéve, hogy a hasznossági függvény továbbra is az egy főre jutó fogyasztástól függ, és ez a függvény egyénenként továbbra sem eltérő $U()$, akkor az első fejezetbeli célfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$\max_{k,w} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ \int_0^{\widehat{x}} U(c_I(t)) g(x) dx + \int_{\widehat{x}}^1 U(c_A(x,t)) g(x) dx \right\} dt\,. \tag{3.3}$$

ahol c_I és c_A az előző fejezetben elmondottakkal és a bérfüggvény fenti dinamizált alakjával összhangban:

$$c_A(x,t) = (1-\mu) w(t) h(x) \tag{3.4}$$

$$c_I(t) = P\left[\int_{\widehat{x}}^{1} \mu w(t) g(x) h(x) dx\right] / PI$$

Ugyancsak így áll elő az összfogyasztás képlete, ami éppen megegyezik a kifizetett bruttó bérekkel:

$$C(t) = w(t)P(t)\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx. \qquad (3.5)$$

A rendszer mozgásegyenletének a meghatározásához most a bruttó tőkeállományra vonatkozó összefüggésből indulunk ki:

$$\dot{K} = -\delta K + F(K, L) - C. \qquad (3.6)$$

Mivel $L \neq P$ így az *egy főre* illetve az *egységnyi munkaerőre* jutó tőke nem egyezik meg. L és P azonban $g(x)$ időfüggetlensége miatt azonos ütemben nőnek: dinamikus viselkedés szempontjából mellékes, hogy melyik „egységnyi" tőkét vizsgáljuk. Mivel továbbra is szeretnénk kihasználni $F()$ homogenitását, az *egységnyi munkaerőre* jutó tőke dinamikus pályáját vizsgáljuk, és ezt jelöljük továbbra is k–val. k–ra teljesül, hogy

$$\dot{k} = \partial(K/L)/\partial t = (\dot{K}/L) - (\dot{L}/L)k = (\dot{K}/L) - nk. \qquad (3.7)$$

k mozgásegyenletét az alábbi módon tudjuk meghatározni (3.6)-(3.7), illetve a fogyasztásra (C) vonatkozó képlet felhasználásával, valamint figyelembe véve, hogy $F()$ lineáris homogén, és $P/L = 1/(L/P) = 1/\gamma$:

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx. \qquad (3.8)$$

Mindezek után az 1. fejezetben közölt optimális növekedési kontrollmodell (vö. (1.19)) a következő alakot ölti:

$$\max_{k,w} \int_0^\infty e^{-\rho t}\left\{\int_0^{\widehat{x}} U(c_I(t))g(x)dx + \int_{\widehat{x}}^{1} U(c_A(x,t))g(x)dx\right\} dt, \qquad (3.9)$$

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx$$

$$k(0) = k_0,$$

ahol továbbra is $k(t)$ az állapotváltozó, azonban most $w(t)$ a kontrollváltozó $c_I(t)$ és $c_A(x,t)$ függvényeket pedig (3.4) írja le.

A feladathoz tartozó jelenértékű Hamilton-függvény:

$$H(k, w, q) = \int_0^{\widehat{x}} U(c_I(t))g(x)dx + \int_{\widehat{x}}^{1} U(c_A(x,t))g(x)dx + \qquad (3.10)$$

$$+ q\left[-(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\right]$$

(w^*, k^*, q^*) optimális megoldása a feladatnak, ha teljesül:

$$\begin{aligned} &\text{a.}\quad \partial H^*/\partial w = 0 \\ &\text{b.}\quad \dot{q} = \rho q - \partial H^*/\partial k \\ &\text{c.}\quad \dot{k} = \partial H^*/\partial q \\ &\text{d.}\quad \lim_{t\to\infty} k(t)q(t) = 0 \quad (\textbf{transzverzalitás})\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11.a) kiszámításához vegyük figyelembe, hogy

$$\partial U/\partial w = (\partial U/\partial c)(\partial c/\partial w) = U'(c)(\partial c/\partial w)\,, \tag{3.12}$$

ahol c_A így $U'(c_A)$ x-től függő, míg c_I így $U'(c_I)I$ x-től független kifejezések. Ezt az összefüggést, valamint az egy főre jutó fogyasztások (3.4) képleteit alkalmazva (3.11.a)-ból kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial H/\partial w = (1-\mu)\int_{\widehat{x}}^{1} U'(c_A(x))g(x)h(x)dx + \\ + \left[P\mu\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx/PI\right] U'(c_I)\int_0^{\widehat{x}} g(x)dx - \\ -(1/\gamma)q\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx = 0\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

q-ra rendezve az egyenletet adódik:

$$q = \frac{1}{\pi}\int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)U'(c_A(x)) + \mu U'(c_I)\right] g(x)h(x)dx\,, \tag{3.14}$$

ahol:

$$\pi = (1/\gamma)\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx\,.$$

(3.14) alapján meghatározható q idő szerinti deriváltja is, figyelembe véve, hogy a jobb oldalon csak $c_A(x,t)$ és $c_I(t)$ függ az időtől és idő szerinti deriváltjuk:

$$\begin{aligned} &\text{a.}\quad \dot{c}_A(x,t) = \dot{w}(t)(1-\mu)h(x) \\ &\text{b.}\quad \dot{c}_I(t) = (P/PI)\dot{w}(t)\left[\mu\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\dot{w}(t)$ azonban x-től független változó, tehát kiemelhető az integráljel elé, így q idő szerinti deriváltjára adódik:

$$\dot{q} = (\dot{w}/\pi)\int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)^2 h(x)U''(c_A) + \tau\right] h(x)g(x)dx\,, \tag{3.16}$$

ahol:

$$\tau = \mu^2 U''(c_I)\left[\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\right](P/PI).$$

Az optimum feltételek közül (3.11.b) adja meg q idő szerinti deriváltját, aminek alapján $\dot{q}$-ra egy új kifejezést kapunk:

$$\dot{q} = q(\rho + \delta + n - f_k). \tag{3.17}$$

Ha (3.17)-be behelyettesítjük a q-ra (3.14)-ből illetve $\dot{q}$-ra (3.16)-ból nyert kifejezéseket, megkapjuk a kontrollváltozó optimalitásának mozgásegyenlet formájában megfogalmazott feltételét:

$$\dot{w} = (Y/Z)(\rho + \delta + n - f_k), \tag{3.18}$$

ahol:

$$Y = \int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)U'(c_A) + \mu U'(c_I)\right] g(x)h(x)dx$$

$$Z = \int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)^2 h(x)U''(c_A) + \tau\right] h(x)g(x)dx.$$

A képlet hasonlít a homogén modellbeli kontrollváltozót, $c(t)$-t meghatározó kifejezéshez, ami nem meglapő, hiszen, mint láttuk tartalmilag $w(t)$ megegyezik $c(t)$-vel. Az Y és Z kifejezések „magja" most is a hasznossági függvény első, illetve második deriváltja. A $h()$, illetőleg $g()$ függvények tulajdonságai miatt – mindkettő szigorúan pozitív – valamint, mivel $\mu < 1, U' > 0, U'' < 0$, következik, hogy Z szigoruan negatív, Y szigoruan pozitív, tehát w előjele ismét csak $\rho + \delta + n - f_k$ előjelétől függ, akárcsak a homogén modellben. A stacionárius állapot, $\dot{w} = 0$ akkor áll fenn, ha

$$\rho + \delta + n = f_k, \tag{3.19}$$

azaz a mellett a $\widehat{k}$ mellett, melyre (3.19) teljesül. A homogén népesség esetével összevetve tehát azt mondhatjuk, hogy a kontrollváltozónak – amely itt is az egy főre jutó átlagos fogyasztást határozza meg – a stacionárius állapotát inhomogén esetben is a fenti feltétel jellemzi, azonban az ide vezető pálya paraméterei eltérnek a homogén esetétől.

Ezek után vizsgáljuk meg az állapotváltozó optimalitásának feltételeit. (3.11.c)-ből következik, hogy:

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx. \tag{3.20}$$

A hosszú távú egyensúlyi helyzetben teljesülni kell, hogy:

$$\dot{k} = 0 \longrightarrow f(k) = -(\delta + n)k + \pi w(t), \tag{3.21}$$

ahol ismét

$$\pi = (1/\gamma) \int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx .$$

(3.19) behelyettesítésével kapjuk:

$$f(k) = (f_k - \rho)k + \pi w(t) . \qquad (3.22)$$

A fázistér ismét négy részre osztható, és a transzverzalitási feltétel miatt megint csak a stacionárius állapotba konvergáló pályák optimálisak, tehát a rendszer hosszú távú optimális megoldását a stacionér pálya tulajdonságai jellemzik.

Ebben a hosszú távú egyensúlyi megoldásban vizsgáljuk a megtakarítási ráta alakulását. Ha felhasználjuk, hogy a megtakarítási ráta kifejezhető az egy főre jutó fogyasztásból, azaz:

$$\pi w(t) = (1 - s) f(k) , \qquad (3.23)$$

akkor azt kapjuk, hogy az inhomogén modell optimális stacionárius állapotát az alábbi felhalmozási ráta jellemzi:

$$s = k f_k / f(k) - \rho k / f(k) . \qquad (3.24)$$

Ez viszont megegyezik a homogén modell hosszú távú egyensúlyi állapotát jellemző megtakarítási rátával (vö. (1.19)), azaz zéró diszkontálás esetén a Megtakarítások Aranyszabályának felel meg.

4. Munkanélküliség a homogén és az inhomogén modellekben

Az optimális növekedési kontrollmodellek *aggregált makroösszefüggéseket* határoznak meg, implicit módon feltételezve, hogy a kapacitások teljes kihasználása *hatékony* allokáció mellett valósul meg. Feloldják a rövid távú modellek allokációs célokat szolgáló piaci korlátait, a kapacitás kihaszálását nem befolyásolja jövedelmezőségi korlát.

Ennek a korlátnak a feloldása természetszerűleg nagyobb mozgásteret eredményez. Az optimális kontrollmodell ebből a szempontból korlát nélküli optimalizálást jelent. Eléggé nyilvánvaló, hogy egy korlát beépitése csak ronthat az optimális megoldáson, ha egyáltalán létezik az adott korlát mellett minden kiinduló állapothoz optimális megoldás.

Anélkül, hogy a profitkorlát beépítésének következményeit részletesen analitikusan megvizsgálnám csak röviden térek ki arra, hogy a munkaerőpiacon érvényesülő profitszempont milyen korlátozásokat eredményez a megtakarítási rátára nézve a *homogén*, illetőleg az *inhomogén* modellben.

A már említett kutatás során egy dinamikus programozási diszkrét növekedési modell segítségével éppen az így generált különböző pályákat hasonlítottuk össze (PRAAG–KIRÁLY–PRADHAN, 1987).

Az egyszerűbb összehasonlíthatóság érdekében a homogén modellben is az átlagos bérszinvonal $w(t)$ függvényében fejezzük ki az összefüggéseket. Homogén népesség esetén a bérstruktúra is homogén. Az összfogyasztás = összbér feltétel így homogén esetben azt jelenti, hogy:

$$C(t) = w(t)L^*(t)\,, \tag{4.1}$$

ahol $L^*(t)$ a felhasznált munkaerő. A munkaerő keresletét, illetve kínálatát – felhasználva a 2. fejezetbeli profitmaximalizálásból levezetett feltételt – az alábbi összefüggések határozzák meg:

$$\begin{aligned} \text{kereslet:} \quad & F_L(K, L^D(t)) = w(t) \\ \text{kinálat:} \quad & L^S(t) = P(t) \\ & L^*(t) = \min(L^D(t), L^S(t))\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Amennyiben $L^*(t) = L^S$, azaz a munkaerő keresleti korlát nem effektív, ez azt jelenti, hogy a bérszinvonal alacsonyabb a teljes foglalkoztatottság melletti határtermelékenységnél, azaz $w < F_L(K, L^S)$. A munkanélküliség és a teljes foglalkoztatottság esetére tehát együttvéve teljesül, hogy:

$$w(t) \le F_L(K, L^*(t))\,, \tag{4.3}$$

amikor is az egyenlőség munkanélküliség (effektív profitkorlát) mellett áll fenn. A $w(t)$-re kapott korlátot az összfogyasztás (4.1) képletébe helyettesítve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$C(t) \le L^*(t)F_L(K, L^*(t))\,. \tag{4.4}$$

A fogyasztás+beruházás=kibocsátás egyenlőséget és a megtakarítás=beruházás ex post azonosságot felhasználva a megtakarítási rátára a következő korlátot irhatjuk fel:

$$s \ge KF_K/F = \text{a tőke részesedése}\,, \tag{4.5}$$

azaz munkanélküliséget megengedő homogén modell esetén *a megtakarítási ráta nem lehet kisebb, mint a tőke részesedése*, és azzal egyenlő, ha a munkanélküliségi korlát effektív.

Vizsgáljuk meg most ugyanezt az összefüggést az inhomogén modellben. Az összfogyasztás képlete (lásd (3.5)):

$$C(t) = w(t)P(t)\int_{\hat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\,. \tag{4.6}$$

A munkaerőpiaci feltételek már ismertek a 2. fejezetből:

$$\text{kereslet:} \quad L^D(t) = P(t)\int_z^1 xg(x)dx\,, \text{ahol}: w(t) = zF_L(z)/h(z) \tag{4.7}$$

$$\text{kinálat:} \quad L^S = P(t)\int_{\widehat{x}}^1 xg(x)dx$$

$$L^*(t) = P(t)\int_{x^*}^1 xg(x)dx\,,$$

ahol: $x^* = \max(z, \widehat{x})$.

Belátható, hogy a keresleti korlát csak akkor nem effektív, ha a bérszinvonal olyan alacsony, hogy $w < \widehat{x}F_L(\widehat{x})/h(\widehat{x})$. Tehát a bérszinvonalra összefoglalóan az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$w(t) \le x^*F_L(x^*)/h(x^*)\,, \tag{4.8}$$

ahol az egyenlőség effektív profitkorlát mellett áll fenn. Ennek következtében az összfogyasztásra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$C(t) \le F_L(x^*)P(t)\,[x^*/h(x^*)]\int_{x^*}^1 h(x)g(x)dx = \eta F_L(x^*)\,. \tag{4.9}$$

Ez a korlát még korántsem eredményez olyan egyértelmű következtetéseket, mint a homogén esetben. Figyelembe véve ugyanis, hogy:

$$L^*(t) = P(t)\int_{x^*}^1 xg(x)dx\,, \tag{4.10}$$

ahol: $x^* = \max(z, \widehat{x})$ három eset képzelhető el:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \eta < L(x^*) \\ &\text{b)} \quad \eta = L(x^*) \\ &\text{c)} \quad \eta > L(x^*)\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Megmutatható, hogy (4.11) bármelyik alesete előfordulhat megfelelően megválasztott – x-ben növekvő – bérfüggvény mellett.

a) Legyen $h(x) = x^{1-\lambda}, \lambda \le 1$. Ekkor, mivel $x^* \le x$, ezért $(x^*)^\lambda \le x^\lambda$, tehát:

$$\eta = \int_{x^*}^1 (x^*)^\lambda x^{1-\lambda} g(x)dx \le \int_{x^*}^1 xg(x)dx = L(x^*)\,, \tag{4.12}$$

azaz $\eta < L(x^*)$. Így az összfogyasztásra felírt egyenlőtlenségsor tovább folytatható, és a megtakarítási rátára *szigorú* egyenlőtlenség formájában kapjuk (tehát függetlenül attól, hogy éppen hatékony-e a munkaerőkorlát vagy sem!):

$$s > KF_K/F = \text{a tőke részesedése}\,. \tag{4.13}$$

b) Az egyenlőség áll fenn (4.11)-ben, ha a bérfüggvény éppen kifejezi a munkateljesítményeket, azaz $h(x) = x$, ami éppen az előző eset $\lambda = 0$ esetén:

$$\eta = \int_{x^*}^{1} [x^*/x^*]\, xg(x)dx = L(x^*)\,. \tag{4.14}$$

Ez az eset tökéletesen megegyezik a homogén esettel; a megtakarítási ráta effektív munkaerő piaci korlát esetén megegyezik a tőke részesedésével, ellenkező esetben meghaladja azt.

c) Legyen most $h(x) = ax - b$, ahol $a, b > 0$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{x^*}^{1} \frac{x^*}{ax^* - b}(ax - b)g(x)dx \geq \\ &\geq \int_{x^*}^{1} \frac{x(ax^* - b)}{ax^* - b} g(x)dx = \int_{x^*}^{1} xg(x)dx = L(x^*)\,, \end{aligned} \tag{4.15}$$

azaz $\eta > L(x^*)$. Így a fogyasztásra vontkozó egyenlőtlenségsorozatot folytatni nem tudjuk és a megtakarítási rátára egy kissé értelmezhetetlen alsó korlátot kapunk:

$$s = (F - C)/F \geq 1 - \eta(F_L(x^*)/F(x^*)\,, \tag{4.16}$$

ami nem tudjuk milyen kapcsolatban áll a tőke részesedésével.

Összefoglalóan tehát azt mondhatjuk, hogy mind homogén, mind inhomogén esetben a munkaerőpiaci korlát a megtakarítási ráta korlátozását – így az optimum romlását – jelenti, azonban inhomogén esetben különböző bérfüggvények választásával ezt a korlátot erősíteni vagy lazítani tudjuk.

(Beérkezett: 1987. június 5-én.)

Irodalom

ARROW, J.K. (1968): "Application of Control Theory to Economic Growth", in *Lectures in Applied Mathematics*, vol. 12. American Mathematical Society: Providence, R.I.

BUHL, H.V. (1984): "A Discrete Model of Optimal Economic Growth", *Journal of Macroeconomics*, Fall 1984. vol. 6. no. 4, pp. 447–456.

BURMEISTER, E. and DOBEL, A.R. (1970): *Mathematical Theories of Economic Growth,* London: MacMillan.

CASS, D. (1965): "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 32(3), pp. 233–24O.

RAMANATHAN, R. (1982): *Introduction to the Theory of Economic Growth,* Springer-Verlag.

RAMSEY, F.P. (1928): "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, vol. 39, 1928, pp. 543–549.

RITYEN, J.M.M. and VAN PRAAG, B.M.S. (1985): "Golden Rules and Non-stationary Population", (Manuscript).

SETHI, S.P. and G.L. THOMPSON (1981): *Optimal Control Theory*, Martinus Nijhoff Publishing.

SHELL, K. (ed.), (1967): *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, The M.I.T. Press.

VAN PRAAG B.M.S. and PRADHAN, M.P. (1986): A Flexible Programming Model to Study the Problems of Population Economics, (Manuscript).

VAN PRAAG, B.M.S. - J. KIRÁLY - M. PRADHAN: Inhomogeneous population - optimal control by wage level. A computable dynamic programming model. (Manuscript)

Inhomogeneous population in the growth models

The paper examines saving rates with the aid of optimum growth control models, assuming homogeneous and inhomogeneous population. It has been found that along a long-term optimal growth path - provided the discount rate is zero - the Golden Rule of Saving holds. This is valid for both the homogeneous and the inhomogeneous cases, insofar as the assumption of uniformly growing population is retained and the distribution of population is constant over time.

The inhomogeneity of population has been interpreted as individually deviating working ability, measured along a $(0,1)$ scale, and the distribution of population with respect to this variable can thus be determined. I define a corresponding wage structure and a simple social security system to finance the consumption of the population outside the labour market, while maintaining the usual assumption of gross wages = total consumption.

I intended to determine the optimal path of capital per unit labour in both the homogeneous and the inhomogeneous cases, in order to optimize some kind of welfare function with the aid of per capita average consumption level as control variable. In the inhomogeneous case the latter role was played by the variable representing wage level. The optimality conditions derived from the present value Hamilton function were similar in both cases, the conditions of the long-term optimal solutions only deviated in one or two parameters.

As a détour, I studied the impact of a labour market constraint on the saving ratio, and established that this constraint has different effects in the homogeneous and inhomogeneous cases. In connection with this détour I call attention to the fact that the optimal control models - precisely because they implicitely assume an effective microallocation - must be used as instruments of economic policy but only for the purposes of comparative analysis. They should be considered as instruments to generate certain standard paths, suitable for descriptive analysis. But no economic policy maker should dream of implementing them with centralized instruments, else - as testified by several examples - instead of the optimum of the welfare function at most the optimum of wasting resources can be attained.