*Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.*

PAULO R.C. VILLELA – CLAUDIO T. BORNSTEIN

# A nulla-egyes hátizsák feladat optimális célfüggvényértéke egy felső korlátjának élesítése

## 1. Bevezetés

Tekintsük a következő $P^0$ nulla-egyes hátizsák feladatot ($KP01$)

$$z^* = \max z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le M \tag{2}$$

$$x_i \in \{0,1\}\,, \quad i = 1,\ldots,n\,, \tag{3}$$

ahol az $i$ tárgyhoz tartozó haszon, ill. súly $p_i$, ill. $w_i$. A célunk, hogy a tárgyaknak egy olyan részhalmazát válasszuk ki (a megfelelő $x_i = 1$ értékadások segítségével), hogy ezáltal maximalizáljuk a teljes $z$ hasznot, miközben az $M$ súlykorlátot nem sértjük meg.

A probléma látszólagos egyszerüsége ellenére mindmáig nem tudjuk, hogy meg lehet-e azt oldani polinomiális algoritmussal, és tekintve, hogy a feladat NP-teljes, ezért nem is valószinü, hogy ilyen eljárás létezzék.

A $KP01$ feladat egzakt megoldó algoritmusai között igen elterjedtek és hatékonyak a korlátozás és szétválasztás különböző változatai. Így többek között az [1], [3], [4], [5], [7], [8], [9] dolgozatok közölnek ilyen módszert.

Most némileg leegyszerűsítve összefoglaljuk a korlátozás és szétválasztás elvén alapuló algoritmusokat. A $P^0$ feladatból kiindulva a szétválasztási eljárás a részfeladatok egy $P^1, P^2, \ldots$ halmazát állítja elő, például az $x_i$ változó valamely értéken való rögzítésével. Az algoritmus a $P^0$ optimális megoldásához egy $LB_z$ alsó korlátot is meghatároz ($LB_z \le z^*$) amely nem más, mint $P^0$ egy megengedett megoldásának célfüggvényértéke. Továbbá minden $P^i$ részfeladat optimális célfüggvényértékéhez meghatároz egy $UB^i$ felső korlátot. Természetesen ha $UB^i \le LB_z$, akkor a $P^i$ feladatot elhagyhatjuk.

Ebből a tényből adódik, hogy az algoritmus hatékonysága igen erősen függ a korlát jóságától. Azonban pontosabb korlát a szükséges többletszámítások miatt nagyobb gépidőt igényel, ami annál inkább kritikussá válik, minél gyakrabban számítjuk ki a korlátot.

A jelen dolgozatban egy új felső korlátot adunk meg a $KP01$ feladathoz, mely valóban több számítást igényel. Az eredmény fő előnye azonban az, hogy ezt a megjavított korlátot csak egyszer, $UB^0$ meghatározásánál kell kiszámítani. A további $P^i$ feladatok esetében $UB^i$ már valamely gyorsabb módszerrel is előállítható. Így a kis számítási többletet a korlát pontosságában mutatkozó javulás kompenzálja.

A megjavított $UB^0$ érték fő előnye a következőképpen érthető meg. Tegyük fel, hogy az eljárás során találtunk egy olyan megengedett megoldást, hogy már $LB_z = UB^0$ is teljesül. Ekkor bizonyosak lehetünk abban, hogy a talált pont optimális. Habár az $LB_z = UB^0$ feltétel ellenőrzése további gépidőt igényel, ezzel kapcsolatban az [5] dolgozat jó eredményekről számol be.

## 2. Néhány felső korlát rövid áttekintése

Csak azokat a felső korlátokat ismertetjük, amelyek szorosan összefüggnek az általunk megjavított korláttal. Teljes körkép található a témáról [6]-ban.

Tegyük fel, hogy $P^0$-ban úgy rendeztük a tárgyakat,hogy $p_i/w_i \geq p_{i+1}/w_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $p_i$ és $w_i$ pozitív egész, $w_i \leq M, i = 1, \ldots, n$, és

$$\sum_{i=1}^{n} w_i > M\,.$$

A felső korlátok későbbi definícióinak egyszerűsítése érdekében bevezetünk egy új, mesterséges tárgyat a $p_{n+1} = 0$ és $w_{n+1} = M$ adatokkal.

A $P^0$ feladathoz tartozó egyik legelső felső korlátot 1957-ben DANTZIG közölte [2]. Ez

$$UB_D^0 = \sum_{i=1}^{k} p_i + \lfloor (M - \sum_{i=1}^{k} w_i) p_{k+1}/w_{k+1} \rfloor\,, \tag{4}$$

ahol $k$ azt a legnagyobb egészet jelöli, amelyre még

$$\sum_{i=1}^{k} w_i \leq M$$

igaz, és $\lfloor \alpha \rfloor$ az a legnagyobb egész szám, amelyik nem nagyobb, mint $\alpha$.

1977-ben MARTELLO és TOTH [5] megtalálták a Dantzig-féle felső korlát egy javítását. A javítás alapgondolata az, hogy $P^0$ optimális megoldásában vagy

$x_{k+1} = 0$ vagy $x_{k+1} = 1$. A két esetet külön-külön vizsgálva egy $B_1$ és $B_2$ korláthoz jutunk, ahol

$$B_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i + \lfloor (M - \sum_{i=1}^{k} w_i) p_{k+2}/w_{k+2} \rfloor , \tag{5}$$

$$B_2 = \lfloor \sum_{i=1}^{k+1} p_i - (\sum_{i=1}^{k+1} w_i - M) p_k/w_k \rfloor . \tag{6}$$

Így Martello és Toth felső korlátja

$$UB^0_{MT} = \max\{B_1, B_2\} \tag{7}$$

lesz. Martello és Toth megmutatták, hogy $UB^o_{MT} \le UB^o_D$, azaz a korlátjuk jobb.

$UB^o_{MT}$ egy további javítását HUDSON [6] adta meg 1977-ben. Észrevette, hogy $B_2$-ben a korrekciónál úgy vettük, mintha az egész

$$\sum_{i=1}^{k+1} w_i - M$$

túlsúly a $k$ tárgyból származott volna. Mivel $k$-ról azt tudjuk csak, hogy a hozzá tartozó érték a legkisebb a $p_i/w_i, i = 1, \ldots, k$ számok közül, ezért a túlsúly $w_k$-nál nagyobb lehet. Így elképzelhető, hogy a korrekciót alá- és ezért a felső korlátot túlbecsüljük.

Az $x_{k+1} = 1$ esetben Hudson az $1, \ldots, k$ tárgyakra és az $M - w_{k+1}$ megmaradó súlykorlátra Dantzig ötletét alkalmazza. Jelölje $\widehat{k}$ azt a legnagyobb egészet, amire még

$$\sum_{i=1}^{\widehat{k}} w_i \le M - w_{k+1}$$

teljesül. Ekkor azt nyerjük, hogy

$$B_3 = \sum_{i=1}^{\widehat{k}} p_i + p_{k+1} + \lfloor (M - w_{k+1} - \sum_{i=1}^{\widehat{k}} w_i) p_{\widehat{k}+1}/w_{\widehat{k}+1} \rfloor . \tag{8}$$

[6]-ban megmutatják, hogy $B_3 \le B_2$ mindig teljesül. Így Hudson felső korlátja

$$UB^0_H = \max\{B_1, B_3\} \tag{9}$$

amire

$$UB^0_H \le UB^0_{MT} .$$

## 3. A felső korlát egy élesítése

A mi javításunk is egy hasonló gondolaton alapszik, mint ahogy Hudson $B_3$-at meghatározta. Észrevehetjük, hogy $B_1$ kiszámításánál a megmaradó

$$M - \sum_{i=1}^{k} w_i$$

súlyt, ami az $x_{k+1} = 0$ értékadás miatt keletkezett, mind a $k+2$ tárgyhoz rendeltük, holott előfordulhat, hogy

$$M - \sum_{i=1}^{k} w_i > w_{k+2} .$$

Ekkor, mivel a $k+2$ tárgyhoz tartozik a legnagyobb $p_i/w_i$ érték a $k+2, \ldots, n$ tárgyak között, felső becslésként szükségtelenül nagy értéket adunk meg.

Amit a továbbiakban csinálni akarunk, az nem más, mint a Dantzig-féle korlát meghatározása az $1, 2, \ldots, k, k+2, \ldots, n$ tárgyakra és az $M$ összsúlyra. A következő tétel írja le a korlát élesítését.

**Tétel:** Legyen $\bar{k}$ $(1 \leq \bar{k} \leq n+1)$ az a legkisebb egész, amelyre

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}} w_i \geq M .$$

Továbbá legyen

$$B_4 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}} p_i + \lfloor (M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{\bar{k}} / w_{\bar{k}} \rfloor \tag{10}$$

és

$$UB_{VB}^0 = \max\{B_4, B_3\} . \tag{11}$$

Ekkor

$$UB_{VB}^0 \leq UB_H^0 .$$

**Bizonyítás:** Elegendő csak a $B_4 \leq B_1$ egyenlőtlenséget megmutatni az $UB_{VB}^0 \leq UB_H^0$ reláció bizonyításához. Természetesen $\bar{k} \geq k+2$.

Ha $\bar{k} = k+2$, akkor (5) és (10) összehasonlítása mutatja, hogy $B_4 = B_1$.

Tekintsük most a $\bar{k} \geq k+3$ esetet. Ekkor

$$B_4 = \sum_{i=1}^{k} p_i + \lfloor \sum_{i=k+2}^{\bar{k}-1} p_i + (M - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{\bar{k}} / w_{\bar{k}} \rfloor . \tag{12}$$

Így (5) és (12) összevetéséből adódik, hogy $B_4 \le B_1$ bizonyításához elegendő csak a $\lfloor\ \rfloor$ jelen belüli részeket tekinteni. Azonban

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=k+2}^{\bar{k}} p_i + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i)p_{\bar{k}}/w_{\bar{k}} = \\
&= \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} w_i p_i/w_i + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i)p_{\bar{k}}/w_{\bar{k}} \le \\
&\le \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} w_i p_{k+2}/w_{k+2} + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i)p_{k+2}/w_{k+2} = \\
&= (M - \sum_{i=1}^{k} w_i)p_{k+2}/w_{k+2}
\end{aligned}$$

ami a kívánt eredményt bizonyítja.

A következőkben egy példán illusztráljuk a különböző korlátokat.

**Példa**: Tekintsük az alábbi feladatot

$$\begin{aligned}
\max z =& 15x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 9x_5 + 3x_6 \\
& 12x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 24x_4 + 12x_5 + 6x_6 \le 60
\end{aligned}$$

$$x_i \in \{0,1\}\,, i = 1,\dots,6\,.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
k &= 3\,, \widehat{k} = 2\,, \bar{k} = 7 \\
B_1 &= 15 + 14 + 14 + \lfloor 57/4 \rfloor = 57 \\
B_2 &= \lfloor 15 + 14 + 14 + 18 - 14/3 \rfloor = 56 \\
B_3 &= 15 + 14 + 18 + \lfloor 28/3 \rfloor = 56 \\
B_4 &= 15 + 14 + 14 + 9 + 3 + \lfloor 0 \rfloor = 55\,.
\end{aligned}$$

Így a felső korlátok a következők

$$\begin{aligned}
UB_D^0 &= 15 + 14 + 14 + \lfloor 57/4 \rfloor = 57 \\
UB_{MT}^0 &= \max\{B_1 B_2\} = 57 \\
UB_H^0 &= \max\{B_1 B_3\} = 57 \\
UB_{VB}^0 &= \max\{B_4 B_3\} = 56\,.
\end{aligned}$$

Így tehát látható, hogy teljesül az

$$UB_D^0 \geq UB_{MT}^0 \geq UB_H^0 \geq UB_{VB}^0$$

reláció.

*(Beérkezett: 1987 január 14-én.)*

## Irodalom


1. J.H. AHRENS – G. FINKE (1975): "Merging and sorting applied to the zero-one knapsack problem", *Operations Research* 23, 1099–1109.
2. G.B. DANTZIG (1957): "Discrete variable extremum problems", *Operations Research* 5, 266–277.
3. D. FAYARD – G. PLATEAU (1975): "Resolution of the 0-1 knapsack problem: comparison of methods", *Math. Programming* 8, 272–307.
4. E. HOROWITZ – S. SAHNI (1974): Computing partitions with applications to the knapsack problem", *Journal of the ACM* 21, 277–292.
5. S. MARTELLO – P. TOTH (1977): "An upper bound for the zero-one knapsack problem and a branch and bound algorithm", *European Journal of Operational Research* 1, 169–175.
6. S. MARTELLO – P. TOTH (1979): "The 0-1 knapsack problem", in: N. CHRISTOFIDES, A. MINGOZZI, P. TOTH and C. SANDI, (eds), *Combinatorial Optimization*, J. Wiley and Sons, Chichester, England.
7. R.M. NAUS (1976): "An efficient algorith for the 0-1 knapscak problem", *Management Sci.* 23, 27–31.
8. V. SUHL (1978): "An algorithm and efficient data structures for the binary knapsack problem", *European Journal of Operational Research* 2, 420–428.
9. A.A. ZOLTNERS(1978): "A direct descent binary knapsack algorithm", *Journal of the ACM* 25, 304–311.


## An Improved Upper Bound for the 0-1 Knapsack Problem

After giving a very brief idea of branch-and-bound algorithms for the $KP01$, we present Dantzig's upper bound for this problem as well as some improvements of this bound, obtained in the last years. Finally we present a further improvement with demonstration and example.