Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

SZIDAROVSZKY FERENC – OKUGUCHI KOJI

Egy adaptív kvadratikus játék stabilitásáról

1. Bevezetés

A dinamikus játékok stabilitása napjaink játékelméleti kutatásainak egyik központi kérdésköre. Konkrét játékok stabilitásával számos szerző foglalkozott. Például THEOCHARIS (1959), OKUGUCHI (1970, 1976), SZÉP – FORGÓ (1985), OKUGUCHI – SZIDAROVSZKY (1986a, b) munkáit említhetjük meg. Újabban már vannak olyan kutatások is, ahol feloldják azt a Cournot-tól származó feltételezést, hogy minden játékos a jelenlegi stratégiák megtartását feltételezi a következő pillanatban a többi játékos részéről. Ezek a modellek alkalmas adaptív feltételezésekkel élnek, a feltételezések még az oligopol probléma esetén sem egyértelműek. Például az OKUGUCHI – SZIDAROVSZKY (1986b) dolgozatban a többi játékos stratégiái összegéről tételeztek fel adaptív elvárásokat, míg a SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI (1986a) cikkben magukról a stratégiákról tételeztek fel hasonló adaptív elvárásokat. Mind a két típusú feltételrendszer esetén sikerült a játék stabilitását bizonyítani, annak ellenére, hogy az egyes játékosok elvárásai egymásnak ellent is mondhatnak. Jelen dolgozatunkban olyan általános kvadratikus dinamikus problémát vizsgálunk meg, amely speciális esetként magában foglal több speciális játékról korábban vizsgált modellt, így például a fenti dinamikus oligopol problémákat is. Speciális kvadratikus modellt vizsgál a SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI (1986b) tanulmány, azonban nem vizsgál adaptív viselkedést, hanem megmarad a Cournot-tól származó leegyszerűsített feltételezések mellett. Jelen dolgozatunkban ezt a modellt is realisztikusabbá tesszük.

Tekintsük a következő kvadratikus játékot:

$$\Gamma = N; S_1, \dots, S_N; \varphi_1, \dots, \varphi_N,$$

ahol (*A*) az $S_k (k = 1, 2, ..., N)$ stratégiahalmazok véges dimenziós euklideszi terek konvex, korlátos, zárt részhalmazai;
(B) a $\varphi_k (k = 1, 2, .., N)$ kifizetőfüggvény

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x^{(k)T} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(k)} & \cdots & \mathbf{A}_{0n_k}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{n_k0}^{(k)} & \cdots & \mathbf{A}_{n_kn_k}^{(k)} \end{pmatrix} x^{(k)} + b^{(k)T} x^{(k)} + c(k) \qquad (1)$$

alakú, ahol

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_k \\ s_{k1} \\ \vdots \\ s_{k,n_k} \end{pmatrix}, s_{kl} = \sum_{m \neq k} \mathbf{B}_{lm}^{(k)} x_m (l = 1, 2, \ldots, n_k), \tag{2}$$

valamint az $\mathbf{A}_{00}^{(k)} + \mathbf{A}_{00}^{(k)T}$ mátrix negatív definit.

Ismeretes (ld. például SZÉP – FORGÓ, 1985), hogy az (A) és (B) feltételek mellett a Γ játéknak létezik legalább egy egyensúlypontja.

A (2) kifizetőfüggvény-alakban azt tettük fel, hogy az egyes játékosok kifizetőfüggvényei nem közvetlenül függnek a többi játékos stratégiaválasztásától, hanem közvetlenül csak azok lineáris kombinációitól. Ilyen a helyzet például az oligopol játék esetén is, amikor az árfüggvényekben csak a többi játékos össztermelése – azaz stratégiáinak összege – szerepel. Az itteni feltételezés természetesen nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen az $n_k = N - 1$,

$$\mathbf{B}_{lm}^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{ha } l < k \text{ és } l = m, \text{ vagy} \\ & \text{ha } l \geq k \text{ és } l + 1 = m; \\ \mathbf{O} & \text{különben} \end{cases} \tag{3}$$

esetben közvetlenül a stratégiavektorok jelennek meg a kifizetőfüggvényekben.

Jelen dolgozatunkban az imént megfogalmazott kvadratikus játék olyan dinamikus modelljét fogalmazzuk meg és vizsgáljuk, amikor az egyes (mondjuk a k-adik) játékosoknak adaptív várakozásuk van az $s_{kl} (l = 1, 2, \ldots, n_k)$ vektorokat illetően. Az s_{kl} vektorok általában konkrét közgazdasági jelentéssel bírnak. Például – mint látni fogjuk – az oligopol probléma esetén s_{kl} a k-tól különböző játékosok összkínálatát jelenti, vagy egyszerűen az l - edik $(k \neq l)$ játékos kínálata.

A következő paragrafusban a dinamikus modell matematikai formalizmusát adjuk meg, majd a 3. paragrafusban a modell stabilitását vizsgáljuk meg. Konkrét oligopolisztikus problémákkal foglalkozunk a dolgozat befejezéseként.

2. Az adaptív dinamikus modell

Tegyük fel, hogy az egyes játékosok minden $t \geq 0$ időpillanatban a hozzájuk tartozó s_{kl} vektorokat illetően az s_{kl}^E elvárásokkal rendelkeznek, ahol ezekről az elvárásokról a

$$\frac{d}{dt} s_{kl}^E = M_{kl} \cdot (s_{kl} - s_{kl}^E) \tag{4}$$

adaptív feltételezésekkel élnek. A jobb oldalon s_{kl} jelenti a ténylegesen megvalósuló s_{kl} értéket, s_{kl}^E pedig az erre vonatkozó elvárást. Így az $s_{kl} - s_{kl}^E$ különbség az elvárás hibáját mutatja. A (4) reláció pedig úgy interpretálható, hogy ennek a tévedésnek az arányában változtatja meg minden játékos az s_{kl} vektorra vonatkozó elvárást. Az egyes játékosoknak a saját stratégiára vonatkozó dinamizmusát pedig a következőképpen modellezhetjük.

Feltesszük, hogy egyes játékosok stratégiáikat a várható marginális profit arányában idomítják. Ez az illeszkedési elv matematikailag a

$$\frac{d}{dt}x_k = \mathbf{K}_k \left[(\mathbf{A}_{00}^{(k)} + \mathbf{A}_{00}^{(k)T})x_k + \sum_{l=1}^{n_k} (\mathbf{A}_{0l}^{(k)} + \mathbf{A}_{l0}^{(k)T}) s_{kl}^E + b_0^{(k)} \right] \tag{5}$$

differenciálegyenlettel írható le. Egy másik illeszkedési elv azt feltételezi, hogy a játékosok stratégiáikat a profitmaximalizáló és az aktuális stratégiájuk különbségével arányosan változtatják meg. Kimutatható (ld. SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI, 1986a), hogy ez utóbbi dinamizmus is az (5) alakra írható át alkalmas feltételek mellett.

Megjegyezzük, hogy az (5) jobb oldalán a várható marginális profit a φ_k kifizető függvény x_k szerinti gradiens vektora.

Tekintsük változónak az $x_1, \ldots, x_N$ stratégiavektorokon kívül az $s_{11}^E, \ldots, s_{1,n_1}^E$, $\ldots, s_{N,n_N}^E$ vektorokat is, és jelöljük az ezen vektorokat ebben a sorrendben tartalmazó összevont vektort z-vel. Ekkor, felhasználva az s_{kl} vektorok definícióját, a (4) és (5) relációk összevontan a következő alakba írhatók:

$$\frac{d}{dt}z = \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}z + d, \tag{6}$$

ahol d konstans vektor,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \mathbf{K}_N & & & & & & \\ & & & \mathbf{M}_{11} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mathbf{M}_{1n_1} & & & \\ & & & & & & \mathbf{M}_{N1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \mathbf{M}_{Nn_N} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

a $\mathbf{H}$ mátrix szerkezetét pedig (8) mutatja.

$$
\mathbf{H}=\begin{array}{c@{}l}
\begin{array}{ccccc}
\overbrace{\hphantom{A^{(1)}_{00}+A^{(1)T}_{00}\;A^{(2)}_{00}+A^{(2)T}_{00}\;\ddots\;A^{(N)}_{00}+A^{(N)T}_{00}}}^{N} & \overbrace{\hphantom{A^{(1)}_{01}+A^{(1)T}_{10}\;\cdots\;A^{(1)}_{0n_1}+A^{(1)T}_{n_10}}}^{n_1} & \hphantom{\cdots} & \overbrace{\hphantom{A^{(N)}_{01}+A^{(N)T}_{10}\;\cdots\;A^{(N)}_{0n_N}+A^{(N)T}_{n_N0}}}^{n_N}
\end{array} & \\
\left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc}
\mathbf{A}_{00}^{(1)}+\mathbf{A}_{00}^{(1)T} & & & & \mathbf{A}_{01}^{(1)}+\mathbf{A}_{10}^{(1)T} & \cdots & \mathbf{A}_{0n_1}^{(1)}+\mathbf{A}_{n_10}^{(1)T} & & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O}\\
& \mathbf{A}^{(2)}_{00}+\mathbf{A}^{(2)T}_{00} & & & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O}\\
& & \ddots & & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots\\
& & & \mathbf{A}^{(N)}_{00}+\mathbf{A}^{(N)T}_{00} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & & \mathbf{A}^{(N)}_{01}+\mathbf{A}^{(N)T}_{10} & \cdots & \mathbf{A}^{(N)}_{0n_N}+\mathbf{A}^{(N)T}_{n_N0}\\ \hline
\mathbf{O} & \mathbf{B}^{(1)}_{12} & \cdots & \mathbf{B}^{(1)}_{1N} & -\mathbf{I} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
\mathbf{O} & \mathbf{B}^{(1)}_{n_12} & \cdots & \mathbf{B}^{(1)}_{n_1N} & & & -\mathbf{I} & & & & \\ \hline
& \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\ \hline
\mathbf{B}^{(N)}_{11} & \mathbf{B}^{(N)}_{12} & \cdots & \mathbf{O} & & & & & -\mathbf{I} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & \\
\mathbf{B}^{(N)}_{n_N1} & \mathbf{B}^{(N)}_{n_N2} & \cdots & \mathbf{O} & & & & & & & -\mathbf{I}
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,N \\ \\ \}\,n_1 \\ \\ \}\,n_N \end{array}
\end{array}
\qquad (8)
$$

3. Stabilitási kritériumok

Az előbbiekben leírt dinamikus játékot stabilisnak mondjuk, ha a neki megfelelő lineáris differenciálegyenletrendszer aszimptotikusan stabilis. Ennek – mint ismeretes – az a feltétele, hogy az $\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}$ mátrix sajátértékeinek a valós része negatív legyen.

A fentieken kívül tegyük még fel a következőket:

(C) a $\mathbf{K}_k$ és $\mathbf{M}_{kl}(1 \le k \le N, 1 \le l \le n_k)$ mátrixok valamennyien pozitív definitek;
(D) a (6) differenciálegyenletrendszer trajektoriájának $(x_1, \ldots, x_N)$ része az $S_1 \times \ldots \times S_N$ halmaz belső pontja tetszőleges $t \ge 0$ esetén.

A (D) feltétel technikai jellegű. Mint azt SZÉP–FORGÓ (1985) kimutatja, alkalmas büntetőfüggvények bevezetésével elérhető, hogy a trajektoria minden $t \ge 0$ esetén $S_1 \times \ldots \times S_N$ belsejében maradjon.

Játékok stabilitása közgazdasági szempontból azt jelenti, hogy $t \to \infty$ esetén az $(x_1(t), \ldots, x_N(t))$ stratégiavektorok a játék egyetlen egyensúlypontjához konvergálnak. Ez a tulajdonság nemcsak kvalitatíve jellemzi az egyensúlypontokat, hanem numerikus meghatározásukra is módszert ad.

A (C) feltétel alapján az $\mathbf{S}$ mátrix pozitív definit, így a (6) differenciálegyenletrendszer aszimptotikusan stabilis, ha a $\mathbf{H}$ mátrix H-stabilis (ld. CARLSON, 1968). Ennek pedig – mint ismeretes – az az elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ mátrix negatív definit legyen. A továbbiakban ennek a feltételét vizsgáljuk meg. Mindenekelőtt vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(1)} + \mathbf{A}_{00}^{(1)T} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_{00}^{(N)} + \mathbf{A}_{00}^{(N)T} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{01}^{(1)T} + \mathbf{A}_{10}^{(1)} & \mathbf{B}_{12}^{(1)} & \ldots & \mathbf{B}_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{A}_{0n_1}^{(1)T} + \mathbf{A}_{n_1 0}^{(1)} & \mathbf{B}_{n_1 2}^{(1)} & \ldots & \mathbf{B}_{n_1 N}^{(1)} \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\cdots \mathbf{V}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^{(N)} & \ldots & \mathbf{B}_{1,N-1}^{(N)} & \mathbf{A}_{01}^{(N)T} + \mathbf{A}_{10}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{B}_{n_N 1}^{(N)} & \ldots & \mathbf{B}_{n_N,N-1}^{(N)} & \mathbf{A}_{0n_N}^{(N)T} + \mathbf{A}_{n_N 0}^{(N)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

Tegyük fel, hogy:
(E) $4\mathbf{U} + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k$ mátrix negatív definit.

Dolgozatunk fő eredménye a következő tétel:

Tétel: Az (A) -(E) feltételek mellett a dinamikus játék stabilis.

Bizonyítás: Az előzőek alapján elegendő azt belátnunk, hogy a tett feltételek mellett a $\mathbf{H}+\mathbf{H}^T$ mátrix negatív definit. Ennek belátása érdekében tekintsük e mátrix sajátértékegyenletét. Minthogy a fenti jelölések alapján

$$\mathbf{H}+\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 2\mathbf{U} & \mathbf{V}_1^T & \dots & \mathbf{V}_N^T \\ \mathbf{V}_1 & -2\mathbf{I} & & \\ \vdots & & ddots & \\ \mathbf{V}_N & & & -2\mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

sajátértékegyenlete így is felírható:

$$2\mathbf{U}u + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T v_k = \lambda u$$

$$\mathbf{V}_k u - 2v_k = \lambda v_k (k = 1, 2, \dots, N). \tag{12}$$

Bebizonyítjuk, hogy a tett feltételek mellett $\lambda < 0$. Ha $\lambda = 2$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ellenkező esetben a (12) második egyenletéből

$$v_k = \frac{1}{\lambda+2} v_k u, \tag{13}$$

amelyet (12) első egyenletébe helyettesítve a

$$(2\mathbf{U} + \frac{1}{\lambda+2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k - \lambda \mathbf{I})u = 0 \tag{14}$$

reláció adódik. Kimutatjuk először, hogy $u \neq o$. Ellenkező esetben ugyanis (13) alapján $v_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ adódna, és ebből zérus sajátvektort kapnánk, ami nem lehet. Így $u \neq 0$. Szorozzuk be balról a (14) egyenlőséget az u^T vektorral, majd osszuk el mindkét oldalt az $u^T u > 0$ számmal. Ekkor az

$$\alpha = \frac{u^T \mathbf{U} u}{u^T u},$$

$$\beta = \frac{u^T (\sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k) u}{u^T u} \tag{15}$$

jelölésekkel a

$$2\alpha + \frac{1}{\lambda+2}\beta - \lambda = 0 \tag{16}$$

egyenlet adódik a λ sajátértékekre. Átrendezéssel

$$\lambda^2 - \lambda(2\alpha - 2) - (4\alpha + \beta) = 0 \tag{17}$$

amelyből

$$\lambda = \alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\alpha + \beta}, \tag{18}$$

Ez akkor és csak akkor negatív, ha

$$\pm\sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\alpha + \beta} < 1 - \alpha \tag{19}$$

Minthogy a (B) feltétel alapján $\alpha < 0$, ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$4\alpha + \beta < 0 \tag{20}$$

relációval, amely biztosan teljesül az (E) feltétel következtében.

Megjegyzés: A tétel lehetőséget ad arra, hogy a $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ mátrix negatív definitségét egy sokkal kisebb méretű mátrix negatív definitségén keresztül igazoljuk. A (B) feltétel alapján $4\mathbf{U}$ negatív definit, a $\mathbf{V}_k^T\mathbf{V}_k$ szorzatok pedig pozitívak (szemi)definitek, így az (E) feltétel akkor teljesül, ha a $4\mathbf{U}$ tag (definit értelemben) dominál az összegben. Ennek eldöntésében pedig az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}_k$ mátrixok konkrét struktúrájának ismerete szükséges. Például az oligopol probléma esetén speciális struktúrájuk alapján közvetlenül ellenőrizhető stabilitási kritériumokat nyerhetünk. Ezekkel foglalkozunk a következő paragrafusban.

4. Dinamikus oligopol modellek

A többtermékes oligopol problémát SZIDAROVSZKY (1978) vezette be. Tegyük fel, hogy N termelő M különböző terméket állít elő, és közös piacon együtt értékesíti. Jelölje $x_k^{(m)}$ a k-adik termelő által az m-edik termékből előállított mennyiséget, ekkor a k-adik termelő stratégiája az $x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(M)})$ vektorral jellemezhető. Tegyük fel, hogy az egyes termékek egységára az összes termékeknek a piacra küldött mennyiségétől függ. Linearitást feltételezve az árvektor

$$p(x_1, \ldots, x_N) = \mathbf{A} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k + b \tag{21}$$

alakban írható fel. Tegyük fel továbbá, hogy a k-adik termelő költségfüggvénye kvadratikus:

$$c_k(x_k) = x_k^T \mathbf{B} x_k = b_k^T x_k + c_k \tag{22}$$

ekkor kifizetőfüggvénye pedig:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k^T(\mathbf{A} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k + b) - (x_k^T \mathbf{B}_k x_k + b^T x_k + c_k), \tag{23}$$

ahol $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}_k$,b,b_k,c adott konstans mátrix, vektor, vagy valós szám.

A (23) kifizetőfüggvénnyel rendelkező játék stabilitását viszgáljuk meg a továbbiakban kétféle adaptív feltételrendszer mellett.

Az első modellben feltesszük, hogy az egyes játékosoknak adaptív elvárásaik vannak közvetlenül a többi játékos stratégiáit illetően. Ha x_{kl}^E jelöli a k-adik játékos elvárását az x_l stratégiát $(l \neq k)$ illetően, akkor ez az elv a

$$\frac{d}{dt} x_{kl}^E = \mathbf{M}_{kl} \cdot (x_k - x_{kl}^E) \tag{24}$$

dinamizmussal írható le. Kimutatható, hogy ebben az esetben is (6) típusú differenciálegyenlet-rendszer adódik ahol most

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A} + \mathbf{A}^T - (\mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N^T) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{I} & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{A}^T & & & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{V}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & \mathbf{A}^T \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor $\mathbf{A}$ szimmetrikus, valamint a $\mathbf{B}_k (1 \leq k \leq N)$ mátrixok zérus értéküek. Jelölje α az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit. Fennáll a következő (SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI, 1986a) állítás:

Ha $N = 2$, akkor

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -3 + \sqrt{8} \tag{27}$$

esetén, ha $N = 3$, akkor

$$\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{5}) < \alpha < \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}) \tag{28}$$

esetén a játék stabilis, ha pedig $N \geq 4$, nincs olyan α, amelyre $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ negatív definit lenne.

A második modell azon az észrevételen alapszik, hogy a (23) kifizetőfüggvény nem függ külön az $x_l (l \neq k)$ stratégiáktól, hanem csak azok $s_k = \sum_{l \neq k} x_l$ összegétől. Ekkor ugyanis

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k^T(\mathbf{A}x_k + \mathbf{A}s_k + b) - (x_k^T \mathbf{B}_k x_k + b^T x_k + c_k), \tag{29}$$

Ha azt feltételezzük, hogy az egyes játékosoknak adaptív elvárásaik vannak az s_k vektorokat illetően, akkor ezt a

$$\frac{d}{dt} s_k^E = \mathbf{M}_k \cdot (s_k - s_k^E) \tag{30}$$

differenciálegyenletet reprezentálja. Egyszerü számítás mutatja, hogy ebben az esetben is (25) alakú az $\mathbf{U}$ mátrix, valamint most

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{A}^T \, \mathbf{I} \ldots \mathbf{I}), \ldots, \mathbf{V}_N = (\mathbf{I} \ldots \mathbf{I} \, \mathbf{A}^T). \tag{31}$$

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor a $\mathbf{B}_k$ mátrixok azonosak ($\mathbf{B}_k \equiv \mathbf{B}$). Kimutatható (OKUGUCHI – SZIDAROVSZKY, 1986b), hogy amennyiben az

$$(\mathbf{A} + (N-1)\mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A} + (N-1)\mathbf{I})^T + 4(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T - \mathbf{B} - \mathbf{B}^T)$$

és az

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I})^T = 4(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T - \mathbf{B} - \mathbf{B}^T) \tag{32}$$

mátrix negatív definit, akkor a játék szükségképpen stabilis. Tegyük fel végül, hogy $\mathbf{A}$ szimmetrikus, és $\mathbf{B} = 0$. Jelölje most is α az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékét. A (32) mátrixok sajátértékei akkor és csak akkor negatívak, ha

$$(\alpha + N - 1)^2 + 8\alpha < 0 \tag{33}$$

és

$$(\alpha - 1)^2 + 8\alpha < 0 \tag{34}$$

Ez a két egyenlőtlenség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha

$$-(N+3) - \sqrt{8(N+1)} < \alpha < -(N+3) + \sqrt{8(N+1)} \tag{35}$$

és

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -3 + \sqrt{8}. \tag{36}$$

Ezeknek a teljesülési feltételei pedig

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -3 + \sqrt{8}. \tag{37}$$

és

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -(N+3) + \sqrt{8(N+1)} \tag{38}$$

A kétféle modell nyilvánvalóan azonos stabilitási eredményt ad $N = 2$ esetén, hiszen ekkor $s_1 = x_2$ és $s_2 = x_1$ azaz a két modell azonos. A második modell $N = 3$ esetére tágabb intervallumot ad α-ra, mint az első modell. Az első modell már $N = 4$ esetére sem ad lehetséges intervallumot α-ra, míg a második modell egészen addig ad lehetséges intervallumot, amíg

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -(N+3) + \sqrt{8(N+1)}$$

azaz $N \leq 13$. Ebben az értelemben tehát a második modell stabilisabbnak tekinthető.

(Beérkezett: 1987. március 30-án.)

Irodalom

THEOCHARIS, R.D. (1959): On the Stability of the Cournot Solution of the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, Vol. 27, pp. 133–134.

OKUGUCHI, K. (1970): Adaptive Expectations in Oligopoly Model. *Review of Econ. Studies*, Vol. 37, pp. 233–237.

OKUGUCHI, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models*. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

SZÉP J. – FORGÓ F. (1985): *Introduction to the Theory of Games*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

OKUGUCHI, K. – SZIDAROVSZKY, F. (1986a): Dynamics of the Cournot Oligopoly with Multi-Product Firms. (megj. alatt)

OKUGUCHI, K. – SZIDAROVSZKY, F. (1986b): An Adaptive Dynamic Multiproduct Oligopoly Model. (megj. alatt)

SZIDAROVSZKY, F. – OKUGUCHI, K. (1986a): Adaptive Expectations in a Multi-product Oligopoly Model. (megj. alatt)

SZIDAROVSZKY, F. – OKUGUCHI, K. (1986b): Kvadratikus játékok stabilitásáról. (megj. alatt)

CARLSON, D. (1986): A New Criterion for H-Stability of Complex Matrices. *Lin. Alg. and Appl.*, Vol. 1, pp. 59–64.

ARROW, K.J. – M. MCMANUS (1953): A Note on Dynamic Stability. *Econometrica*, Vol. 26, pp. 448–454.

SZIDAROVSZKY, F. (1978): *Játékelmélet.* ELTE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.

On The Stability of an Adaptive Quadratic Game

The stability of N-person games with quadratic pay-off functions is examined under the assumption that the individual players have adaptive expectations about the changes in the other players' strategies and/or the linear combinations thereof. In the study some results of the stability theory of differential equation systems are utilized. As a concrete application the oligopoly problem is examined.