Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

NEMÉNYI JUDIT

Az időben változó paraméterű modellek alkalmazási lehetőségei

A klasszikus, lineáris, többváltozós regressziós modellek alkalmazásakor feltételezzük, hogy a magyarázó változók átlagos változása a megfigyelési időszak egészében a becsült, konstans paramétereknek megfelelő átlagos változást eredményez a függő változó értékében. Másként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy a becsléshez felhasznált mintát generáló gazdasági struktúra változatlanságát, s így a független és függő változók kapcsolatát jellemző paraméterek változatlanságát feltételezzük. Még csak nem is kell nagyon hosszú megfigyelési időszak ahhoz, hogy e feltevés jogosságát megkérdőjelezzük. Például ugyanahhoz a jövedelemváltozáshoz más–más fogyasztás-, beruházás-, vagy készletváltozás tartozhat a tényidőszak különböző időpontjában a szabályozórendszer változása esetén vagy, mert a fogyasztási szokások megváltoztak. A végső, felhasználást befolyásolják az inflációs és konjunktúravárakozások. A külöböző ösztönző, korlátozó gazdaságpolitikai intézkedések az egymást követő években különböző mértékben befolyásolják a gazdasági folyamatok alakulását. Tehát sokszor közgazdasági ismereteink alapján *a priori* elképzelésünk van bizonyos összefüggések intenzitásának módosulásáról azoknál a modelleknél is, amelyek szerkezetét, specifikációját helytállónak, relevánsnak tartjuk.

A változó paraméterek kérdésköréhez vezet a valóság és az adekvát modell megtalálásának problematikája is. Az állandó paraméterű, lineáris modell sok esetben alkalmatlan az egyébként változatlan gazdasági struktúra leírására, a megfelelő modell közelítésének tekinthető csupán. Ez nem csak akkor fordulhat elő, ha a megfelelő modell nem lineáris, hanem amikor fontosnak tartott magyarázó változók „technikai" okokból nem kerülnek be a modellbe.

Kérdéses ugyanis, hogy a kiválasztott modell mennyire képes követni a gazdasági környezet változásait. Amennyiben feltételezzük, hogy modellünk csak azokat a hatásokat tükrözi, amelyek a megfigyelési időszak egészében érvényesültek, viszont olyan változók hatását nem tartalmazza, amelyek erősen befolyásolták ugyan a függő változó alakulását, de a mintavételi időszaknak csak egy részében hatottak (tegyük fel, hogy ezeknek a változóknak a beépítése megfigyelés híján, jó proxy híján, vagy pl. a kollinearitás miatt nem lehetséges), akkor ebből következik az a sejtés, hogy a modellezett változók válaszparaméterei a megfigyelési időszakon belül változóak. A paraméterek változatlanságának feltételezése aggregált adatokra épülő modellek esetén csak az alrendszerekre vonatkozó különböző feltételek teljesülése mellett jogos (lásd THEIL, 1979).

Mindezek alapján távol áll tőlünk, hogy vitassuk a sok esetben sikerrel alkalmazott állandó paraméterű modellek létjogosultságát, alkalmazhatóságát. A modellválasztásnál szóbajöhető modellek körét azonban az előzőekben vázolt esetekben célszerűnek látszik kibővíteni a paraméterek változását valamilyen formában kezelő modellekkel. A paraméterek időbeli állandóságának és változásának vizsgálata két szorosan összetartozó munkafázisból áll. Az első lépcsőben a paraméterek állandóságának tesztelését kell elvégezni, ezt követően — amennyiben a különböző próbák (lásd pl. JUDGE et.al., 1980; QUANDT, 1960) alapján nem vethető el a paraméterek változásának hipotézise — különböző változó paraméterű modelltípusok számszerűsítésével próbálkozhatunk. Cikkünkben csupán a második kérdéskört, a számszerűsíthető modelleket tárgyaljuk.

A változó paraméterű elméleti modellek különböző típusait tárgyalja a szakirodalom, de az elméleti modellek széles választékához képest kevés empirikus alkalmazást találunk. Ennek több oka van. Egyfelől a változó paraméterű modell számszerűsítéséhez viszonylag nagy mintákra van szükség, ez elsősorban az idősorokra épülő modelleknél szab korlátot az alkalmazásoknak. Másrészt a változó paraméterű modellekre kidolgozott becslési eljárásoknak viszonylag nagy a számításigénye. Általában több lépcsős, iteratív, sokszor nem lineáris összefüggéseket kezelő optimalizáló eljárásokról van szó, amelyek megvalósítására nem állnak rendelkezésre könyvtári programcsomagok. A bonyolult számítások után elvégezhető hipotézisvizsgálatok esetleg éppen arra a megállapításra vezetnek, hogy nem jogosult az adott modelltípus feltételezése, vagy legalábbis a rendelkezésre álló adatok alapján nem verifikálható.

A változó paraméterű modellekkel foglalkozó kutatások nagy része olyan egy egyenletes modellekre szorítkozik, melyeknél feltételezhető, hogy a magyarázó változók nem valószínűségi változók, hanem külső, exogén adottságok. Ha ezt a feltételezést feloldjuk, és szimultán rendszerbe kívánjuk beépíteni változó paraméterű függvényeinket, vagy hovatovább változó paraméterű rendszert szeretnénk kialakítani (természetesen, ha ezt a közgazdasági megfontolások indokolttá teszik), akkor további módszertani problémák adódnak.

Egy cikk keretébe a szerteágazó témának csupán vázlatos áttekintése fér be, annál is inkább, mivel a hangsúlyt itt az alkalmazási lehetőségek bemutatására helyezzük. Az elméleti kérdések és az alkalmazási problémák iránt érdeklődőknek széleskörű szakirodalom áll rendelkezésére. Lásd. pl. CHOW (1983), KMENTA (1986), MADDALA (1977) és ZAREMBKA (1974).

A továbbiakban először áttekintjük az idősoros modelleknél alkalmazható változó paraméterű modellek különböző változatait, majd kísérleti számításaink tapasztalatairól számolunk be.

1. Az időben változó paraméterű modellek alaptípusainak áttekintése

Cikkünkben csupán az idősorok alapján specifikált változó paraméterű regressziós modellekkel foglalkozunk, mivel az aggregált, makroszintű adatokkal megragadható szerkezetváltozások kérdését vizsgáljuk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a változó paraméterű modell feltételezése keresztmetszeti adatok esetén méginkább kézenfekvő a súlyukban, minőségi jellemzőikben jelentősen eltérő egyedek (pl. vállalatok, háztartások) válaszparaméterei azonosságának feloldására. A változó paraméterű modellek nagy jelentőségű területe az ún. panelmodellek, amelyek keresztmetszeti és idősoros adatokat egyaránt felhasználnak és segítségükkel a szerkezeti változásoknak az időben változó paraméterű modelleken túlmutató vonatkozásai is vizsgálhatók (lásd pl. MÁTYÁS, 1986).

Az időben változó paraméterű modellek különböző alaptípusainak áttekintéséhez induljunk ki az alábbi standard, lineáris regressziós modellből:

$$y_t = \sum_{k=1}^{K} x_{tk}\beta_k + \varepsilon_t = x_t'\beta + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\ldots,T, \tag{1}$$

ahol

y_t a függő változó t-edik megfigyelése,

x_t a nem sztochasztikus magyarázó változók K dimenziós vektorának t-edik megfigyelése,

β a modellből becsült, konstans paraméterek $(K \times 1)$-es vektora,

ε_t pedig az egyenlet véletlen változója $E(\varepsilon_t) = 0$ várható értékkel és $E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{ha } t = s \\ 0, & \text{ha } t \neq s \end{cases}$ kovarianciamátrixszal.

A paraméterek változásának feloldására az (1) modellt a következő alakba írjuk át:

$$y_t = \sum_{k=1}^{K} x_{tk} \cdot \beta_{tk} = x_t'\beta_t + \varepsilon_t, \quad t = 1,2\ldots,T, \tag{2}$$

ahol a β_t a változó paraméterek t-edik időpontra vonatkozó $(K \times 1)$-es vektora.

A (2) modellben $(T \times K)$ paraméter becslését kellene elvégezni a rendelkezésre álló T megfigyelés alapján. A becslés csak további információk megadásával végezhető el. A változó paraméterű modellek alaptípusai a becslésnél felhasznált további feltételekben különböznek egymástól.

A *switching regressziós* (rezsimváltós) modellek esetén, valamilyen előzetes információ alapján feltételezzük, hogy a vizsgált összefüggés tekintetében a megfigyelési időszakban két, vagy több „rezsim" érvényesült, amelyekre vonatkozóan a paraméterek más-más — egy adott ressimen belül konstans — értéke volt jellemső. Két ressim megkülönböstetése esetén:

$$y_t = \begin{cases} x_t'\beta_1 + \varepsilon_{1t} & \text{ha} \quad t \in T_1 \\ x_t'\beta_2 + \varepsilon_{2t} & \text{ha} \quad t \in T_2 , \end{cases} \tag{3}$$

ahol

T_1 és T_2 a megfigyelési idősszak asonos ressimbe tartosó időpontjainak dissjunkt halmasa,

β_1 és β_2 pedig a különbösző ressimeknek megfelelő paramétervektorok.

A sserint, hogy a töréspontok ismertek vagy ismeretlenek, különbösző technikákkal (dummy váltosók módssere, a ssakassolt regressiós modellekre alkalmasható módsserek) becsülhető modellel specifikálhatók (lásd JUDGE et al., 1981).

Amennyiben nem feltételeshető, hogy a válasparaméterek tekintetében a megfigyelési idősszak jól elkülöníthető résszekre bontható, késenfekvő a (2) modellt úgy átfogalmasni, hogy a β_t *paramétereket sztochasztikus váltosóként kezeljük.* Ekkor a paramétereket generáló többváltosós sstochasstikus folyamat jellemsői alapján megkülönböstethetjük a konstans várható értékű válassparaméteres *(constant mean response coefficients)* és a váltosó várható értékű válassparaméteres *(variable mean response coefficients)* modelleket.

A *konstans várható értékű válaszparaméteres* modellek alaptípusa a HILDRETH és HOUCK által kidolgosott *véletlen paraméterű* modell (1968), amelynél feltételesték, hogy as aktuális válassparaméter véletlensserűen alakul a konstans várható érték körül:

$$\beta_t = \bar{\beta} + \mu_t , \tag{4}$$

ahol

β_t as aktuális paraméterek $(K \times 1)$-es vektora a t-edik időpontban,

$\bar{\beta}$ a válassparaméterek konstans várható értékének $(K \times 1)$-es vektora,

μ_t pedig a véletlen eltérések $(K \times 1)$-es vektora a t-edik időpontban, melyről feltételessük, hogy $E(\mu_t) = 0$ és $E(\mu_t \mu_s') = \begin{cases} \Sigma & \text{ha} \quad t = s \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq s . \end{cases}$

Idősoros modellek esetén éssserűbb as a feltevés, hogy as aktuális paraméterek nem véletlensserűen, hanem időtől függően alakulnak, miközben várható értékük konstans marad. Esen a feltevésen alapulnak a *normál állapotba visszatérő* modellek, melyeknél a paramétereket többváltosós stacionárius ARMA folyamat generálja, s a stacionaritás bistosítja, hogy as aktuális paraméterek a konstans várható érték körül mosogjanak. Ha a paramétereket AR(1) folyamat generálja, a (2) modellt a paraméterek alakulására vonatkosó alábbi össefüggéssel egésszítjük ki (ROSENBERG, 1973):

$$\beta_t - \bar{\beta} = \Phi(\beta_{t-1} - \bar{\beta}) + \mu_t , \tag{5}$$

ahol

Φ $(K \times K)$-s K^2 ismeretlent tartalmazó paramétermátrix (a stacionaritás miatt Φ sajátértékeire teljesülnie kell a $\lambda_k < 1$ feltételnek, de Φ-t többnyire diagonálisnak feltételezik és a stacionaritást $\Phi_{kk} < 1$ biztosítja).

Látható, hogy a (2), (5) normál állapotba visszatérő modellből $\Phi = 0$ speciális esetben visszakapjuk a (2), (4) egyenletekkel leírt véletlen paraméterű modellt.

A *változó várható értékű válaszparaméteres* modellek közé tartoznak az ún. *véletlen bolyongás (random walk)* modellek, amelyeknél a paramétereket generáló sztochasztikus folyamat nem stacionárius és ennek következtében a megfigyelési időszak alatt a paraméterek időben jelentősen változhatnak (pl. COOLEY–PRESCOTT, 1976). Ekkor:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \mu_t \,, \tag{6}$$

ahol

μ_t a véletlen eltérések $(K \times 1)$-es vektora, $E(\mu_t) = 0$ és $E(\mu_t \mu_s) = \sigma^2 Q$, $t = s$ esetén.

A Q $(K \times K)$-s mátrix határozza meg a paraméterek változásának terjedelmét. ($Q = 0$ esetén a konstans paraméterű standard lineáris modellt kapjuk vissza.)

A változó várható értékű válaszparaméteres modellek csoportjába sorolhatók a *paraméterek változását exogén változók függvényében leíró modellek*. Ezeknél feltételezzük, hogy közgazdasági ismereteink alapján meghatározható az exogén változók olyan köre, amellyel megragadhatók a paraméterek változását előidéző főbb hatások. Ekkor a (2) alapmodellt a paraméterekre vonatkozó alábbi regressziós egyenlettel egészítjük ki:[1]

$$\beta_t = Z_t \cdot \gamma + \mu_t \tag{7}$$

ahol

Z_t a paraméterek alakulását befolyásoló exogén változók t időpontra vonatkozó megfigyeléseiből összeállított $(K \times M)$-es mátrix,

γ a paraméterek alakulását magyarázó változókhoz tartozó $(M \times 1)$-es paramétervektor.

Az idősoros változó paraméterű modellek különböző alaptípusainak áttekintése alapján látható, hogy változatos specifikációs lehetőségek állnak rendelkezésre. A megfelelő specifikáció meghatározása sok elméleti és alkalmazási-technikai nehézséggel jár. Az előzőekben bemutatott elméleti modellek becslésére különböző eljárásokat dolgoztak ki. Ezek vagy az általánosított legkisebb négyzetek módszerének, vagy a maximum likelihood módszereknek, vagy a Kalman-szűrő eljárásnak az alkalmazására épülnek. A továbbiakban csak az utoljára bemutatott — a paraméterek

[1] A (7) speciális eseteként (ha Z_t $(K \times K)$ elemű egységmátrix) származtatható a (4) véletlen paraméterű modell.

változását exogén változók függvényében leíró — modell becslési kérdéseivel foglalkozunk, mert ezzel végeztünk számításokat. Abból indultunk ki, hogy idősoros modellek esetén gyakran jól indokolható az a feltételezés, hogy a paraméterek szisztematikusan változnak a megfigyelési időszakban. A rendelkezésre álló minta nagysága (1960–85) éppen azon a határon van, amikor ennek a módszernek az alkalmazása megpróbálható.

2. Az exogén változók függvényében változó paraméterű modellek becslése

Az exogén változók függvényében változó paraméterű modell az előzőek alapján a következő:[2]

$$y_t = \Sigma x_{tk} \cdot \beta_{tk} = x_t'\beta_t \tag{8a}$$

$$\beta_t = Z_t \cdot \gamma + \mu_t\,. \tag{8b}$$

Behelyettesítve (8b)-t (8a)-ba:

$$y_t = x_t' Z_t \gamma + x_t'\mu_t = w_t'\gamma + e_t\,, \tag{9}$$

ahol

$w_t' = x_t' Z_t$ és $e_t = x_t'\mu_t$ helyettesítéssel kaptuk a (9) konstans (γ) paraméterű modellt.

Az alábbi

$$E(\mu_t) = 0 \quad \text{és} \quad E(\mu_t \mu_s') = \begin{cases} \Sigma & \text{ha} \quad t = s \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq s \end{cases} \tag{10}$$

feltevésekből következik, hogy a (9) modell e_t véletlen változója $E(e_t) = E(x_t'\mu_t) = 0$ várható értékű és heteroszkedasztikus, mivel

$$E(e_t^2) = E(x_t'\mu_t\mu_t'x_t) = x_t'\Sigma x_t = \varphi_t^2\,. \tag{11}$$

Ezért, ha a Σ kovarianciamátrix ismert, akkor γ-ra a legjobb lineáris torzítatlan becslőt... esztimátort (BLUE) az általánosított legkisebb négyzetek (GLS) módszerének alkalmazásával kapjuk.

Írjuk fel a (9) modellt mátrixok segítségével a megfigyelési időszak egészére:

$$y = XZ\gamma + e = W\gamma + e\,, \tag{12}$$

[2] A (2) alapmodell ε_t véletlen változóját a továbbiakban nem szerepeltetjük, mivel ennek identifikálhatósága a konkrét modellek kapcsán vizsgálandó. A legegyszerűbb esetben ε_t a (8a) egyenlet konstansához tartozó véletlen összetevő részének tekinthető.

ahol

y a független változók megfigyeléseinek $(T \times 1)$-es vektora,

W a „transzformált" magyarázó változók $(T \times M)$-es mátrixa: $W = XZ$ és

$$X = \underset{(T \times TK)}{\begin{pmatrix} x_1' & & & \\ & x_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_T' \end{pmatrix}}, \qquad Z = \underset{(TK \times M)}{\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_T \end{pmatrix}}$$

γ a β paraméterek változását meghatározó konstans paraméterek $(M \times 1)$-es vektora,

e a modell véletlenváltozójának $(T \times 1)$-es vektora $E(e) = 0$ és $E(ee') = \Phi = < \varphi_1^2, \dots, \varphi_T^2 >$.

Ekkor γ legjobb lineáris torzítatlan esztimátora GLS módszerrel:

$$\hat{\gamma} = (W'\Phi^{-1}W)^{-1}W'\Phi^{-1}y\,. \tag{13}$$

Megjegyezzük, hogy amennyiben Σ (és így Φ) ismeretlen akkor maximum likelihood módszerrel szimultán lehet becsülni γ-t és Φ-t, azonban a számítási nehézségek (nem lineáris, iteratív számítógépigényes eljárások) miatt célszerűbb megpróbálkozni Φ mintából való becslésével. Ezt követően ugyanis a GLS módszer könnyen alkalmazható.

Φ *becslésére* több módszer is rendelkezésre áll (áttekintést ad HSIAO, 1975), amelyek általában a HILDRETH és HOUCK (1968) által javasolt — eredetileg a véletlen paraméterű modell becslésére kialakított — eljárás módosított, finomított változatai. Φ becslését visszavezetjük Σ becslésére. Felhasználva, hogy

$$\varphi_t^2 = x_t'\Sigma x_t = a_t'\sigma\,, \tag{14}$$

ahol

σ a Σ mátrix egymástól különböző elemeiből alkotott vektor, és

a_t az $x_t \otimes x_t$ mátrix azonos elemeinek összevonása után kialakuló vektor[3]

[3] Pl. két magyarázó változó $(K = 2)$ esetén: $\sigma = \{\sigma_1^2, \sigma_{12}, \sigma_2^2\}$ és $a_t = \{x_{t1}^2, 2x_{t1}x_{t2}, x_{t2}^2\}$.

és bevezetve az $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_T \end{pmatrix}$ jelölést, a Φ kovarianciamátrix felírható

$$\Phi = < A \cdot \sigma > \tag{15}$$

alakban.

(15) alapján látható, hogy σ BLU tulajdonságú becslése előállításával a Φ kovarianciamátrix becslését is megadtuk.

σ becsléséhez induljunk ki a (12) egyenletből, melynek paramétereire az egyszerű legkisebb négyzetek módszerével (OLS) torzítatlan, de nem hatásos esztimátor adható:

$$\hat{\gamma}_{OLS} = (W'W)^{-1}W'y\,, \tag{16}$$

a becsléshez tartozó residuumok pedig:

$$\hat{e}_{OLS} = y - W(W'W)^{-1}W'y = My\,, \tag{17}$$

ahol $M = I - W(W'W)^{-1}W'$ szimmetrikus, idempotens mátrix.

Továbbá $\hat{e}_{OLS} = My = M[W\gamma + e] = Me$,

és $E(\dot{\hat{e}}_{OLS}) = \dot{M}\varphi$, $(\varphi = \{\varphi_1^2, \ldots, \varphi_T^2\})$ felhasználásával σ OLS módszerrel becsülhető az alábbi összefüggésből:

$$\dot{\hat{e}}_{OLS} = \dot{M}A \cdot \sigma + \nu\,, \tag{18}$$

ahol ν véletlen változó és $E(\nu) = 0$,

$\dot{\hat{e}}_{OLS}\dot{M}$ pedig az $\hat{e}_{OLS}$ és M elemeinek négyzetét tartalmazó vektor, illetve mátrix.

A σ-ra kapott esztimátor

$$\hat{\sigma} = (F'F)^{-1}F'e \qquad (F = \dot{M}A) \tag{19}$$

torzítatlan, mivel $E(\hat{\sigma}) = E[(F'F)^{-1}F'\dot{\hat{e}}_{OLS}] = (F'F)^{-1}F'E(\dot{\hat{e}}_{OLS}) = \sigma$,

szórása pedig:

$$E\{(\hat{\sigma} - \sigma)(\hat{\sigma} - \sigma)'\} = (F'F)^{-1}F'E(\nu\nu')F(F'F)^{-1}\,. \tag{20}$$

Ahhoz tehát, hogy σ-ra hatékony becslést adjunk ismerni kellene a ν véletlen változó kovarianciamátrixát. A $\hat{\sigma}$ becslés hatásosságának biztosítására az eddigiekben ismertetett Hildreth–Houck által javasolt $(H - H)$ módszer továbbfejlesztett változatait dolgozták ki, amelyekre a későbbiekben még visszatérünk.

Összefoglalva, a (8a)–(8b) változó paraméterű modell $H--H$ módszerrel való becslésének a lépései a következők:

A) A $\Phi =< \varphi_1^2, \ldots, \varphi_T^2 >$ kovarianciamátrix becslése

a) Előállítjuk a (12) modell magyarázó változóinak $W = XZ$ mátrixát.

b) Elkészítjük a (12) modell OLS becslését.

c) Az OLS becslés (17) reziduumai, valamint az $M = I - W(W'W)^{-1}W'$ és az x_t-kből számítható A mátrix felhasználásával becsüljük a Σ kovarianciamátrix elemeit (19) szerint.

d) (15) alapján előállítjuk a $\widehat{\Phi} =< A\widehat{\sigma} >$ becsült kovarianciamátrixot.

B) A $\widehat{\Phi}$ felhasználásával (14) alapján elkészítjük γ GLS becslését, amely — figyelembe véve, hogy $\widehat{\Phi}$ diagonális mátrix — a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével előállítható.

Az **A)** pontban leírt eljárás „szépséghibája", hogy az így becsült $\widehat{\sigma}$-ra semmi sem garantálja, hogy eleget tegyen a kovariancia-mátrixok esetén szükséges feltételeknek ($\widehat{\sigma}_i^2 < 0$ is adódhat). A $\widehat{\Sigma}$ nem negatív definitségét biztosító korlátok érvényesítése kvadratikus programozási feladathoz vezet, aminek megoldása több változó paraméter és nem diagonális Σ feltételezése esetén meglehetősen bonyolult.

Ehelyett bemutatjuk a SINGH et. al (1976) által javasolt *módosított H-H esztimátort*, ahol a $\widehat{\sigma}$ becslés hatásosságának javításával csökkentik a valószínűségét annak, hogy $\widehat{\sigma}_i^2$-re negatív érték adódjon. Az eljárás előnye, hogy számítástechnikailag viszonylag könnyen realizálható.

Bebizonyítható (SINGH, 1976), hogy

$$E(\nu\nu') = E(\widehat{e}_{OLS}\widehat{e}'_{OLS}) - F\sigma\sigma'F' = 2\dot{\Psi}\,, \tag{21}$$

ahol $\dot{\Psi}$ a $\Psi = M\Phi M$ mátrix elemeinek négyzetét tartalmazza.

Ekkor a H-H eljárás **A)** lépése a következő két ponttal bővül ki:

e) $\widehat{\Phi}$ felhasználásával elkészítjük a (18) egyenlet GLS becslését $\widehat{\sigma}_{GLS} = (F'\dot{\Psi}F)^{-1}F'\Psi - \dot{\Psi}^{-1}$

f) ezután $\widehat{\sigma}_{GLS}$ felhasználásával előállítjuk $\widehat{\Phi}_{GLS}$ kovariancia mátrixot.

A szokásos normalitási feltételek mellett γ-ra és Φ-re maximum likelihood (ML) módszerrel készíthető szimultán becslés (lásd DENT–HILDRETH, 1977). A (12) modell becslésére a likelihood függvény a következő:

$$L(\gamma, \sigma) = 2\pi^{T/2} \mid \Phi \mid^{\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}e'\Phi^{-1}e\,, \tag{22}$$

ahol $\mid \Phi \mid = \prod_{t=1}^{T} \varphi_t^2 \quad$ és $\quad \varphi_t^2 = a_t \cdot \sigma$.

A maximalizáláshoz (22) γ és σ szerinti deriválásával adódó feltételi egyenletek nem lineárisak a becsült paraméterekben, így megoldásunkhoz különböző iteratív eljárásokat használnak fel (lásd pl. DENT–HILDRETH, 1977; HSIAO, 1975; SINGH et. al., 1976), amelyek megegyeznek abban, hogy a paraméterekre valamilyen induló értéket feltételeznek (pl. a H–H eljárással kapott becslést).

A jelenlegi szakaszban ML módszerrel még nem készítettünk számításokat — elsősorban számítástechnikai nehézségek miatt, ugyanakkor ezt nem tekintjük súlyos hiányosságnak, mivel DENT–HILDRETH (1977) Monte Carlo vizsgálatai alapján kis mintában (T=25-re végezték a vizsgálataikat) a H–H módosított eljárással kapott eredmények tulajdonságai kedvezőek voltak az ML módszerrel számítottakkal összevetve.

3. Néhány kísérlet az exogén változók függvényében változó paraméterű modellek alkalmazására

Az idősorok alapján specifikálható változó paraméterű modellek alkalmazási lehetőségeinek feltárása terén csupán az első lépéseket tettük meg. A változó paraméterek hipotézisét tesztelni kell a kiválasztott modelltípus jellemzőinek megfelelően. Kérdéses azonban, hogy melyik legyen a kiválasztott modell. Erre vonatkozóan nem látunk jelenleg jobb útmutatót, mint hogy közgazdasági ismereteink alapján válasszunk specifikációt. Az alábbiakban két olyan példát mutatunk be, ahol előzetes megfontolások alapján megpróbálkoztunk a paraméterek változásának számszerűsítésével.

3.1. A lakossági fogyasztás változó paraméterű modellje[4]

Az aggregált lakossági fogyasztás alakulásának leírására induljunk ki az alábbi egyszerű regressziós modellből:

$$FL(t) = \beta_{FL}(t)FL(t-1) + \beta_{LJ}(t) \cdot LJ(t)\,, \tag{23}$$

ahol FL a lakossági fogyasztás
LJ a lakossági jövedelem.

A (23) modellben a lakossági fogyasztás alakulását a már elért fogyasztási szint (a fogyasztói szokások) és a rendelkezésre álló jövedelem határozza meg. Feltételezzük, hogy a β_i válaszkoefficiensek időben változók, mégpedig

$$\begin{aligned} \beta_{FL}(t) &= \bar{\beta}_{FL} + \gamma_{FL} f(t) + \mu_{FL}(t) \\ \beta_{LJ}(t) &= \bar{\beta}_{LJ} + \gamma_{LJ} f(t) + \mu_{LJ}(t)\,, \end{aligned} \tag{24}$$

ahol $f(t)$ az időváltozó $t = 1, 2, \ldots T$ valamilyen függvénye.

---

[4] Ezzel a modellel SINGH et. al. (1976) végeztek több országra összehasonlító elemzéseket. A modellt az eredeti cikkben bemutatott változatban ismertetjük, de felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (23) specifikáció tartalmazza a fogyasztás késleltetett értékét, s így nem tesz eleget az elméleti modellnél bevezetett feltételezéseknek. Ezért a H-H módszerrel készített becslések torzítottak lesznek.

Ílymódon a válaszkoefficiensek determinisztikus összetevője trend szerint alakul. Ez a fogyasztás esetén pl. azzal indokolható, hogy a fogyasztói szokások időbeli változása tartós változást eredményez a jövedelem felhasználásában. A fogyasztói szokások és a jövedelemalakulás aktuális válaszparamétereinek $(\beta_{FL}(t), \beta_{LJ}(t))$ eltérését a konstans, átlagosan jellemző értéktől $(\bar{\beta}_{FL}, \bar{\beta}_{LJ})$ egyfelől véletlen tényezők (μ_{FL}, μ_{LJ}), másfelől azonban a gazdasági fejlődést befolyásoló számos tényező határozza meg, melyek hatását itt nem specifikáljuk explicit módon, hanem úgy tekintjük, hogy az időváltozó függvényében megragadható változást okoznak.

(23) és (24) az alábbi modellt határozza meg $f(t) = t$ lineáris trend esetén:

$$\begin{aligned} FL(t) = & \bar{\beta}_{FL} \cdot FL(t-1) + \bar{\beta}_{LJ} \cdot LJ(t) + \gamma_{FL} \cdot t \cdot FL(t-1) + \\ & + \gamma_{LJ} \cdot t \cdot LJ(t) + FL(t-1) \cdot \mu_{FL}(t) + \\ & + LJ(t) \cdot \mu_{LJ}(t) . \end{aligned} \tag{25}$$

Látható, hogy $E(\mu_{FL}) = 0$, $E(\mu_{LJ}) = 0$ és $E(\mu_{FL}^2) = \sigma_{FL}^2$, $E(\mu_{LJ}^2) = \sigma_{LJ}^2$ feltételezése esetén (25) megfelel a (12) heteroszkedasztikus modellnek, amelynek becslése az előző fejezetben ismertetett eljárással végezhető el.

A (25)-ben megadott modell becslését a késleltetett fogyasztási változó szerepeltetésén kívül a multikollinearitás is kérdésessé tette a magyar adatokra való alkalmazáskor. (Számításainkhoz ÁCS (1986-os kiadványából, 1981. évi áron számított milliárd forintban mért lakossági fogyasztási adatokat, és a KSH mérlegkiadványokból összeállított lakossági jövedelemadatokat használtunk.) Ezért becsléseinket a lakossági fogyasztás növekedési ütemére felírt, transzformált modellre készítettük el.

$$\begin{aligned} NFL(t) = & \underset{(1.68)}{0.1374} + \underset{(3.09)}{0.0202} \cdot t \\ & + \underset{(10.98)}{0.8384}\, RF(t) - \underset{(-3.24)}{0.0197}\, RFT(t) , \end{aligned} \tag{26}$$

$$R^2 = 0.9378 \qquad DW = 1.7577 \qquad RE = 0.5\%$$

ahol NFL a lakossági fogyasztás növekedési üteme
RF a lakossági reáljövedelem,
$RFT = RF \cdot t$.

A (26)-os egyenlet a paraméterek OLS becslését mutatja be.[5] A becsült modell reziduumainak CUSUMQ teszttel való vizsgálata alapján az empirikus modellre nem állt fenn az elméleti modellben feltételezett heteroszkedaszticitás. Ugyanerre az eredményre vezetett a H-H módszer, amellyel σ_{FL}^2 és σ_{LJ}^2-re negatív, illetve nem szignifikáns érték adódott.

[5] A becslések jellemzésére most és a továbbiakban is a paraméterek alatt zárójelben feltüntettük a t statisztikákat, valamint a korrigált többszörös korrelációs együtthatót (R^2), a Durbin-Watson mutatót (DW) és az egyenlet relatív hibáját. Számításaink a TSP 4.0. programcsomag felhasználásával készültek.

A paraméterek szignifikánsak, ezért a változó paraméterű modell hipotézisét determinisztikus paraméterváltozás feltételezésével fogadhatjuk el. A paraméterértékek alapján megállapíthatjuk, hogy a megfigyelési időszakban (1961–85) a fogyasztási függvény válaszparamétereiben jelentős, tartós eltolódás mutatható ki. Míg a fogyasztási szokások meghatározó ereje növekvő (a válaszparaméter 1961-ben 0.1576 volt, 1985-ben 0.6427), a reáljövedelem változása azonban egyre csökkenő fogyasztási volumenváltozást von maga után (1961-ben 0.8186, 1985-ben 0.3458 a válaszparaméter). Érdekes lehet a továbbiakban a kapott számszerű eredmények összehasonlítása a Singh által készített nemzetközi eredményekkel. Ehhez azonban szükséges lenne a fenti eredmények ellenőrzése különböző módszerekkel készített számításokkal.

3.2. Az üzembehelyezett beruházások változó paraméterű, osztott késleltetésű modellje

A beruházási folyamat időbeli lefutását külöböző megközelítésű elméleti és empirikus modellekkel vizsgálták: AUGUSZTINOVICS *et. al.* (1979), KORNAI (1982), LACKÓ (1980), TARJÁN–TÉNYI (1977), TARJÁN (1985). Ezek a modellek alapvetően két csoportra oszthatók aszerint, hogy a beruházási akciókat az indítás, vagy a befejezés éve szerint aggregálva kezelik a beruházások megvalósulási folyamatának leírására. (Ezt a megközelítésbeli különbséget tárgyalja AUGUSZTINOVICS *et. al.*, 1979.) A megvalósulási folyamatot jellemző paramétereket, így a beruházások megvalósulási koncentráltságát — amely azt mutatja meg, hogy az egy adott évben üzembe helyezett beruházások értéke hogyan oszlik meg az adott év és a megelőző évek beruházási ráfordításaira — adott paraméterként kezelik. A koncentráltság vizsgálatát azért tartjuk fontosnak, mert az alakulásában kimutatható tendenciák feltárhatják a beruházási folyamat belső feszültségeit, s ezáltal a felhalmozás és növekedés összefüggései megbízhatóbban számszerűsíthetők. A termelő kapacitásokat az üzembehelyezések növelik. A koncentráltság változása azért meghatározó, mivel növekvő beruházási teljesítés mellett sem várható jelentős termelés növekedés, ha a beruházások üzembe helyezése elnyúlik. A beruházások szétforgácsoltságának növekedése, az anyagi–műszaki összetétel, az ágazati szerkezet változása, a kivitelezési kapacitások alakulása meghatározóak az átlagos megvalósulási idő, a befektetések hatékonysága tekintetében.

Megközelítésünk abban különbözik az előzőekben említett modellektől, hogy a koncentráltság alakulását nem kivülről adott exogén paraméterként kezeljük, hanem a modell becsült, változó paraméterei alapján származtatjuk.

Egy adott évi üzembe helyezés ($u(t)$) felírható a beruházási ráfordítások egyidejű és késleltetett értékeinek függvényében.

$$u(t) = \alpha_0(t)i(t) + \alpha_1(t)i(t-1) + \ldots + \alpha_K(t)i(t-K) =$$

$$= \sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t)i(t-k), \quad t = 1, \ldots T, \tag{27}$$

ahol $i(t-k)$ a $(t-k)$-adik évi beruházási teljesítés,
$\alpha_k(t)$ a $(t-k)$ évi beruházási ráfordításból a t évben üzembe helyezett rész (üzembe helyezési együttható).

Látható, hogy ebben a modellben az üzembe helyezés, azaz a befejezés éve szerint kapcsoljuk össze a beruházási projektumokat $(u(t))$, míg az $i(t-k)$-k a kezdés és befejezés éve szerint különböző projektumokra való $(t-k)$-adik évi ráfordításokat jelentik.[6] Feltételezzük, hogy az $\alpha(t)$ paraméterek időben változóak, s alakulásuk modellezhető. Egy adott évi üzembe helyezés két részből tevődik össze: az adott évben beruházott és azonnal üzembe helyezett, valamint az előző években teljesített beruházásokhoz kapcsolódó, azok üzembe helyezését eredményező ráfordításokból. Ennek leírására fel kell bontanunk az adott évi beruházási ráfordítások üzembe helyezési koefficiensét, $\alpha_0(t)$-t. Ezért: (27)-et átírjuk az

$$u(t) = c(t) + \sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t) i(t-k) \tag{28}$$

alakra, ahol a későbbi felírások egyszerűsége kedvéért az $\alpha_0(t)$ jelölést megtartottuk az előző évek beruházásaihoz kapcsolódó t-beli üzembe helyezési koefficiens jelölésére, $c_0(t)$ pedig az adott évben azonnal üzembe helyezett beruházások koefficiense $(c_0(t) = c(t)/i(t))$.

A (28) alapmodellből a beruházási folyamat lefutásának további jellemzői is származtathatók. Az egy adott évi beruházási ráfordításból az új beruházások indítására fordított részt adja meg az $(1 - c_0(t) - \alpha_0(t))$ paraméter. A (28) egyenlet jobboldalát $u(t)$-vel végigosztva megkapjuk a különböző évek üzembe helyezéseihez tartozó koncentráltsági mutatókat.

A változó paraméterű (28) modell becsülhetőségéhez további feltevések szükségesek. Itt valójában végtelen sok specifikációs változatra van lehetőség, a késleltetés formájától, hosszától és a paraméterek változására vonatkozó feltevésektől függően. A továbbiakban a polinomiális osztott késésű specifikációt mutatjuk be, mivel a későbbi eredményeket ennek alkalmazásával kaptuk.

Feltételezzük, hogy az $\alpha(t)$ paraméterek $(M-1)$-ed fokú polinomon helyezkednek el (Almon módszere lásd pl. JUDGE *et. al.*, 1983). Ekkor

$$\underset{(K\times 1)}{\alpha(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_K(t) \end{pmatrix} = \underset{(K\times M)}{H} \cdot \underset{(M\times 1)}{\beta(t)}, \tag{29}$$

ahol $H = [h_1, \ldots, h_M]$ a polinomot meghatározó mátrix,
$\beta(t)$ a polinomiális osztott késésű modell paramétervektora.

[6] Valójában a (27) modellre teljesülnie kell, hogy $\sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t+k) = 1$, de ez $(T-K)$ további feltétel érvényesítését jelentette volna a becslésnél, amely szabadságfok problémát okozott volna, ezért a becslés után vizsgáltuk a fenti feltétel teljesülését.

Számításainkat lineáris és másodfokú polinom feltételezésével (végpontkorlátozás mellett) végeztük. Ekkor:

$$u(t) = c(t) + i_0(t)\beta_0(t) + i_1(t)\beta_1(t)\,, \tag{30}$$

ahol $i_0(t) = h'_1 i_K(t)$

$$i_1(t) = h'_2 i_K(t)$$

$$i'_K(t) = \{i(t), i(t-1), \dots, i(t-K)\}.$$

Lineáris esetben a beruházásra egyre növekvő a „költségrárakódás", a másodfokú polinom pedig elvileg lehetővé teszi, hogy a koncentráció az üzembe helyezést megelőző években érje el a maximumát.

A β és c_0 paramétereket valószínűségi változónak tekintjük és feltételezzük, hogy az alábbiak szerint alakulnak:

$$\begin{aligned}
\beta_0(t) &= \bar{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{N} \gamma_{0n} x_n(t) + \mu_0(t) \\
\beta_1(t) &= \bar{\beta}_1 + \sum_{l=1}^{L} \gamma_{1l} v_l(t) + \mu_1(t) \\
c(t) &= \bar{c} + \mu_2(t)\,,
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\text{és} \quad E(\mu) = 0, \quad E(\mu_t \mu'_s) = \begin{cases} \sum & \text{ha} \quad t = s\,, \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq s\,, \end{cases}$$

$x(t)$ és $v(t)$ pedig olyan exogén változók, amelyeket fontosnak tartunk a beruházási folyamat időbeli „lefutása" szempontjából.

Behelyettesítve (31)-t (28)-ba:

$$u(t) = \bar{c} + i_0(t)\bar{\beta}_0 + i_1(t)\bar{\beta}_1 + z_0^{*'}(t)\gamma_0 + z_1^{*'}(t)\gamma_1 + e(t)\,, \tag{32}$$

ahol

$$z_0^*(t) = \{x_1(t)i_0(t), \dots, x_N(t)i_0(t)\}$$

$$z_1^*(t) = \{v_1(t)i_1(t), \dots, v_L(t)i_1(t)\}$$

$$\gamma'_0 = \{\gamma_{01}, \dots, \gamma_{1N}\} \qquad \gamma'_1 = \{\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1L}\}\,.$$

$$e(t) = \mu_2(t) + i_0(t)\mu_0(t) + i_1(t)\mu_1(t)\,. \tag{33}$$

Mátrixformába átírva:

$$u = Z\beta + e\,, \tag{34}$$

ahol $Z = [1, i_0, i_1, Z_0^*, Z_1^*]$ $\quad T \times (N + L + 3)$ méretű mátrix

$$Z_0^* = \begin{pmatrix} Z_0^*(1) \\ \vdots \\ z_0^*(T) \end{pmatrix} \qquad Z_1^* = \begin{pmatrix} z_1^*(1) \\ \vdots \\ z_1^*(T) \end{pmatrix}$$

és $\beta' = (\bar{c}, \bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_0', \gamma_1')$ $(N+L+3)\times 1$-es paramétervektor, ahol $N+L+3 < T$.

A μ véletlen változókra tett (31) feltevésekből következik, hogy $E(e) = 0$ és $E(ee') = \Phi$, ahol $\Phi =< \varphi_1^2 \ldots \varphi_T^2 >$ és $\varphi_t^2 = i^{*'}(t)\Sigma i^*(t)$, $i^*(t) = \{1, i_0(t), i_1(t)\}$, tehát a (34) modell heteroszkedasztikus, megfeleltethető a (12) elméleti modellnek, és becslése az előző pontban ismertetett eljárással elvégezhető.

A következőkben a (28) modell alapján a népgazdaság összes beruházására, valamint az ipar és a mezőgazdaság üzembe helyezett beruházásaira készített számításainkat mutatjuk be. Modellünk tehát az egy adott évben befejeződő, üzembe helyezett beruházásokat kapcsolja össze, s ezeket az adott év és a megelőző évek beruházási ráfordításaiból származtatja. Az üzembe helyezett beruházásokra és a beruházási ráfordításokra Ács (1986) kiadványából származó, 1981 évi áron számított milliárd forintban mért volumenadatokat használtunk az 1960–85-ös időszakra. $K = 3$, azaz 4 éves átfutási idővel számoltunk. Egyenletenként sokféle variánssal kísérleteztünk. Az osztott késésekre a másodfokú polinom feltételezése mellett készített becslések megbízhatóságát a nagyfokú multikollinearitás miatt nem tartottuk kielégítőnek. Így az alább bemutatandó eredmények lineáris osztott késés feltételezésével adódtak. A paraméterek változásának magyarázatára különböző változókkal kísérleteztünk (pl. kapacitáskihasználtsági, importkorlátozást megjelenítő változók, anyagi–műszaki, valamint ágazati összetétel jellemzői stb.). Végül egy viszonylag egyszerű, a beruházási folyamat belső feszültségeinek feltárása szempontjából talán nem a legérdekesebb változatot fogadtunk el, mivel ennek a statisztikai jellemzői voltak a legkedvezőbbek. Ebben a változatban a beruházási ráfordítások osztott késésének paraméterét két magyarázó tényező függvényében becsültük. Ezek: az építőipari termelés volumenének trendtől való eltérése (QEP) és az egységnyi beruházásra eső befejezetlen állomány átlagtól való eltérésének két évvel késleltetett értéke (BEF). Feltételezésünk szerint mindkét változó paraméterének pozitív előjelűnek kell lennie. Ugyanis, ha az építőipari termelés volumene az átlagosnál jobban nő, akkor feltehetően csökken az épületberuházások kivitelezési ideje, s így nőnek az üzembe helyezések. A befejezetlen állomány súlyának növekedése előbb-utóbb — a modellben 1–1,5 éves késéssel — kiváltja az üzembe helyezések növekedését.

Az *1. táblázatban* bemutatjuk a népgazdaság, az ipar és a mezőgazdaság üzembe helyezéseire vonatkozó eredményeinket. Összehasonlítási alapul a *2. táblázatban* közöljük a megfelelő konstans paraméterű osztott késésű modell becslési jellemzőit.

Az *1. táblázat* a (34)-es modell egyszerű legkisebb négyzetek (OLS) módszerével készített becslési jellemzőit tartalmazza. Elméleti feltevéseink alapján a modell korrekt becslését a 2. pontban bemutatott eljárásokkal végezhetjük el.

1. táblázat

A változó paraméterű becslés eredményei

Üzembe helyezett beruházás	$\bar{c}$	Beruházási ráfordítás ($\bar{\beta}_0$)	Építőipari kapacitás (γ_{01})	Befejezetlen áll. késleltetve (γ_{02})	R^2	DW	RE
Népgazdaság összesen (NG)	22.87 (4.93)	0.3350 (28.44)	0.0221 (3.11)	0.2462 (4.60)	0.9964	2.2721	2.5 %
Ipar (IP)	4.13	0.3539	0.0430	0.2457	0.9671	2.6239	9.7 %
Mezőgazdaság (MG)	4.07 (4.34)	0.3304 (19.23)	0.0217 (2.79)	0.0901 (2.45)	0.9820	2.0421	4.8 %

2. táblázat

A konstans paraméterű becslés eredményei

Üzembe helyezés	c	Beruházás ($\bar{\beta}_0$)	R^2	DW	RE
Népgazdaság összesen (NG)	5.43 (1.11)	0.3759 (31.38)	0.9781	1.9241	5.0 %
Ipar (IP)	1.40	0.3765	0.8702	2.1061	12.6 %
Mezőgazdaság (MG)	2.30 (1.98)	0.3634 (19.04)	0.9426	1.2957	6.3 %

A lehetséges becslési módszerek közül — a számítógépes lehetőségek korlátozottsága miatt — csupán a H–H módszerrel való becslést készítettük el. A Σ kovarianciamátrix elemeire H–H módszerrel (19) alapján kapott becsléseink rossz illeszkedése és a $\widehat{\sigma}$ paraméterek inszignifikanciája arra utal, hogy empirikus modellünkre nem helytálló a (33)-ban megadott hibaspecifikáció. Az így kapott eredmények megerősítették az OLS módszerrel készített becslések reziduumainak CUSUMQ teszttel végzett vizsgálata alapján tett feltételezésünket, hogy a (34)-nek megfelelő empirikus modellek nem heteroszkedasztikusak, és így H–H módszerrel nem adható modellünkre az OLS becslésnél jobb statisztikai jellemzőkkel rendelkező GLS becslés. Sajnos a σ paraméterek módosított H–H eljárással és ML módszerrel való becslését számítástechnikai nehézségek miatt nem tudtuk elkészíteni, s mivel a H–H módszerrel készített fenti becsléseknél minduntalan felmerül a paraméterekre vonatkozó nem–negativitási követelmény érvényesítésének gondja (lásd 2. pont), ezeket az eredményeket csak fenntartással fogadhatjuk el. (Ez nem változtat azon a megállapításunkon, hogy ha a paraméterek becslésére alkalmazott eljárás minden szempontból kielégítő lett volna, akkor is feltehetően azt az eredményt kapjuk, hogy empirikus modellünkre az OLS módszerrel megfelelő tulajdonságú becslés adható.)

A továbbiakban bemutatjuk az *1. táblázatban* megadott becslésekhez tartozó változó paramétereket és az azokból származtatható koncentráltsági mutatókat.

A (27)-es modellnek megfelelő $\hat{\alpha}_i$ $(i = 0,\ldots,3)$ becsült üzembe helyezési paramétereket[7] a 3–5. táblázatok tartalmazzák. A becsült α_i paraméterek alakulását összevetve a beruházási volumen és az üzembe helyezések növekedési ütemeivel megállapítható, hogy $\hat{\alpha}_0$ (az adott évben üzembe helyezett részarány) csökken, vagy stagnál, amikor a beruházások növekedési üteme a legnagyobb ('67, '74, '77, '82) és nő, amikor a növekedési ütem csökken. A volumen növekedésével az adott évi üzembe helyezési részarány csökken, a beruházások szétforgácsoltsága nő. A paraméterek alakulása az iparban a legváltozékonyabb a vizsgált függvények közül. A „csúcsokon" — attól függően, hogy az ipar részesedése nőtt–e az összberuházáson belül — $\hat{\alpha}_0$ csökken ('67, '77), vagy nő (1970, '74, '82). $\hat{\alpha}_0$ értéke az iparban mindvégig alacsonyabb, a mezőgazdaságban pedig magasabb, mint az összes népgazdasági üzembe helyezés esetén.

A számszerűsített modellben 4 éves beruházási átfutási idővel számoltunk. Az $\hat{\alpha}$ paraméterekre explicit módon nem érvényesítettük, hogy egy adott év beruházási ráfordításaihoz tartozó paraméterek együtthatóinak összege 1 legyen, viszont utólag vizsgáltuk ennek a feltételnek a teljesülését (lásd *6. táblázat*) és azt találtuk, hogy a mezőgazdaság esetében valószínűleg kevesebb késleltetéssel kellett volna számolni, az összes beruházás és az ipar esetén viszont több év figyelembe vétele is indokolt lett volna.

Kiszámítottuk az üzembe helyezésekhez tartozó koncentráltsági mutatókat U_i $(i = 0,\ldots,3)$, amelyek megmutatják, hogy — az adott feltételezések mellett — az üzembe helyezés éve szerint összekapcsolt beruházások ráfordítási szerkezete hogyan oszlik meg az adott év és a megelőző évek között (lásd *7–9. táblázat*, $\sum_{i=0}^{3} U_i = 1$). Az U_i mutatók alapján látható, hogy a megfigyelési időszak egészét tekintve az üzembe helyezett beruházások csökkenő hányadát teljesítik az üzembe helyezés évében. Ez a hányad az iparban alacsonyabb, a mezőgazdaságban magasabb, mint a népgazdaság egészére számított érték. A beruházási ráfordítások növekedési ütemének csökkenésekor az üzembe helyezéseken belül megnő az előző évek ráfordításaiból származó rész ('65, '72, '80). Amikor a beruházási ráfordítások növekednek, akkor az üzembe helyezéseken belül nő a nem áthúzódó beruházások aránya (gép, import) ('67, '70, '77, '82). A beruházási volumen növekedésének csökkenése az előző években elkezdett beruházások befejezését gyorsítja (U1, U2, U3 nő), s így az üzembe helyezési csúcs kb. 1 évvel követi a beruházási csúcsot. Ezek a tendenciák az ipar esetében rajzolódnak ki leginkább.

[7] Az $\hat{\alpha}_0$ értékek a (27)-es modell felírásának megfelelő becsléseket jelentik.

3. táblázat
A becsült üzembe helyezési paraméterek
Népgazdaság összesen

Év	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
1963	0.59176	0.21576	0.14384	0.07192
1964	0.57241	0.21520	0.14346	0.07173
1965	0.55793	0.20645	0.13764	0.06882
1966	0.53637	0.21023	0.14015	0.07008
1967	0.50543	0.21819	0.14546	0.07273
1968	0.50903	0.22327	0.14885	0.07442
1969	0.49293	0.22299	0.14866	0.07433
1970	0.49499	0.24642	0.16428	0.08214
1971	0.47383	0.24415	0.16277	0.08138
1972	0.46618	0.23589	0.15726	0.07863
1973	0.47473	0.24583	0.16388	0.08194
1974	0.47108	0.25514	0.17009	0.08505
1975	0.49519	0.28262	0.16841	0.09421
1976	0.46507	0.26017	0.17345	0.08672
1977	0.43187	0.24491	0.16327	0.08164
1978	0.43552	0.25126	0.16750	0.08375
1979	0.43853	0.25410	0.16940	0.08470
1980	0.44779	0.25645	0.17096	0.08548
1981	0.45725	0.25993	0.17329	0.08664
1982	0.43209	0.23975	0.15983	0.07992
1983	0.47630	0.26990	0.17994	0.08997
1984	0.48220	0.27100	0.18067	0.09033
1985	0.45452	0.24739	0.16493	0.08246

4. táblázat
A becsült üzembe helyezési paraméterek
Ipar

Év	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
1963	0.52385	0.25187	0.16792	0.08396
1964	0.49648	0.25095	0.16730	0.08365
1965	0.44394	0.21784	0.14522	0.07261
1966	0.46745	0.23948	0.15965	0.07983
1967	0.45018	0.23973	0.15982	0.07991
1968	0.45223	0.25458	0.16972	0.08486
1969	0.45093	0.25209	0.16806	0.08403
1970	0.48591	0.27949	0.18633	0.09316
1971	0.44421	0.26112	0.17408	0.08704
1972	0.42578	0.25589	0.17060	0.08530
1973	0.42822	0.25252	0.16834	0.08417
1974	0.44348	0.26681	0.17787	0.08894
1975	0.45634	0.28200	0.16800	0.09400
1976	0.45646	0.29314	0.19543	0.09771
1977	0.38793	0.24577	0.16385	0.08192
1978	0.41034	0.26684	0.17789	0.08895
1979	0.41522	0.27035	0.18023	0.09012
1980	0.40245	0.25825	0.17216	0.08608
1981	0.40396	0.25629	0.17080	0.08543
1982	0.44200	0.26381	0.18921	0.09460
1983	0.45710	0.29343	0.19562	0.09781
1984	0.46342	0.29686	0.19790	0.09895
1985	0.39679	0.24531	0.16354	0.08177

5. *táblázat*

A becsült üzembe helyezési paraméterek

Mezőgazdaság

Év	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
1963	0.64751	0.21576	0.14384	0.07192
1964	0.60039	0.21959	0.14639	0.07320
1965	0.60936	0.21791	0.14528	0.07264
1966	0.61743	0.21879	0.14586	0.07293
1967	0.60453	0.22265	0.14844	0.07422
1968	0.50528	0.22081	0.14720	0.07560
1969	0.48678	0.22286	0.14858	0.07429
1970	0.51298	0.25608	0.17072	0.08536
1971	0.51679	0.26018	0.17345	0.08673
1972	0.51726	0.25976	0.17318	0.08659
1973	0.53267	0.26875	0.17916	0.08958
1974	0.52032	0.26778	0.17852	0.08926
1975	0.49115	0.25426	0.16951	0.08475
1976	0.49056	0.25463	0.16976	0.08488
1977	0.49565	0.25558	0.17o39	0.08519
1978	0.47317	0.25701	0.17134	0.08567
1979	0.46885	0.25514	0.17010	0.08505
1980	0.47198	0.25087	0.16725	0.08362
1981	0.46126	0.25048	0.16699	0.08349
1982	0.46625	0.25207	0.16805	0.08402
1983	0.47762	0.24609	0.16406	0.08203
1984	0.48785	0.23908	0.15939	0.07969
1985	0.49285	0.22949	0.15299	0.07650

6. táblázat
A t-edik évi beruházási ráfordításhoz tartozó üzembe helyezési paraméterek összege
$(\Sigma_{k=0}^{3}\alpha_k(t+k))$

Év(t)	Népgazdaság összesen	Ipar	Mezőgazdaság
1963	1.01467	0.99985	1.08530
1964	0.99174	0.95388	1.03839
1965	0.98804	0.92810	1.05020
1966	0.97774	0.96093	1.06158
1967	0.95951	0.96599	1.05927
1968	0.97769	0.97769	0.98559
1969	0.98076	0.98980	1.00290
1970	0.97837	1.00180	1.03592
1971	0.95865	0.95739	1.04498
1972	0.97628	0.95015	1.04929
1973	1.00500	0.98074	1.05484
1974	1.00878	1.00238	1.02953
1975	1.00238	1.00228	1.00184
1976	0.96218	0.97025	1.00253
1977	0.93801	0.92108	1.00637
1978	0.93723	0.93828	0.97905
1979	0.94817	0.93892	0.97073
1980	0.95752	0.94575	0.97254
1981	0.96727	0.98236	0.95708
1982	0.96513	1.01510	0.94823

7. táblázat
A becsült koncentráltsági mutatók
Népgazdaság összesen

Év	U0	U1	U2	U3
1963	0.61878	0.19921	0.12001	0.06200
1964	0.60438	0.21332	0.12557	0.05673
1965	0.58930	0.21591	0.13513	0.05966
1966	0.58842	0.20893	0.13791	0.06474
1967	0.59236	0.21422	0.12938	0.06405
1968	0.56092	0.24239	0.13537	0.06132
1969	0.55282	0.23147	0.15203	0.06368
1970	0.55137	0.23354	0.14411	0.07099
1971	0.54346	0.24952	0.14153	0.06550
1972	0.51136	0.26460	0.15718	0.06636
1973	0.50091	0.25138	0.17137	0.07635
1974	0.51192	0.24695	0.15955	0.08158
1975	0.50735	0.26134	0.15547	0.07534
1976	0.48894	0.27310	0.16403	0.07332
1977	0.50151	0.25348	0.16873	0.07628
1978	0.48996	0.26974	0.16028	0.08002
1979	0.47537	0.27329	0.17388	0.07748
1980	0.45414	0.27610	0.16262	0.08714
1981	0.44972	0.26728	0.16916	0.09384
1982	0.46191	0.26033	0.18145	0.09631
1983	0.45620	0.26773	0.18129	0.09477
1984	0.45646	0.26630	0.18388	0.09338
1985	0.46487	0.26099	0.18062	0.09353

8. táblázat

A becsült koncentráltsági mutatók

Ipar

Év	U0	U1	U2	U3
1963	0.53432	0.24659	0.14514	0.07394
1964	0.52924	0.24489	0.15670	0.06917
1965	0.51710	0.25373	0.15485	0.07432
1966	0.52851	0.23911	0.15941	0.07296
1967	0.55033	0.23879	0.14059	0.07029
1968	0.49506	0.28319	0.15383	0.06792
1969	0.48916	0.26151	0.17715	0.07217
1970	0.49431	0.25781	0.16436	0.08351
1971	0.50285	0.28255	0.15871	0.07589
1972	0.46949	0.28513	0.16883	0.07655
1973	0.45593	0.27578	0.18578	0.08250
1974	0.48181	0.25535	0.17462	0.08822
1975	0.47963	0.27555	0.16182	0.08300
1976	0.47707	0.27627	0.17123	0.07542
1977	0.50598	0.26269	0.15792	0.07341
1978	0.46938	0.29600	0.16171	0.07291
1979	0.43507	0.29556	0.19108	0.07829
1980	0.40296	0.29370	0.20429	0.09906
1981	0.40973	0.27426	0.28767	0.10834
1982	0.42740	0.27229	0.19153	0.10877
1983	0.42320	0.26691	0.18978	0.10012
1984	0.42493	0.28006	0.19718	0.09782
1985	0.43543	0.27565	0.18907	0.09964

9. táblázat
A becsült koncentráltsági mutatók
Mezőgazdaság

Év	U0	U1	U2	U3
1963	0.65641	0.18663	0.10388	0.05308
1964	0.62330	0.21018	0.11748	0.04904
1965	0.57742	0.22570	0.13873	0.05816
1966	0.59386	0.19671	0.14334	0.06608
1967	0.61285	0.19715	0.12286	0.06714
1968	0.60486	0.21308	0.12407	0.05799
1969	0.59332	0.22949	0.12533	0.05386
1970	0.57308	0.23814	0.13412	0.05406
1971	0.51709	0.27001	0.14968	0.06323
1972	0.46569	0.27000	0.18669	0.07762
1973	0.48593	0.25705	0.18243	0.09461
1974	0.52818	0.23397	0.15080	0.08705
1975	0.52451	0.25685	0.14739	0.07125
1976	0.48023	0.27327	0.17233	0.07417
1977	0.50504	0.23836	0.17421	0.08240
1978	0.51206	0.25091	0.15310	0.08392
1979	0.48855	0.27253	0.16391	0.07501
1980	0.45241	0.27494	0.18789	0.08475
1981	0.48403	0.23966	0.18268	0.09303
1982	0.48775	0.26198	0.15924	0.09104
1983	0.45761	0.27612	0.18289	0.08338
1984	0.45357	0.25198	0.19673	0.09773
1985	0.47092	0.24068	0.18189	0.10651

Mindaz, amit a modell eredményei kapcsán leírtunk esetleg trivialitásnak tűnik, de a modell megbízhatósága a valós folyamatokkal való összehasonlítás alapján ítélhető csak meg. Ami e téren eddig történt az valóban kevés, hiszen eddig nem tudtunk még sort keríteni pl. a modellből származtatott mutatók és statisztikai megfelelőjük (ha létezik) összehasonlítására. Ezért az értékeléskor a modellből kapott becslések tükrözte tendenciákra és nem magukra a konkrét számokra helyeztük a hangsúlyt.

A tapasztalatok alapján megállapíthatjuk, hogy a paraméterek stabilitásának vizsgálata valószínűleg sok esetben hasznosan beleilleszkedhetne az ökonometriai eszköztárba. Az 1980-as évek elején a gazdasági fejlődés főbb jellemzőiben olyan változások, törekvések következtek be, amelyeket hosszabb időszak adataira épülő, konstans paraméterű modellek egyáltalán nem, vagy csak kevéssé tudnak leírni. A folyamatok dinamikus összefüggéseinek vizsgálatánál ezért fontos a változó paraméterű modellek számszerűsítésével próbálkozni.

A hatékony alkalmazásnak jelenleg elsősorban számítástechnikai korlátai vannak. A különböző változó paraméterű alapmodellek becslésére a rendelkezésre álló programcsomagok felhasználásával alakíthatók ki célprogramok. Az összefüggések változására vonatkozó — közgazdasági megfontolások alapján kialakított — *a priori* elképzeléseink azonban nem biztos, hogy helytállóak. Abból, hogy a változó paraméterű modell kiválasztott típusát nem sikerült az adatokból verifikálni, nem következik, hogy a változó paraméterű modell hipotézise hibás. A modellválasztás akkor válna igazán megalapozottá, ha különböző változó paraméterű modellek becslését, tesztelését nem egyedi célprogramokkal, hanem opciókkal vezérelhető, sztenderd programokkal lehetne elvégezni.

(Beérkezett: 1988. május 21-én.)

Irodalom

AUGUSZTINOVICS M. (szerk.) (1979) *Népgazdasági modellek a hosszú távú tervezésben*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

CHOW, G.C. (1983) *Econometrics*, McGraw Hill, New York.

DENT, T.W.–C. HILDRETH (1977) Maximum Likelihood Estimation in Random Coefficient Model, *Journal of the American Statistical Association* (JASA), VOL 72, 69–72.

GALEAZZI, G. (1985) International Differences in Comparative Price Levels and Exchange Rates, *Rivista di Politica Economica*, Suppl. to XII., 3–41.li

GRIFFITHS, W.E. (1972) Estimation of Actual Response Coefficients in the Hildreth-Houck Random Coefficient Model, *JASA*, VOL 67, 633–635.

HARVEY, A.C. (1981) *Time Series Analysis*, Philip Alan, London.

HILDRETH, C.–J.P. HOUCK (1968) Estimation for a Linear Model with Random Coefficients, *JASA*, VOL 63, 584–595.

JUDGE, G.G.–W.E. GRIFFITHS–R.C. HILL–T.CH. LEE (1980) *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York.

JUDGE, G.G.–R.C. HILL–W. GRIFFITHS–H. LÜTKEPHOHL–T.CH. LEE (1983) *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York.

KORNAI J. (1982) *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

KMENTA, J. (1986) *Elements of Econometrics*, Macmillan, New York–London.

LACKÓ M. (1980) Feszültségek felhalmozása és leépítése, *Közgazdasági Szemle*, 27. 7–8, 923–940.

MADDALA, G.S. (1977) *Econometrics*, McGraw Hill, New York.

MÁTYÁS L. (1986) A panelmodellek becslése, *SZIGMA*, 19. 325–339.

QUANDT, R.E. (1960) Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes, *JASA* 55, 324–330.

ROSENBERG, B. (1973) Random coefficient models. The Analysis of a Cross Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression, *Annals of Economic and Social Measurement*, VOL 2, 399–428.

SINGH, B.–A.L. NAGAR–N.K. CHOUDRY–B. RAJ (1976) On the Estimation of Structural Change: a Generalisation of the Random Coefficients Regression Model, *International Economic Review*, VOL 17, 340–360.

TARJÁN T.–TÉNYI GY. (1977) Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére, *SZIGMA*, 10, 11–24.

TARJÁN T. (1985) Orrnehéz és farnehéz beruházási megoszlások, *SZIGMA*, 18, 137–147.

THEIL, H. (1979) *Principles of Econometrics*, North –Holland, Amsterdam.

ZAREMBKA, P. ed. (1974) *Frontiers in Econometrics*, Academic Press, New York–London.

ÁCS M. (1986) *A népgazdasági fejlődés összefoglaló mutatóinak 1981. évi árszinten egységesített idősorai 1950–85.* OT IMI.

Application Possibilities of Models with Time-Variant Parameters

The article first surveys the different types of models with time-variant parameters which enable the study of some problems of structural changes of the economy. Then the theoretical characteristics and estimation methods of models are reviewed which describe the parameter changes as functions of exogeneous variables. Among the methods the procedure based on the generalized least squares, originally proposed by *C. Hildreth* and *J.P. Houck*, is selected.

In the concluding part of the article the author illustrates the applicability of the reviewed models by presenting her empirical results. In the model of household consumption she analyses the hypothesis of parameters shifting according to a linear trend, while in the model of investments put into operation she constructs the estimates with parameters changing as a function of exogeneous variables within a distributed lag model.