Szigma, XX. (1987-88) 4. sz.

DOBOS IMRE

A nyílt, dinamikus Leontief-modell szingularitási problémája[1]

1. Bevezetés

A Leontief-féle dinamikus input-output modell a termelés és a termelő felhasználás kapcsolatát az

$$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + d(t) \tag{1}$$

elsőrendű differenciaegyenlet-rendszerrel írja le, ahol $x(t)$ a bruttó kibocsátások, $d(t)$ a (beruházás nélküli) végső felhasználás n-dimenziós nemnegatív vektora, A a folyó ráfordítások, B a tőkelekötési koefficiensek nemnegatív $n \times n$-es mátrixa. Az A és B mátrixok időben állandóak. Az (1) rendszert a $t = 0, 1, \ldots, T-1$ időperiódusban vizsgálva a végső felhasználások egy meghatározott halmazán a teljes kibocsátások idősorát az $\{x(t)\}_{t=0}^{T}$ megoldást az (1) egyenletrendszer trajektóriájának nevezzük.

A Leontief-modell trajektóriája rekurzívan kifejezhető, ha a B-mátrix nemszinguláris, vagyis invertálható. A B tőkelekötési mátrix azonban az esetek nagy részében nem invertálható. A B-mátrix értelmezésénél két egymástól eltérő felfogást különböztethetünk meg. Az első ([1], [4], [5], [6]) a tőkelekötések mátrixát *beruházási* mátrixnak tekinti. Ez esetben a gazdaságban lesznek olyan szektorok, amelyek nem állítanak elő beruházási javakat, vagyis a beruházási mátrixnak lesznek 0 elemekből álló sorvektorai. A másik értelmezés esetén ([2]) a B mátrix az egységnyi termelésnövekedéshez szükséges *készletlekötést* jelzi, tehát készletmátrixnak nevezhetjük. A B mátrixnak ez utóbbi értélmezése nyilván bővebb, mintha beruházási mátrixnak tekintenénk, azonban most sem zárható ki, hogy a B mátrix szinguláris legyen.

A szinguláris tőkemátrixú Leontief-modelleket más-más szerzők külöböző pótlólagos feltételek bevezetésével teszik rekurzívvá. Írásomban ezen eljárásokat tekintem át, és bizonyítom, hogy az említett írásokban felhasznált látszólag külöböző feltételek ekvivalensek. Az általam használt megközelítés a mátrixseregek kanonikus alakjára támszkodva alkalmat ad arra is, hogy az input-output modell irányítási problémáit közvetlen módon tárgyaljam. Mindkét kérdés (rekurzívvá tétel és irányíthatóság) tárgyalásához a reguláris mátrixseregek elméletét használom fel.

---

[1] A cikk az MTA-Soros Alapítvány által támogatott, 1986. május 25-27. között Sopronban megrendezett II. Fiatal Matematikus-közgazdászok Találkozóján elhangzott előadás alapján készült.

Definició: A C és D kvadratikus mátrixok reguláris mátrixsereget határoznak meg, ha létezik olyan λ valós szám, hogy a $\lambda C + D$ mátrix nemszinguláris.

A vizsgált modell esetében ez annyit jelent, hogy ha az A folyó ráfordítási mátrixnak létezik Leontief-inverze, akkor a dinamikus input-output modell B és $(E - A + B)$ mátrixai reguláris mátrixsereget határoznak meg. Ugyanis a

$$\lambda B - (E - A + B) = (\lambda - 1)B - (E - A)$$

azonosságból következik, hogy ha a $\lambda = 1$ teljesül, akkor a Leontief-féle inverz létezése miatt említett mátrixaink valóban reguláris mátrixsereget határoznak meg.

E fogalom segítségével rekurzívvá téve az (1) modellt, az így adódó trajektóriáról megmutatjuk, hogy az input-output modell teljesen vezérelhető, ha a felhasználások vektorait vesszük szabályozó változóknak.

2. A Leontief-modell $\{B, (E - A + B)\}$ mátrixainak kanonikus alakja

A bevezetésben megmutattuk, hogy a Leontief-modell B és $(E - A + B)$ mátrixai reguláris mátrixsereget alkotnak. Ennek ismeretében meghatározzuk a rendszert mátrixainak általánosított sajátértékét és jobb-, illetve baloldali sajátvektorait. (Az átalakítások megegyeznek a [3]-ban és [8]-ban szereplőkkel).

Az első lépésben a $\lambda B - (E - A + B)$ alakból indulunk ki. Ezen mátrixon hajtunk végre néhány átalakítást:

$$\lambda B - (E - A + B) = (\lambda - 1)B - (E - A) = (E - A)[(\lambda - 1)(E - A)^{-1}B - E]. \quad (2)$$

Az (1) egyenlőségben az $(E - A)$ mátrixot azért emelhettük ki, mert a Leontief-modell A mátrixáról feltételezzük, hogy produktív, vagyis domináns sajátértéke 1-nél kisebb, tehát invertálható. Meg kell jegyeznünk, hogy az $(E - A)$ mátrixot jobbra is kiemelhettük volna, azonban ez a további átalakításokat nem befolyásolja.

A második lépésben az $(E - A)^{-1}B$ mátrix nulla és nemnulla sajátértékeit különítjük el hasonlósági transzformációval. Ezzel az (1)-et folytatva a következőket kapjuk:

$$(E-A)\left[(\lambda-1)(E-A)^{-1}B-E\right]=(E-A)U^{-1}\left[(\lambda-1)\begin{pmatrix} H_p-E & 0 \\ 0 & H_{n-p}-E \end{pmatrix}\right]U=$$

$$= (E - A)U^{-1}\begin{pmatrix} (\lambda - 1)H_p - E & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)H_{n-p} - E \end{pmatrix}U, \quad (3)$$

ahol a H_p mátrix a 0 sajátértékhez tartozó $p \times p$-s Jordan–blokkot, míg a H_{n-p} az $(E-A)^{-1}B$ mátrix nemnulla sajátértékeihez tartozó $(n-p) \times (n-p)$-s Jordan-blokkot jelöli. Az U mátrix az $(E-A)^{-1}B$ mátrix baloldali, az U^{-1} a jobboldali sajátvektorait tartalmazó hasonlósági transzformáció mátrixa és teljesül az

$$U(E-A)^{-1}BU^{-1} = \begin{pmatrix} H_p & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} \tag{4}$$

azonosság is.

A következő lépésben azt az észrevételt használjuk ki, hogy a $(H_p + E)$ és a H_{n-p} mátrixok nemszingulárisak, így invertálhatóak. Ezzel a megfigyeléssel a (2) azonosságot a

$$\begin{aligned} &(E-A)U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda H_p - (H_p+E) & 0 \\ 0 & \lambda H_{n-p} - (H_{n-p}+E) \end{pmatrix} U = \\ &= (E-A)U^{-1} \begin{pmatrix} H_p+E & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(H_p+E)^{-1}H_p - E & 0 \\ 0 & \lambda E - (E+H_{n-p}^{-1}) \end{pmatrix} U \end{aligned} \tag{5}$$

formában írhatjuk fel.

Az utolsó lépésben a $(H_p + E)^{-1}H_p$ maga is nilpotens mátrix, így

$$(H_p + E)^{-1}H_p = V_p \langle N_{\alpha_i} \rangle V_p^{-1} ,$$

ahol V_p az említett hasonlósági transzformáció, és $\langle N_{\alpha_i} \rangle$ olyan nilpotens mátrix, amelynek „átlóbeli" blokkjai N_{α_i} Jordan–féle mátrixok ($\Sigma_i \alpha_i = p$). Az $(E + H_{n-p}^{-1})$ mátrixot a V_{n-p} hasonlósági transzformációval az

$$(E + H_{n-p}^{-1}) = V_{n-p} < \langle \lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j} \rangle V_{n-p}^{-1}$$

alakra hozhatjuk, ahol $\langle \lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j} \rangle$ mátrix átlóbeli elemei a $\lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j}$ mátrixok ($\Sigma_j \beta_j = (n-p)$). Ennek ismeretében a (4) egyenlőséget írhatjuk

$$\begin{aligned} \lambda B - (E - A + B) = (E-A)U^{-1} &\begin{pmatrix} H_p + E & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_p & 0 \\ 0 & V_{n-p} \end{pmatrix} \times \\ \times &\begin{pmatrix} \langle \lambda N_{\alpha_i} - E_{\alpha_i} \rangle & 0 \\ 0 & \langle (\lambda - \lambda_j) E_{\beta_j} - N_{\beta_j} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_p^{-1} & 0 \\ 0 & V_{n-p}^{-1} \end{pmatrix} U \end{aligned} \tag{6}$$

alakban is. Ezzel sikerült a Leontief-modell $[B, (E-A+B)]$ mátrixait kanonikus alakra hoznunk.

Ha bevezetünk néhány új jelölést, akkor az (5) kifejezés áttekinthetőbbé válik:

$$P = (E-A)U^{-1}\begin{pmatrix} H_p + E & 0 \\ 0 & H_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_p & 0 \\ 0 & V_{n-p}\end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} V_p^{-1} & 0 \\ 0 & V_{n-p}^{-1}\end{pmatrix} U,$$

valamint

$$N = \langle N_{\alpha_i}\rangle,$$

$$\Lambda = \langle \lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j}\rangle.$$

Ekkor az (5) legegyszerűbb alakja a

$$\lambda B - (E-A+B) = P\left[\lambda\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}\right]Q \tag{7}$$

formává egyszerűsödik.

Az általánosított sajátértékeket a Λ mátrix diagonális elemei tartalmazzák, ugyanis ha $\lambda = \lambda_j$ helyettesítéssel élünk, akkor a $\lambda B-(E-A+B)$ mátrix szinguláris, így a

$$\{\lambda B - (E-A+B)\}x = 0 \tag{8}$$

általánosított sajátérték-feladatnak létezik megoldása. (Természetesen a P és Q mátrixaink nemszingulárisak, így a (7) egyenletrendszer megoldhatósága csak a (6) jobboldalán álló kifejezés középső mátrixától függ.)

A (6) és (7) kifejezések összevetéséből világossá válik, hogy a (7) sajátérték feladat megoldásainak száma nem lehet egyenlő a B és az $(E-A+B)$ kvadratikus mátrixok méretével, hanem annál kisebb. Ez azt jelenti, hogy a (7) egyenletrendszerből származtatott

$$(\lambda-1)(E-A)^{-1}Bx = x \tag{9}$$

sajátértékegyenletnek nem lehet n darab szokásosan az

$$\frac{1}{\lambda-1}x = (E-A)^{-1}Bx \tag{10}$$

egyenletből számított megoldása, hanem annál csak kevesebb. Ennek az a következménye, hogy a (7) sajátértékfeladat (9)-re történő redukálása csak hibával történhet, ugyanis a (9) egyenlet sajátvektorai a (2) azonosságban alkalmazott U és U^{-1} mátrixszal egyeznek meg.

Végül néhány olyan átalakítást teszünk, amelyekre a továbbiakban támaszkodunk. A (6)-ból következik:

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = P^{-1}BQ^{-1}, \quad \text{és} \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} = P^{-1}(E - A + B)Q^{-1}. \tag{12}$$

Tegyük fel, hogy ismerjük az N nilpotens mátrix nilpotenciafokát: $\tau = \min\{t | N^T = 0\}$.

3. A reguláris mátrixseregek segítségével nyert megoldás hatóköre

A Leontief-modell mátrixainak reguláris mátrixseregként történő értelmezésével a rendszer mátrixai kanonikus alakra hozhatók. Ennek segítségével a

$$\begin{aligned} &Bx(t+1) = (E - A + B)x(t) - d(t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \\ &x(0) \in \mathbf{R}_n^+ \end{aligned} \tag{13}$$

lineáris differenciaegyenlet-rendszer rekurzívvá tehető. Azt is megmutatjuk, hogy a B mátrix konkrét alakjától függetlenül mindig előállítható az $\{x(t)\}_{t=0}^T$ trajektória, amennyiben a végső felhasználások vektorait a $(T + \tau - 1)$ időperiódusban ismerjük, vagyis ha a $\{d(t)\}_{t=0}^{T+\tau-1}$ idősor adott. Kimutatom továbbá, hogy a τ érték az $(E - A)^{-1}B$ mátrix 0 sajátértékének minimálpolinombeli multiplicitása.

Végül néhány speciális esetet mutatok be. Először a végső felhasználást időben állandónak tekintem, vagyis feltételezem, hogy a $d(t) = d > 0$ egyenlőség teljesül a vizsgált $t = 0, \dots, T + \tau - 1$ időhorizonton. Majd egy olyan esetet vizsgálok, ahol a τ érték éppen eggyel egyenlő. Ebben az esetben megmutatom, hogy a dinamikus input-output modell tőkelekötési mátrixának beruházási mátrixként való értelmezése, és egy speciális regularitási feltétel felállítása szükséges a rekurzivitás biztosításához.

3.1. A differenciaegyenlet-rendszer megoldása

A (2) differenciaegyenlet-rendszer megoldásához a (11) és a (12) összefüggéseit fogjuk felhasználni. Ezzel a differenciaegyenlet-rendszer a következő formát veszi fel:

$$P^{-1}BQ^{-1}[Qx(t+1)] = P^{-1}(E - A + B)Q^{-1}[Qx(t)] - P^{-1}d(t), \tag{14}$$

amit írhatunk az

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} [Qx(t+1)] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} [Qx(t)] - P^{-1}d(t) \tag{15}$$

formában is.

A $Qx(t)$ vektort particionáljuk úgy, hogy a mátrixokkal történő szorzás elvégezhető legyen:

$$Qx(t) = \begin{pmatrix} (Qx(t))_1 \\ (Qx(t))_2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Ugyanígy bontsuk szét a $P^{-1}d(t)$ vektort is:

$$P^{-1}d(t) = \begin{pmatrix} (P^{-1}d(t))_1 \\ (P^{-1}d(t))_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

A (16) és (17) azonosság segítségével két egymástól független egyenletrendszerre esik szét a (15) rendszer:

$$\begin{aligned} N(Qx(t+1))_1 &= (Qx(t))_1 - (P^{-1}d(t))_1 \\ (Qx(t+1))_2 &= \Lambda(Qx(t))_2 - (P^{-1}d(t))_2 . \end{aligned} \tag{18}$$

A (18) rendszer első típusú egyenletrendszerének megoldásához felhasználhatjuk, hogy az N mátrix τ nilpotenciafokú nilpotens mátrix. A megoldást időben „visszafelé" haladva állítjuk elő a következőképpen:

$$\begin{aligned} 0 &= N^{\tau}(Qx(t+\tau))_1 = N^{\tau-1}[N(Qx(t+\tau))_1] = \\ &= N^{\tau-1}\left[(Qx(t+\tau-1))_1 - (P^{-1}d(t+\tau-1))_1\right] = \\ &= N^{\tau-1}(Qx(t+\tau-1))_1 - N^{\tau-1}(P^{-1}d(t+\tau-1))_1 = \dots \\ \dots &= (Qx(t))_1 - \sum_{i=0}^{\tau-1} N^i(P^{-1}d(t+i))_1 , \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$(Qx(t))_1 = \sum_{i=0}^{\tau-1} N^i(P^{-1}d(t+i))_1 . \tag{19}$$

A (19) megoldása a (18) rendszer első egyenletrendszerének azt mutatja, hogy az (1) egyenletrendszernek *akkor és csakis akkor* lehet előállítani a megoldását, ha végső felhasználások vektorait a vizsgált időszakot követő periódusban ismerjük. A (13) megoldása ennek ismeretében:

$$\begin{aligned} Qx(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} Qx(t) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^i P^{-1}d(t+1+i) - \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} P^{-1}d(t), \end{aligned} \tag{20}$$

az invertálás elvégzése után a rekurzív formánk

$$x(t+1) = \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} Q \right\} x(t) + \\ + \sum_{i=0}^{\tau-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{i} P^{-1} \right\} d(t+1+i) - \\ - \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} P^{-1} \right\} d(t) \tag{21}$$

alakú lesz.

Az egész rendszer megoldását felírhatjuk a 0-adik időszak teljes kibocsátása ismeretében is:

$$x(t) = \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^{t} Q \right\} x(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{i} P^{-1} \right\} d(t+i) - \\ - \sum_{j=0}^{t-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^{t-1-j} P^{-1} \right\} d(j) . \tag{22}$$

Ezzel előállítottuk a differenciaegyenlet-rendszerünk végső felhasználásától függő trajektóriáját.

A trajektória előállítása után azzal foglalkozunk, hogy az A folyó ráfordítások és a B tőkelekötési mátrixok ismeretében hogyan lehet a legegyszerűbben meghatározni azt, hogy mennyi időszakra előre kell ismernünk a végső felhasználások vektorait. Ezt érdemes az alapmátrixaink ismeretében tudni azért, mert az a teljes kanonikus alakra hozás nélkül is megállapítható.

Állítás: A τ érték az $(E-A)^{-1}B$ mátrix 0 sajátértékének algebrai multiplicitásával egyezik meg.

Bizonyítás: A (4) azonosságból indulunk ki:

$$U(E-A)^{-1}BU^{-1} = \begin{pmatrix} H_p & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} .$$

Ebben a kifejezésben H_p a Jordan-blokkból álló mátrix és a 0 sajátértékhez tartozik, ami nilpotens.

A kanonikus alaknál azt kaptuk, hogy $N^{\tau} = 0$, valamint azt is tudjuk, hogy

$$(H_p + E)^{-1} H_p = V_p N V_p^{-1} ,$$

vagyis

$$[(H_p + E)^{-1}H_p]^\tau = V_p N^\tau V_p^{-1} = 0 .$$

Használjuk most fel azt az összefüggést, hogy nilpotens mátrixokra teljesül:

$$(E + H_p)^{-1} = E - H_p + H_p^2 - \ldots (-1)^{p-1} H_p^{p-1} = \sum_{i=1}^{p} H_p^{i-1}(-1)^{i-1} .$$

Ebből az azonosságból következik:

$$[(E + H_p)^{-1}H_p]^\tau = \left[\sum_{i=1}^{p} H_p^i(-1)^{i-1}H_p\right]^\tau = 0 .$$

A fenti egyenletrendszerre alkalmazva a polinomiális tételt, a H_p mátrix kitevőire azt kapjuk, hogy τ-nál nem kisebb, amivel igazoltuk állításunkat.

3.2. Időben állandó végső felhasználás

Ha a végső felhasználás időben változatlan ($d(t) = d$), akkor a (9) megoldás a következő formában írható:

$$x(t) = \left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^t Q\right\} x(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1}\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^i P^{-1}\right\} d -$$
$$- \sum_{j=0}^{t-1}\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^{t-1-j} P^{-1}\right\} d . \tag{23}$$

Egyszerű algebrai átalakításokkal, felhasználva a

$$\sum_{i=0}^{\tau-1} N^i = (E - N)^{-1} \text{, valamint a}$$

$$\sum_{j=0}^{t-1} \Lambda^{t-j-1} = (E - \Lambda)^{-1} - \Lambda^t (E - \Lambda)^{-1}$$

azonosságokat, az alábbi kifejezést nyerjük:

$$x(t) = \left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^t\right\}\left\{Qx(0) + \begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & (E-\Lambda)^{-1}\end{pmatrix} P^{-1}d\right\} +$$
$$+ \left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}(E-N)^{-1} & 0\\ 0 & -(E-\Lambda)^{-1}\end{pmatrix} P^{-1}\right\} d .$$

A jobboldal másik zárójeles kifejezése éppen egyenlő az $(E-A)^{-1}d$ kifejezéssel, ami éppen a d végső felhasználás folyó ráfordítás igénye (ld. 2. fejezet (11) és (12) összefüggéseit). A teljes megoldás ennek segítségével az

$$x(t)=\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^{t}\right\}\left\{Qx(0)+\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & (E-\Lambda)^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}d\right\}+ \\ +(E-A)^{-1}d \tag{24}$$

formává alakítható.

A (24)-et úgy interpretálhatjuk, hogy konstans végső fogyasztás mellett a t-edik évi bruttó kibocsátás két részre oszlik. Az egyik rész úgy fogható fel, mint a d végső felhasználás ráfordítás igénye abban az esetben, ha nem lenne tőkelekötés $((E-A)^{-1}d)$, míg a másik rész az a teljes termelési rész, amely a tőkenövekedéshez szükséges

$$\left(\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^{t}\right\}\left\{Qx(0)+\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & (E-\Lambda)^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}d\right\}\right).$$

3.3. A $\tau=1$ eset

Amíg az előző részben egy olyan esetet mutattunk be, amikor a végső felhasználásra tettünk megszorító feltevést, most a rendszer A és B mátrixára együttesen érvényes feltételezéssel élünk. Az input–output modellek ezen osztályába tartozik az a modellforma, amikor a tőkelekötés mátrixát beruházási mátrixként értelmezzük, és teljesül az ismertetésre kerülő regularitási feltétel. A modell megoldása ebben az esetben az

$$x(t+1)=\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}Q\right\}x(t)+\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\right\}d(t+1)- \\ -\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}P^{-1}\right\}d(t)$$

formát veszi fel.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha a Leontief-modell mátrixaira teljesül, hogy az

$$x(t)=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix}[x(t+1)-x(t)]+\begin{pmatrix}d_1(t)\\ d_2(t)\end{pmatrix}$$

modellformában a

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ (E-A)_2 \end{pmatrix}$$

kvadratikus mátrix nemszinguláris, akkor a τ értéke éppen egy. Ennek belátásával az is igazolható, hogy az [1], [4], [5], [6] modellek egymással ekvivalensek, és a fenti explicit módon kimondott regularitási feltételre támaszkodnak.

Az igazolást az [5] dolgozat jelöléseivel végezzük el. Ekkor

$$B = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (E - A + B) = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix},$$

valamint a $\begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix}$ mátrix nemszinguláris, és az inverze az $[E, F]$ mátrix. A bizonyításhoz a *2. fejezet* (kanonikus alakká redukálás) gondolatmenetét követjük, azonban míg ott balra emeltük ki az $(E - A)$ mátrixot, most ezt a jobb oldalra történő kiemeléssel végezzük el:

$$\lambda \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 + T \\ H \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben $\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} = (E - A)$, amely feltételünk szerint invertálható. Legyen $\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}^{-1} = [\bar{B}, C]$, ahol $\bar{B}$-nek annyi oszlopa van, mint amennyi sora a T mátrixnak. Ekkor

$$\begin{aligned}(\lambda - 1) \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} &= \left\{ (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} \right\} [\bar{B}, C] \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - E \right\} \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{25}$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy a $T\bar{B}$ mátrix nemszinguláris. Ehhez használjuk fel a *regularitási feltételt*, vagyis a $\begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix}$ mátrix invertálhatóságát. Ezesetben a

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} [\bar{B}, C] = \begin{pmatrix} G_1\bar{B} & G_1C \\ H\bar{B} & HC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

egyenlőségek felhasználásával teljesül a

$$\begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix} [\bar{B}, C] = \begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ H\bar{B} & HC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet, amiből már következik, hogy a $T\bar{B}$ mátrix invertálható, tehát nincs 0 sajátértéke.

Most belátjuk, hogy a

$$\begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix megfelelő hasonlósági transzformációval kvázidiagonális alakra hozható. Igazolásunk konstruktív lesz. Legyen a hasonlósági transzformáció mátrixa

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1}M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Ennek felhasználásával

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1}M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_1(T\bar{B})M_1^{-1} & M_1(TC) - M_1(T\bar{B})M_1^{-1}M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

azonosság teljesül, valamint ismert, hogy a $T\bar{B}$ mátrix reguláris, ahonnan következik, hogy

$$M_2 = \left[M_1(T\bar{B})^{-1}\right] M_1(TC).$$

Amennyiben az M_1 mátrix a $(T\bar{B})$ mátrixnak hasonlósági transzformációja, akkor az előbbi M_2 mátrix is megszerkeszthető.

Visszatérve az (5) egyenlőséghez, valamint az $M_1(T\bar{B})M_1^{-1} = \Lambda$ kifejezést használva:

$$\left\{(\lambda-1)\begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - E\right\}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} = M\left\{(\lambda-1)\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - E\right\}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} =$$

$$= M\left\{\lambda\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E+\Lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} =$$

$$= M\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Lambda^{-1}+E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}.$$

Végül nem maradt más hátra, mint a $(\Lambda^{-1}+E)$ mátrixot egy hasonlósági transzformációval kanonikus alakra redukálni, tehát

$$\lambda\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{n-p} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} V_{n-p}^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix},$$

ami éppen azt jelenti, hogy a $\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} (E-A)_1 + B_1 \\ (E-A)_2 \end{pmatrix}$ mátrixok olyan reguláris mátrixsereget alkotnak, ahol a nilpotens blokk elsőfokú.

A következő feladatunk annak megmutatása, hogy a [4] dolgozat is lényegében az előbbi regularitási feltételt használja fel. *Livesey* modelljében a következő modellformából indul ki:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t+1} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t \right\} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t ,$$

vagyis a tőkekoefficiensek mátrixa nála a felső blokkokban tartalmaz 0 mátrixú blokkokat. A rekurzivitás feltétele itt az $(E - A_{11})$ és a

$$\Delta = B_{22} - B_{21} G_{11}^{-1} G_{12}$$

mátrix invertálhatóságán múlik, ahol

$$G = (E - A + B) = \begin{pmatrix} E - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} + B_{21} & E - A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} .$$

Itt azt kell bizonyítanunk, hogy a

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{26}$$

mátrix invertálható.

Erről könnyen meggyőződhetünk. A feltételek szerint a $G_{11} = (E - A_{11})$ mátrix invertálható. Válasszuk tehát a (26) mátrixban, annak inverzének előállításában a G_{11} mátrixot generáló blokknak. A generálás elvégzése után a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} G_{11}^{-1} & G_{11}^{-1} G_{12} \\ -B_{21} G_{11}^{-1} & B_{22} - B_{21} G_{11}^{-1} G_{12} \end{pmatrix} . \tag{27}$$

Ahhoz, hogy a (26) mátrix invertálható legyen, az szükséges, hogy a $\Lambda = B_{22} - B_{21} G_{11}^{-1} G_{12}$ mátrix invertálható legyen, ami viszont éppen a feltétel, vagyis bizonyítottuk, hogy a két explicitté tétel ugyanazon a feltételezésen alapszik.

4. A Leontief–modell irányíthatóságáról

Az (1) rendszerrel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy ha a $\{d(t)\}$ végső felhasználást *szabályozó változóknak* tekintjük, akkor létezik-e a szabályozási vektoroknak olyan sorozata, amely tetszőleges $x(0)$ kezdő termelési szintről indítva a rendszert, egy előre megadott $\bar{x}$ pontba irányítja a bruttó kibocsátásokat, véges időhorizonton belül.

Ezzel a problémakörrel az irodalom széles körben foglalkozott ([1], [4], [7]). LIVESEY [4] cikkében bebizonyítja, hogy az általa vizsgált speciális modell irányítható. AOKI könyvében [1] ugyanakkor azt igyekszik bizonyítani, hogy az input–output modell nem irányítható, míg MIHÁLYFFY–SIMONOVITS [7] cikkükben helyesen állapítják meg, hogy a Leontief-modell irányítható, bizonyításuk azonban pontatlan.

Térjünk ki röviden a [7] cikk pontatlanságára. A dolgozat *1. tétele* mondja ki a dinamikus input–output modell irányíthatóságát, azonban a bizonyítás nem helyes. A bizonyításukban a szerzők kiválasztják az $\bar{x}$ végállapotot és választanak hozzá egy $\{x(t)\}_{t=1}^{T-1}$ $(T \geq 1)$ sorozatot, amely az $x(0)$ kezdeti állapotból indítja a rendszert és $x(T) = \bar{x}$ pontba juttatja. A szabályozó változókra a

$$d(t) = x(t) - Ax(t) - B[x(t+1) - x(t)]$$

egy–egy értelmű megfeleltetés teljesül, amelyikben a bruttó kibocsátások adottak. Ha a fenti egyenlőséget a

$$Bx(t+1) = (E - A + B)x(t) - d(t)$$

alakban írjuk és feltételezzük, hogy a $\{d(t)\}_{t=0}^{T-1}$ sorozatot már kiszámítottuk, akkor a végállapotra a

$$B\bar{x} = (E - A + B)x(T-1) - d(T-1)$$

azonosság teljesül. Ebben az egyenlőségben az $x(T-1)$ és $d(T-1)$ vektorok explicit módon adottak. Mivel a B mátrix szinguláris, ezért az $\bar{x}$-re egy lineáris egyenletrendszert definiál, amelynek megoldása egy partikuláris megoldásból és a B mátrix magteréből áll. Ez azt jelenti, hogy bárhogyan is adjuk meg a $d(T-1)$ vektort, az az $\bar{x}$ vektorra egy *végtelen halmazt* határoz meg, tehát a $\{d(t)\}_{t=0}^{T-1}$ sorozat nem juttatja a rendszert a kívánt pontba, hanem egy olyan halmazt jelöl ki, amelynek eleme az $\bar{x}$ vektor.

Vegyük most vizsgálat alá AOKI könyvét [1]. *Aoki* könyvének 31–33. oldalán rekurzívvá teszi a dinamikus Leontief-modellt, majd ennek eredményeire való hivatkozással a 86–87 oldalon kimondja, hogy a modell nem irányítható. Időzzünk el a rekurzívvá tételnél.

Aoki könyve 32. oldalának (E3) képletét több szerző is megkapta pl. [6], sőt nála is ugyanaz a regularitási feltétel szerepel, mint a [4], [5], [6] cikkekben, vagyis a $B - T_2(E - A)$ mátrix reguláris. A hibát *Aoki* azzal követi el, hogy bevezeti az új z_t változót, amely

$$z_t = [B - T_2(E - A)]\, q_t + T_2 d_t$$

formában áll elő. Számítsuk most ki a z_t vektort a particionálás és a beszorzás segítségével:

$$z_t = \begin{pmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & -(E - A_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t^1 \\ q_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_t^2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} B_{11}q_t^1 + B_{12}q_t^2 \\ A_{21}q_t^1 - (E - A_{22})q_t^2 + d_t^2 \end{pmatrix}.$$

Ebben a kifejezésben az

$$A_{21}q_t^1 - (E - A_{22})q_t^2 + d_t^2 = 0$$

azonosság teljesül, amely az (E1) képletből következik. Ez azt jelenti, hogy

$$z_t = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t^1 \\ q_t^2 \end{pmatrix} = Bq_t = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

vagyis a z_t állapotvektorok sorozata az n–dimenziós tér egy alterében vannak. (Az x egy tetszőleges nemnegatív vektor). Innen pedig következik, hogy a transzformált modellformától sem várható, hogy irányítható legyen az egész n–dimenziós térben.

A következőkben belátjuk, hogy a dinamikus input–output modell mindig irányítható. A bizonyításhoz a *3.1. fejezet* eredményeit használjuk fel.

A (18) és (19) összefüggések a következők:

$$\begin{aligned} (Qx(t+1))_1 &= \sum_{i=0}^{\tau-1} N^i (P^{-1}d(t+i))_1 \\ (Qx(t+1))_2 &= \Lambda(Qx(t))_2 - (P^{-1}d(t))_2 . \end{aligned} \tag{28}$$

Ha az elérni kívánt állapot $\bar{x}$, akkor a fenti particióban a

$$Q\bar{x} = \begin{pmatrix} (Q\bar{x})_1 \\ (Q\bar{x})_2 \end{pmatrix}$$

pontba kell irányítanunk a rendszert. Bontsuk fel két lineáris dinamikus rendszer irányíthatósági problémájára eredeti problémánkat. A (28) első egyenletrendszerének irányíthatósága teljesül, mert ha az irányítási változók transzformált $\{(P^{-1}d(t+i))_1\}_{i=0}^{\tau-1}$ változóit tekintjük a (28) új szabályozó vektorainak, akkor a rendszer irányíthatósági mátrixa a

$$[E, N, N^2, \ldots, N^{\tau-1}]$$

alakot veszi fel. Ennek a rangja p, mert tartalmazza az egységmátrixot. A (28) második egyenletrendszerében újra a $\{(P^{-1}d(t))_2\}$ vektorokat tekinthetjük szabályozási változónak. Ekkor az irányítási mátrix:

$$[E, \Lambda, \Lambda^2, \dots, \Lambda^{n-p-1}]$$

amelynek a rangja $(n-p)$, tehát ez az alrendszer is irányítható. Ezzel beláttuk, hogy a Leontief-modell mindig irányítható.

Végül adjunk meg egy speciális szabályozósorozatot, amely adott $x(0)$ kezdőpontból az $\bar{x}$ végállapotba vezérli a rendszert. Ehhez azt használjuk fel, hogy

$$Bx(t) \leq (E - A + B)x(t-1) \tag{29}$$

teljesül. Ezt egy lineáris programozási sorozattal határozzuk meg. Másodszor az adott T időszakot követő szabályozásokat keressük meg.

(1) *A $d(0), d(1), \dots, d(T-1)$ irányítások felkutatása*

A szabályozások meghatározását egy lineáris programozási feladatra és a (29) feltételre alapozzuk. Első lépésben azt kell megvizsgálni, hogy teljesül-e a

$$B\bar{x} \leq (E - A + B)x(0)$$

feltétel. Ha nem teljesül, akkor oldjuk meg a követlező feladatot:

$$F(1) \begin{cases} x(1) \geq 0, \quad \mu \geq 0 \\ Bx(1) \leq (E - A + B)x(0) \\ x(1) \leq y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (30) \\ -(E - A + B)x(1) + \mu(E - A + B)x(0) \leq 0 \\ \hline \quad \mu \to \max . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (31) \end{cases}$$

Az $F(1)$ feladatban a (30) egyenlőtlenségre azért van szükségünk, mert elképzelhető, hogy a B mátrixnak van 0 oszlopvektora, amiből az következne, hogy a lehetséges megoldások halmaza nem korlátos, vagyis nem létezik az optimum (az y sokkal nagyobb x-nél). A (31) egyenlőtlenség segítségével növeljük a (29) jobboldalán lévő felső korlátot. A feladatból kiszámíthatóvá válik az irányítás is. Legyen $x^*(1)$ az (F1) feladat megoldása. Ekkor a

$$d(0) = (E - A + B)x(0) - Bx^*(1)$$

egyenlőségből a szabályozás meghatározható.

A következő lépésben tesztelnünk kell, hogy a

$$B\bar{x} \leq (E - A + B)x^{*}(1)$$

egyenlőtlenség teljesül-e. Ha nem teljesül, újra felírjuk az F(1) feladatnak megfelelő lineáris programozási feladatot. Ezt az eljárást elvégezhetjük az

$$F(t)\begin{cases} x(t) \geq 0, \quad \mu \geq 0 \\ Bx(t) \leq (E - A + B)x^{*}(t-1) \\ -(E - A + B)x(t) + \mu(E - A + B)x^{*}(t-1) \leq 0 \\ \hline \mu \to \max . \end{cases}$$

feladatokra is mindaddig, amíg a

$$B\bar{x} \leq (E - A + B)x^{*}(t) \tag{32}$$

összefüggés nem teljesül. Az első t értéket, amelyre a (32) összefüggés teljesül, $(T-1)$-gyel jelöljük. A szabályozósorozatot a

$$d(t) = (E - A + B)x^{*}(t) - Bx^{*}(t+1) \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1)$$

szolgáltatja, ahol $x^{*}(T) = \bar{x}$ a végállapot.

2. A $d(T), d(T+1), \ldots, d(T+\tau-1)$ *szabályozások meghatározása*

A T időszakot követő irányítások kiszámítása már nem okoz gondot, csak a létezését mutatjuk be. Induljunk ki abból, hogy az $x(T)$ végállapot ismert. Ebből kiindulva választunk egy $x(T+1)$ állapotot a következő halmazból:

$$X(x(T)) = \{x(T+1) | (x(T+1) \geq 0) \& (Bx(T+1) \leq (E - A + B)x(T)) \& \\ \& ((E - A + B)x(T+1) \geq 0)\} .$$

Ha választottunk egy $x(T+1)$ vektort, akkor az irányítás a

$$d(T) = (E - A + B)x(T) - Bx(T+1)$$

összefüggésből kiszámítható. Ezt továbbfolytatva a $(T+\tau-1)$ időpontig, a szabályozás vektorok sorozata meghatározható.

Ezzel sikerült megadnunk egy irányítási vektorsorozatot, amely az előre megadott $\bar{x}$ pontba juttatja a Leontief-modellt. A megadott algoritmus eléggé számításigényes.

(Beérkezett: 1988. április 5-én.)

Irodalom

1. AOKI, M. (1976): *Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis.* North-Holland Publ. Co. Inc.
2. BRÓDY A. (1980): *Ciklus és szabályozás.* KJK, Budapest.
3. GANTMACHER, F.R. (1967): *Teoria matric.* Nauka, Moszkva.
4. LIVESEY, D.A. (1973): The Singularity Problem in the Dynamic Input–Output Model. *Int. J. Systems Sci.*, Vol.4. No 3., 437–440.
5. LUENBERGER, D.G. – ARBEL, A. (1977): Singular Dynamic Leontief Systems. *Econometrica*, 45, 991–995.
6. MEYER, U. (1982): Why Singularity of Dynamic Leontief Systems Doesn't Matter. *Input–Output Techniques, Proceedings of the Third Hungarian Conference on Input–Output Techniques, 3–5. November 1981.* Budapest. Statistical Publishing House, 181–189.
7. MIHÁLYFFY L. – SIMONOVITS A. (1983): A dinamikus input–output modell vezérelhetőségéről. *Szigma*, 16, 165–168.
8. RÓZSA P. (1976): *Lineáris algebra és alkalmazásai.* MK, Budapest.

The Singularity Problem of the Open, Dynamic Leontief Model

The paper offers a solution for the singularity problem of the Leontief models. For recursiveness it uses the theory of regular family of matrices. With this approach the problem of singularity can be discussed in more general terms. Through recursiveness it becomes provable that the Leontief model is completely controllable, independent of the concrete form of the capital coefficient matrix B.