Szigma, XX. (1987–88) 4. sz.

IDEGEN TOLLAK

PATRICK MOYES

Eloszlások jóléti rangsorolását megőrző függvények*

1. Bevezetés

1.1 Számos szerző [ATKINSON (1970), DASGUPTA et al., (1973)] foglalkozott a jövedelemeloszlások rangsorolásának kérdésével. Rendszerint azt bizonyítják be, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely eloszlás magasabb rangsorolást kapjon egy másiknál — bármilyen legyen is az egyenlőtlenség mérésére használt mutató — az, hogy viszonylagos Lorenz–görbéje az utóbbi eloszlásé alatt legyen. Ha — mint KOLM (1976) javasolta — inkább az abszolút, semmint a viszonylagos jövedelem–különbségeket hangsúlyozzuk, az abszolút Lorenz–dominancia fogalmát [MOYES (1987a)] kapjuk. SHORROCKS (1983) kidolgozott egy olyan kritériumot, amely bármely két (különböző) várható értékkel bíró eloszlás rangsorolását eldönti. Az új kritérium — amelyet általánosított Lorenz–dominanciának nevezünk — figyelembe veszi mind a nagyobb jövedelemegyenlőség, mind pedig a magasabb jövedelem iránti igényt. Az általánosított Lorenz–rangsorolásban megtestesülő jóléti ítéletek azonban összeütközésbe kerülhetnek a jövedelem egyenlőbb elosztására vonatkozó társadalmi igénnyel. Sőt, a leggazdagabb személy jövedelmének növekedését rendszerint az egyenlőtlenség fokozódásaként fogják fel, noha az általánosított Lorenz–dominancia ilyenkor is egyértelműen a jólét emelkedését mutatja. Az egyenlőség és a hatékonyság közötti ilyen összeütközés elkerülése érdekében SHORROCKS (1983) a hatékonyságra vonatkozó preferencia gyengítését javasolta, olymódon, hogy összeegyeztethetővé váljék a jövedelemegyenlőség növelésével. Attól függően, hogy a viszonylagos vagy az abszolút egyenlőséget részesítjük-e előnybe, kapjuk az általánosított viszonylagos illetve abszolút Lorenz–dominanciát.

1.2 Ha adottnak vesszük, hogy létezik az eloszlások rangsorolásának megfelelő módjára vonatkozó megállapodás, gyakorlatilag két kérdés merül fel. Egyrészt a politikai döntéshozó egyik fő célja minden bizonnyal az, hogy mérsékelje a termelési folyamatból közvetlenül származó jövedelemeloszlás egyenlőtlenségét. Az állami szektor jövedelemtranszfer–tevékenysége állandóan fokozódik az idők folyamán, és a modern társadalmakban a jövedelemadó–politika központi problémájává vált. Ha

---

* PATRICK MOYES: Functions that Preserve the Welfare Ranking of Distributions. A tanulmány rövidített változata megjelenik a *Journal of Economic Theory*-ban. Fordította *Tényi György*.

most első megközelítésben figyelmen kívül hagyjuk az adózás ösztönző hatását, régóta tudjuk, hogy a progresszív adórendszerek csökkentik a jövedelemkülönbségeket. Pontosabban, csak a progresszív rendszereknek (a növekvő átlag értelmében) van meg az a tulajdonságuk, hogy az adózás utáni jövedelemeloszlás dominálja az adózás előtti eloszlást a viszonylagos Lorenz-értelemben [JAKOBSSON (1976), EICHHORN et. al. (1984), THON (1987)]. A viszonylagos Lorenz-dominancia helyébe az abszolút Lorenz-dominanciát téve, MOYES (1987b) megmutatta, hogy a Fei-féle minimális progresszivitás (az adókötelezettség növekedése) és az abszolút jövedelmi egyenlőtlenséget csökkenő adózási rendszer egyenértékű[1]. Az adózás egyenlősítő tulajdonságai mellett hasznos tudni, hogyan hat az adózás utáni eloszlásra az adózás előtti jövedelemeloszlás valamilyen adott módosítása. Jogosnak látszik például az a követelmény, hogy ha valamely adózás előtti jövedelemeloszlás egyenletesebb, mint egy másik, akkor adózás után is ilyen legyen a kettő viszonya. Más szavakkal, elvárható az adórendszertől, hogy megőrizze az eloszlások jóléti és/vagy egyenlőtlenségi szempontok szerinti rangsorolását. Noha ez a kérdés még nyitva áll a viták előtt, a tanulmány végén igyekszünk bebizonyítani, hogy az eloszlások rangsorolásának megőrzése — mint következmény — az igazságosság és az ellentmondásmentesség elve alapján igazolható. Míg az első probléma a dominancia-reláció létrejöttével kapcsolatos, a második az ilyen reláció megőrzésére vonatkozik. Ebben a tanulmányban a második kérdéssel foglalkozunk, és azt vizsgáljuk, milyen körülmények között igaz, hogy SHORROCKS három jóléti kritériumának valamelyike alapján kialakított adózás előtti rangsorolás az adózás után is megmarad.

1.3 A tanulmány felépítése a következő. A *2. részben* — az átlagjövedelmet állandónak véve — igazoljuk, hogy az eloszlások Lorenz-rangsorolását csak a kvázilineáris adórendszerek őrzik meg. Feloldva az azonos átlagjövedelem feltevését, a 3. fejezetben azoknak a függvényeknek a tartományát vizsgáljuk, amelyek megőrzik az eloszlásoknak az általánosított Lorenz-dominancia szerinti rangsorolását. Látni fogjuk, hogy a monoton növekedés és a konkávitás szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az általánosított Lorenz-rangsorolás megőrződjék. Ezzel szimmetrikusan, minden csökkenő és konvex rendszer esetén az eloszlások rangsorolása megfordul. A *4. részben* olymódon korlátozzuk a hatékonysági preferenciát, hogy a jólét emelkedése összeegyeztethető legyen az egyenlőség fokozásával. Arra az esetre, amikor előírjuk, hogy a jólét akkor növekszik, ha minden jövedelem azonos arányban nő, igazolni fogjuk, hogy csak a lineáris vagy a konstans függvény őrzi meg az eloszlások jóléti rangsorolását. Ha továbbmegyünk egy lépéssel és előírjuk, hogy a jólét akkor növekszik, ha ugyanakkora abszolút mennyiséget adunk valamennyi jövedelemhez, akkor csak a kvázi-lineáris rendszerek bizonyulnak megengedhetőnek. Az *5. (és utolsó) részben* ismertetjük a rokon eredményeket, és indokoljuk

[1] Burkoltan feltételezzük, hogy az adózás nem módosítja az adóalanyoknak a jövedelemskálán elfoglalt helyzetét, vagyis az adózás utáni jövedelem növekszik az adózás előtti jövedelem függvényében. Mint másutt megmutattuk (MOYES (1988a)), ha a népesség száma rögzítve van, a növekvő jelleg nem szükséges feltétel többé ahhoz, hogy egy adórendszer egyenletesen egyenlősítő legyen mind a viszonylagos, mind az abszolút Lorenz-dominancia értelmében.

azt az elvet, hogy az adórendszernek meg kell őriznie az adózás előtti rangsorolást. Befejezésképpen röviden utalunk a további kutatás lehetőségeire.

2. Alapjelölések és egy bevezető összefüggés

A dolgozatban használt fontosabb jelölések

$\mathbb{R}$	valós szám
$\mathbb{R}_+$	pozitív valós szám
$\mathbb{R}_{++}$	szigorúan pozitív valós szám
$:=$	definíció szerint egyenlő
$\in$	eleme
$:\subseteq$	„magában foglalja"
D_n	jövedelemeloszlások halmaza
$\mathbf{1}$	összegző vektor
$\hat{z}$	z redukált eloszlása
$\tilde{z}$	z centralizált eloszlása
z^z	z növekvő újrarendezése
$f : A \to B$	A-ból B-be képező függvény
$\mathcal{F}$	$V \to \mathbb{R}_+$ függvények halmaza
$\succeq$	D_n-n értelmezett bineáris reláció
$F(\succeq)$	$\succeq$ rendezést megőrző függvények
$\sum_{j=1}^n z_j$	$= z_1 + z_2 + \ldots + z_n$
$\mathrm{GL}(\frac{k}{n}; z)$	a z állapotbeli k legszegényebb összjövedelme
$\geq_\ell$ 1$[>_\ell]$	gyenge (erős) Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell r}$ $[>_{\ell r}]$	gyenge (erős) relatív Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell a}$ $[>_{\ell a}]$	gyenge (erős) abszolút Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell g}$ $[>_{\ell g}]$	gyenge (erős) Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell r}$ $[>_{\ell r}]$	gyenge (erős) relatív Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell a}$ $[>_{\ell a}]$	gyenge (erős) abazolút Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell g}$ $[>_{\ell g}]$	gyenge (erős) általánosított Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell gr}$ $[>_{\ell gr}]$	gyenge (erős) relatív általánosított Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell ga}$ $[>_{\ell ga}]$	gyenge (erős) abszolút általánosított Lorenz-dominancia

2.1. Tekintsük n számú egyén homogén populációját, akiknek z_i jövedelme valamely korlátos vagy nem-korlátos $V := (\underline{v}, \bar{v})$ valós intervallumba esik. Jelölje $\mu(z)$ a $z := (z_1, \ldots, z_n)$ jövedelemeloszlás átlagát, és jelentse $D_n := \{z \in \mathbb{R}^n | z_i \in V$ minden i-re$\}$ a megvalósítható jövedelemeloszlások halmazát. Az $\mathbf{1}$ jelölést fogjuk alkalmazni az egyesekből álló n-elemű vektorra. Legyen továbbá

$$z^z := (z_1^z, \ldots, z_n^z)$$

z olyan permutációja, amelyre

$$z_1^z \leq z_2^z \leq \ldots \leq z_n^z\,.$$ [2]

Több esetben normálni fogjuk a jövedelemeloszlásokat, úgyhogy, $\widehat{z} := (\widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_n)$ fogja jelenteni a z-hez tartozó *„redukált átlagú"* eloszlást, ahol $\widehat{z}_i := z_i/\mu(z)$, míg $\widetilde{z} := (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$ a *„centrált átlagú"* eloszlást jelenti, ahol $\widetilde{z}_i := z_i - \mu(z)$.

Elemzésünk szempontjából az $F : V \to \mathbb{R}_+$ függvényosztály érdekes, amelyet $\mathcal{F}$-fel jelölünk. Ha adva van $y \in D_n$ és $F \in \mathcal{F}$, legyen $F(y) := (F(y_1), \ldots, F(y_n))$. A jelölések rövidsége kedvéért, néha az x, x' jelölést alkalmazzuk $F(y), F(y')$ stb. helyett. Célszerű F-et úgy elgondolni, mint adózási rendszert, amely az u adózás előtti jövedelemhez az $F(u)$ adózás utáni jövedelmet rendeli hozzá. Ezzel az értelmezéssel csábítónak tűnhet figyelmünket a (gyengén) növekvő F függvényekre korlátozni. Az általánosság kedvéért azonban nem fogjuk ezt az utat követni, lehetséges tehát, hogy F nem növekvő, sőt esetleg nem is monoton. Ha adva van a D_n halmazon a $\succeq$ bináris reláció, azt fogjuk mondani, hogy az F függvény megőrzi a rangsorolást a $\succeq$ relációra nézve, ha igaz, hogy $F(x) \succeq F(y)$, valahányszor $x \succeq y$, minden $x, y \in D_n$ esetén. A $\succeq$ reláció szerinti rangsorolást megőrző függvények halmazát az $F(\succeq)$ jellel jelöljük.

2.2 Először arra az esetre korlátozzuk figyelmünket, amikor az eloszlások várható értéke egyenlő. Az igazságtalanság elmélete és a jólét mérése a *regresszív transzfer* fogalma körül forog, amely legalábbis DALTONIG (1920) megy vissza. Azt mondjuk, hogy az y jövedelemeloszlás regresszív transzfer révén jött létre az x jövedelemeloszlásból, ha (a) $x_k = y_k$ $k \neq i, j$, (b) $x_i - y_i = y_j - x_j$ és (c) $y_i \leq x_i \leq x_j \leq y_j$.

Ezzel egyenértékű megfogalmazás, hogy az x eloszlás *progresszív transzfer* révén keletkezett az y eloszlásból. Hasonló módon definiáljuk a *szigorúan* regresszív transzfert, olymódon, hogy a fenti (c) feltétel helyébe a (c') $y_i < x_i \leq x_j < y_j$ feltételt írjuk. SHORROCKS (1988) gondolatmenetét követve bármely $z \in D_n$ eloszlás esetén legyen

$$\mathrm{GL}\left(\frac{k}{n}; z\right) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} z_j^z \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2.1}$$

és definiáljuk a z eloszlás $\mathrm{GL}(p; z)$ általánosított Lorenz–görbéjét a következőképpen. Legyen $\mathrm{GL}(0; z) := 0$ és

$$\mathrm{GL}((k+\theta)/n; z) = (1-\theta)\mathrm{GL}(k/n; z) + \theta\mathrm{GL}(k+1)/n; z) \tag{2.2}$$

minden $\theta \in [0,1]$ esetén. Ha adva van két eloszlás, $x, y \in D_n$, azt mondjuk, hogy az x eloszlás Lorenz–értelemben gyengén dominálja az y eloszlást, (jele $x \geq_\ell y$)

---

[2] Az ilyen permutáció nem szükségképpen egyértelmű, hacsak nem minden z' különböző.

akkor és csak akkor, ha mindkét eloszlás várható értéke azonos és az x eloszlás Lorenz–görbéje sehol sem halad az y eloszlás Lorenz–görbéje alatt, vagyis

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};x\right) &\geq \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};y\right) \quad \text{minden} \quad 1 \leq k < n \quad \text{és} \\ \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};y\right) \quad \text{ha} \quad k = n\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ha (2.3)-ban a szigorú egyenlőtlenség érvényes legalább egy k-ra $(1 \leq k \leq n)$, akkor azt mondjuk, hogy az x eloszlás Lorenz–féle értelemben szigorúan dominálja az y eloszlást, amit a továbbiakban Igy jelölünk: $x >_\ell y$.[3]

A Lorenz–dominancia normatív tartalma már hosszú ideje nyilvánvaló: $x \geq_\ell y$ akkor és csak akkor áll fönn, ha az y eloszlást regresszív transzferek véges sorozata révén kaptuk az x eloszlásból, vagy (ami ezzel egyenértékű) ha $W(x) \geq W(y)$ minden Schur–konkáv (vagyis a jövedelemegyenlőséget preferáló) $W : D_n \rightarrow \mathbf{R}$ jóléti függvény esetében [lásd DASGUPTA et al., (1973), ROTHSCHILD és STIGLITZ (1974)][4].

Milyen azoknak a függvényeknek az osztálya, amelyek megőrzik az eloszlások Lorenz–féle rangsorolását? A következő tétel szerint csak a kvázi–lineáris adózás őrzi meg az eloszlások Lorenz–féle rangsorolását.

2.1 tétel: Korlátos (illetve nem–korlátos) jövedelmek esetén:

(T2.1.a) $F(t) = at + b$ minden $a, b \in \mathbb{R}^2$ feltéve $F(t) \geq 0$ [illetve $a, b \in \mathbf{R}_+$]

akkor és csak akkor, ha

(T2.1.b) Minden $y, y' \in D_n$ $(n \geq 2)$, esetén az $y' \geq_\ell y$ egyenlőtlenségből következik $F(y') \geq_\ell F(y)$.

Bizonyítás:

Mivel az elégségesség nyilvánvaló, a tételnek csak a szükségességet kimondó része szorul bizonyításra. Vegyünk két eloszlást $y := (y_1, \ldots, y_n) \in D_n$ és $y' := (y'_1, \ldots, y'_n) \in D_n$ úgy, hogy $y' \geq_\ell y$. Ekkor létezik olyan B bisztochasztikus mátrix, amelyre $y' = By$ [lásd például DASGUPTA et al. (1973)]. Tételezzük fel továbbá, hogy

$$y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \quad \text{és} \quad y'_1 \leq y'_2 \leq \ldots \leq y'_n$$

---

[3] A Lorenz–dominanciára adott meghatározásunk eltér a szokásostól. Célszerű különbséget tenni a szigorú értelemben vett Lorenz–dominancia (az összehasonlított eloszlások várható értékei egyenlők) és a viszonylagos Lorenz–dominancia között (ekkor az összehasonlított eloszlás méretei lehetnek külöbözők is).

[4] Valamely $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Schur–konkáv, ha $H(Bx) \geq H(x)$ minden $x \in \mathbf{R}^n$ és minden B bisztochasztikus mátrix esetén. H szigorúan Schur–konkáv, ha $H(Bx) > H(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq u\mathbf{1})$ és minden olyan B bisztochasztikus mátrix esetén, amelyre Bx nem az x-nek valamely permutációja [lásd MARSHALL és OLKIN (1979)].

(ellenkező esetben helyettesítsük B-t RBQ^{-1}-gyel, y-t Qy-nal, y'-t Ry'-vel, ahol Q és R olyan permutációs mátrixok, amelyeket úgy választottunk meg, hogy Qy és Ry' elemei nem-csökkenők legyenek.) Mivel $y' = By$ azt jelenti, hogy B felírható T-transzformációs mátrixok szorzataként, [lásd MARSHALL és OLKIN (1979), B.1 lemma], bizonyításunk teljessé válik, ha a kívánt eredményt valamilyen T-transzformációs mátrixra igazoljuk. Ezért tételezzük fel, hogy $y' = Ty$, ahol T az alábbi implicit módon definiált T-transzformációs mátrix:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y'_k = y_k & k \neq i, j \\ \text{(b)} & y'_i = (1-\tau)y_i + \tau y_j & \\ \text{(c)} & y'_j = \tau y_i + (1-\tau)y_j & \end{array} \tag{2.4}$$

ahol $0 \leq \tau \leq 1$. Ha F eleget tesz a (T2.2.b) feltételnek, akkor szükségképpen

$$\sum_{j=1}^{n} F(y'_j) = \sum_{j=1}^{n} F(y_j),$$

ami viszont (2.4) következtében azt jelenti, hogy

$$F(\tau y_i + (1-\tau)y_j) + F((1-\tau)y_i + \tau y_j) = F(y_i) + F(y_j). \tag{2.5}$$

Mivel (2.5) érvényes minden $y \in D_n$ esetén, ebből következik, hogy minden olyan $u, v, w, t \in V$-re, amelyre $0 \leq t < u \leq v < w$ és $u - t = w - v$:

$$\frac{F(u) - F(t)}{u - t} = \frac{F(w) - F(v)}{w - v} \tag{2.6}$$

aminek megoldása $F(t) = at + b$ [lásd ACZEL (1966), 1. tétel, 43. l.]. Ha a jövedelem korlátos, akkor

$$\begin{array}{lllll} \text{(i)} & -b/a \leq \underline{v} & \text{ha} & a < 0,\ b > 0 & \\ \text{(ii)} & -b/a \leq \bar{v} & \text{ha} & a > 0,\ b < 0 & \text{vagy} \\ \text{(iii)} & a, b \in \mathbb{R}_+ & & & \end{array}$$

szükséges ahhoz, hogy $F(t) \geq 0$ legyen minden $t \in V$ esetén. Nem-korlátos jövedelem esetén (iii) elegendő. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A *2.1 tétel* „erős" változatát úgy kapjuk, hogy a (T2.1.a) feltételben $a \neq 0$, a (T2.1.b) feltételben

$$y \neq u\mathbb{1} \quad \text{és} \quad y' \neq v\mathbb{1}(u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

teljesülését követeljük meg, a (T2.1.b) feltételben pedig $\geq_\ell$ helyébe a $>_\ell$ relációt írjuk.

Megjegyezzük mellesleg, hogy kvázi-lineáris adózás valamivel többet is teljesít, mint az eloszlások Lorenz-rangsorolásának a megőrzését: ténylegesen az adózás előtti jövedelmek egyenlősítése (amelyet a B bisztochasztikus mátrix tartalmaz) megőrződik az adózás utáni jövedelmekben is.

Az eloszlások jóléti rangsorolásának megőrzése

3.1 Mindeddig az olyan — a gyakorlatban igen ritka — eloszlások összehasonlítására korlátoztuk figyelmünket, amelyeknek várható értéke egyenlő. Ez magyarázza, hogy a Lorenz-kritérium által meghatározott részleges rendezés gyakorlati szempontból többé-kevésbé haszontalan. Szerencsére a fenti fogalmak könnyen kiterjeszthetők a különböző méretű eloszlások esetére is. A regresszív transzfer fogalmának alábbi általánosítása [ROTSCHILD és STIGLITZ (1973)] lehetővé teszi, hogy eltérő várható értékű eloszlások viszonylagos kívánatosságát is értékeljük. Azt fogjuk mondani, hogy az y eloszlás nem-hatékony regresszív transzfer révén keletkezett az x eloszlásból, ha

(a) $x_k = y_k$ minden $k \neq i, j$ esetén,

(b) $x_i - y_i \geq y_j - x_j$ és (c) $y_i \leq x_i \leq x_j \leq y_j$.

Hasonlóképpen definiáljuk a szigorúan nemhatékony regresszív transzfert olymódon, hogy a

(b') $x_i - y_i > y_j - x_j$ és (c') $y_i < x_i \leq x_j < y_j$

feltételeket írjuk (b) illetve (c) helyébe. Az általánosított Lorenz-dominancia — tükrözve a nagyobb igazságosságra, egyszersmind a magasabb jövedelemre való törekvést — természetes módon terjeszti ki a Lorenz-rangsorolást a nem egyenlő várható értékű eloszlásokra. SHORROCKS (1983) gondolatmenetét követve azt fogjuk mondani, hogy az x eloszlás az általánosított Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele $x \geq_{g\ell} y$), akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{GL}\left(\frac{k}{n}; x\right) \geq \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n}; y\right) \quad \text{minden} \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{esetén}. \tag{3.1}$$

A szokásos módon definiáljuk az $\geq_{\ell g}$ reláció aszimmetrikus összetevőjét és bevezetjük rá a $>_{\ell g}$ jelet. Az általánosított Lorenz-dominancia normatív jelentése is kézenfekvő: ha $x \geq_{\ell g} y$, akkor (i) az y eloszlást nem-hatékony és regresszív transzferek véges sorozata révén kapjuk az x eloszlásból, vagy (ami ezzel egyenértékű) (ii) $W(x) \geq W(y)$ minden növekvő és Schur-konkáv $W : D_n \to \mathbb{R}$ jóléti függvényre és megfordítva [lásd MARSHALL és OLKIN (1979), ROTSCHILD és STIGLITZ (1973), SHORROCKS (1983)].

3.2 A következő tétel bizonyítja, hogy csak a növekvő és konkáv függvények őrzik meg az eloszlások általánosított Lorenz-rangsorolását.

3.1 tétel: Korlátos jövedelmek esetén:

(T3.1.a) F növekvő és konkáv[5] akkor és csak akkor, ha

(T3.1.b) minden $y, y' \in D_n$ $(n \geq 2)$ esetén $y' \geq_{\ell g} y$ teljesüléséből következik $F(y') \geq_{\ell g} F(y)$.

Nem–korlátos jövedelmek esetén F növekvő volta redundáns feltétellé válik, tekintettel az alábbi *3.2 lemmára*.

Mielőtt rátérnénk a tétel bizonyítására, célszerű bevezetni néhány lemmát.

3.1 lemma [MARSHALL és OLKIN (1979), 447. l.]: Abból, hogy $F : V \to \mathbb{R}_+$ konkáv (szigorúan konkáv) következik:

$$\frac{F(v) - F(u)}{v - u} \geq [>] \frac{F(t) - F(w)}{t - w}$$

minden olyan $u, v, w, t \in V$ esetén, amelyre $u < v \leq t$, $u \leq w < t$. Megfordítva, ha (3.2) igaz abban a speciális esetben, amikor $u < v = w < t$ és $v - u = t - w$, akkor F konkáv (szigorúan konkáv).

3.2 lemma: Ha V nem korlátos, akkor abból, hogy $F : V \to \mathbb{R}_+$ (szigorúan) konkáv, következik, hogy F (szigorúan) növekvő.

Bizonyítás:

Tételezzük fel, hogy F konkáv, de nem növekvő, vagyis létezik olyan $0 \leq u < v$, amelyre $F(u) > F(v)$. A (3.2) egyenlőtlenség értelmében minden $w > v$-re

$$F(w) \leq F(v) + \frac{F(v) - F(u)}{v - u}[w - v] \tag{3.3}$$

A (3.3) kifejezés jobboldala mínusz végtelenhez tart, ahogy w tart a végtelenhez, ezért $F(w) < 0$, ami lehetetlen. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy F szigorúan konkáv voltából következik, hogy szigorúan növekvő. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3.3 lemma: Bármely $z \in D_n$ és minden $P := [p_{ij}]$ permutációs mátrix esetén:

$$\sum_{i=1}^{k} z_{n-i+1}^{z} \geq \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \right] \geq \sum_{i=1}^{k} z_i^{z} \quad (k = 1, 2, \ldots, (n-1)) \tag{3.4}$$

Bizonyítás : MARSHALL és OLKIN (1979) művének 141. lapján szereplő *A.3 tétel* alkalmazásával.

---

[5] Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor (gyengén) konkáv, ha

$$f(\tau u + (1 - \tau)v) \geq \tau f(u) + (1 - \tau) f(v)$$

minden $u, v \in \mathbb{R}$ és minden $\tau \in [0, 1]$ esetén. Ha $u \neq v$ és $\tau \in (0, 1)$ esetén szigorú egyenlőtlenség érvényes, akkor f szigorú konkáv.

Ezután rátérünk a tétel bizonyítására.

A *3.1 tétel bizonyítása* :
Tekintettel a *3.2 lemmára*, elegendő, ha figyelmünket a korlátos jövedelmek esetére korlátozzuk.

Elégségesség : Tételezzük fel, hogy $y'' \geq y'$; könnyen ellenőrizhető, ez egyenértékű azzal, hogy valamely $y' \in D_n$ esetén $y'' \geq y'$ és $y' \geq_\ell y$.[6]
Először azt bizonyítjuk, hogy $y' \geq_\ell y$ teljesüléséből következik $F(y') \geq_{\ell g} F(y)$. Tételezzük fel, hogy $y' = Ty$, ahol T a (2.4)-ben definiált T-transzformációs mátrix, és legyen $\varepsilon := \tau(y_j - y_i)$ a j személytől az i személyhez transzferált jövedelem. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $0 \leq \tau \leq 1/2$, mivel egy T-transzformációs mátrix és egy permutációs mátrix szorzata szintén T-transzformációs mátrix. Két esetet kell megvizsgálnunk.

1. eset : Az i és a j egyén közötti jövedelemtranszfer nem módosítja a jövedelemskálán elfoglalt egyéni helyzetüket, vagyis $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ maga után vonja $y'_1 \leq y'_2 \leq \ldots \leq y'_n$ teljesülését is. Ebben az esetben megtehetjük, hogy az egyéneket a jövedelemskálán eredetileg elfoglalt helyzetükkel jellemezzük:

(i) A $g < i$ egyének esetében $y'_g = y_g$. Ennélfogva $\mathrm{GL}(g/n; x') = \mathrm{GL}(g/n; x)$.

(ii) Az i egyén esetében $y'_i = y_i + \varepsilon \geq y_i$. Mivel F növekvő, $x'_i \geq x_i$ és $\mathrm{GL}(i/n; x') \geq \mathrm{GL}(i/n; x)$.

(iii) Az $i < h < j$ egyének esetében $y'_h = y_h$. Ekkor $\mathrm{GL}(h/n; x') \geq \mathrm{GL}(h/n; x)$.

(iv) A j egyén esetében $y'_j = y_j - \varepsilon \leq y_j$. Ezért

$$\mathrm{GL}(j/n; x') - \mathrm{GL}(j/n; x) = F(y_i + \varepsilon) - F(y_i) + F(y_j - \varepsilon) - F(y_j) \geq 0, \quad (3.5)$$

mivel F konkáv.

(v) Végül a $j < m < n$ egyének esetében $y'_m = y_m$, amiből következik $\mathrm{GL}(m/n; x') \geq \mathrm{GL}(m/n; x)$.

2. eset : Az i és a j egyén közötti jövedelemtranszfer megváltoztatja a jövedelemskálán elfoglalt helyzetüket. Ezért a következő helyzet alakul ki:

$$y_g \leq y_i \leq y_h < y_k \leq y_\ell \leq y_j \leq y_m$$

$$y'_g \leq y'_h < y'_i \leq y'_k \leq y'_j < y'_\ell \leq y'_m$$

Könnyebb a bizonyítás menetét az alábbi ábra segítségével követni, amelyen a jövedelem balról jobbra haladva növekszik:

---

[6] Ha adva van $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor és csak akkor írjuk, hogy $x \geq y$, ha $x_i \geq y_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ha $x \geq y$ és $x \neq y$, ennek jelölése $x > y$.

Az egyének helyzete										
Eloszlás	g	i	h	$\dots$	k	$\dots$	ℓ	j	m
y	y_g	y_i	y_h	$\dots$	y_k	$\dots$	y_ℓ	y_j	y_m
y'	y_g	y_h	$y_i+\varepsilon$	$\dots$	y_k	$\dots$	$y_j-\varepsilon$	y_ℓ	y_m

3.1 ábra

(i) A g helyzetben levő egyének esetében $y'_g = y_g$. Ennélfogva $\mathrm{GL}(g/n\,;x') = \mathrm{GL}(g/n\,;x)$.

(ii) Az i-edikként rangsorolt egyén esetében $y'_i = y_h \geq y_i$. Mivel F növekvő,

$$x'_i \geq x_i \quad \text{és} \quad \mathrm{GL}(i/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(i/n\,;x)\,.$$

(iii) A h helyzetben levő egyének esetében $y'_h = y_i + \varepsilon \geq y_h$. Ezért $\mathrm{GL}(h/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(h/n\,;x)$.

(iv) A k-adikként rangsorolt egyének esetében $y'_k = y_k$. Ezért $\mathrm{GL}(k/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(k/n\,;x)$.

(v) Az ℓ helyzetben levő valamennyi egyén esetében $y'_\ell = y_j - \varepsilon \leq y_\ell$. Ezért

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(\ell/n\,;x') - \mathrm{GL}(\ell/n\,;x) &= F(y_i+\varepsilon)/-F(y_i) + F(y_j-\varepsilon)/-F(y_k)\\ &\geq F(y_i+\varepsilon)/-F(y_i) + F(y_j-\varepsilon)/-F(y_j) \quad (F \text{ növekvő}) \qquad (3.6)\\ &\geq 0 \qquad (F \text{ konkáv})\,.\end{aligned}$$

(vi) A j-edikként rangsorolt egyén számára $y'_j = y_\ell \leq y_j$. F konkavitásánál fogva

$$\mathrm{GL}(j/n\,;x') - \mathrm{GL}(j/n\,;x) = F(y_i+\varepsilon)/-F(y_i) + F(y_j-\varepsilon)/-F(y_j) \geq 0\,. \quad (3.7)$$

(vii) Végül minden m-edikként rangsorolt egyén esetében $y'_m = y_m$, amiből következik

$$\mathrm{GL}(m/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(m/n\,;x)\,.$$

Ennélfogva mindkét esetben érvényes az $x' \geq_{\ell g} x$ reláció.
A $\geq_{\ell g}$ reláció tranzitivitása következtében az eredmény érvényes tetszőleges B bisztochasztikus mátrix esetében is.

Legyen most $w := (w_1, \dots, w_n)$ és $z := (z_1, \dots, z_n)$, ahol $w_i := F(y''_i)$ és $z_i := F(y'_i)$ minden i-re. Mivel F növekvő, $w_i \geq z_i$ minden i-re. Ez nyilvánvalóan egyenértékű azzal, hogy $w_i^w \geq z_i^w$ $(1,,2,\ldots,n)$, ahol $z^w = Pz$ (P olyan permutációs mátrix, amelyre $Pw = w^w$). Összegezve $j = 1,2,\ldots,k$-ra, kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{k} w_j^w \geq \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{r=1}^{n} p_{jr} z_r\right] = \sum_{j=1}^{k} z_j^w . \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{3.8}$$

Tekintettel a *3.3 lemmára*, ebből viszont következik

$$\sum_{j=1}^{k} w_j^w \geq \sum_{j=1}^{k} z_j^z \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{3.9}$$

vagyis $z \geq_{\ell g} w$, amivel befejeződik az elégségesség bizonyítása.

Szükségesség : Az ellenkező feltevésből kiindulva bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy az implikáció hamis. Először azt tételezzük fel, hogy F nem konkáv. A *3.1 lemma* értelmében ez azt jelenti, hogy létezik $u,v,w,t \in V$ úgy, hogy $u < v = w < t$, $v - u = t - w$ és

$$\frac{F(v) - F(u)}{v - u} < \frac{F(t) - F(w)}{t - w} . \tag{3.10}$$

Legyen $y := (u,\ldots,u,u,t) \in D_n$ és $y' := (u,\ldots,u,v,w) \in D_n$; ekkor nyilván $y' \geq_\ell y$ és ezért a fortiori $y' \geq_{\ell g} y$. Tekintettel 3.10-re,

$$\mathrm{GL}(k/n\,;x') - \mathrm{GL}(k/n\,;x) < 0\,,$$

ami ellentmond a (T3.1.b) feltevésnek.

Tételezzük most azt fel, hogy F nem növekvő, vagyis létezik olyan $u,v \in V$, amelyre $u < v$, de $F(u) > F(v)$. Válasszuk meg y-t úgy, hogy $y := (u,\ldots,u,u,v) \in D_n$ és vezessük be a következő definíciót:

$$\widehat{Q} := \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{v}{u} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Legyen $y' := \widetilde{Q}y$, valahányszor $u = 0$, egyébként pedig $y' := \widehat{Q}y$. Mindkét esetben $y' = (u,\ldots,u,v,v)$, úgyhogy $y' >_{\ell g} y$. Azonban

$$\mathrm{GL}(k/n\,;x') - GL(k/n\,;x) = 0$$

minden $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ esetén, és

$$\mathrm{GL}(k/n\,;\,x') - \mathrm{GL}(k/n\,;\,x) = F(v) - F(u) < 0$$

$k = (n-1)$ és n esetén. Ezért $F(y) >_{\ell g} F(y')$, ami megintcsak ellentmond a (T3.1.b) feltevésnek. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Ha (T3.1.a)-ban „növekvő és konkáv" helyett „szigorúan növekvő és konkáv"-ot, (T3.1.b)-ben pedig „$\geq_{\ell g}$" helyett „$>_{\ell g}$" jelet írunk, továbbá előírjuk, hogy $y \neq u\mathbf{1}$ és $y' \neq v\mathbf{1}$ $(u, v \in \mathbf{R}_{++})$ legyen, akkor megkapjuk a *3.1 tétel* „erős" változatát. A *3.1 tétel* közvetlen következménye, hogy a csökkenő és konvex adórendszerek megfordítják az eloszlások általánosított Lorenz–rangsorolását.

4. Az eloszlások igazságosság–szempontú jóléti rangsorolásának megőrzése

4.1 A leggazdagabb egyén jövedelmének növekedését — ceteris paribus — rendszerint az egyenlőtlenség fokozódásának tekintik. A $\geq_{\ell g}$ reláció szerinti jólétnövekedés ezért összeegyeztethető a jövedelemegyenlőtlenség fokozódásával, tehát az általánosított Lorenz–dominancia fogalmában rejlő jóléti megítélés összeütközésbe kerülhet azzal a társadalmi törekvéssel, hogy a jövedelemeloszlás egyenletesebbé váljék. Például a Pareto–féle „individualista" és szétválasztható jóléti függvény esetén (amikor is az egyéni jóléti szintek függetlenek a többiek jövedelmétől), a hatékonyság és az egyenlőség közötti konfliktus mindig a hatékonyság javára oldódik meg. Ez a nézőpont akkor elfogadható, ha feltételezzük, hogy valamely x állapotban az életszínvonal mérésének egyetlen releváns információja az egyének jövedelmi helyzete. Ha viszont elismerjük annak lehetőségét, hogy az egyes emberek irígyek lehetnek, és még azt is elismerjük, hogy ezt az információt is figyelembe kell vennünk, amikor a társadalmi jólétet mérjük, akkor nyilvánvalóan nem állja meg a helyét az a felfogás, hogy minden olyan helyzet, amelyben egyes egyedeknek magasabb a jövedelme, automatikusan előnyösebb. A hatékonyság és az egyenlőség között ilyen konfliktus elkerülésére SHORROCKS (1983) javasolta a megengedett jóléti függvények osztályának megszorítását, a hatékonysági preferencia olymódon történő gyengítésével, amely összeegyeztethetővé teszi azt az egyenlőség fokozódásával.

Mivel valamennyi jövedelem arányos növelése nyilvánvalóan nem változtatja meg a viszonylagos egyenlőtlenséget, az egyenlőség és a hatékonyság konfliktusát természetes módon megoldaná, ha megkövetelnénk: a jólét akkor növekedjék, ha valamennyi jövedelem arányosan nő[7]. Vezessük be a következő definíciót:

$$\mathrm{LR}(k/n\,;\,z) := \mathrm{GL}(k/n\,;\,\widehat{z})\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

[7] Ez az elv, amelyet „arányos jövedelemkiegészítésnek" neveznek, azt állítja, hogy a jövedelemegyenlőtlenség mérése szempontjából csak a viszonylagos jövedelemkülönbségek számítanak. Általában DALTON-nak (1920) tulajdonítják ezt az elvet, noha az, amit ő az arányos jövedelemkiegészítés elvének nevezett, valójában azt követelte meg, hogy a jövedelemegyenlőtlenségek csökkenjenek (ill. növekedjenek) az arányos jövedelemkiegészítés (ill. levonás) esetén. [lásd DALTON (1920), 335. l.].

ahol $\mathrm{LR}(k/n\,;\,z)$ annak a jövedelemnek a részaránya, amely a lakosság $(k/n)\times 100\%$ legszegényebb részének jut a z helyzetben, és azt mondjuk, hogy az x eloszlás viszonylagos Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele $x \geq_{\ell r} y$), akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}\,;x\right) \geq \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}\,;y\right) \quad \text{minden} \quad k = 1,2,\ldots,(n-1) \quad \text{esetén}. \tag{4.1}$$

Azt mondjuk, hogy az x eloszlás az általánosított viszonylagos Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele a továbbiakban $x \geq_{\ell r} y$), akkor és csak akkor, ha $x \geq_{\ell r} y$ és $\mu(x) \geq \mu(y)$. SHORROCKS (1983) dolgozatának *3. tételéből* következik, hogy $x \geq_{\ell r} y$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $z = \tau y$ eloszlás, amelyre y regresszív transzferek véges sorozatával állítható elő az x eloszlásból, vagy — ami ezzel egyenértékű — $W(x) \geq W(y)$ fennáll minden olyan Schur-konkáv $W : D_n \to \mathbb{R}$ jóléti függvényre, amelyre $W(\tau z) \geq W(z)$ minden $z \in D_n$ és $\tau \geq 1$ esetén (vagyis W az origóból kiinduló sugarak mentén növekvő).

Az itt említett értékítélet azonban még mindig igen erősnek tűnhet, hiszen az eloszlás „felnagyítása" változatlanul hagyja ugyan a jövedelemarányokat, de növeli a jövedelmek közötti abszolút különbségeket [lásd KOLM (1976)]. Bevezetve a

$$\mathrm{LA}(k/n\,;\,z) := \mathrm{GL}(k/n\,;\,\tilde{z})\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,,$$

jelölést, azt fogjuk mondani, hogy az x eloszlás abszolút Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást, (jele $x >_{\ell a} y$), akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{LA}\left(\frac{k}{n}\,;x\right) \geq \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n}\,;y\right) \quad \text{minden} \quad k = 1,2,\ldots,(n-1) \quad \text{esetén}. \tag{4.2}$$

Az abszolút Lorenz-kritérium egyformán rangsorolja azokat az eloszlásokat, amelyek között csak annyi a különbség, hogy ugyanazt a pozitív mennyiséget adjuk valamennyi egyéni jövedelemhez. $\mathrm{LA}(k/n\,;\,z)$ jelenti a $(k/n)\times 100\%$ legszegényebb egyén jövedelmének átlagos elmaradását az átlagos jövedelemtől a z helyzetben [lásd MOYES (1987a)].

Azt mondjuk, hogy az x eloszlás abszolút általánosított Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele $x \geq_{\ell ga} y$), akkor és csak akkor, ha $x \geq_{\ell a} y$ és $\mu(x) \geq \mu(y)$. SHORROCKS (1983) dolgozatának *4. tételéből* tudjuk, hogy $x \geq_{\ell ga} y$ akkor és csak akkor, ha $W(x) \geq W(y)$ fennáll minden olyan $W : D_n \to \mathbb{R}$ Schur-konkáv jóléti függvényre, amelyre $W(z + \theta\mathbf{1}) \geq W(z)$ minden $z \in D_n$, $\theta \geq 0$ esetén (vagyis W növekvő az első diagonálissal párhuzamos egyenesek mentén). Ezzel egyenértékű, hogy létezik olyan $z = y + \theta\mathbf{1}$ eloszlás, hogy y regresszív transzferek véges sorozata révén keletkezik a z eloszlásból.

A jövedelemeloszlások összehasonlítása a viszonylagos vagy az abszolút általánosított Lorenz-dominancia segítségével két lépésből álló művelet, először két eloszlás egyenlőtlenségét vetjük egybe, és azután használjuk fel az átlagjövedelemmel kapcsolatos információt. A szokásos módon definiáljuk a fenti rendezések aszimmetrikus részét.

4.2 Nyilvánvaló, hogy $\geq_{\ell g}$, $\geq_{\ell gr}$ és $\geq_{\ell ga}$ „egymásba skatulyázott" rendezések, ezért kimondhatjuk a sejtést, hogy

$$\mathcal{F}(\geq_{\ell ga}) \subseteq \mathcal{F}(\geq_{\ell gr}) \subseteq \mathcal{F}(\geq_{\ell g})$$

Valóban, mindaddig, amíg $n \leq 2$, a növekvő és konkáv jelleg (mindkettő szigoru értelemben) elégséges feltétel ahhoz, hogyy F megtartsa az eloszlások $\geq_{\ell ga}$ és $\geq_{\ell gr}$ szerinti rangsorolását. Nagyobb populációk esetében azonban ez már nem igaz. A részleteket illetően lásd a *Függeléket.* Hasznos lesz a következő

4.1 lemma :

Ha $n > 2$, (i) $\mathcal{F}(\geq_{\ell gr} \subseteq \mathcal{F} \geq_{\ell})$, (ii) $\mathcal{F}(\geq_{\ell ga} \subseteq \mathcal{F}(\geq_{\ell})$.

Bizonyítás :

Tekintettel a *2.1 tételre* és ACZEL (1966, 43. l.) *1. tételére*, vegyük először is észre, hogy ha $F \in \mathcal{F}(\geq_{\ell})$, akkor F megoldása a

$$F\left(\frac{u+t}{2}\right) = \frac{F(u)+F(t)}{2} \qquad u, t \in V \tag{4.3}$$

függvényegyenletnek.
A két következtetést egyidejűleg bizonyítjuk, megmutatva, hogy abban az esetben, amikor $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell})$, mindig találunk olyan eloszlást, (y és y'), amelyre $y' \geq_{\ell gr} y$ (illetve $y' \geq_{\ell ga} y$), de nem $x' \geq_{\ell gr} x$ (illetve nem $[x' \geq_{\ell ga} x]$). Tételezzük fel, hogy (4.3) hamis, és legyen

$$v = w = (u+t)/2\,, \quad \text{ahol} \quad u < t\,.$$

Két lehetőség van:

1. eset : $F(v) - F(u) > F(t) - F(w)$

Legyen $y := (u, \ldots, u, u, t) \in D_n$ és $y' := (u, \ldots, u, v, w) \in D_n$. Ekkor $y' \geq_{\ell} y$, ennélfogva $y' \geq_{\ell gr} y$ és $y' \geq_{\ell ga} y$ is érvényes. Másrészt

$$\sum_{i=1}^{n} F(y_i) < \sum_{i=1}^{n} F(y_i')\,,$$

amiből következik, hogy nem $[x' \geq_{\ell} x]$. Mármost ellenőrizhető, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ esetén

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x\right) &= \frac{kF(u)}{(n-2)F(u) + F(u) + F(t)} > \\ &> \frac{kF(u)}{(n-2)F(u) + F(v) + F(w)} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x'\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

vagyis nem $[x' \geq_{\ell r} x]$, ezért egyrészt $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$, másrészt pedig hasonlóképpen

$$\begin{aligned} \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \frac{k}{n}\left[F(u) - \frac{(n-2)F(u)+F(u)+F(t)}{n}\right] > \\ &> \frac{k}{n}\left[F(u) - \frac{(n-2)F(u)+F(v)+F(w)}{n}\right] = \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x'\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

vagyis nem $[x' \geq_{\ell a} x]$, tehát $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$.

2. eset : $F(v) - F(u) < F(t) - F(w)$

Legyen $y := (u,t,t,\ldots,t) \in D_n$ és $y' := (v,w,t,\ldots,t) \in D_n$. Nyilvánvaló, hogy $y' \geq_\ell y$, és így $y' \geq_{\ell gr} y$ valamint $y' \geq_{\ell ga} y$. Azonban

$$\sum_{i=1}^{n} F(y_i) > \sum_{i=1}^{n} F(y_i')$$

amiből következik, hogy nem $[x' \geq_\ell x]$. Továbbá tudjuk, hogy minden $k = 2,\ldots,$ $\ldots,(n-1)$ esetén

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \frac{F(u)+F(t)+(k-2)F(t)}{(n-2)F(t)+F(u)+F(t)} > \\ &> \frac{F(v)+F(w)+(k-2)F(t)}{(n-2)F(t)+F(v)+F(w)} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n};x'\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

vagyis $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$ és hasonlóképpen

$$\begin{aligned} \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \frac{1}{n}\left[F(u)+F(t)+(k-2)F(t)-k\frac{(n-2)F(t)+F(u)+F(t)}{n}\right] > \\ &> \frac{1}{n}F\left[F(v)+F(w)+(k-2)F(t)-k\frac{(n-2)F(t)+F(v)+F(w)}{n}\right] = \\ &= \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x'\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

vagyis $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$, tehát ismét ellentmondásra jutottunk.

Az $\mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$ és $\mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$ függvényosztály jellemzése a *4.1 lemma* közvetlen következménye.

4.1 tétel : Korlátos (valamint nem–korlátos) jövedelmek esetén:

(T4.1.a) Vagy $F(t) = b$ vagy $F(t) = at$ $(a, b \in \mathbb{R}_+)$ akkor és csak akkor, ha
(T4.1.b) minden $y, y' \in D_n$ $(n > 2)$ esetén $y' \geq_{\ell gr} y$ fennállásából következik, hogy $F(y') \geq_{\ell gr} F(y)$.

Bizonyítás :

Az elégségesség nyilvánvaló, úgyhogy a szükségességet bizonyítjuk. A *4.1 lemma* értelmében a (T4.1.a) feltevésből következik, hogy $F(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R}_+)$. A bizonyítás teljessé tétele céljából csak annyit kell még megmutatnunk, hogy a és b nem lehet egyidejűleg szigorúan pozitív. Az ellenkező feltevésből indulunk ki, és feltételezzük, hogy a és b nem válik zérussá. Legyen $y = (u, \ldots, u, t) \in D_n$ és $y' = (\tau u, \ldots, \tau u, \tau u + \varepsilon, \tau t - \varepsilon) \in D_n$, ahol $u < t, \tau > 1$ és $0 < \varepsilon \leq \tau(t-u)/2$. Nyilvánvalóan $y' \geq_{\ell r} y$ és $\mu(y') \geq \mu(y)$; így $y' \geq_{\ell gr} y$. Továbbá, minden $k = 1, 2, c \ldots, (n-2)$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x\right) = \frac{k(au+b)}{(n-1)(au+b) + (at+b)} > \\ > \frac{k(a\tau u + b)}{(n-1)(a\tau u + b) + a\tau t + b} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x'\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ez pedig valójában azzal egyenértékű, hogy $(at + b/\tau)(au + b) > (au + b/\tau)(at + b)$, ami viszont igaz, ha $b/\tau < b$, ahogy feltételeztük. Ezért nem $[x' \geq_{\ell r} x]$, ami ellentmond (T.4.1.b)-nek. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4.2 tétel : Korlátos (illetve nem korlátos) jövedelmek esetén:
(T4.2.a) $F(t) = at + b$ minden $a, b \in \mathbb{R}^2$ esetén feltéve, hogy $F(t) \geq 0$ [illetve $a, b \in \mathbb{R}_+$] akkor és csak akkor, ha
(T4.2.b) Minden $y, y' \in D_n$ $(n > 2)$ esetén, $y' \geq_{\ell ga} y$ fennállásából következik, hogy $F(y') \geq_{\ell ga} F(y)$.

Bizonyítás :

Az elégségesség nyilvánvaló, a szükségesség pedig következik a *4.1 lemmából.*

Ha $n = 2$, $\mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$ és $\mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$ növekvő és konkáv F függvényeket tartalmazza. Ha a (T4.1.b) illetve a (T4.1.b) feltételekben a $\geq_{\ell gr}$ illetve $\geq_{\ell ga}$ relációk helyébe az aszimmetrikus relációkat írjuk, továbbá előírjuk, hogy $a \neq 0$ legyen, megkapjuk a *4.1* és a *4.2 tétel* „erős" változatát.
Megjegyezzük, hogy ha F megőrzi az eloszlásoknak a $\geq_{\ell gr}$ reláció szerinti rangsorolását, akkor a fortiori megőrzi a $\geq_{\ell r}$ szerinti rangsorolásukat is. (Ugyanez érvényes a $\geq_{\ell ga}$ és a $\geq_{\ell a}$ relációkra is.) Könnyen belátható, hogy ennek a fordítottja is igaz, vagyis

4.1 korollárium : Minden $n \geq 2$ esetén

$$\text{(i)} \quad \mathcal{F}(\geq_{\ell gr}) = \mathcal{F}(\geq_{\ell r}), \qquad \text{(ii)} \quad \mathcal{F}(\geq_{\ell ga}) = \mathcal{F}(\geq_{\ell a}).$$

5. Eredményeink a szakirodalom tükrében és további kutatási lehetőségek

5.1 Tételezzük fel, hogy valamely $\succeq$ bináris reláció értelmében az y eloszlás rangsorolása magasabb, mint az y'-é, és tételezzük fel továbbá, hogy létezik olyan F függvény, amelyre

$$F(y) := (F(y_1), \ldots, F(y_n))$$

és

$$F(y') := (F(y'_1), \ldots, F(y'_n)).$$

Hogyan jellemezhető azon F függvények halmaza, amelyek megőrzik az y illetve az y' eloszlás rangsorolását? Bebizonyítottuk, hogy ha az $\succeq$ reláció általánosított Lorenz-rendezés, akkor F-nek növekvőnek és konkávnak kell lennie (*3.1 tétel*). Ha korlátozzuk a hatékonysági preferenciát olymódon, hogy a jólét növekedése összeegyeztethetővé váljék az egyenlőség viszonylagos értelemben vett fokozódásával, akkor F-nek lineárisnak kell lennie (*4.1 tétel*). Ha továbbmegyünk egy lépéssel, és azt kívánjuk, hogy a jólét akkor növekedjék, ha minden jövedelem azonos összeggel lesz nagyobb, akkor a kvázi-lineáris adórendszerekhez jutunk (*4.2 tétel*). MARSHALL és OLKIN (1979, 5. fejezet) részlegesen már tanulmányozta azokat a függvényeket, amelyek megőrzik az eloszlások rangsorolását. Ha felismerjük, hogy a Lorenz-dominancia nem más, mint a majorizálás reciproka, akkor látjuk, hogy a mi *2.1 tételünk* ekvivalens az ő *A.1.e. tételükkel.* Hasonlóképpen ők is felismerték azt a tényt, hogy a növekvő és konkáv függvények megőrzik, viszont a csökkenő és konvex függvények megfordítják az eloszlások általánosított Lorenz-rangsorolását (lásd *A.2 tételüket*). Úgy látszik azonban, nem ismerték föl azt a tényt, hogy ezeknek az állításoknak a megfordítása is igaz, és azt a függvényosztályt sem határozták meg, amely megőrzi az eloszlásoknak a viszonylagos és az abszolút általánosított Lorenz-kritérium szerinti rangsorolását. Más összefüggésekben THON (1985) a mi *3.1 tételünkhöz* igen hasonló eredményre jutott. Bizonyításában azonban additívan szétválasztható és deriválható jóléti függvényeket alkalmaz, míg nekünk ezekre az erős feltevésekre nem volt szükségünk.

5.2 Mint a bevezetőben hangsúlyoztuk, az eloszlások rangsorolásának megőrzése akkor különösen jelentős, amikor az F függvényt adórendszernek fogjuk fel. A tanulmányban levezetett tételeknek a jövedelemadózásra vonatkozó következményei legalább három esetben fölöttébb érdekesek.

Először is, egyes esetekben fontos lehet számunkra, hogy meg tudjuk állapítani, milyen jóléti és/vagy egyenlőtlenségi hatást gyakorol az adózás előtti jövedelem valamilyen megváltozása az adózás utáni jövedelemre. Az eloszlás rangsorolásának megőrzése — mint követelmény — eleve kizárja az olyan adórendszereket, amelyeknél az adózás előtti jövedelmek egyenlőbbé válása az adózás utáni jövedelmek jóléti értékének csökkenését eredményezi, hiszen ez nyilvánvalóan kedvezőtlen tulajdonság lenne egy adórendszer szempontjából. Tételezzük föl, hogy a jövedelmeket újabb és újabb adózás alá vetjük. Ez történik például, amikor a társadalombiztosítási hozzájárulást vetik ki az első lépésben, és az ebből adódó nettó jövedelemre vetik ki a jövedelemadót, vagy amikor a szociális juttatásokat beleszámítják a jövedelemadó alapjába. Az adóreformok alapvető konzisztenciakövetelménye, hogy a legszegényebbek helyzetének javítását célzó transzferfizetések módosító hatása ne semmisüljön meg a jövedelemadó levonása után. Tételeink konkáv, lineáris vagy kvázi–lineáris jövedelemadózási rendszert írnak elő, a célnak megfelelően választott jóléti kritérium szerint.

Másodszor, az adózás előtti rangsorolás megőrzése az adózás utáni jövedelemelosztásban nyilvánvaló következményekkel jár a jövedelemadózás országok közötti vagy idősoros összehasonlításakor. Mindeddig az a szokásos gyakorlat, hogy az adózás utáni eloszlások között megfigyelhető különbségeket az adózás előtti helyzetnek és/vagy az érvényben lévő adórendszernek tulajdonítják. Ha adva van valamilyen rögzített adózás előtti eloszlás, akkor minél progresszívebb az adórendszer, annál erőteljesebb az egyenlítő hatása. A *3.1 tétel* egyik legfontosabb következménye szerint: ha adva van egy rögzített konkáv adórendszer, akkor minél magasabb rangot kapott az általánosított Lorenz–dominancia szerint valamely adózás előtti eloszlás, annál magasabb lesz az adózás utáni eloszlás rangja is [további részleteket illetően lásd MOYES (1988b)].

Végül, az adórendszerek kellemes tulajdonságának tekinthető, ha biztosítják, hogy amennyiben a népesség valamely csoportja egy másik csoportnál kedvezőbb helyzetben van az adózás előtt, akkor ez a helyzet az adózás után is fennmaradjon. Ez a feltétel speciális esetként tartalmazza azt a követelményt, hogy az adóalanyoknak a jövedelemskálán elfoglalt helyzete ne változzék. A *3.1 tétel* triviális módosítása igazolja, hogy F növekvő és konkáv jellege elegendő annak kiküszöbölésére, hogy a csoportoknak a jövedelemskálán való rangsorolása megváltozzék.[8]

5.3 Felhívjuk a figyelmet két lehetséges általánosításra. A tanulmányban mindvégig homogén népességet vizsgáltunk, továbbá feltételeztük, hogy az adót, amelyet valamely egyén fizetni köteles, kizárólag eredeti jövedelme alapján számítják ki. ATKINSON és BOURGNIGNON újabb kutatásaira (1987) támaszkodva, kevésbé szűkkörű fogalmat alkothatunk az adózásról, megengedve, hogy az a jövedelem, amely valamely adóalany rendelkezésére áll az adó megfizetése után, az adózás volumenétől és az adózás előtti jövedelemtő függjön, és ekkor azokat az adórendszereket keressük, amelyek megőrzik az eloszlások a szerzők által meghatározott „általánosított" jóléti rangsorolását. Az általánosítás egy másik lehetséges irányaként feltételezhetjük, hogy minden egyén adózás utáni jövedelme az egész eloszlásnak a függvénye. Történtek már ilyen irányú kísérletek, úgyhogy néhány eredmény már rendelkezésünkre áll. Például MARSHALL és OLKIN (1979, A.14) bebizonyította, hogy minden $H(z) : D_n \to D_n$ függvény, amelynek definíciója $H(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, (ahol $f_j : D_n \to \mathbb{R}_{++}$ Schur–konkáv) megőrzi az adózás előtti

[8] Ha adva van az $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak egy nem üres S részhalmaza és egy $z \in D_n$ eloszlás, jelöljük $z(S)$-sel z-nek az S-re való korlátozását. A népességcsoportok esetében például a (T3.1.b) feltételt így lehetne felírni: Minden $y \in D_n$ és minden $S, T \subseteq N$ esetén az $y(S) \geq_{\ell g} y(T)$ egyenlőtlenségből következik $F(y(S)) \geq_{\ell g} F(yT))$.

eloszlások Lorenz–rangsorolását az adózás utáni eloszlások általánosított Lorenz–rangsorolását tekintve.[9] Nyilvánvaló, hogy a jelenlegi elemzés elmélyíthető lenne, ha figyelembe vennénk az egyének közötti különbségeket, és/vagy ha a redisztribúció utáni jövedelmet az összes adózás előtti jövedelem függvényeként fognánk fel. Ezeket a kérdéseket a további kutatásokra bízzuk.

Függelék

Ha $n = 2$, a növekvő és konkáv jelleg elégséges feltétele annak, hogy az F függvény megőrizze az eloszlások rangsorolását mind a $\geq_{\ell gr}$, mind pedig a $\geq_{\ell ga}$ relációra nézve. Legyen $y := (u, t)$ és $y' := (\tau u + \varepsilon)$, ahol $u < t$, $\tau \geq 1$ és $0 < \varepsilon \leq \tau(t-u)/2$. Ebből következik, hogy $y' >_{\ell r} y$ és $\mu(y') \geq \mu(y)$; tehát $y' >_{\ell gr} y$. Mivel F növekvő és konkáv (mindkettő szigorúan),

$$F(\tau u + \varepsilon) + F(\tau t - \varepsilon) > F(u) + F(t)\,.$$

átrendezés után ez ekvivalens az alábbival:

$$\begin{aligned}\mathrm{LR}\left(\frac{1}{2}\,; x'\right) = \frac{F(u)}{F(u)+F(t)} > \frac{F(\tau u + \varepsilon)}{F(\tau u + \varepsilon) + F(\tau t - \varepsilon)} = \\ = \mathrm{LR}\left(\frac{1}{2}\, m; x\right)\end{aligned} \tag{A.1}$$

vagyis $F(y') >_{\ell gr} F(y)$. Vezessük be most a következő definíciót: $y' := (u + \theta + \varepsilon t + \theta - \varepsilon)$, ahol $\theta \geq 0$ és $0 < \varepsilon \leq (t-u)/2$, ekkor hasonló gondolatmenettel kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathrm{LA}\left(\frac{1}{2}\,; x'\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{F(u) - F(t)}{2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{F(u+\theta+\varepsilon) - F(u+\theta-\varepsilon)}{2} = \\ = \mathrm{LA}\left(\frac{1}{2}\,; x\right)\end{aligned} \tag{A.2}$$

vagyis $F(y') >_{\ell ga} F(y)$. Annak megmutatása céljából, hogy F növekvő és konkáv jellege (mindkettő szigorúan) nem elégséges annak biztosítására, hogy megőrizze az eloszlások rengsorolását a $\geq_{\ell gr}$ relációra nézve, ha $n > 2$, válasszunk így: $y := (u, \ldots, u, u, t) \in D_n$ és $y' := (u, \ldots, u, u + \varepsilon, t - \varepsilon) \in D_n$, ahol $0 < \varepsilon \leq (t-u)/2$. A konstrukciónál fogva $y' \geq_\ell y$, ezért $y' \geq_{\ell gr} y$ és $y' \geq_{\ell ga} y$. Ahhoz, hogy nem $[x' \geq_{\ell r} x]$ teljesüljön, elegendő, hogy

$$\mathrm{LR}(k/n\,; x) > \mathrm{LR}(k/n\,; x')$$

---

[9] A megfordított állítás azonban hamis, amint könnyen beláthatjuk az $f_j(z) := z_j/\mu(t)$ választással. Tételezzük fel, hogy az x eloszlás progresszív transfer révén keletkezett az y eloszlásból. Nyilvánvaló, hogy $\mu(x) = \mu(y)$ és így $\widehat{x} =: H(x) \geq_{\ell g} H(y) := \widehat{y}$, noha kétségtelen, hogy f_j nem Schur–konkáv.

legyen legalább egy $k \in \{1, 2, \ldots, (n-1)\}$ esetén. A szigorú konkavitásból következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x\right) &= \frac{kF(u)}{(n-1)F(u) + F(t)} > \\ &> \frac{kF(u)}{(n-2)F(u) + F(u+\varepsilon) + F(t-\varepsilon)} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x'\right) \end{aligned} \tag{A.3}$$

minden $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ esetén, így tehát nem $[x' \geq_{\ell r} x]$, amiből következik, hogy nem $[x' \geq_{\ell gr} x]$. Azonban legalábbis ebben a speciális esetben a szigorú konkavitásból nem következik $x \geq_{\ell r} x'$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mathrm{LR}((n-1)/n; x') > \mathrm{LR}((n-1)/n; x);$$

ezért az x eloszlás viszonylagos Lorenz-görbéje egyszer — és felülről — keresztezi x' viszonylagos Lorenz-görbéjét. Hasonló következtetés vonható le az x és az x' eloszlás abszolút Lorenz-görbéjére nézve is, amiből következik, hogy nem $[F(y') \geq_{\ell ga} F(y)]$.

(Beérkezett: 1988. december 29-én.)

Irodalom

ACZEL, J., (1966): *Lecture on functional equations and their applications*. New-York: Academic Press.

ATKINSON, A.B., (1970): On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory*, Vol.2, pp.244–263.

ATKINSON, A.B. és F. BOURGUIGNON, (1987): Income distribution and differences in needs, in G.R. Feiwel (ed.), *Arrow and the foundations of the theory of economic policy*, MacMillan.

DALTON, H., (1920): The measurement of the inequality of incomes, *Economic Journal*, Vol.30, pp.348–361.

DASGUPTA, P., SEN, A.K. és D. STARRETT, (1973): Notes on the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory*, Vol.6, pp.180–187.

EICHHORN, W., FUNKE, H. és W.F. RICHTER, (1984): Tax progression and inequality of income distribution, *Journal of Mathematical Econimcs*, Vol.13, pp.127–131.

FEI, J.C.H., (1981): Equity oriented fiscal programs, *Econometrica*, Vol.49, pp.869–881.

FIELDS, G.S. és J.C.H. FEI, (1978): On inequality comparisons, *Econometrica*, Vol.46, pp.303–316.

JAKOBSSON, U., (1976): On the measurement of the degree of progression, *Journal of Public Economics*, Vol.5, pp.161–168.

KOLM, S.C., (1976): Unequal inequalities 1, *Journal of Economic Theory*, Vol.12, pp.416–442.

MARSHALL, A.W. és I. OLKIN, (1979): *Inequalities: Theory of majorization and its applications*. New-York, Academic Press.

MOYES, P., (1987a): A new concept of Lorenz domination, *Economics Letters*, Vol.23, pp.203–207.

MOYES, P., (1987b): *Taxation des revenus, inégalité et bien-être social: Quelques éléments d' analyse*, Thése pour le Doctorat d'Etat, L.A.R.E., Economie Publique.

MOYES, P., (1988a): A note on minimally progressive taxation and absolute income inequality, *Social Choice and Welfare*, Vol.5, pp.227–234, reprinted in W. GAERTNER és P.K. PATTANAIK (eds.), *Distributive Justice and Inequality*, Heidelberg, Springer–Verlag.

MOYES, P., (1988b): Progresszive taxation and after tax welfare, L.A.R.E, Economie Publique, Discussion Paper No.8802.

SHORROCKS, A.F., (1983): Ranking income distributions, *Economica*, Vol.50, pp.3–17.

THON, D., (1985): A note on taxation, incentives and risk sharing, *Operations Research Letters*, Vol.3, pp.323–325.

THON, D., (1987): Redistributive properties of progressive taxation, *Mathematical Social Sciences*, Vol.14, pp.185–191.

Functions that Preserve the Welfare Ranking of Distribution

We identify in the paper those classes of functions that preserve the ranking of distributions according to three welfare criterion introduced recently by A.F. Shorrocks. It is proven that a necessary and sufficient condition for a function to preserve the generalized Lorenz ordering of distributions is that it is increasing and concave. Requiring welfare improvements to be compatible with more equality, we obtain linear [resp. quasi–linear] functions when emphasis is placed on relative [resp. absolute] income differentials.