Szigma, XXI. 1989/90. 1. sz.

FRANÇOIS FAURE — PATRICK SEVESTRE

Dinamikus hibakomponens modellek különböző konzisztens esztimátorai tulajdonságainak összehasonlítása Újabb eredmények*

1. Bevezetés

A hibakomponens modellek hagyományos esztimátorainak többsége (mint például a klasszikus legkisebb négyzetek (OLS), a *between*, a *within* és a GLS) dinamikus modellek esetén véges idősornál közismerten inkonzisztens (ld. P. BALESTRA — M. NERLOVE (1967), T. W. ANDERSON — C. HSIAO (1982), S. NICKELL (1982), P. SEVESTRE — A. TROGNON (1983, 1985) . Ez az önkonometrikusokat e modellek konzisztens esztimátorainak kidolgozására ösztönözte.

P. BALESTRA — M. NERLOVE (1967)-es gondolatébresztő tanulmányukban egy kétfokozatú legkisebb négyzetek (2SLS) típusú esztimátor kidolgozását javasolta.

Később T. W. ANDERSON — C. HSIAO (1982) két olyan esztimátort határozott meg, amelyek konzisztenciája a differenciált modell reziduumainak tulajdonságain alapul.

P. Mazodier, felhasználva C. GOURIEROUX — A. MONFORT — A. TROGNON (1981) aszimptotikus legkisebb négyzetekre vonatkozó eredményeit az időbeli átlagokra felírt modellre alkalmazott OLS segítségével nyerhető konzisztens esztimátort javasolt.

Végül, kihasználva, hogy minden λ-típusú esztimátor torzítása kiszámítható, belátható, hogy a kezdeti megfigyelések értékétől függetlenül is létezik λ-ra egy olyan — a modell paramétereitől függő — λ' érték, amely biztosítja a hozzá tartozó λ-típusú esztimátor konzisztenciáját (ld. P. SEVESTRE — A. TROGNON (1983), P. SEVESTRE (1984)).

Mindezen esztimátorok konzisztensek véges T esetén is, de nagyon keveset tudunk aszimptotikus szórásukról vagy véges minta melletti viselkedésükről.

Egy előző cikkben (P. SEVESTRE (1987)) e becslési módszerek kis mintanagyság ($N = 25, T = 10$) melletti viselkedését Monte-Carlo módszerrel elemeztük.

Az alábbi cikknek kettős célja van. Egyrészt, hogy további információt nyújtson a fenti esztimátorok viselkedéséről arra az esetre, amikor rögzített T mellett nő az egyedek száma (N). Másrészt további konzisztens esztimátorokra terjesztjük ki a

* F. FAURE és P. SEVESTRE (1988): „Comparative properties of various consistent estimators for dynamic error components models: further results" (*Fordította*: KŐRÖSI Gábor). A cikk bizonyos szempontból P. Sevestre és A. Trognon előző oldalakon található cikkének folytatása, az abban ismertetett eredményekre is épít. (ford.)

korábbi tanulmányban elmondottak érvényességét. (Ezen esztimátorok egy részét P. SEVESTRE és A. TROGNON ugyanebben a számban közölt cikke ismerteti.)

A tanulmány *2. részében* mutatjuk be a modellt és a vizsgált esztimátorokat, a *3. részt* az adatgeneráló folyamat bemutatásának szenteljük, és végül a *4. részben* foglaljuk össze és elemezzük a szimulációk legfontosabb eredményeit.

2. A modell és az esztimátorok

2.1. A modell

Tekintsük a következő hibakomponens modellt:

$$y = X\delta + \varepsilon \tag{1}$$

ahol

$y = (y_{nt})$ az endogén változó megfigyeléseinek $(NT \times 1)$ elemű vektora,

$X = (y_{n,t-1}, x_{1nt}, \ldots, x_{Knt})$ a késleltetett engodén és egzogén változók megfigyeléseinek $(NT \times K+1)$ elemű mátrixa,

$\delta = (a, b_1, \ldots, b_k)$ az együtthatók $(K+1 \times 1)$ elemű vektora, és

$\varepsilon = (\varepsilon_{nt})$ a reziduumok $(NT \times 1)$ elemű vektora,

melyekre a következők érvényesek:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nt} &= u_n - w_{nt} \\ Eu_n &= 0; \quad Eu_n u_{n'} = \delta_{nn'}\sigma_u^2 \\ Ew_{nt} &= 0; \quad Ew_{nt}w_{n't'} = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\sigma_w^2 \\ Eu_n w_{n't} &= 0; \quad \forall n, n', t \end{aligned}$$

Ennek a modellnek sokféle konzisztens esztimátora van, de ezek mindegyike értelmezhető instrumentális változókkal is, vagyis felírhatók a

$$\hat{\delta} = (Z'X)^{-1}y = \delta + (Z'X)^{-1}Z'\varepsilon \tag{2}$$

alakban, ahol X-re és ε-ra a korábbi definíció érvényes, míg Z egy olyan $(NT, K+1)$ méretű mátrix, amelyre:

a. $\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{Z'X}{NT} = M$, ahol M pozitív definit mátrix,

b. $\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{Z'\varepsilon}{NT} = 0.$

2.2. Az esztimátorok

2.2.1. A Liviatan esztimátor

Ezt az esztimátort eredetileg idősorok alapján számszerűsített autokorrelált reziduumú autoregresszív modellek becslésére javasolták. Az esztimátor alapgondolata, hogy az egyik késleltetett egzogén változót választjuk a késleltetett endogén változó instrumentumául. Igy az esztimátor a (2) képlettel adható meg a

$$Z = (x_{in,t-1}, \dots, x_{int}, \dots, x_{Knt}) \tag{3}$$

mátrix-szal, ahol $x_{in,t-1}$ az $x_{1n,t-1}, x_{2n,t-1}, \dots, x_{Kn,t-1}$ elemek valamelyike.

Az esztimátor konisztenciája a X változók egzogenitásának következménye.

2.2.2. A Balestra-Nerlove esztimátor (1966)

Ennél az esztimátornál a késleltetett endogén változó instrumentuma nem korlátozódik valamely egzogén változó késleltetettjére, hanem azok lineáris kombinációja; pontosabban az $y_{n,t-1}$ ezen változók terére vetített képe:

$$\hat{y}_{n,t-1} = \sum_k \sum_i \hat{\delta}_{ki} x_{kn,t-i}. \tag{4}$$

Így ezt az esztimátort is a (2) képlet adja meg

$$Z = (\hat{y}_{n,t-1}, x_{1nt}, \dots, x_{Knt}) \tag{5}$$

felhasználásával.

Megjegyzés: Ha a modell csak egy egzogén változót tartalmaz, és annak csak egy időszakkal késleltetettje szerepel, akkor ez az esztimátor megegyezik a Liviatan esztimátorral.

2.2.3. Az egyedeken belüli (within) Balestra-Nerlove esztimátor

A paneladatok egyik legfontosabb előnye, hogy az egyedek belső- *(within)*, külső *(between)* szórása alapján, vagy a kettő együttes felhasználásával egyaránt becsülhető a modell.

Speciális esetként az instrumentális változók módszere a *within* modellekre is alkalmazható[1]:

$$y_{nt} - y_{n.} = \alpha(y_{n,t-1} - y_{n.,t-1}) + \sum_k \delta_k (x_{knt} - x_{kn.t}) + \varepsilon_{nt} - \varepsilon_{n.t}. \tag{6}$$

---

[1] Ez a módszer a between modellre is alkalmazható. E becslés egyes tulajdonságainak vizsgálatát is tervezzük.

Majd — *Balestra* és *Nerlove* nyomán — $(y_{n,t-1} - y_{n.,t-1})$ instrumentumaként $(\hat{y}_{n,t-1} - \hat{y}_{n.,t-1})$ választható, ahol:

$$\hat{y}_{n,t-1} - \hat{y}_{n.,t-1} = \sum_k \sum_i \hat{\delta}_{ki}(x_{kn,t-i} - x_{kn.,t-i}). \tag{7}$$

Az X változók egzogenitása mellett ez szintén konzisztens esztimátorhoz vezet.

2.2.4. Az Anderson-Hsiao esztimátor

Annak a két esztimátornak a konzisztenciája, amit *T. W. Anderson* és *C. Hsiao* ajánlott, a modell differenciálása utáni reziduumok tulajdonságain alapul. A differenciált modell:

$$y_{nt} - y_{n,t-1} = \alpha(y_{n,t-1} - y_{n,t-2}) + \sum_k \delta_k(x_{knt} - x_{kn,t-1}) + w_{nt} - w_{n,t-1}. \tag{8}$$

Mivel feltesszük w_{nt} autokorrelálatlanságát az $(y_{n,t-2} - y_{n,t-3})$ vagy az $y_{n,t-2}$ változó megfelelő instrumentuma az $(y_{n,t-1} - y_{n,t-2})$-nek. Ezek a változók nyilvánvalóan korrelálnak $(y_{n.t-1} - y_{n.t-2})$-vel, de $(w_{nt} - w_{n.t-1})$-gyel nulla az aszimptotikus korrelációjuk.

Anderson és Hsiao két esztimátorának definíciója:

$$\hat{\delta} = (\tilde{Z}\tilde{X})^{-1}\tilde{Z}'\tilde{y}, \tag{9}$$

ahol

$$\tilde{x} = (y_{n,t-1} - y_{n,t-2}, x_{1nt} - x_{1n,t-1}, \ldots, x_{knt} - x_{kn,t-1})$$
$$\tilde{y} = (y_{n,t} - y_{n,t-1})$$

és az első esztimátorra

$$\tilde{Z} = (y_{n,t-2} - y_{n,t-3}, x_{1nt} - x_{1n,t-1}, \ldots, x_{Knt} - x_{Kn,t-1}) \tag{11}$$

a másodikra pedig

$$\tilde{Z} = (y_{n,t-2}, x_{1nt} - x_{1n,t-1}, \ldots, x_{Knt} - x_{Kn,t-1}) \tag{10}$$

2.2.5. Az „egzogén” Anderson-Hsiao esztimátor

Késleltetett egzogén változó differenciált modellre is alkalmazható instrumentumként. Az X változóinak egzogénitása következtében bármelyik $(x_{in,t-1} - x_{in,t-2})$ elfogadható instrumentum. (i az egzogén változó sorszáma.) Így a (9) esztimátor

$$\tilde{Z} = (x_{in,t-1} - x_{in,t-2}, x_{1nt} - x_{1n,t-1}, \ldots, x_{Knt} - x_{Kn,t-1}) \tag{12}$$

esetében is konzisztens.

2.2.6. Az időpontok közötti (between) esztimátor

GOURIEROUX, MONFORT és TROGNON (1981)-es, aszimptotikus legkisebb négyzetekre vonatkozó eredményeit felhasználva *P.Mazodier* az (1) modell becslésére a

$$y_{.t} = \alpha y_{.,t-1} + \sum_k \delta_k x_{kt} + \varepsilon_{.t} \tag{13}$$

modell legkisebb négyzetes becslését javasolja,

$$z_{.t} = \frac{1}{N} \sum_n z_{nt}$$

felhasználásával. Az esztimátor konzisztenciáját a $\operatorname{plim}_{T\to\infty} \varepsilon_{.t} = 0$ biztosítja.

Ez az esztimátor is értelmezhető instrumentális változók felhasználásával. Legyen

$$Z = \left(\frac{J_N}{N} \otimes I_T\right) X$$

ahol I_T a $(T \times T)$ egységmátrix,

J_N egy olyan $(N \times N)$ mátrix, melynek minden eleme 1, és

X a magyarázó változók (korábban definiált) mátrixa.

Könnyen belátható, hogy a (2) esztimátor megegyezik a (13) modellre alkalmazott OLS esztimátorral.

2.2.7. Az általánosított Balestre-Nerlove esztimátor[2]

P. BALESTRA és M. NERLOVE alaptanulmányukban egy olyan általánosabb esztimátort is felvetettek, amely csak akkor konzisztens, ha az N és T növekedésével $T/N \to \infty$. Mint azt a bevezetésben is hangsúlyoztuk, a paneladatbázisok többsége viszonylag sok egyedre és kevés időpontra tartalmaz megfigyeléseket. Így a T/N arány általában nem tarthat végtelenbe.

A cikkükben javasolt másik esztimátor (ld. *2.2.2. rész*) WHITE (1981) nyomán ennek ellenére általánosítható úgy, hogy hatásossága nőjön. Az esztimátor felírható

$$\hat{\beta} = (Z'\Omega^{-1}X)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-1}y \tag{14}$$

alakban, ahol:

$Z = (\hat{y}_{n,t-1}, X_{nt})$ olyan $(NT, K+1)$ méretű mátrix, amelyben $\hat{y}_{n,t-1}$ az $y_{n,t-1}$-nek a késleltetett egzogén változók terére vetített képe;

$\hat{\Omega}$ a reziduumok kovarianciamátrixának becslése (szokás szerint blokk-diagonális szerkezetű).

---

[2] Az esztimátort *P.Balestra* javasolta nekünk, amiért ezúton is köszönettel tartozunk.

Az esztimátor konzisztenciájának bizonyítása és más aszimptotikus tulajdonságok tárgyalása P. SEVESTRE és A. TROGNON előző cikkében található.

Ez az esztimátor is a korábban definiált körhöz tartozik a

$$Z = \hat{\Omega}^{-1} Z_{bn} \tag{15}$$

választással, ahol Z_{bn} a Balestra-Nerlove esztimátorhoz tartozó instrumentális változókat jelöli.[3]

2.2.8. A λ' esztimátor

Alkalmazzuk az OLS esztimátort a következő modellre:

$$\begin{aligned} y_{nt} + (\sqrt{\lambda} - 1)\bar{y}_n &= \alpha(y_{n,t-1} + (\sqrt{\lambda} - 1)\bar{y}_{n,t-1}) + \\ &+ \sum_k b_k(x_{knt} + (\sqrt{\lambda} - 1)\bar{x}_{kn}) + \varepsilon_{nt} + (\sqrt{\lambda} - 1)\bar{\varepsilon}_n, \end{aligned} \tag{16}$$

ahol λ nemnegatív.

A következő táblázat bemutatja, hogy e paraméter „helyes" megválasztásával megkaphatók a hibakomponens modell hagyományos esztimátorai:

λ érték	esztimátor
0	within
$(1-\rho)/(1-\rho-T\rho)$	GLS
$(1-\hat{\rho})/(1-\hat{\rho}-T\hat{\rho})$	közelítő GLS
1	OLS
∞	between

ahol a $\rho = \sigma_u^2/(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)$ az egyedi szórás aránya a teljes szórásban.

Mint az közismert, véges T esetében a fenti esztimátorok egyike sem konzisztens. Aszimptotikus hibájuk ($N \to \infty$, véges T esetében) az alábbi határértékkel arányos:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} \left(\sum_n \sum_T y_{n,t-1}\varepsilon_{nt} + (\sqrt{\lambda} - 1)T \sum_n \bar{y}_{n,t-1}\bar{\varepsilon}_n \right). \tag{17}$$

Magától értetődően merül fel az igény arra, hogy keressünk λ-nak egy olyan λ' értékét, amelyre a fenti torzítás eltűnik. Megmutatható (ld. P. SEVESTRE (1984), hogy

$$\lambda' = C(1-\rho) \Big/ \left(\frac{(Ey_{n_0}u_n)(1-\alpha^T)}{(\sigma_u^2 + \sigma_w^2)(1-\alpha)} + C(1-\rho-T\rho) \right) \tag{18}$$

ahol

[3] Természetesen más esztimátorokra is alkalmazható a fentiekhez hasonló „általánosítás". A nemrég megjelent M. ARELLANO és S. BOND (1987) cikk *White* eredményeit az Anderson-Hsiao esztimátorra alkalmazta.

$$C = \frac{1}{T}\frac{T-1-T\alpha-\alpha^T}{(1-\alpha)^2}.$$

A (16) modellre $\lambda = \lambda'$ mellett OLS-t alkalmazva a paraméterek konzisztens becslését kaphatjuk (ld. P. SEVESTRE és A. TROGNON előző cikkét).

Az előző esztimátorokhoz hasonlóan ez is felírható instrumentális változók segítségével, ahol

$$Z = (y_{n,t-1} + (\lambda'-1)y_{n_0,t-1}, x_{1nt} + (\lambda'-1)x_{1n}, \dots, x_{Knt} + (\lambda'-1)x_{kn} \tag{19}$$

X és y a korábban definiáltak.

Megjegyzés: Ha a folyamat kezdeti megfigyeléseiről $(y_{n_0}, n = 1, \dots, N)$ feltesszük, hogy azok nem valószínűségi változók, akkor $E(y_{n_0}u_n) = 0$. Ekkor

$$\lambda' = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_w^2 + T\sigma_u^2}$$

vagyis a λ' esztimátor egybeesik a GLS esztimátorral, ami ebben a speciális esetben ezért konzisztens. Ekkor a λ' esztimátor egy kétlépéses becslésre egyszerűsödik.

3. A Monte-Carlo kísérlet menete

A kísérletben használt modell az egyszerűség kedvéért csak egy egzogén változót tartalmaz. A modell a következő:

$$\begin{aligned} y_{nt} &= \alpha y_{n,t-1} + bx_{nt} + \varepsilon_{nt} \quad n = 1,\dots,N; \quad t = 1,\dots,10 \\ \varepsilon_{nt} &= u_n = w_{nt}. \end{aligned} \tag{20}$$

A reziduumokra vonatkozó feltevések megegyeznek a korábbiakkal.

Az egzogén változó stacioner AR(1) folyamat:

$$x_{nt} = cx_{n,t-1} + \omega_{nt}, \tag{21}$$

ahol

$$\begin{aligned} E\omega_{nt} &= 0; \quad E\omega_{nt}\omega_{n't'} = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\sigma_\omega^2 \\ Eu_n\omega_{nt} &= Ew_{nt}\omega_{n't'} = 0 \quad \forall n, n', t, t' \end{aligned}$$

és

$$x_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{\sqrt{1-c^2}} \tag{22}$$

Mivel egy korábbi tanulmányban (ld. P. SEVESTRE (1987)) a kezdeti megfigyelésre vonatkozó eltérő feltevések hatása elhanyagolhatónak bizonyult, az y-okat generáló folyamatra csak egy feltevéssel éltünk, azzal, hogy stacioner:

$$y_{n0} = bx_{n0} + \frac{u_n}{1-\alpha} + \frac{w_{n0}}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \quad n = 1,\dots,N. \tag{23}$$

Az így definiált (20)-(23) modell y és x változóira 100 különböző mintát generáltunk. Ez a következőképp történt:

— Két mintanagyságra ($N = 25$ és $N = 180$) 100 darab különböző mintát: $N(2(T+1)+1)$ független, azonos eloszlású véletlen számot generáltunk a RATS ökonometriai programcsomag véletlen szám generátorával. (Vagyis N értéket az u-kra, $N(T+1)$ értéket a w-kre és $N(T+1)$ értéket a ω-kra.)

— Ezeket a véletlen számegyütteseket úgy transzformáltuk, hgy szórásnégyzetük a következő legyen[4]:

$$\sigma_\omega^2 = 0.5$$
$$\sigma_u^2 = 0.1, 0.5, 0.9$$
$$\sigma_w^2 = 0.9, 0.5, 0.1$$

majd ezekből az

$$a = 0.1, 0.5, 0.9$$
$$b = 0.5,$$
$$c = 0.9$$

értékekkel (20)-(23) megfigyelésenkénti iterációjával generáltuk az x és y értékét. Így minden paraméter kombinációnál 100 különböző $N(T+1)$ elemű minta áll rendelkezésünkre az x-re és y-ra, amelyek mindegyike lehetővé teszi, hogy a modellt N egyedet ($N = 25, 180$) és 10 időpontot ($T = 10$) tartalmazó mintára becsüljük.

A (20) modellt ezen adatok felhasználásával becsültük a *2. részben* bemutatott módszerekkel. Összességében 20 különböző becslési eljárást vizsgáltunk:

— A Balestra-Nerlove esztimátort (BN) valamint az ennek megfelelő közelítő λ' (LBN) és GBN[5] (GBNN) esztimátorokat.

— A Balestra-Nerlove within-esztimátort (BNW) valamint az ennek megfelelő közelítő λ' (LBNW) és GBN (GBNW) esztimátorokat.

— A két Anderson-Hsiao esztimátort (AH1, AH2) valamint az ezeknek megfelelő közelítő λ' (L1, L2) és GBN (GBN1, GBN2) esztimátorokat.

— Az „egzogén" Anderson-Hsiao esztimátort (AH3) valamint az ennek megfelelő közelítő λ' (L3) és GBN (GBN3) esztimátorokat.

— Az időpontok közötti (Between Periods) esztimátort (BP) valamint az ennek megfelelő közelítő λ' (LP) és GBN (GBNP) esztimátorokat.

— A valódi λ' esztimátort (LL).

— A valódi általánosított Balestra-Nerlove esztimátort (GBN).

---

[4] Vagyis mindegyik esetben fennáll a $\sigma_u^2 + \sigma_w^2 = 1$ egyenlőség.

[5] GBN jelöli a továbbiakban az általánosított (generalized) Balestra-Nerlove esztimátort.

Megjegyzés: A kétlépéses módszerekben ρ-t a

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{(\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_\omega^2)} \tag{24}$$

formula segítségével becsültük, ahol

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{n=1}^{N} (\bar{y} - \hat{a}\hat{y}_{n.-1} - \hat{b}\bar{x}_n - \hat{d})^2 \tag{25}$$

valamint

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{N(T-1)-3} \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} ((y_{nt} - \bar{y}_n) - \hat{a}(y_{n,t-1} - \bar{y}_{n,-1}) - \hat{b}(x_{nt} - \bar{x}_n))^2 \tag{26}$$

az $Ey_{n0}u_n$-t pedig

$$Ey_{n0}u_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (y_{n0} - \bar{y}_0)(\bar{y}_n - \hat{a}y_{n,-1} - \hat{b}\bar{x}_n - \hat{d}) \tag{27}$$

képlettel számítottuk.

Mint azt a megelőző összefüggések is mutatják, annak ellenére, hogy az elméleti modell nem tartalmaz konstans tagot, (NERLOVE [1967,1971] nyomán) azt is becsültünk. Ezek után minden rendelkezésünkre áll a szimulációs kísérletek eredményeinek értékeléséhez.

4. Az esztimátorok tulajdonságainak összehasonlítása

A nagy tömegű numerikus eredmény emészthető formában való bemutatásának nehézségét figyelembe véve úgy döntöttünk, hogy az eredmények ismertetése során figyelmünket az „adott helyzetnek megfelelő” esztimátor kiválasztásának problémájára koncentráljuk.[6] Pontosabban az ismertetés során azon kutató szempontjait vettük figyelembe, aki azt szeretné tudni, hogy egy adott helyzetben melyik becslési módszert érdemes előnyben részesíteni, és melyik alkalmazása kerülendő[7]

---

[6] A számított eredmények terjedelme következtében itt csak ezek egy részének bemutatására van mód. Ebben a részben a szimulációk eredményeiből csak a legfontosabb eredményeket emeljük ki. Kívánságra az érdeklődő Olvasó rendelkezésére bocsátjuk részletes számítási eredményeinket is.

[7] Egy korábbi tanulmányban (P. SEVESTRE (1987)) bemutattuk, hogy az egzogén változó együtthatójának becslésére szinte mindegyik esztimátor tulajdonságai kielégítőek (kis torzítás és MSE). Így a tárgyalás a késleltetett endogén változó együtthatójának becslésére koncentrál, ahol az eredmények sokkal változékonyabbak.

4.1. Az „egylépéses" esztimátorok

4.1.1. A torzítás és szórás összehasonlítása kis N esetében ($N = 25$)

1. táblázat

A legtorzítottabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BP (-.1365)	BP (-.1372)	BP (-.1145)
0.5	BP (-.2320)	AH1 (.4299)	BP (-.1216)
0.9	AH2 (.5132)	BP (-.1619)	BP (-.074)

2. táblázat

A legkevésbé torzított esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	AH3 (-.0034)	AH3 (-.0076)	AH2 (-.0030)
0.5	AH3 (-.0028)	AH2 (.0029)	BNW (.0298)
0.9	BNW (-.0045)	BNW (-.0036)	BNW (-.0018)

3. táblázat

A legkisebb hatásosságú esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BP (.0740)	BP (.0729)	AH1 (.0649)
0.5	AH1 (.5066)	AH1 (1.989)	AH2 (13.351)
0.9	AH2 (155.48)	AH2 (.7689)	AH2 (.2645)

A fenti táblázatok alapján megállapítható, hogy kis egyedszám ($N = 25$) és erősen autokorrrelált endogén változó ($a = 0.9$) esetében a torzítás és a szóródás szempontjából egyaránt az egyedek közötti (*within*) Balestra-Nerlove esztimátor (BNW) tűnik a legjobbnak.

4. táblázat

A leghatásosabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	AH2 (.0094)	AH2 (.0108)	BNW (.0034)
0.5	BN (.0108)	BNW (.0105)	BNW (.0020)
0.9	BN (.0031)	BNW (.0118)	BNW (.0021)

Az időpontok közötti esztimátor (BP) ezzel szemben erősen torzítottnak és meglehetősen kis hatásosságúnak bizonyult. A módszerhez tartozó alacsony szabadságfokot figyelembe véve ebben semmi meglepő sincs.

Gyengén vagy közepesen autokorrelált endogén változó ($a = 0.1, 0.5$) esetén dilemmába kerülünk, mert a legkevésbé torzított és a leghatásosabb esztimátorok különbözőek. A legkevésbé torzítottnak ezekben az esetekben az Anderson-Hsiao osztályba tartozó esztimátok bizonyultak, míg a Balestra-Nerlove osztályba tartozók a leghatékonyabbak. Megfigyelhető, hogy a Balestra-Nerlove esztimátorok az átlagos négyzetes hiba (MSE) tekintetében felülmúlják az Anderson-Hsiao osztályt a közepesen autokorrelált endogén változók esetében, míg alacsony autokorreláció ($a = 0.1$) esetében többnyire ennek ellenkezője az igaz.

4.1.2. A torzítás és szórás összehasonlítása nagy N esetében ($N = 180$)

5. táblázat

A legnagyobb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BP (.9270)	BP (.9174)	AH1 (.1004)
0.5	AH1 (.5547)	AH1 (2.174)	AH2 (13.358)
0.9	AH2 (155.75)	AH2 (.7702)	AH2 (.2657)

Mint azt a fenti táblázatok világosan jelzik, nagy egyedszám esetén egyértelműen megválaszolható a kérdés, melyik esztimátort érdemes a torzítás szempontjából előnyben részesíteni, és melyiket nem: szinte kivétel nélkül mindig az időpontok közötti (BP) esztimátor a legtorzítottabb és a Balestra-Nerlove *within* esztimátor (BNW) torzítása a legkisebb.

Nem ilyen egyértelmű a választás a hatásossági kritérium szempontjából. Mégis,

6. táblázat

A legkisebb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	AH2 (.0096)	AH2 (.0108)	BNW (.0034)
0.5	BN (.0196)	BNW (.0106)	BNW (.0020)
0.9	BN (.0031)	BNW (.0118)	BNW (.0021)

7. táblázat

A legtorzítottabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BP (-.0131)	BP (-.1200)	BP (-.0704)
0.5	BP (-.1654)	BP (.1384)	AH1 (-.0697)
0.9	BP (-.1392)	BP (-.0972)	BP (-.0168)

8. táblázat

A legkevésbé torzított esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BNW (-.0007)	BNW (-.0051)	BNW (-.0045)
0.5	BNW (-.0017)	BNW (.0005)	BNW (.0002)
0.9	BN (-.0005)	AH3 (-.0006)	BNW (-.0003)

a következő táblázatok azt jelzik, hogy a leghatásosabb módszer keresése ugyanarra az eredményre vezet, mint amire ($N = 25$) esetében: a második Anderson-Hsiao módszer szemmel láthatólag nagyon jól viselkedik, amikor a késleltetett endogén változó együtthatója alacsony ($a = 0.1$). Más esetekben az egyedek közötti (Within) Balestra-Nerlove esztimátort célszerű választani.

A legkevésbé hatékony esztimátor tekintetében azonban lényeges különbség van az $N = 180$ és az $N = 25$ eset között. $N = 180$ esetében az időpontok közti esztimátor a legkisebb hatásosságú esztimátor, míg $N = 25$ esetében időnként némelyik Anderson-Hsiao esztimátor is osztozott ezen a rossz minősítésen.

9. táblázat

A legkisebb hatásosságú esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BP (.0783)	BP (.0744)	BP (.0480)
0.5	BP (.0839)	BP (0.745)	AH1 (.0653)
0.9	AH2 (.2374)	AH2 (.0990)	AH2 (.0155)

10. táblázat

A leghatásosabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	AH2 (.0012)	AH2 (.0014)	BNW (.0004)
0.5	BN (.0016)	BNW (.0013)	BNW (.0002)
0.9	BN (.0003)	BN (.0003)	BNW (.0002)

Az eddigiek alapján megállapótható, hogy az MSE szempontjából „legjobb" esztimátor nagyon közel van ahhoz, amit $N = 25$-re kaptunk. A második Anderson-Hsiao módszert célszerű alkalmazni, amikor a késleltetett endogén változó autokorrelációja gyenge ($a = 0.1$), míg az ettől eltérő esetekben a Balestra-Nerlove *within* esztimátort tűnik a „legjobb" választásnak.

11. táblázat

A legnagyobb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	BP (.0957)	BP (.0888)	BP (.0530)
0.5	BP (.1113)	BP (.0937)	AH1 (.0701)
0.9	AH2 (.2376)	AH2 (.0994)	AH2 (.0155)

12. táblázat

A legkisebb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	AH2 (.0012)	AH2 (.0014)	BNW (.0004)
0.5	BN (.0016)	BNW (.0013)	BNW (.0002)
0.9	BN (.0003)	BN (.0003)	BNW (.0002)

4.2. A kétlépéses esztimátorok

4.2.1. A kétlépéses módszerekhez kapcsolódó hatásosságnyereség

A kétlépéses módszerek alkalmazásának oka az a remény, hogy az egylépéses módszereknél hatásosabbak. A közelítő általánosított Balestra-Nerlove módszer esetén — legalább is aszimptotikusan — bizonyított ez a hatásosságnyereség a megfelelő egylépéses módszerhez képest. De semmit sem tudunk a közelítő λ' esztimátornak a megfelelő egy lépéses esztimátoréhoz képesti hatásosságáról, és a kétlépéses módszerek relatív hatásosságáról sincs semmilyen információnk.

A következő pontokban olyan eredményeket mutatunk be, amelyek ezekre a kérdésekre legalább részleges választ adnak.

4.2.1.1. Hatásosságnyereség kis N esetén ($N = 25$)

A kétlépéses módszerekhez kapcsolódó hatásosságnyereségnek fontos jellemzője, hogy ez a nyereség minden esetben létezik. Mégis, úgy tűnik, hogy ez a közelítő λ' esztimátor esetében nagyobb, mint a közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátor használatakor.

Az eredmények minden megvizsgált paraméterkombinációra érvényesek (ld. a *20. táblázatot*).

Pontosabban, a leghatásosabb egylépéses instrumentális változós esztimátort a leghatásosabb kétlépéses esztimátorhoz hasonlítva kitűnik, hogy a nyereség 1.7-10-szeres között mozog (v.ö. a *4.* és a *20. táblázatokat*). Ennek ellenére fel kell hívni a figyelmet arra, hogy nem minden kétlépéses esztimátor hatásosabb az egylépéseseknél (v.ö. a *4.* és a *19. táblázatokat*).

Úgy tűnik, kismintában is érvényesül a kétlépéses esztimátorok szórásának aszimptotikus függősége/függetlensége az első lépésben választott esztimátortól.[8]

A közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátor szórása független attól, melyik esztimátort használjuk az első lépésben. Ez az eredmény egyben azt is jelzi,

[8] Ld. P. SEVESTRE és A. TROGNON párhuzamosan közölt cikkét.

hogy ennél az esztimátornál gyakorlatilag semmilyen hatásosságveszteséget sem jelent egy konzisztens esztimátorral becsült kovarianciamátrix használata az elméleti helyett.

A közelítő λ' esztimátor hatásossága ezzel szemben erősen függ az első lépésben választott esztimátortól.

Ezek az eredmények szinte mindegyik paraméterkombinációira érvényesek.

13. táblázat

A legkisebb hatásosságú 'es a leghatásosabb közelítő λ' esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.188	1.403	2.643
0.5	1.320	2.409	5.941
0.9	5.259	6.452	3.457

14. táblázat

A legkisebb hatásosságú és aleghatásosabb közelítő GBN esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.073	1.040	1.042
0.5	1.259	1.068	1.058
0.9	4.075	1.909	1.163

Végül megemlítendő még, hogy a közelítő λ' esztimátor nem mindig számítható a (16) modellre alkalmazott OLS-sel. Ez a probléma azokban az esetekben merült fel, amikor $a = 0.9$ volt, és az első lépésben használt esztimátor az idődimenzió szerinti változékonyságon alapul (AH1, AH2.AH3,BNW, BP), mert a λ' becslése számos esetben negatív volt (legfeljebb az esetek 30 %-ában, többnyire azonban csak 1-3 %-ában). Mivel a (16) modellre alkalmazott OLS becslés során e paraméter négyzetgyökét kell számítani, az eljárás a fenti esetekben nem volt alkalmazható. A probléma azonban könnyen megkerülhető, ha a közelítő λ' esztimátort a (19) egyenletben megadott instrumentális változók segítségével számítjuk, amikor is a λ' négyzetgyökére nincs szükség.

Lássuk ezután, mi mondható ezekről a módszerekről nagy N-re.

4.2.1.2. Hatásosságnyereség nagy N esetén ($N = 180$)

A kétlépéses módszerekkel elérhető hatásosságnyereség ebben az esetben is szignifikáns:

Emellett a közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátor szórásának az első lépésben használt esztimátortól való függetlenségére vonatkozó aszimptotikus eredményeket teljes egészében igazolja.

A közelítő λ' esztimátor hatásossága ezzel szemben egyértelműen függ az első lépésben választott esztimátortól.

Ezek az eredmények minden paraméterkombinációra érvényesnek bizonyultak.

15. táblázat

A legkisebb hatásosságú és a leghatásosabb közelítő λ' esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.987	4.111	3.734
0.5	4.752	12.17	19.90
0.9	25.89	24.15	41.34

16. táblázat

A legkisebb hatásosságú és a leghatásosabb közelítő GBN esztimátor szórásnégyzetének aránya

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	1.059	1.010	1.006
0.5	1.145	1.022	1.024
0.9	2.218	1.343	1.077

4.2.2. A torzítás és szórás összehasonlítása

4.2.2.1. A torzítás és szórás összehasonlítása kis N esetén ($N = 25$)

Mint az alábbi táblázatok alapján jól látható, a torzítás és a hatásosság egymásnak ellentmondó kritériumok. A legkevésbé torzított esztimátor, ami többnyire a közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátorok osztályához tartozik, egyben gyakran a legkevésbé hatásos is (v.ö. a *18* és *19. táblázatokat*). Másrészt az esztimátorok közelítő λ' osztálya tűnik a leghatásosabbnak, de ezeknél többnyire — különösen alacsony ρ értékekre — gyenge negatív torzítás figyelhető meg.

17. táblázat

A legtorzítottabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	LP (-.0583)	LP (-.0228)	LBN (-.0122)
0.5	LP (-.0789)	LP (-.0358)	L1 (.0269)
0.9	LPN (-.0590)	LPN (-.0429)	LPN (-.0107)

18. táblázat

A legkevésbé torzított esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNN (-.0160)	LBN (-.0018)	GBNN (-.0029)
0.5	GBN1 (-.0084)	GBNN (-.0055)	GBNN (-.0018)
0.9	GBNP (-.0042)	GBN2 (-.0051)	GBNN (-.0005)

19. táblázat

A legkisebb hatásosságú esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	GBN1 (.0268)	GBNN (.0168)	GBNN (.0034)
0.5	GBNP (.0148)	GBN1 (.0092)	L1 (.0047)
0.9	GBN3 (.0160)	GBN3 (.0094)	GBN1 (.0017)

Ennek ellenére, figyelembe véve, hogy a torzítás a kétlépéses esztimátorok túlnyomó részénél meglehetősen kicsi, úgy tűnik, hogy annak, aki a legkisebb átlagos négyzetes hibájú esztimátort kívánja alkalmazni, többnyire a közelítő λ' esztimátorok valamelyikét érdemes választania.

4.2.2.2. A torzítás és a szórás összehasonlítása nagy N esetén ($N = 180$)

Mint az az alábbi táblázatokban világosan látszik, a különböző vizsgált kétlépéses esztimátorok relatív torzítására az $N = 25$ mellett nyertekhez nagyon hasonló, minőségileg megegyező eredményeket kaptunk.

20. táblázat

A leghatásosabb esztimátor

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	LP (.0038)	LP (.0038)	L2 (.0020)
0.5	LBN (.0027)	LBN (.0028)	LBNW (.0012)
0.9	LBN (.0007)	LBN (.0006)	LBN (.0002)

21. táblázat

A legnagyobb MSE

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNP (.0276)	GBNN (.0169)	GBNN (.0034)
0.5	GBNP (.0144)	GBN1 (.0092)	L1 (.0054)
0.9	GBN3 (.0160)	GBN3 (.0094)	GBN3 (.0018)

22. táblázat

A legkisebb MSE

a \ ρ	0.1	0.5	0.9
0.1	LBN (.0050)	LP (.0040)	L2 (.0021)
0.5	LBN (.0042)	LBN (.0029)	LBNW (.0012)
0.9	LBNW (.0028)	LBNW (.0018)	LBN (.0003)

A legkevésbé torzított esztimátor többnyire a közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátorok osztályához tartozik (ld. *24. táblázat*), míg a leghatékonyabb módszerek általában közelítő λ' típusúak.

23. táblázat

A legtorzítottabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	LP (-.0530)	LP (-.0152)	LP (-.0090)
0.5	LP (-.0666)	L1 (-.0264)	L1 (.0285)
0.9	LBN (-.0523)	LBN (-.0383)	L1 (-.0264)

24. táblázat

A legkevésbé torzított esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNN (.0000)	GBNW (.0000)	L1 (.0000)
0.5	GBNN (.0024)	GBN2 (.0000)	GBNP (.0001)
0.9	GBN1 (.0004)	GBNN (-.0001)	LBN (.0000)

Az $N = 25$ látottakhoz hasonlóan, figyelembe véve, hogy a kétlépéses esztimátorok torzítása majdnem mindig kicsi, a legkisebb átlagos négyzetes hibájú esztimátornak leggyakrabban az egyik közelítő λ' osztályba tartozó esztimátor bizonyult.

25. táblázat

A legkisebb hatásosságú esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNP (.0038)	GBNN (.0022)	LP (.0008)
0.5	GBNP (.0021)	L2 (0.0036)	L1 (.0028)
0.9	L1 (.0016)	LP (.0014)	L1 (.0015)

26. táblázat

A leghatásosabb esztimátor

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	L2 (.0004)	L2 (.0004)	L2 (.0002)
0.5	LBN (.0003)	LBN (.0003)	LBNW (.0001)
0.9	LBN (.0001)	LBN (.0000)	LBN (.0000)

27. táblázat

A legnagyobb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	GBNP (.0038)	GBNN (.0022)	LP (.0009)
0.5	LP (.0059)	L2 (.0036)	L1 (.0036)
0.9	LP (.0033)	LP (.0015)	L1 (.0022)

28. táblázat

A legkisebb MSE

ρ / a	0.1	0.5	0.9
0.1	LBN (.0013)	L2 (.0005)	L2 (.0002)
0.5	LBN (.0014)	LBN (.0003)	LBNW (.0001)
0.9	LBNW (.0005)	LBNW (.0004)	LBN (.0000)

5. Következtetések. Melyiket válasszuk?

Mint azt az eddigiekben ismertetett eredmények jelzik, az, hogy melyik a legmegfelelőbb esztimátor, az megítélés kérdése.

Ha valaki torzítatlan esztimátort keres, akkor jobbnak tűnik egy, a közelítő általánosított Balestra-Nerlove esztimátorok osztályába tartozó módszer alkalmazása. Az, hogy az osztályon belül melyik esztimátort válasszuk (vagyis az első lépésben alkalmazott esztimátor) a paraméterek értékétől függ.

Amennyiben a módszer hatásosságát tekintjük a döntő kritériumnak, akkor közelítő λ' esztimátor alkalmazása ajánlható.

Ezek mellett még a hibatagok struktúrájának félrespecifikálásával szembeni robosztusság lehet megfontolásra érdemes kritérium. Amennyiben az egyedhatás és az x változók közötti pozitív korrelációra számítunk, egyik olyan esztimátor sem lesz konzisztens, amelyik ezen változók késleltetettjeit használja instrumentumként (ilyen pl. az összes Balestra-Nerlove osztályú esztimátor). Ha viszont arra gyanakodhatunk, hogy az w-t hibatagok autokorreláltak, akkor az Anderson-Hsiao esztimátorok nem konzisztensek.

Hivatkozások

ANDERSON T.W. és C. HSIAO (1982): „Formulation and estimation of dynamic models using panel data". *Journal of Econometrics*, vol. 18, pp. 578-606.

ARELLANO M. és S. BOND „Some tests of specification for panel data: Monte - Carlo evidence and an application to employment eqations." *Working Paper*, Institute for fiscal Studies.

BALESTRA P. és M. NERLOVE (1966): „Pooling cross-section and time-series data in the estimation of a dynamic model" *Econometrica*, vol. 34, pp. 585-612.

GOURIEROUX C., A. MONFORT és A. TROGNON (1981): *Asymptotic least squares. Application to qualitative models* Document de travail INSEE — ENSAE No 8108.

LIVIATAN N. (1963) „Consistent estimation of distributed lags" *International Economic Rewiew*, vol. 4, pp. 44-52.

NERLOVE M. (1971) „Further evidence on the estimation of dynamic economic relations from a time-series of cross-sections" *Econometrica*, vol. 39, 99. 359-382.

SEVESTRE P. (1987): „Consistent estimators for dynamic error component models: a comparative simulation study". *ERUDITE Working Paper* No 87-03.

SEVESTRE P. és A. TROGNON (1983): „Proriétés de grands échantillons d' une classe d' estimateurs des modeles autoregressifs a erreurs composees." *Annales de l'INSEE, No 50, pp. 25-49.*

SEVESTRE P. és A. TROGNON (1985): „A note on autoregressive error components models" *Journal of Econometrics*, vol. 28, pp. 231-245.

SEVESTRE P. és A. TROGNON (1988): „Two step methods for dynamic error components models: a note" *ERUDETE Working Paper* No 88-05.

TROGNON A. (1987) *Efficacité des procédures en deux étapes: le cas des M-estimateurs quasi-généralisés* Document de travail INSEE/ENSAE.

WHITE H. (1984): *Asymptotic theory for econometricians* Academic Press.