Szigma, XXI. 1989/90. 1. sz.

TOM WANSBEEK

Paneladatok transzformációja a reziduális változók autokorrelációja esetén*

A véletlen egyedhatásokat tartalmazó paneladatokon végzett regressziós elemzés során, a véletlen egyedhatások a reziduális változók közötti időbeli (szeriális) korreláció forrásai lehetnek. A korreláció másik forrása az autokorreláció lehet. A cikk a vonatkozó mátrix struktúrák sajátosságait és egy növekedési görbe hatására való kiterjesztést tárgyalja. Azt az esetet is elemzi, amikor a hatások nem véletlenek, hanem rögzítettek, vagyis a modell állandó hatású.

1. Bevezetés

A paneladatokra alkalmazott szokásos regressziós modellből indulunk ki:

$$y = X\beta + Z\alpha + u, \tag{1.1}$$

ahol y $(TN \times 1)$ a függő változó N egyedre és T számú időpontra vonatkozó megfigyelései, X egy $(TN \times k)$ méretű mátrix, amely k független változó megfigyeléseit tartalmazza, u a reziduális változók $(TN \times 1)$ méretű, zérus várható értékű és $\sigma^2 I_{NT}$ varianciájú vektora, és $Z\alpha$ az egyedhatásokat jelöli: $Z \equiv \imath_T \otimes I_N$, ahol $\imath_T$ egy T-elemű egyesekből álló vektor, $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)'$, pedig az egyedhatások N elemű vektora. Egyelőre tekintsük az egyedhatásokat véletlenszerűnek, zérus várható értékkel és $\sigma_\alpha^2 I_N$ kovarianciamátrix-szal. Ekkor az $u + Z\alpha$ összetett hibatagnak zérus várható értéke és

$$\Omega = \Sigma \otimes I_N \equiv (\sigma_u^2 I_T + \sigma_\alpha^2 J_T) \otimes I_N, \tag{1.2}$$

kovarianciamátrixa van, ahol J_T egy $T \times T$ méretű csupa egyesekből álló mátrix. Az (1.2) modell számítástechnikailag hatékony becsléséhez egy a Σ^{-1}-el vagy $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$-el arányos mátrix képlete szükséges. Ilyen képleteket könnyen nyerhetünk:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2}\left(I_T - \frac{1}{T}(1-\lambda^{-1})\imath_T\imath_T'\right) \tag{1.3}$$

$$\Omega^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma_u}\left(I_T - \frac{1}{T}(1-\lambda^{-\frac{1}{2}})\imath_T\imath_T'\right), \tag{1.4}$$

ahol

$$\lambda \equiv (\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2)/\sigma_u^2. \tag{1.5}$$

---

* Tom WANSBEEK: „Transformations for Panel Data when the Disturbances are Autocorrelated". (*Fordította*: RÉVÉSZ Tamás)

Az utóbbi eredmény különösen érdekes, mivel ebből az következik, hogy a modellnek y_{tn} helyett

$$y_{tn} - (1 - \lambda^{-\frac{1}{2}})y_{.n} \tag{1.6}$$

változóra való transzformációja (a pont a megfelelő indexre vonatkozó átlagot jelöl) és az X-ekre vonatkozó hasonló transzformáció a modellt úgy alakítja át, hogy a közönséges legkisebb négyzetek módszere (OLS) alkalmazhatóvá válik. Ez a transzformáció megtalálható például HAUSMAN (1978) cikkében és egy általánosabb formában FULLER és BATTESE (1974) írásában.

Az egyedhatások jelenléte a reziduális változók között időbeli (szeriális) összefüggést (korrelációt) okoz. Ez az összefüggés mindig azonos, tekintet nélkül arra, hogy a megfigyelések időben mennyire vannak távol egymástól. Előfordulhat azonban, hogy ezenkívül más időbeli összefüggés is fennáll a „klasszikus" autokorreláció miatt. Ebben az esetben az (1.6) transzformáció már nem megfelelő. Az AR(1) típusú autokorreláció esetén szükséges átalakítást a *2. pontban* ismertetjük. A *3. pont* tovább általánosítja a modellt, és egy növekedési görbe komponenst is hozzávesz. A *4. pont* azt az esetet vizsgálja, amikor az egyedhatások nem véletlenszerűek, hanem rögzítettek.

2. Autokorreláció

Ha az u_{nt} reziduális változók között autokorreláció van (ld. LILLARD és WILLIS, 1978), akkor a következőképpen járunk el. Tekintsük egyedenként azonosan ρ paraméterűnek a feltételezett elsőrendű autokorrelációt. Ezután újradefiniáljuk Ω és Σ mátrixokat:

$$\Omega = \Sigma \otimes I_N \equiv (\sigma_u^2 W_T + \sigma_\alpha^2 J_T) \otimes I_N, \tag{2.1}$$

ahol W_T a T - rendű AR (1) korrelációs mátrix:

$$W_T = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Ennek inverze:

$$W_T^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & & \\ & & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & & -\rho & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

A GLS (általánosított legkisebb négyzetek módszere) becsléshez célszerű Ω^{-1}-re — vagy ezzel egyenértékűen Σ^{-1}-re — felírni a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= \sigma_u^{-2} \left\{ W_T^{-1} - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\alpha^2 \imath_T' W_T^{-1} \imath_T} W_T^{-1} \imath_T \imath_T' W_T^{-1} \right\} = \\ &= \sigma_u^{-2} \left\{ W_T^{-1} - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2 + \theta \sigma_\alpha^2} v_T v_T' \right\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol θ és v_T értékeit az alábbi módon definiáljuk:

$$v_T \equiv W_T^{-1}\imath_T = \frac{1}{1-\rho^2}\left(1-\rho,(1-\rho)^2,\ldots,(1-\rho)^2,1-\rho\right)' =$$
$$= \frac{1}{1+\rho}\{(1-\rho)\imath_T + \rho(e_1+e_T)\} \tag{2.5}$$

és

$$\theta \equiv \imath_T' W_T^{-1}\imath_T = \imath_T' v_T = \frac{(1-\rho)T+2\rho}{1+\rho}. \tag{2.6}$$

Különösen hasznos, ha egy mondjuk $\tilde{R}_T$-vel jelölt olyan mátrix áll rendelkezésünkre, amire nézve $\tilde{R}_T\tilde{R}_T'$ arányos Σ^{-1}-gyel. Ekkor az $\tilde{R}_T'$ -vel transzformált adatok egy OLS-sel becsülhető modellnek felelnek meg. Egy ilyen mátrix

$$R_T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & -\rho & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -\rho \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

amelyre fennáll $R_T R_T' = (1-\rho^2)W_T^{-1}$, azaz

$$R_T'^{-1}R_T^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}W_T. \tag{2.8}$$

Későbbi célokra megállapítjuk, hogy

$$v_T' R_T'^{-1}R_T^{-1}v_T = \frac{1}{1-\rho^2}\imath_T' W_T^{-1}W_T W_T^{-1}\imath_T = \frac{\theta}{1-\rho^2}. \tag{2.9}$$

Most legyen ϕ egy valós szám és tekintsük a következőket:

$$(R_T - \phi v_T v_T' R_T'^{-1})(R_T' - \phi R_T^{-1} v_T v_T') =$$
$$= (1-\rho^2)W_T^{-1} + (\phi^2\frac{\theta}{1-\rho^2} - 2\phi)v_T v_T' =$$
$$= (1-\rho^2)\left\{W_T^{-1} + \frac{1}{1-\rho^2}(\phi^2\frac{\theta}{1-\rho^2} - 2\phi)v_T v_T'\right\}. \tag{2.10}$$

Ez akkor arányos Σ^{-1} -gyel (ld. (2.4)), ha ϕ a

$$\phi^2\theta - 2(1-\rho^2)\phi + (1-\rho^2)^2\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2+\theta\sigma_\alpha^2} = 0 \tag{2.11}$$

avagy a

$$\left(\frac{\phi\theta}{1-\rho^2} - 1\right)^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2+\theta\sigma_\alpha^2} \tag{2.12}$$

másodfokú egyenlet gyöke, amiből

$$\phi = \frac{1-\rho^2}{\theta}\left\{1 \pm \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \theta\sigma_\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{2.13}$$

Mivel $\sigma_\alpha^2 = 0$ esetén elvárjuk, hogy $\phi = 0$ legyen (azaz tiszta autokorreláció egyedhatások nélküli esetben), ezért a „minusz" gyököt választjuk. Az y függő változó OLS modellre való transzformációja valamely egyednél (n) ekkor a következő

$$\tilde{y}_n \equiv (R_T' - \phi R_T^{-1} v_T v_T') y_n, \tag{2.14}$$

alak lesz (ld. (1.6)), és ez az X -ekre is hasonlóan adódik. Az $R_T' y_n$ rész a szokásos *Prais — Winsten* transzformáció (ld. PRAIS és WINSTEN (1954)). A második részre felírható, hogy

$$\begin{aligned} R_T^{-1} v_T &= R_T^{-1} W_T^{-1} \imath_T = \frac{1}{1-\rho^2} R_T' \imath_T = \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{(1-\rho)\imath_T + ((1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} - (1-\rho))e_1\right\} = \\ &= \frac{1}{1+\rho}\left\{\imath_T + \left(\frac{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\rho} - 1\right)e_1\right\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Így az OLS-sel becsülhető modellre történő transzformáció az

$$\tilde{y}_{1n} = (1-\rho)^{\frac{1}{2}}(y_1 - \frac{\phi}{1-\rho^2} v_T' y_n) \tag{2.16}$$

illetve

$$\tilde{y}_{tn} = y_{tn} - \rho y_{t-1,n} - \frac{\phi}{1+\rho} v_T' y_n \tag{2.17}$$

alakot ölti, ahol $t = 2, \ldots, T$. Mivel (mint fent elmondtuk), ha $\sigma_\alpha^2 = 0$, akkor $\phi = 0$, ez nyilvánvalóan speciális esetként tartalmazza a *Prais — Winsten* transzformációt. Ha nincs autokorreláció, hanem csupán az egyedhatások az időbeli korreláció okai, akkor $\theta = T, v_T = \imath_T, \phi = (1 - \lambda^{-\frac{1}{2}})/T$ (ahol λ mint (1.5) -ben), s így a transzformáció a véletlen hatású modellek transzformációjára egyszerűsödik. Az első megfigyelés (2.16) szerinti külön kezelése helyett az egyszerűség kedvéért ezt el is hagyhatjuk. MAESHIRO (1979) véleménye szerint azonban az effajta egyszerűsítésnek esetleg aránytalanul nagy ára lehet.

3. Növekedési görbe hatás

A modell egy érdekes kiterjesztését kapjuk, ha a reziduális változókhoz egy „növekedési görbe" komponenst is hozzáadunk. Egy ilyen modellt vizsgált LILLARD és WEISS (1979):

$$\varepsilon_{tn} = u_{tn} + \alpha_n + \xi_n(t - \bar{t}) \tag{3.1}$$

$$u_{tn} = \rho u_{t-1,n} + \eta_{tn}, \tag{3.2}$$

ahol ξ_n zérus várható értékű valószínűségi változó és esetleg α_n -nel korrelált, de u_{tn} -nel vagy η_{tn}-nel nem. A ξ komponens azoknak a figyelmen kívül hagyott változóknak a hatásait tükrözik, amelyek az y függő változó növekedését befolyásolják. Ezek a változók korrelálhatnak a figyelmen kívül hagyott és az α komponensbe sűrített időinvariáns változókkal, amelyek a függő változó szintjét befolyásolják. Feltételezzük, hogy u kölcsönösen korrelálatlan mind α-val mind ξ-vel. Ez az egyedek kovarianciamátrixának a

$$\Sigma \equiv \sigma_u^2 W_T + GHG' \tag{3.3}$$

formában való újradefiniálásához vezet, ahol $G \equiv (\imath_T, \tau_T)$, és τ_T egy T elemű vektor, amelynek t-edik eleme $t - \bar{t}$, valamint H az α_n és ξ_n 2×2-es variancia-, kovarianciamátrixa:

$$H \equiv \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\xi} \\ \sigma_{\alpha\xi} & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Tekintsük újra Σ^{-1} mátrixot és ennek négyzetgyökét. Erre fennáll (ld. (2.4)), hogy

$$\Sigma^{-1} = \sigma_u^{-2}\{W_T^{-1} - W_T^{-1}G(G'W_T^{-1}G + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1}G'W_T^{-1}\}. \tag{3.5}$$

Ez a következőképpen látható be. A $W_T^{-1}G$ első oszlopa v_T, amint azt (2.5)-ben már megmutattuk. A $W_T^{-1}\tau_T$ második oszlopára nézve pedig (2.3)-ból

$$(W_T^{-1} - \frac{1-\rho}{1+\rho}I_T)\tau_T = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 2\rho-\rho^2 & -\rho & & & \\ -\rho & 2\rho & -\rho & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\rho & 2\rho & -\rho \\ & & & -\rho & 2\rho-\rho^2 \end{pmatrix}\tau_T \tag{3.6}$$

összefüggést kapjuk. Nyilvánvaló, hogy annak a T-elemű vektornak, amit az utóbbi szorzat eredményez az első és utolsó elemét kivéve minden eleme zérus. Ezenfelül az is látható, hogy e két elem ellenkező előjelü. Így a (3.6) a következőkre egyszerüsíthető:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-\rho^2}\{(2\rho-\rho^2)(1-\bar{t}) - \rho(2-\bar{t})\}(e_1 - e_T) = \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{(2-\rho)\frac{1-T}{2} - \frac{3-T}{2}\right\}(e_T - e_1) = \\ &= \frac{1}{2(1-\rho)^2}\{(1-\rho)T + 1 + \rho\}(e_T - e_1). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tehát (3.6) alapján $W_T^{-1}\tau_T$-re már adódik egy kifejezés. Ami $G'W_T^{-1}G$ elemeit illeti, fenáll, hogy

$$\imath_T' W_T^{-1}\imath_T = \theta \tag{3.8}$$

amint azt (2.6)-ban megadtuk, valamint

$$\tau_T' W_T^{-1}\tau_T = \frac{1-\rho}{1+\rho}\tau_T'\tau_T + \frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\{(1-\rho)T + 1 + \rho\}(T-1), \tag{3.9}$$

ahol $\tau_T'\tau_T = T(T+1)(T-1)/12$. Harmadszor: $\imath_T' W_T^{-1}\tau_T = 0$. Ez a következőkből látható. Amennyiben C jelöli azt a $T \times T$ méretű mátrixot, amelynek a mellékátlóban levő egyesek mellett csak zérus elemei vannak, akkor $C\imath_T = \imath_T, C\tau_T = -\tau_T$ és $CW_T = W_T C$ így

$$\imath_T' W_T^{-1}\tau_T = \imath_T' C W_T^{-1}\tau_T = \imath_T' W_T^{-1} C\tau_T = -\imath_T' W_T^{-1}\tau_T = 0. \tag{3.10}$$

Ezzel befejeztük Σ^{-1} összetevőinek tárgyalását. Ami a $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$-et illeti, (2.10) általánosításából indulhatunk ki. Ha $V_T \equiv W_T^{-1}G$ és $\Theta \equiv G'W_T^{-1}G$ jelöléseket használunk (figyeljük meg, hogy Θ diagonális a (3.10) miatt), akkor

$$\begin{aligned}
&(1-\rho^2)(W_T^{-1} - V_T(\Theta + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} V_T') = \\
&= (R_T - V_T\Phi V_T' R_T'^{-1})(R_T' - R_T^{-1} V_T \Phi' V_T') = \\
&= (1-\rho^2)W_T^{-1} - V_T(\Phi + \Phi')V_T' + \frac{1}{1-\rho^2} V_T \Phi\Theta\Phi' V_T',
\end{aligned} \tag{3.11}$$

amiből következik, hogy $\sigma_u^2 W_T^{-1}$ négyzetgyöke $R_T' - R_T^{-1} V_T \Phi V_T'$, ahol Φ tetszőleges megoldása a

$$\Phi\Theta\Phi - (1-\rho^2)(\Phi + \Phi') + (1-\rho^2)^2(\Theta + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} = 0 \tag{3.12}$$

avagy a

$$\left(\frac{1}{1-\rho^2}\Phi - \Theta^{-1}\right)\Theta\left(\frac{1}{1-\rho^2}\Phi - \Theta^{-1}\right)' = \Theta^{-1} - (\Theta + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} \tag{3.13}$$

másodfokú mátrix-egyenletnek (2×2-es rendű). Ez a (2.11) általánosítása, és megoldása:

$$\Phi = (1-\rho^2)\{\Theta^{-1} - \sigma_u(\Theta H \Theta + \sigma_u^2\Theta)^{-\frac{1}{2}}\Theta^{-\frac{1}{2}}\}. \tag{3.14}$$

Ezt analítikusan is ki lehet fejteni, hiszen az összes szóbanforgó mátrix 2×2-es méretű. Az eredmény nyilvánvalóan nehezen lenne áttekinthető, ezért ennek felírását mellőzzük.

4. Állandó hatások

Térjünk vissza az (1.1) szerinti regressziós modellhez, és most tekintsük α-t az állandó hatások N-elemű vektorának, mint például BHARGAVA et al. (1982) teszi ezt. Köztudott, hogy az (1.1)-beli OLS egyenértékű a transzformált modellbeli OLS-sel, ahol a $Z\alpha$ tag nem szerepel, ha minden egyedre az y és X megfigyelések helyett ezek időbeli átlaguktól való eltéréseit szerepeltetjük. Ekkor y_{tn}-ből $y_{tn} - y_{.n}$ lesz, és hasonló adódik X-re is. Autokorreláció esetén a változókat alkalmassá kell tenni erre a transzformációra is.

Ha általában véve u-nak Ω varianciája van, és C olyan mátrix, amelyre $CC' = \Omega^{-1}$, akkor a transzformált modell

$$C'y = C'X\beta + C'Z\alpha + C'u \tag{4.1}$$

OLS-sel becsülhető modell. A $C'Z$-re merőleges projektor a

$$P \equiv I - C'Z(Z'CC'Z)^{-1}Z'C \tag{4.2}$$

mátrix, így y-ra a $PC'y$, X-re pedig a $PC'X$ a megfelelő transzformáció. Ezt y-ra kifejtve kapjuk, hogy

$$PC'y = C'(I - Z(Z'CC'Z)^{-1}Z'CC')y = C'(I - Z(Z'\Omega^{-1}Z)^{-1}Z'\Omega^{-1})y. \tag{4.3}$$

Az autokorrelált modellre $C = R_T \otimes I_N$ és $\Omega^{-1} = W_T^{-1} \otimes I_N$, eltekintve az irreleváns szorzókonstansoktól. Így y_n-re a transzformáció a következő:

$$\tilde{y}_n \equiv R_T'\left(I_T - \frac{1}{\imath_T' W_T^{-1}\imath_T}\imath_T\imath_T' W_T^{-1}\right) y_n = R_T'(I_T - \frac{1}{\theta}\imath_T v_T')y_n. \tag{4.4}$$

Tehát

$$\tilde{y}_{1n} = (1-\rho)^{\frac{1}{2}}(y_1 - \frac{1}{\theta}v_T' y_n) \tag{4.5}$$

(ld.(2.16)), és (2.17) helyett $t = 2, \ldots, T$-re azt kapjuk, hogy

$$\tilde{y}_{tn} = y_{tn} - \rho y_{t-1,n} - \frac{1-\rho}{\theta} v_T' y_n. \tag{4.6}$$

A $\rho = 0$ esetben ez az $y_{tn} - y_{.n}$ alakra egyszerűsödik, ami a szokásos „csoporton belüli" (within) transzformáció.

Ha újra fontolóra vesszük a növekedési hatással való kibővítést, y_n-re akkor kapjuk a megfelelő transzformációt, ha (4.4)-ben W_T^{-1} helyére $(W_T + \sigma_\xi^2/\sigma_u^2 \tau_T\tau_T')^{-1}$ írunk, ami az alábbival egyezik meg:

$$W_T^{-1} - \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\xi^2 \tau_T' W_T^{-1}\tau_T} W_T^{-1}\tau_T\tau_T' W_T^{-1}. \tag{4.7}$$

Mivel $\tau_T' W_T^{-1}\tau_T = 0$ (ld. (3.10)) ez esetben ugyanaz a transzformáció mint fentebb, ld (4.4) — (4.6).

Az egyik ok amiért néha az állandó hatásokat részesítik előnyben a véletlen hatásokkal szemben az, hogy előfordulhat korreláció a magyarázó változók és az egyedhatások között. A fellépő torzítás elkerülhető a „within"-transzformáció segítségével. Ha a növekedési görbe hatást relevánsnak tekintjük, akkor ez szintén korrelálhat a magyarázó változókkal, és ekkor a „ketőzött" állandó hatások formulája alkalmazható, azaz nemcsak az α_n-ek, hanem a ξ_n-ek is rögzítettnek tekintendők. Ha nincs autokorreláció akkor az $(I - G(G'G)^{-1}G')y_n$ az alkalmas transzformáció. Mivel $\tau_T'\imath_T = 0$ ezért $G'G$ diagonális, és

$$\tilde{y}_{tn} = y_{tn} - y_{.n} - (t - \bar{t})\tau_T' y_n / \tau_T' \tau_T. \tag{4.8}$$

Végül, ha újra bevezetjük az autokorrelációt, a transzformáció az alábbi lesz:

$$\tilde{y}_n = R_T'(I_T - G(G'W_T^{-1}G)^{-1}G'W_T^{-1})y. \tag{4.9}$$

Ennek az elemei pedig közvetlenül adódnak a fenti képletből.

Hivatkozások:

BHARGAVA, A., L. FRANZINI and W. NARENDRANATHAN, (1982): „Serial correlation and the fixed effects model." *Review of Economic Studies* 49, 533-549.

FULLER, W.A., and G. BATTESE, (1974): „Estimation of linear models With crossed-error structure." *Journal of Econometrics* 2, 67-78.

HAUSMAN J.A. (1978): „Specification tests in econometrics. *Econometrica* 46, 1251-1271.

LILLARD, L.A. and R.J. WILLIS, (1978): „Dynamic aspects of earning mobility." *Econometrica* 46, 985-1012.

LILLARD, L.A. and Y. WEISS, (1979): „Components of variation in panel earnings data: American scientists 1960-70." *Econometrica* 47, 437-454.

MAESHIRO, A., (1979): „On the retention of the first observations in serial correlation adjusment of regression models." *International Economic Review* 20, 259-265.

PRAIS, G.J. and C.B. WINSTEN, (1954): *Trend estimators and serial correlation.* Cowles Commission Discussion Paper No. 383.