EGY MEGKÖZELÍTÉS NEMORTOGONÁLIS LESZABÁSI ÉS PAKOLÁSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

VARRÓ ZOLTÁN
JPTE Közgazdaságtudományi Kar, Pécs

A közelmúltban számos algoritmus látott napvilágot leszabási és pakolási feladatok megoldására. Azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor a leszabásra kerülő téglalapok legalább egyikének hossza nagyobb mint a kiinduló téglalap, és ezért nemortogonális mintákat is figyelembe kell venni. Eljárást javasolunk a keletkező derékszögű háromszögek feldarabolására azonos méretű téglalapokra. Csak guillotine vágásokat megengedve a feladatot legrövidebb út problémára vezetjük vissza.

1. Bevezetés

A leszabási és pakolási feladatok számos iparágban jelentős szerepet játszanak. Ilyen például acélrudak vagy üvegtáblák darabolása kívánt méretekre, de a bútoriparban is gyakran találkozunk ezzel a feladattal. A felhasznált félkésztermékeket általában néhány méretben állítják elő, amelyek csak ritkán azonosak a gyártáshoz szükséges méretekkel. A cél általában az, hogy a feldarabolás minimális költséggel történjék. Ez lehetséges úgy is, hogy csupán a hulladékot minimalizáljuk, de figyelembe vehetünk egyéb tényezőket is, mint például a leszabást végző gépek átállítási idejét. A raklap pakolási feladat (pallet loading) egy speciális kétdimenziós leszabási feladatnak tekinthető, ahol a cél maximális számú azonos méretű téglalap (a dobozok alaplapja) elhelyezése egy nagyobb téglalapon. A fent vázolt témakörbe tartozó problémákról és megoldási módszereikről igen jó áttekintés található W. DOWSLAND [3] és DYCKHOFF – KRUSE – ABEL – GAL [4] cikkében, valamint J. TERNO – R. LINDEMANN – G. SCHEITHAUER [8] nemrég megjelent könyvében.

2. Korábbi eredmények

Ebben a cikkben a kétdimenziós leszabási feladat egy speciális esetével foglalkozunk. Először megfogalmazzuk a feladatot általánosan. Legyen adott egy téglalap, amelynek hossza L, szélessége W. Ezt a téglalapot kívánjuk feldarabolni kisebb területű téglalapokra, amelyeknek a méreteit az alábbi R halmaz tartalmazza:

$$R = \{(l_1, w_1), (l_2, w_2), \ldots, (l_m, w_m)\}$$

Feltételezzük, hogy a méretek egészek és a vágások szélessége elhanyagolható. A cél egy olyan szabásminta előállítása, amely minimális területű hulladékot eredményez. Szokásos a kis téglalapok számára egyedi felső korlátokat is megadni. A vágások technikai okokból szinte mindig párhuzamosak a kiinduló téglalap éleivel. Az ilyen mintákat ortogonálisaknak nevezzük. Előfordul, hogy technikai okokból a téglalapot csak egy egyenes mentén tudjuk kettévágni, ilyen pl. az üvegtáblák darabolása. Ezt a típusú vágást guillotine vágásnak nevezzük.

A raklap pakolási feladatot az elmúlt időszakban számosan vizsgálták: A. SMITH – P. DE CANI [5], K. DOWSLAND [2], H. STEUDEL [6]. Ezekben a cikkekben kizárólag ortogonális elrendezéseket vettek figyelembe. A szerzők heurisztikus algoritmusokat javasolnak a feladat megoldására, mivel az egzakt megoldás a hosszú futási idő miatt nem lehetséges.

P. DE CANI [1] volt az első, aki a nem ortogonális minták alkalmazhatóságára felhívta a figyelmet. A következő problémát vizsgálta: Legyen adott bizonyos számú téglalap. Keressük azt a legkisebb területű téglalapot, amelyben az adott téglalapok elrendezhetők. Egyszerű példát adott arra, hogy a legkisebb területű téglalapot akkor kapjuk, ha nemortogonális elrendezést alkalmazunk. Arra is rámutatott, hogy nemortogonális mintákat kell figyelembe venni akkor is ha a leszabni kívánt téglalap hossza nagyobb, mint a kiinduló téglalapé.

A közelmúltban A. RINNOY KAN, J. DE WIT és R. WIJMENGA [7] terjesztették ki GILMORE és GOMORY módszerét nemortogonális szabásminták esetére is. Téglalap helyett egy szalag darabolását vizsgálták, és céljuk az volt, hogy minél több nemortogonális mintát elimináljanak az optimalitás megsértése nélkül. Az eredmények azt mutatták, hogy nemortogonális szabásminták figyelembevételével jelentős megtakarítás érhető el.

3. Egy algoritmus derékszögű háromszögek leszabására egybevágó téglalapokká

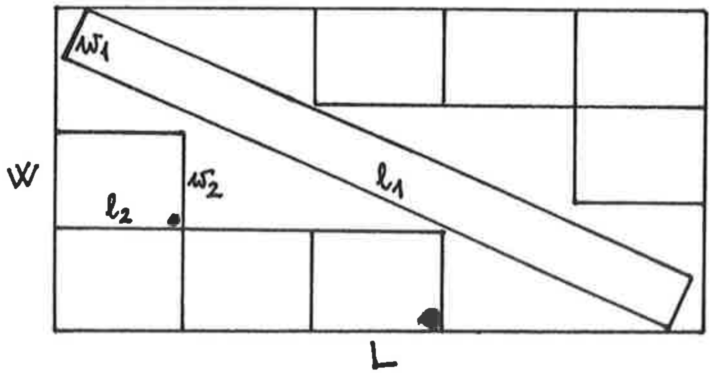
Legyen adott egy L hosszúságú és W szélességű ($W \leq L$) téglalap, amelyet kisebb méretű téglalapokra kell leszabnunk. Tekintsük azt a speciális esetet, amikor kétféle téglalapra van szükségünk, amelyek mérete (l_1, w_1) és (l_2, w_2). Ha $l_1 > L$ de az (l_1, w_1) téglalap leszabható az (L, W) téglalapból, akkor a feladatot ortogonális mintákkal nem lehet megoldani. Egy lehetséges szabásminta az 1. ábrán látható.

Miután az (l_1, w_1) téglalapot elforgatva leszabtuk, az célunk, hogy a megmaradt derékszögű háromszögből maximális számú (l_2, w_2) méretű téglalapot kapjunk. A következő példa azt mutatja, hogy ha átfogóval párhuzamos vágásokat is megengedünk, akkor több téglalapot kaphatunk, mintha csak a befogókkal párhuzamos ortogonális vágásokat alkalmazzuk.

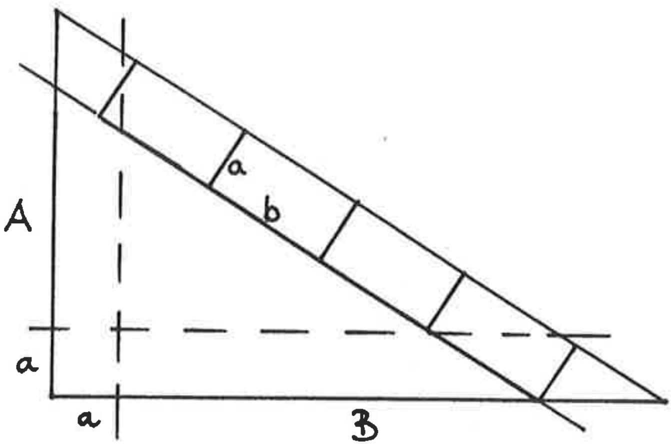
Legyenek a befogók $A = 20$ és $B = 39$, a téglalap méretei pedig $a = 14, b = 6$. Ekkor az átfogóval párhuzamos vágást is megengedve három, míg egyébként csak két téglalapot kapunk.

Az A és B befogójú derékszögű háromszög leszabását úgy végezzük el, hogy hatféle guillotine vágást engedünk meg. Ezek mindegyike párhuzamos a háromszög egy-egy oldalával és szélessége a vagy b, a téglalap szélessége vagy hosszúsága. A kapott csíkokat végül téglalapokra daraboljuk fel. A 2. ábrán három a szélségű csíkot eredményező vágás látható.

1. ábra



2. ábra

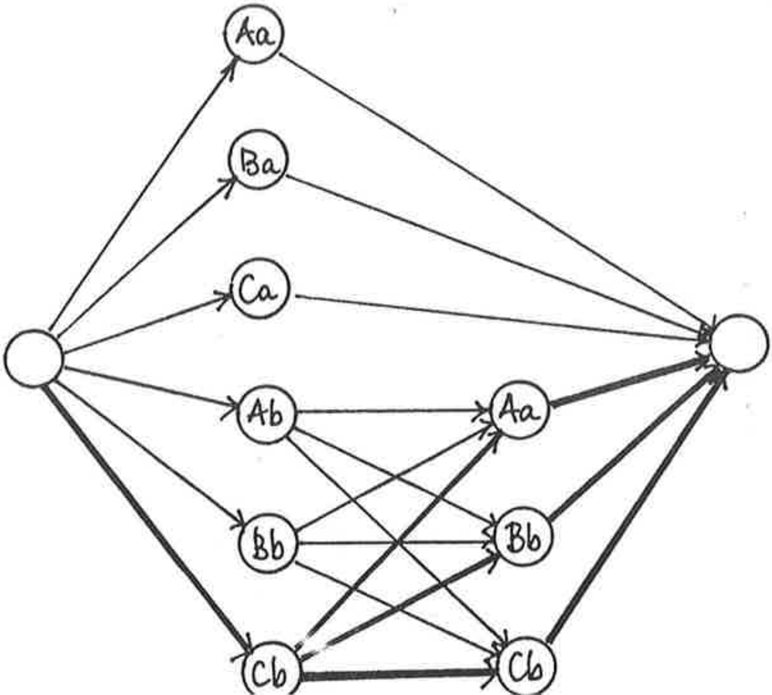


Egy olyan hálózatot konstruálunk, amelynek szögpontjai a hat guillotine vágás után kapott derékszögű háromszögeket reprezentálják. A forrásnak a kiinduló háromszög felel meg, a nyelőnek pedig az összes olyan maradék derékszög, amelyből már nem szabható le téglalap. Két szögpontot akkor köt össze egy irányított él, ha a kisebb háromszög a nagyobból a megengedett hat vágás valamelyikével megkapható. Így minden szögpontból legfeljebb hat másikba vezet él. Az élekhez rendelt pozitív számok mutatják, hogy mennyi hulladék keletkezik a nagyobb háromszögből levágott csíkból.

Feladatunk a guillotine vágások egy olyan sorozatának megállapítása, amely minimális hulladékot eredményez. Ez ekvivalens azzal, hogy a fent definiált hálózatban megkeressük a legrövidebb utat a forrástól a nyelőhöz. A legrövidebb út probléma a viszonylag könnyen megoldhatók közé tartozik, mivel bonyolultsága a szögpontok számának négyzete.

Tekintsük ismét azt a példát, amelyben $A = 20, B = 39, a = 14, b = 6$. A 3. ábrán látható a feladathoz tartozó hálózat és három optimális út. Az első él a három optimális útban közös. Először egy C oldallal párhuzamos b szélességű csíkot vágunk le (Cb vágással) a háromszögből, amely két téglalapot eredményez. A második vágás közömbös, hogy melyik oldallal párhuzamos (Aa, Bb, Cb is lehet). Ebből a csíkból egy téglalap adódik.

3. ábra

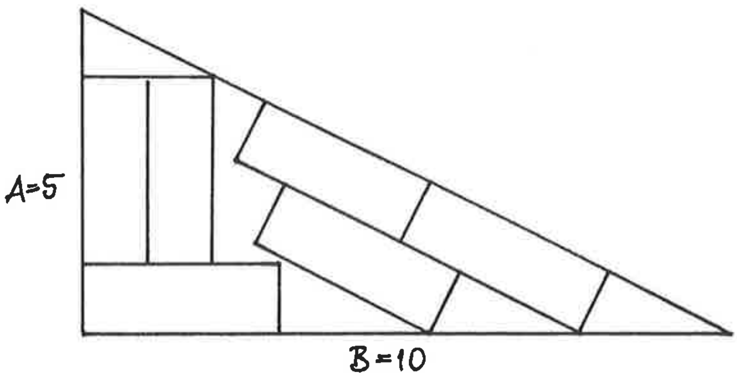


4. Következtetések:

Mivel a hálózat szögpontjainak száma igen nagy, ha a háromszög méretei a téglalapéhoz képest viszonylag nagyok, ezért csak viszonylag kisméretű feladatokat sikerült megoldani ezzel a módszerrel.

A javasolt algoritmus természetesen csak a megengedett hat vágás sorozataival előállíthatók közül választja ki a legjobbat. Amennyiben nemguillotine vágásokat is megengedünk, akkor kevesebb hulladékot eredményező szabásminták is léteznek. $A = 5, B = 10, a = 3, b = 1$ esetén a 4.ábrán látható minta 6 téglalapot eredményez, míg a fenti algoritmus csak 5-öt.

4. ábra



A vizsgálatok következő lépése az lehetne, hogy a feladatot korlátozás és szétválasztás módszerével és dinamikus programozással is megoldjuk, továbbá kiterjesszük azokra az esetekre, amikor

(a) nemguillotine vágásokat is megengedünk,

(b) a téglalapok nem azonos méretűek.

IRODALOM

1. DE CANI, P.: A note on the two-dimensional rectagular cutting stock problem. J. Operational Res. Soc. 29(1978), 703-706.

2. DOWSLAND, K.:A combined data-base and algorithmic approach to the pallet loading problem. J. Operational Res. Soc. 38(1987),341-345.

3. DOWSLAND, W.: Two and three dimensional packing problems and solution methods. NZ Oprerations Research 13(1985), 1-18.

4. DYCKHOFF, H. – KRUSE, H. J. – ABEL, D. – GAL, T.: Trim loss and related problems. Omega 13(1985), 59-72.

5. SMITH, A. – DE CANI, P.: An algorithm to optimize the layout of boxes in pallets. J. Op. Res. Soc 31(1980), 573-578.

6. STEUDEL, H. J.: Generating pallet loading patterns: a special case of the two-dimensional cutting stock problem. Management Science 25(1979), 997-1004.

7. RINNOY KAN, A. H. G – DE WIT, J. R. – R. TH. WIJMENGA: Nonorthogonal two-dimensional cutting patterns. Management Science 33(1987), 670-684.

8. TERNO, J. – LINDEMANN, R. – SCHEITHAUER, G.: Zuschnittprobleme und ihre praktische Lösung. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1987.

ABSTRACT

Recently several algorithms have been proposed for solving pallat loading and cutting stock problems. We have investigated the special case where at least one of the ordered rectangles is longer then the stock rectangle and therefore we have to consider nonorthogonal patterns as well. We propose a method for packing rectangles of identical dimensions into the remaining right-angled triangle. Allowing only guillotine cuts we formulate the packing problem as a shortest route problem in a network.