FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

A MONETÁRIS KOCKÁZAT SZÁMÍTÁSÁRÓL[1]

DORMÁNY MIHÁLY
Pénzügyi és Számviteli Főiskola, Budapest

Abból a feltevésből indulunk ki, hogy a fix befektetés ellenértékeként adódó hozamot egy ismert eloszlású valószínűségi változó írja le. A dolgozat a befektetői kockázat mérésére kétféle mérőszámot javasol. Az abszolút kockázat a (valamilyen hasznossági függvény szerint) véleményezett esetleges veszteség nagyságával és bekövetkezésének valószínűségével számol; a relatív kockázat a kedvező kimenetelt, a lehetséges nyereséget is figyelembe veszi. Mivel a relatív kockázati skála 0-tól 1-ig terjed, jó lehetőséget kínál a különböző befektetések kockázatának összehasonlítására.

1. Bevezetés

Mint ismeretes, Daniel BERNOULLI volt az első, aki matematikai formában is megfogalmazta azt a tapasztalati megfigyelést, hogy a pénzmennyiségek nominál értéke és a birtoklásukból eredő „erkölcsi érték" eltér egymástól. BERNOULLI szerint az x tőke u „erkölcsi értékében" mutatkozó du növekedés egyenesen arányos a tőke dx növekményével és fordítva arányos magával a tőkével, vagyis

$$du = a\frac{dx}{x},$$

mely differenciálegyenlet megoldása az $u(x) = a\ln x + b$ ún. hasznossági függvény (utility function).

A fenti függvény mellett számos más hasznossági függvénnyel is találkozhatunk a matematikai közgazdaságtanban, ilyen pl. az $u(x) = ax(2b-x)$, $x < b$ *kvadratikus*, vagy az $u(x) = a^{-1}(1-e^{-ax})$ *exponenciális* függvény. Az $u(x)$ függvények – a csökkenő határhaszon gazdasági törvényének megfelelően – általában konkáv függvények, de elvileg nem zárhatók ki más típusú függvények sem.

A céljainknak megfelelő, kétszer folytonosan deriválható konkáv $u(x)$ függvényeket (ahol $u'(x) > 0$ és $u''(x) < 0$) az összehasonlíthatóság és a jobb kezelhetőség végett *normalizálni* fogjuk, vagyis – szükség esetén – elvégezzük az

$$U(x) = \frac{u(x+p) - u(p)}{u'(p)}$$

[1]Beérkezett: 1991. június 17.

transzformációt. ($U(x)$ a p nagyságú *tőke* x mértékű *megváltozását* értékeli.) Az így nyert $U(x)$ függvényre nézve $U(0) = 0$ és $U'(0) = 1$. A fent említett hasznossági függvények normál alakja:

$$U(x) = p \ln \frac{p+x}{p}, \quad x > -p \qquad \text{logaritmikus hasznosság,}$$

$$U(x) = x - \frac{x^2}{2(b-p)}, \quad x < b \qquad \text{kvadratikus hasznosság,}$$

$$U(x) = u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}) \qquad \text{exponenciális hasznosság.}$$

(Érdekes megjegyezni, hogy az exponenciális hasznosságon kívül egyedül az $U(x) = x$ lineáris hasznosság független a döntéshozó tőkéjétől. BORCH (1968) szerint elsősorban a decentralizáltan működő nagy cégek döntéshozói dolgozhatnak sikeresen ezzel a függvénnyel.)

2. Vételár, közömbösségi görbék

A további vizsgálatainkhoz tételezzük fel, hogy ismeretes egy $H(x)$ hozamfüggvény, ami egy későbbi időpontban lejátszódó pénzügyi, gazdasági stb. folyamat hozamának valószínűségi eloszlásfüggvénye. (A szokásos módon $H(x)$ annak a valószínűsége, hogy a folyamat valamilyen pénzegységben kifejezett hozama kisebb lesz, mint x.)

Ha a folyamat a döntési időponttól számított jelentős t idő múlva fog csak lefutni, akkor az időtényezőt az x hozam diszkontálásával vehetjük figyelembe, vagyis elvégezhetjük a

$$H(x) \leftarrow H(e^{it}x)$$

transzformációt (ahol i az időegységre számított kamattényező).

Tételezzük fel továbbá, hogy a döntéshozónak módjában áll egy Π összegért „megvásárolnia" ezt a folyamatot, vagyis a jelen pillanatban kifizetett Π „vételár" ellenében diszponálhat a jövőbeni folyamat hozama felett. Kérdés, hogy mennyi a „korrekt" Π_0, illetve egy tetszőleges vételár mellett mivel jellemezhetnénk a befektetés kockázatát?

A döntéshozó $U(x)$ hasznossági függvényét (használatos a „véleményfüggvény" terminológia is) oly módon vehetjük figyelembe, hogy a $H(x)$ eloszlású X valószínűségi változót (a véletlen hozamot) az $X \leftarrow U(X)$ transzformációval „véleményezzük". A vételár megfizetése a (diszkontált) X hozamot $X - \Pi$ értékre csökkenti; ezt a csökkentett hozamot kell véleményeznünk, és máris előttünk áll a döntéshozó értékítélete. A vételár a döntéshozó szempontjából akkor korrekt, ha a véleményezett hozam várható értéke zérus, vagyis

$$\mathbf{E}U(X - \Pi_0) = 0. \tag{1}$$

A várható értéket ismert módon,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\Pi)dH(x) \tag{2}$$

alakban, vagy ha létezik a $h(x)$ derivált függvény, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\Pi)h(x)dx$$

alakban számíthatjuk.

Egy egyszerű példaként tekintsük a

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a; \\ 1/2, & \text{ha } a < x \le b; \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$$

hozamfüggvényt, ami megfelel a

$$P(X=a) = P(X=b) = 1/2$$

diszkrét eloszlásnak. Nevezzük az ilyen eloszlásokat „fej-írás játékoknak”, és jelöljük őket $G(a,b)$-vel.

Kérdés, hogy mennyi egy ilyen játék korrekt vételára, ha a logaritmikus véleményfüggvénnyel dolgozunk. (Nyilván $a > -p$ kell legyen.) Az (1) és (2) összefüggés alapján

$$\int_{-p}^{\infty} U(x-\Pi_0)dH(x) = \frac{1}{2}p \ln \frac{p+a-\Pi_0}{p} + \frac{1}{2}p \ln \frac{p+b-\Pi_0}{p} = 0,$$

vagyis

$$\frac{p+a-\Pi_0}{p}\,\frac{p+b-\Pi_0}{p} = 1$$

Innen – nyilvánvalóan negatív előjellel a gyök előtt –

$$\Pi_0 = \frac{a+b+2p-\sqrt{(b-a)^2+4p^2}}{2}$$

Vezessük be a $G(a,b)$ játék várható értékére az $m = \frac{1}{2}(a+b)$, a szórására pedig a $\Delta = \frac{1}{2}(b-a)$ jelölést. Ezzel a $G(m-\Delta, m+\Delta)$ játék korrekt vételára:

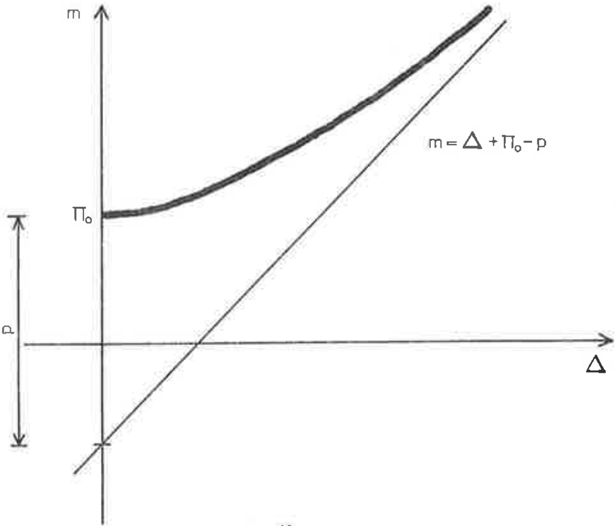
$$\Pi_0 = m + p - \sqrt{(\Delta^2 + p^2)} \tag{3}$$

Például, ha a döntéshozó tőkéje $p = 12$, a $G(-4,6)$ játék korrekt vételára: $\Pi_0 = 0$, míg a játék várható értéke: $m = 1$. Ez a különbség az $U(x)$ görbe konkáv, „kockázatelutasító” jellegéből következik, vagyis abból, hogy a döntéshozót érzékenyebben érinti a veszteség, mint az ugyanolyan nagyságú nyereség. Az $m-\Pi_0$ különbséget úgy is felfoghatjuk, mint egy „kockázati prémiumot", ami mintegy ellensúlyozza a döntéshozó kockázatelutasító magatartását.

A (3) összefüggésből

$$(m+p-\Pi_0)^2-\Delta^2=p^2,$$

amiből az következik, hogy adott p tőke és rögzített Π_0 vételár mellett az összetartozó (Δ, m) értékek az *1. ábra* szerint egy hiperbola-ágon helyezkednek el. Ez az ún. ***közömbösségi görbe***, u.i. a döntéshozó indifferens a tekintetben, hogy a Π_0 vételár ellenében milyen – a görbén elhelyezkedő (Δ, m) ponttal jellemzett – $G(m-\Delta, m+\Delta)$ játékot vásárol.



1. ábra

Különböző Π_0 értékekre függőlegesen eltolt közömbösségi görbesereget kapunk, melyet nomogramként használhatunk Π_0 meghatározására: adott m és Δ esetén a megfelelő görbe mentén leolvashatjuk Π_0 értékét.

A „fej-írás" játéknál bonyolultabb hozamfüggvények esetén a Π_0 érték és a közömbösségi görbék meghatározása természetesen nehezebb – egzakt módon gyakran kivitelezhetetlen – feladat. Ilyen esetekben jól használható az alábbi közelítés.

Határozzuk meg az $U(X-\Pi)$ függvény másodrendű MacLaurin polinomját (és vegyük figyelembe, hogy $U(0)=0$ és $U'(0)=1$):

$$U(X-\Pi)\approx X-\Pi+\frac{1}{2}(X-\Pi)^2U''(0).$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét; az (1) összefüggésnek megfelelően tegyük a jobb oldalt egyenlővé zérussal, és Π-re oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

$$\Pi_0 = E(X) + \frac{1}{U''(0)} \pm \frac{\sqrt{1 - \left(U''(0)\right)^2 D^2(X)}}{U''(0)},$$

ahol a szokásos módon $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ a szórásnégyzet.

A gyökjel alatti mennyiség sorbafejthető; a gyök előtti negatív előjelet véve nyerjük, hogy

$$\Pi_0 = E(X) + \frac{1}{U''(0)} - \frac{1}{U''(0)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(U''(0)\right)^{2k} \left(D^2(X)\right)^k$$

$$= E(X) + \frac{1}{2} U''(0) D^2(X) + \frac{1}{8} \left(U''(0)\right)^3 \left(D^2(X)\right)^2 + \ldots$$

Viszonylag kis szórások esetén jó közelítést nyerhetünk, ha a fenti összegből csak az első 2 tagot vesszük figyelembe:

$$\Pi_0 \approx E(X) + \frac{1}{2} U''(0) D^2(X). \tag{4}$$

Az $r(0) = -U''(0) > 0$ értéket *kockázatelutasítási együtthatónak* nevezik, mivel megmutatja, hogy a döntéshozó milyen mértékű kockázati prémiumra tart igényt, a hozamfüggvény szórásnégyzetétől függően.

$E(X) = m$, $D^2(X) = \Delta^2$ jelöléssel (4) az alábbi alakra hozható:

$$m = \frac{1}{2} r(0) \Delta^2 + \Pi_0$$

vagyis az $m = m(\Delta)$ – közelítő – közömbösségi görbék *parabolák*.

3. Kockázati mérőszámok

A „kockázat" terminológiát nem egységesen használják a szakirodalomban; sok esetben a $H(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó szórását vagy szórásnégyzetét (mint pl. a (4) összefüggésben) értik alatta. A biztosítási matematikában magát a kárigényt tekintik kockázatnak ([3],[4],[5]); itt a nettó prémium játsza – ellentétes értelemben – a korrekt vételár szerepét.

Amikor a $H(x)$ hozamfüggvényt a Π vételárért megvásároljuk, azt kockáztatjuk, hogy a tényleges hozam nem fogja elérni a vételárat, és így veszteség fog érni bennünket. Ennek a kockázatnak a mérésére legjobban egy olyan mérőszám felel meg, melyben mind a (véleményezett) veszteség nagysága, mind pedig bekövetkezésének valószínűsége tükröződik. Az előzőekkel összhangban a monetáris dimenziójú

$$\mathtt{K} = -\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)dH(x)$$

értéket tekinthetjük az abszolút kockázat mértékének. (Hasonló ajánlást találunk [1]-ben, de ott a feltételes valószínűség miatt csak a veszteség várható nagysága jelenik meg kockázatként.)

Ez a mérőszám azonban csak a befektetés kedvezőtlen, veszteséges kimenetelét veszi figyelembe, nem számol az esetleges kedvező eredménnyel. Nyilvánvalóan egyoldalú beállítás egyenlő kockázatról beszélni, ha pl. 10 forint ellenében ugyanolyan valószínűséggel nyerhetünk 20 forintot, mint 2000 forintot.

A kedvező kimenetelt is figyelembe vevő mérőszámot nyerhetünk, ha a

$$\mathtt{K}_r = \frac{-\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)dH(x)}{-\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)dH(x) + \int_{\Pi}^{\infty} U(x-\Pi)dH(x)} = \frac{\mathtt{K}}{\mathtt{K}+\mathtt{H}}$$

összefüggés alapján a dimenzió nélküli *relatív kockázat*ot definiáljuk.

(A $\mathtt{H} = \int_{\Pi}^{\infty} U(x-\Pi)dH(x)$ integrál a kockázattal, mint várható veszteséggel ellentétes értelmű várható nyereség.)

$\mathtt{K}_r$ értéke 0 és 1 közé esik; könnyű belátni, hogy $\Pi = \Pi_0$ (a korrekt vételár) esetén $\mathtt{K}_r = 1/2$. Zérus felé közeledvén a kockázat csökken, ellenkező irányban pedig nő. $\mathtt{K}_r = 0$ a biztos bukás, $\mathtt{K}_r = 1$ pedig a biztos siker.

Példa gyanánt számítsuk ki $\mathtt{K}$ és $\mathtt{K}_r$ értékét abban az esetben, ha a (logaritmikus véleményfüggvénnyel dolgozó) döntéshozó $\Pi = 10$ egységért megvásárolja a [8,18] intervallum egyenletes eloszlású hozamot! A döntéshozó tőkéje legyen $p = 30$.

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \begin{cases} 1/10, & \text{ha } 8 < x < 18; \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ezzel

$$\mathtt{K} = -\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)h(x)dx = -\int_{x>-p}^{\Pi} p\ln\frac{p+x-\Pi}{p}h(x)dx$$

$$= -\frac{1}{10}\int_{8}^{10} 30\ln\frac{30+x-10}{30}dx = 6 - 84\ln\frac{15}{14} \approx 0,205.$$

$$\mathtt{H} = \int_{\Pi}^{\infty} U(x-\Pi)h(x)dx = \frac{1}{10}\int_{10}^{18} 30\ln\frac{30+x-10}{30}dx = 114\ln\frac{19}{15} - 24 \approx 2,950.$$

$\mathtt{K}_r = \dfrac{\mathtt{K}}{\mathtt{K}+\mathtt{H}} = 0,065$ a befektetés alig kockázatos – ami ebben az egyszerű példában számolás nélkül is nyilvánvaló.

IRODALOM

1. BÁCSKAI T.–HUSZTI E.–MESZÉNA GY.–MIKÓ GY.–SZÉP J. (1976): A gazdasági kockázat és mérésének módszerei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. BORCH, K. H. (1968): The Economics of Uncertainty. Princenton Univ. Press.
3. BÜHLMANN, H. (1970): Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag.
4. HEILMANN, W.-R. (1987): Grundbegriffe der Risikotheorie. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
5. SEAL, H.L. (1969): Stochastic Theory of a Risk Business. John Wiley.

ON COMPUTATION OF MONETARY RISK

It is supposed that the profit of a fixed investment is described by a random variable with known distribution. The paper suggests two possible ways for measuring the investments' risk. The *absolute risk* – according to certain utility function – is based on the expected amount and the probability of loss, while the concept of *relative risk* takes into consideration the advantageous outcome that is the possible profit as well. As the range of the relative risk is between 0 and 1, it is suitable for comparing the different kinds of investments.