

# ÁRFOLYAMINGADOZÁSOK VIZSGÁLATA SZIMMETRIKUS STABIL MODELLBEN<sup>1</sup>

CSENDES CSILLA  
*Budapesti Corvinus Egyetem*

Dolgozatomban a Budapesti Értéktőzsde vezető papírjainak árfolyam ingadozásait vizsgálom a naponkénti logaritmikus hozamok eloszlásának alapján. Vizsgálatomban a napi hozamokat függetlennek és szimmetrikus stabil eloszlásúnak feltételeztem. Bemutatok egy robusztus statisztikai eljárást, amellyel a stabil paraméterek (alak-, skála-, és helyparaméter) együttesen becsülhetők. Az eljárás jó statisztikai és numerikus tulajdonságokkal rendelkezik, továbbá könnyen alkalmazható. A szimmetrikus stabil modellből kiindulva becsültem a hozamok eloszlásának paramétereit és hipotézis vizsgálattal ellenőriztem az illeszkedést a stabil és a normális eloszláshoz. A becsült paraméterek segítségével meghatározásra kerültek az árfolyamokra vonatkozó konfidencia intervallumok.

## 1 Bevezetés

A stabil eloszlások családjának pontos definiálását Levy (1925) végezte el, aki független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeit tanulmányozta, és konvergencia tételeket bizonyított az összegekre. Az eloszláscsalád matematikai statisztikai jelentőségét az adja, hogy a centrális határeloszlás tétel általánosításaként adódó vonzási tartomány (domain of attraction) probléma lehetséges megoldását kizárólag ez a család tartalmazhatja. A vonzási tartomány problémában az összegzett változók függetlenek, azonos eloszlásúak, de a szórásnégyzetük nem véges. A stabil eloszlások tehát az általánosított centrális határeloszlás tétel alapján a normális eloszlás általánosítását adják (Uchaikin és Zolotarev (1999), 55. oldal).

1. DEFINÍCIÓ. *Egy  $X$  valószínűségi változót stabilnak nevezünk, ha minden  $n$ -re léteznek olyan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók, melyeknek közös az eloszlása és amely eloszlás megegyezik  $X$  eloszlásával, továbbá léteznek olyan  $e(n)$  és  $a(n)$  konstansok ( $e(n)$  centráló,  $a(n)$  skálázó szerepet tölt be), úgy, hogy*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{a(n)} - e(n) \quad (1)$$

*eloszlása megegyezik  $X$  eloszlásával.*

<sup>1</sup>A kutató munka a Miskolci Egyetem stratégiai kutatási területén működő Mechatronikai és Logisztikai Kiválósági Központ keretében valósult meg. Beérkezett: 2014. október 20. E-mail: csendescsilla@gmail.com.

Az eloszláscsalád használatát a gyakorlati modellezésben megnehezíti néhány olyan tulajdonság, amelyek miatt merőben új megközelítésekre van szükség. Habár létezik a stabil eloszlások sűrűség- és eloszlásfüggvénye, ezek nem ismertek zárt alakban. A függvények az ún. integrálreprezentációban, illetve sorfejtéssel adóttak. Tehát azok a statisztikai módszerek, amelyek a sűrűség- vagy eloszlásfüggvényre közvetlenül épülnek, mint például a maximum likelihood (ML) módszer, nem alkalmazhatóak. Léteznek numerikus integrálást tartalmazó közelítési eljárások (lásd Nolan (2001)), de ezeknek a számítási igénye nagyon jelentős.

A zárt alakú sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény hiányában az eloszláscsaládot a karakterisztikus függvénnyel írják le, amely az 1. definícióból levezethető. A karakterisztikus függvény a sűrűségfüggvény Fourier-transzformáltja, és a két függvény egyértelműen megfeleltethető egymásnak. A stabil karakterisztikus függvény ezért jól definiálja az eloszláscsalád tagjait. A függvény négy paraméter segítségével ír le egy általános stabil eloszlást, amelyek

- a  $0 < \alpha \leq 2$  karakterisztikus kitevő (stabilitási index, farokindex),
- a  $-1 \leq \beta \leq 1$  ferdeségi (aszimmetria) paraméter,
- a  $\gamma > 0$  skálaparaméter,
- és a  $\delta \in \mathbb{R}$  helyparaméter.

Legyen  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  stabil eloszlású valószínűségi változó a fenti paraméterekkel, ekkor az  $X$  változó karakterisztikus függvénye:

$$E \exp(itX) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta(\tan(\frac{\pi\alpha}{2}))(\text{sign}(t))((\gamma|t|)^{1-\alpha} - 1)] + i\delta t), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma|t| [1 - i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}(t))(\ln|t| + \ln\gamma)] + i\delta t), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

ahol  $\text{sign}(t)$  jelenti az előjel függvényt. Ha a  $\beta$  és  $\delta$  paraméter értéke nulla, azaz a valószínűségi változó szimmetrikus nulla körül, akkor a karakterisztikus függvény valós függvény, és a

$$\phi(t) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha} \quad (3)$$

egyszerűbb alakban áll elő.

A normális eloszlás az  $\alpha = 2$  paraméterű stabil eloszlás. A normális eloszlástól eltekintve a stabil eloszlások szórásnégyzete nem létezik, ugyanis a második momentumot definiáló integrál nem véges. Általánosságban igaz, hogy az  $E|X^p|$  momentumok nem végesek, ha  $p \geq \alpha$ , ahol  $0 < \alpha < 2$ . Ebből következik, hogy a magasabb rendű momentumok sem végesek. Léteznek olyan stabil eloszlások is, amelyeknek a várható értéke sem létezik, ilyen például a Cauchy-eloszlás ( $\alpha = 1$ ). Tehát a paraméterbecslésre szintén gyakran használt momentumok módszere sem használható.

A stabil eloszlások részletes leírását találhatjuk többek között a következő monográfiákban: Gnedenko és Kolmogorov (1954), Uchaikin és Zolotarev (1999), Samorodnitsky és Taqqu (1994).

Az eloszláscsalád adatmodellezésben való használatának legfőbb előnye ugyanakkor a rugalmasság, amelyet a négy paraméterrel történő illesztés jelent. Nyilvánvaló, hogy a normális eloszláshoz képest (amely esetén csak két paraméter áll rendelkezésre) sokkal pontosabban leírhatjuk a megfigyeléseket. Az utóbbi időben a számítógépek növekvő számítási kapacitásai révén egyre több statisztikai, ökonometriai eszközt fejlesztettek ki, amelyekkel egyre inkább lehetővé válik az eloszláscsalád gyakorlati alkalmazása. A kidolgozott diagnosztikai eszközökről (sűrűségfüggvény közelítése, q-q ábrák, illeszkedés vizsgálata) Nolan (2001) ad részletes leírást.

A statisztikai vizsgálatokhoz elengedhetetlen a megfelelő eloszlású véletlen számok generálása. Az  $\alpha$ -stabil szimmetrikus  $Z$  változó generálható Zolotarev (1986) alapján a következő formulával:

$$Z(\alpha, 0) = \frac{\sin(\alpha\xi)}{(\cos \xi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos((1 - \alpha)\xi)}{\eta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad (4)$$

ahol  $\eta$  standard exponenciális változó,  $\xi$  egyenletes valószínűségi változó a  $(-\pi/2, \pi/2)$  intervallumon. A standardizált  $\alpha$ -stabil változónak az alábbi formulával generálható valószínűségi változót tekintjük:

$$Z(\alpha, 0)/\alpha^{\frac{1}{\alpha}}.$$

A stabil eloszláscsalád használata a pénzügyi modellezésben az 1960-as évekre nyúlik vissza. Az első tanulmányok Mandelbrot (1964), illetve Fama (1965) nevéhez fűződnek, akik árfolyamváltozásokat vizsgálva azt tapasztalták, hogy a normális modellhez képest a hozamok nagyobb valószínűséggel szóródnak messzebb az átlagtól, azaz az extrém esetek valószínűsége nagyobb, mint azt a normális eloszlást feltételezve várnánk. Ennek a jelenségnek a leírására a vastag farkú (heavy-tailed) eloszlásokat, köztük a stabil eloszláscsaládot kezdték használni. Elméleti szempontból ez azért kedvező, mert a portfólió feladatban szereplő hozamösszegzéssel párhuzamba állítható a stabilitási tulajdonság, azaz hogy a stabil eloszlások zártak az összegzésre nézve.

Később újabb és újabb tanulmányok, empirikus vizsgálatok jelentek meg, és mára már széles körben elterjedt a stabil portfólió modell alkalmazása. A témában megjelent kötetek többek között Rachev (szerk.) (2003), Rachev és Mittnik (2000), valamint Adler *et al.* (szerk.) (1998). A hazai szakirodalomban is számos tanulmány található, amely stabil eloszlások pénzügyi területen való alkalmazásával foglalkozik, például Lux és Varga (1996), Palágyi (1999), Janecskó (2000), Palágyi (2003), valamint Lukács (2004).

Dolgozatom témája részvény árfolyamok vizsgálata szimmetrikus stabil modellben. A 2. szakaszban áttekintem a stabil portfólió modelleket, a hozamszámítás modelljeit, a stabil eloszlások ismert paraméterbecslési eljárásait. A 3. szakaszban bemutatok egy robusztus statisztikai módszert, amely az M-becslések közé tartozik, és az  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  paraméterek együttes (egyidejű)

becslését teszi lehetővé. Az eljárás a Probability Integral Transformation (PIT) technikán alapszik. Az árfolyam adatok elemzését a PIT módszer, valamint a STABLE program<sup>2</sup> segítségével a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) legjelentősebb, vezető részvényeinek adatain végeztem el. Becsültem a részvényenkénti hozamok eloszlásának paramétereit és értékelem az illeszkedést a normális és becsült stabil eloszlásokhoz. A becsült paraméterek alapján konfidencia intervallumokat készítettem, az eredményeket tartalmazza a dolgozat 4. szakasza.

## 2 Stabil portfólió analízis

A XX. században számos közgazdaságtudományi Nobel-émlék díjjal jutalmazták a portfólió kiválasztás területén alkotott elméleteket, R. Mertont és M. Scholes-t a derivatívák értékének meghatározásáért (1997), W. Sharpe-ot a tőkepiaci árfolyamok modelljéért (Capital Asset Pricing Model, CAPM)<sup>3</sup> (1990), H. Markowitz-ot portfólió optimalizálási modelljének kidolgozásáért (1990). Ezen ismert közgazdaságtani, pénzügyi modellek mindegyikének létezik stabil eloszlásokra való kiterjesztése, amelyekről részletes áttekintést ad Uchaikin és Zolotarev (1999) (17. fejezet). Ezeket a modelleket tekintem át a következőkben.

A portfólió optimalizálás klasszikus modelljében a portfólió hozama a portfólióban található eszközök hozamainak súlyozott átlaga, a kockázatot pedig a portfólió szórásnégyzetével mérjük. A modellt H. Markowitz fogalmazta meg (1952), amely átlag - szórás megközelítés néven vált ismertté a magyar szakirodalomban.

Legyen  $n$  különböző értékpapír, amelyeknek a hozamai  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , a várható értékük  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ,  $\Sigma$  az  $X_i$  változók kovariancia mátrixa, és az eszközök súlyait a portfólióban jelölje  $w = (w_1, \dots, w_n)$  súlyvektor,  $w \geq 0$ . Ha feltételezzük, hogy  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  többváltozós normális eloszlású, akkor a portfólió hozamának eloszlása szintén normális  $X_p \sim \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p^2)$ , ahol  $\mu_p = w^T \mu$  és  $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$ . A portfólió feladat lényege, hogy az optimális  $w$  súlyvektor meghatározásával egy a befektető által előírt  $\lambda$  várható hozamszint elérése mellett minimalizáljuk a kockázatot:

$$\begin{aligned} \min_w & \left[ w^T \Sigma w \right], \\ & w^T \mu \geq \lambda, \\ & w^T e = 1, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol  $T$  a transzponálást jelenti,  $e = (1, \dots, 1)$  az  $n$ -dimenziós összegző vektor. Az optimalizálási probléma célfüggvénye ekkor kvadratikus függvény, és a feladat a kvadratikus programozás ismert algoritmusaival megoldható. A portfólió feladat felírható a fenti problémával azonos eredményre vezető lineáris programozási feladatként is, amelynek egy kvadratikus feltétele van.

<sup>2</sup>Ingyenesen elérhető szoftver J. P. Nolan weboldaláról [30].

<sup>3</sup>A CAPM megalkotója W. Sharpe mellett J. Lintner

Ekkor a befektető a számára maximálisan elviselhető  $\sigma_{max}^2$  kockázati szint mellett maximalizálja az elérhető hozamot:

$$\begin{aligned} \max_w \mu_p, \\ \sigma_p^2 \leq \sigma_{max}^2, \\ w^T e = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Az optimális portfólióvektor ekkor kvadratikus programozási feladatok sorozatának megoldásával állítható elő. A fenti modellekben a fedezetlen rövidre eladás (*short-selling*), azaz ha  $w_i < 0$ , nem engedélyezett. A fedezetlen rövidre eladás lehetőségét is megengedő nem korlátozott probléma, valamint további relaxált feltételekkel rendelkező problémák részletes leírása található például Lintner (1965) dolgozatában.

Bár a megközelítést sok kritika érte (főként a normális eloszlás feltételezése miatt), a modell jelentősége vitathatatlan. A tapasztalati vizsgálatok hamar rámutattak, hogy a normális eloszlástól csúcsosabb és vastagabb farkú (heavy-tailed) eloszlások sokkal inkább leírják a hozamokat. A stabil eloszláscsalád mellett más vastag farkú eloszlásokat is vizsgáltak, de a stabil eloszlások összegzési tulajdonsága, azaz hogy azonos  $\alpha$  karakterisztikus kitevővel rendelkező változók összegzésével újra  $\alpha$ -stabil változót kapunk, nagy előnyt jelent a portfólió analízisben.

A stabil portfólió feladatban azt feltételezzük, hogy a hozamok többváltozós szimmetrikus stabil eloszlást követnek. A szimmetria feltételezését egyrészt a tapasztalati megfigyelések támasztják alá, másrészt szimmetrikus eloszlás használatával a pozitív és negatív változások azonos mértékben súlyozhatók. A többváltozós stabil portfólió modelleket Press (1972) könyve alapján mutatom be.

A vizsgált többváltozós szimmetrikus ( $\beta = 0$ ) eloszláscsalád log-karakterisztikus függvénye:

$$\ln \phi_X(t) = ia^T t - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{7}$$

ahol  $X$  többváltozós hozameloszlás,  $\phi_X(t)$  jelöli az  $X$  változó karakterisztikus függvényét,  $i = \sqrt{-1}$ . Az  $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektor az eloszlás helyvektora,  $\alpha > 1$  esetén várható érték vektora. Az  $\Omega_j$  szimmetrikus skálamátrixok a változók függési struktúráját írják le,  $\forall j : \Omega_j \geq 0$ . Az  $0 < m \leq \infty$  egész a többváltozós stabil karakterisztikus függvény előbbi reprezentációjának előállításánál során bevezetett irányok számát jelenti. Az  $n$  változós, egység sugarú hipergömb felszínén értelmezett integrálás helyett  $m$  diszkrét pont (irány) felvételével és irányonkénti ( $j = 1, \dots, m$ ) összegzéssel határozzuk meg az összefüggési struktúrát (lásd Press (1972), 6. fejezet). Feltesszük, hogy  $\sum_{j=1}^m \Omega_j > 0$ , azaz nem degenerált az eloszlás, és hogy a várható érték véges, azaz  $1 < \alpha \leq 2$ . A portfóliót alkotó részvények súlyainak vektorát továbbra

is  $w^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  jelöli. Ekkor a portfólió hozama

$$X_p = \sum_{i=1}^n w_i X_i,$$

a portfólió elvárt hozama

$$E(X_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n w_i a_i = w^T a,$$

ha az  $X$  valószínűségi vektor eloszlása (7) szerinti. Az  $X_p$  portfólió hozam karakterisztikus függvénye:

$$\phi_{X_p}(v) = E(e^{ivX_p}),$$

$v \in \mathbb{R}$  a karakterisztikus függvény függő változója. Az  $X$  többváltozós hozam vektor karakterisztikus függvénye

$$\phi_X(t) = E(e^{it^T X}),$$

$t \in \mathbb{R}^n$  a karakterisztikus függvény függő változója. Legyen  $t = vw$ , ekkor

$$\phi_X(t) = \phi_X(vw) = E(e^{ivw^T X}) = \phi_{X_p}(v),$$

azaz  $X_p$  log-karakterisztikus függvénye

$$\ln \phi_{X_p}(v) = iv(w^T a) - \frac{1}{2}|v|^\alpha \sum_{j=1}^m (w^T \Omega_j w)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Hasonlóan a Markowitz modellhez, a portfólió kockázatot a hozamok eloszlásának valamely szóródási mutatójával, stabil eloszlások esetében a szórás hiányában a skálaparaméterrel mérjük, amely:

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (w^T \Omega_j w)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

A  $w$  portfólió vektort a következő optimalizálási feladat megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \max_x \left[ \lambda a^T w - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (w^T \Omega_j w)^{\frac{\alpha}{2}} \right], \\ w^T e = 1, \\ w \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

A fenti modellben a részvények hozama közös  $\alpha$  paraméterrel rendelkezik (Model I). Press (1972) bemutat egy általánosabb problémát is (Model II), amelyben ez a megkötés már nem szerepel, azaz a részvények különböző  $\alpha$  paraméterű hozameloszlással rendelkezhetnek. Bizonyos esetben explicit

megoldás adható a feladatokra a Lagrange szorzók módszerével, továbbá bemutatja az  $m = 1$  speciális eset megoldását is. A Press által definiált problémáknál általánosabb leírást tesz lehetővé a spektrálmérték használata. A spektrálmérték definiálását Bradley és Taqqu (2003) alapján mutatom be.

A következő tétel az általános stabil véletlen vektort a véges  $\Gamma_X$  mérték segítségével definiálja.

1. TÉTEL. *Legyen  $0 < \alpha < 2$ . Ekkor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  akkor és csak akkor stabil véletlen vektor  $\alpha$  stabilitási indexszel, ha létezik egy véges  $\Gamma_X$  mérték az egységsugarú  $\mathbb{R}^n$  beli  $S_n = \{s \mid s \in \mathbb{R}^n, \|s\| = 1\}$  hipergömbön értelmezve, és egy  $\mu \in \mathbb{R}^n$  vektor, hogy  $X$  karakterisztikus függvényére teljesüljön, hogy*

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(t) &= \\ &= \begin{cases} \exp\left(-\int_{S_n} |(t^T s)|^\alpha [1 - i(\text{sign}((t^T s)) \tan \frac{\pi\alpha}{2})] \Gamma_X(ds) + i(t^T \mu)\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\int_{S_n} |(t^T s)| [1 + i\frac{2}{\pi} \text{sign}((t^T s)) \ln |(t^T s)|] \Gamma_X(ds) + i(t^T \mu)\right), & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

A  $(\Gamma_X, \mu)$  pár egyértelmű.

A  $\Gamma_X$  mértéket a stabil véletlen vektor spektrálmértékének nevezzük. Ez a mérték leírja a függőségi struktúrát a változók között. Ha  $X$  szimmetrikus stabil eloszlású  $\alpha$  kitevővel  $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor a karakterisztikus függvény a

$$\Psi_\alpha(t) = \exp\left(-\int_{S_n} |(t^T s)|^\alpha \Gamma_X(ds)\right)$$

egyszerűbb alakban írható fel, ahol  $\Gamma_X$  az egyértelmű szimmetrikus spektrálmérték. Ha  $X$  többváltozós stabil eloszlású  $0 < \alpha < 2$  stabilitási indexszel, akkor  $X$  komponenseinek összes lineáris kombinációja is stabil eloszlást követ ugyanazzal az  $\alpha$ -val, azaz a stabilitási tulajdonság eszerint a definíció szerint is igaz. Legyen most  $X \in \mathbb{R}^n$  hozamvektor többváltozós stabil eloszlású (10) szerint, valamint  $w \in \mathbb{R}^n$  mint korábban. Ekkor  $X_p = (w^T X) = \sum_{i=1}^n w_i X_i$  stabil eloszlású  $S_\alpha(\beta_p, \gamma_p, \delta_p)$  paraméterekkel. A (10) karakterisztikus függvény alapján a  $\beta_p, \gamma_p, \delta_p$  paraméterek meghatározhatóak.

A skálaparaméter:

$$\gamma_{X_p} = \left(\int_{S_n} |(w^T s)|^\alpha \Gamma_X(ds)\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (11)$$

Legyen az  $X^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  árfolyamváltozás vektor (10) karakterisztikus függvényű többváltozós stabil eloszlású  $1 < \alpha < 2$  karakterisztikus kitevővel, a jelölések a korábbiaknak megfelelőek. A skálaparamétert (11) szerint definiáljuk. A portfólió optimalizálási probléma ekkor:

$$\begin{aligned} \min_w \left[ \left( \int_{S_n} |(w^T s)|^\alpha \Gamma_X(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right], \\ w^T \mu \geq \lambda, \\ w^T e = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

ahol  $e$  az  $n$  dimenziós összegző vektor,  $\lambda$  a befektető által meghatározott elvárt hozamszint.

A portfólió modellek célja a portfólióban szereplő részvények súlyainak megválasztása, ezáltal optimális befektetési struktúra kialakítása. A tőkepiaci árfolyamok modellje (Capital Asset Pricing Model, CAPM, Sharpe (1964) és Lintner (1965) a részvények elvárt hozamát a piacon elérhető kockázatmentes befektetés és a piaci portfólió különbségéből adódó többlethozam függvényében vizsgálja. Jelölje  $X_M$  a piaci portfólió,  $X_i$  az  $i$ -edik részvény hozamát, és  $r$  a kockázatmentes hozamot. Ekkor a CAPM modell formálisan

$$E(X_i - r) = \beta_i E(X_M - r)$$

alakban írható, ahol

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(X_i, X_M)}{\text{Var}X_M}.$$

A részvényekre jellemző  $\beta_i$  érték<sup>4</sup> leírja a részvény és a piac kapcsolatát a piaci változásokra adott árfolyamváltozáson keresztül. Ha  $\beta_i > 1$ , akkor az  $i$ -edik részvény tartása nagyobb hozamot ígér, mint a piaci portfólió, ha  $\beta_i < 1$ , akkor ez a hozam prémium kisebb. Az egyenlet átalakítható a

$$X_i - r = \beta_i(X_M - r) + \epsilon_i$$

alakba, ahol  $E(\epsilon_i) = 0$  és  $\text{Cov}(\epsilon, X_M) = 0$ . Az egyenletet gyakran a hozamok egytényezős modelljének nevezik. A részvények kockázatára

$$\sigma_{X_i}^2 = \beta_i^2 \sigma_{X_M}^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2,$$

ahol az első tag jelenti a szisztematikus kockázatot, míg a második tag a reziduális kockázatot. A portfólió bétáját a részvények bétájának súlyozott átlagával kapjuk, míg a portfólió kockázata hasonlóan az egyes részvényekhez

$$\sigma_{X_p}^2 = \beta_p^2 \sigma_{X_M}^2 + \sigma_{\epsilon_p}^2,$$

$$\sigma_{\epsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2,$$

ha feltételezzük, hogy a reziduálisok páronként függetlenek.

A fenti modellek közös jellemzője, hogy a portfólió kockázatát a portfólió hozam eloszlásának valamely szóródási mutatójával, a szórásnégyzettel vagy a skálaparaméterrel méri. A kockázatkezelésben alkalmazott másik megközelítés szerint a portfóliók tartásából eredő kockázatot olyan kockázati mértékkel kell mérni, amely rendelkezik a (i) monotonitás, (ii) szubadditivitás, (iii) pozitív homogenitás, (iv) eltolás ekvivariancia tulajdonságaival. Ezeknek a tulajdonságoknak a megkövetelése gyakorlati szempontból fontos (Gáll és Pap (2004)):

---

<sup>4</sup>A  $\beta$  jelölés itt a szakirodalomban általánosan használt jelölés, és nincs összefüggésben a stabil  $\beta$  ferdeségi paraméterrel.



- (i) ha egy portfólió minden esetben többet ígér egy másik portfóliónál, akkor annak ne legyen nagyobb a kockázata;
- (ii) két portfóliót egybetéve ne növekedhessen a kockázat, azaz a portfóliók kockázatának összegét nem haladhatjuk meg;
- (iii) megtöbbszörözve a portfóliót, ám megtartva annak összetételét, a kockázatosság a nagysággal arányosan változzon;
- (iv) ha biztosan realizálunk egy pótlólagos adott összegű pénzáramlást, akkor a portfólió kockázatossága ennek a pénzáramlásnak a nagyságával csökkenjen.

Ha egy kockázati mérték teljesíti a feltételeket, akkor koherens mértéknek nevezzük. Ezek a feltételek a szórás és skálaparaméter esetében nem teljesülnek, sőt, a népszerűbb VaR (Value-at-Risk, kockázatosított érték) mutató sem koherens, mert nem teljesíti a szubadditivitási feltételt. A VaR helyett használható az Expected Shortfall mutató, amely koherens kockázati mérték.

A hozamok számítása az árfolyamváltozások alapján többféle modellben is lehetséges. A leggyakrabban használt modell a relatív (százalékban kifejezett) hozam

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, \tag{13}$$

és a folytonosan számított (continuously-compounded rate) logaritmikus hozam

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(R_t + 1), \tag{14}$$

ahol  $P_t$  és  $P_{t-1}$  jelenti a részvény árát az  $t$ -edik és  $t - 1$ -edik időpillanatban. Ezt a modellt egy napos (one-day, single-period) modellnek nevezik. Ha  $R_t$  értéke kicsi, akkor  $\ln(1 + R_t) \approx R_t$  a logaritmus függvény sorfejtése miatt, ezért a két modell nagyon hasonló eredményt ad.

A logaritmikus hozam modell használatának előnye, hogy az eltelt időre nézve additív. A portfólió hozama a logaritmikus modell szerint:

$$r_{pt} = \ln\left(\sum_{i=1}^n w_i e^{r_{it}}\right), \tag{15}$$

ahol  $w$  a portfólió vektor,  $r_{it}$  jelöli az  $i$ -edik részvény hozamát a  $t$ -edik időpontban.

Elemzésemben a Budapesti Értéktőzsde vezető részvényeinek  $r_i$  logaritmikus hozameloszlásának paramétereit számítottam ki. A négy stabil paraméter árfolyamok esetén szemléletes jelentéssel rendelkezik. Az  $\alpha$  alakparaméter, amely talán a négy paraméter közül a legfontosabb, jellemzi a farkak vastagságát (heaviness) és a csúcsosságot (peakedness). Az árfolyamok esetében minél alacsonyabb az  $\alpha$  paraméter értéke, annál nagyobb valószínűséggel következik be extrém áringadozás az adott részvény árfolyamában, ezért annál kockázatosabbnak tekinthető. A  $\beta$  aszimmetria paraméter írja le az eloszlás ferdeségét: ha értéke negatív, akkor az eloszlás balra ferde, és nagyobb

valószínűséggel csökken az árfolyam, míg ha pozitív, akkor jobbra ferde, és emelkedik az árfolyam. A  $\gamma$  skálaparaméter és a  $\delta$  helyparaméter a normális eloszlás szórásához és várható értékéhez hasonló szerepet tölt be. A  $\delta$  helyparaméter az eloszlás középpontját adja meg, tehát a várható hozamot jelenti. A skálaparaméter a megfigyelések szóródását jellemzi, azaz a változékonyságot (volatilitást), a kockázatosságot írja le.

A portfólió feladat megoldásához elengedhetetlen a paraméterek megbízható, pontos becslése. A paraméterek becslésére a szakirodalomban számos megközelítés létezik. Az ismert eljárásokról részletes leírást ad és összehasonlító tanulmányt mutatott be például Weron (1995), és Borak *et al.* (2005).

Az egyik legegyszerűbb megközelítés lényege, hogy *log-log* skálán ábrázoljuk a megfigyeléseket és a megfigyeléshez tartozó valószínűségeket, Mandelbrot (1964). Ekkor ha a minta  $\alpha$ -stabil eloszlású, akkor az empirikus eloszlásfüggvény pontjai a farkaknál egy  $-\alpha$  meredekségű egyeneshez illeszkednek. Ez az összefüggés az eloszlás farkának aszimptotikus Pareto-viselkedéséből vezethető le. Ez a grafikus módszer nem biztosít megfelelő paraméterbecslési lehetőséget, mert csak nagy minták esetében használható, és csak az alakparaméter becslésére. Vizsgálatok azt mutatják, hogy az általános Pareto-modell alkalmazása  $1 < \alpha < 2$  esetben felülbecsüli az  $\alpha$  paramétert; például egy szimulált  $\alpha = 1.9$  paraméterű mintára  $N = 10^4$  megfigyelésre 4 körüli  $\alpha$  becslés adódott (Borak *et al.* (2005)).

Az aszimptotikus Pareto-eloszlásra vonatkozó tulajdonságból vezethető le a farokindex becslések, amelyek az eloszlás parametrikus alakjára nézve semmilyen feltételezéssel nem élnek. Ezek a becslések csak az aszimptotikus viselkedés leírására használhatók, az egész eloszlás alakjának vizsgálatára alkalmatlanok. A farokindex becslések sem megbízhatóak, mert erősen függenek attól, hogy melyik empirikus kvantilis után tekintjük az aszimptotikus viselkedést. Habár a farokindex becslések önmagukban nem megbízható becslései a karakterisztikus kitevőnek, mégis a gyakorlatban egyszerűségük miatt használják őket. A legelterjedtebb farokindex becslés a Hill-becslés (Hill (1975)). A Hill-becslésnek számos változata ismert, amelyekről összehasonlító kritikai elemzést mutatott be McCulloch (1997).

Kvantiliseken alapuló becsléseket dolgozott ki Fama és Roll (1971,1968), illetve McCulloch (1986). Fama és Roll a szimmetrikus esetre adtak kezdetleges becslést empirikus megfigyelések alapján. Becslésük egyszerűen számítható, de torzított. McCulloch kiegészítette Fama és Roll ötletét az általános esetre, eltüntette a torzítottságot, és mind a négy paraméterre konzisztens becslést adott. Ha az adatok stabil eloszlásból származnak, és a minta kellően nagy, akkor ez a módszer megbízható becslést szolgáltat. A módszer jelentős számítási igénnyel rendelkezik, illetve bizonyos segéd konstansokra is szükség van, amelyeknek a meghatározása nem egyértelmű. Szimulációs vizsgálatok alapján a McCulloch becslés pontossága kielégítő (Weron (1995)).

A maximum likelihood (ML) becslés a hagyományos módon nem alkalmazható, mert a sűrűségfüggvény nem ismert zárt alakban. A ML módszerrel való becsléshez Nolan (2001) dolgozott ki numerikus eljárást, amely a McCulloch által leírt kvantilis becslést használja közelítő kezdeti értéknek, majd

feltételes kvázi-Newton módszerrel maximalizálja a likelihood függvényt. A ML becslés ismert kedvező tulajdonságai, úgymint a konzisztencia és aszimptotikus normalitás a stabil eloszlások esetében is érvényesülnek. Ellenben számítási igénye jelentős, ahogy Weron (1995) fogalmaz, *”online valós idejű számításokra egyáltalán nem használható”*.

A karakterisztikus függvény közvetlenül is használható a szimmetrikus esetben, mert ebben az esetben a függvény valós függvény. A karakterisztikus függvény ismert, ezért sok szerző használja, kombinálja azt különböző módszerekkel, pl. momentumok módszere, ML módszer. Az empirikus karakterisztikus függvényt használja Press (1972) minimális távolságon alapuló becslésekhez. A karakterisztikus függvényen alapuló regressziós módszert mutatott be Koutrouvelis (1980), majd ennek a módszernek a javítását Kogon és Williams (1998).

A stabil paraméterek becslésére a bemutatott módszereken kívül még számos megközelítés ismert. A következő szakaszban részletesen ismertetem a dolgozatomban alkalmazott becslési eljárást, amely szintén saját eredmény.

### 3 A PIT paraméterbecslési eljárás

Az M-becslések csoportjába tartozó robusztus statisztikai technikát mutatam be szimmetrikus stabil eloszlások paraméterbecslésére, az  $1 < \alpha < 2$  esetre a Csenedes (2013) dolgozatban. A módszer szimulációs vizsgálatok alapján hasonló tulajdonságokkal (variancia, MSE érték) rendelkezik, mint a szakirodalomban ismert módszerek, Csenedes és Fegyverneki (2014). Használatának előnye, hogy könnyen implementálható, és megbízható eredményt ad, valamint a módszer futásidőben nem használ numerikus integrálást, így gyorsabb, mint a ML módszer. Az eljárás implementálásához szükséges összes függvény közelítése rendelkezésre áll.

Az M-becslések (maximum likelihood típusú becslések) a  $\sum -\log f(x_i)$  loglikelihood függvény helyett a  $\sum \rho(x_i)$  függvényt minimalizálják, ahol  $\rho$  egy alkalmas függvény,  $x_i$  mintaelemek. Legyen  $\psi(x) = d\rho(x)/dx$  függvény a  $\rho$  függvény deriváltja, ekkor a minimalizálás differenciálással és az  $\sum \psi(x_i) = 0$  egyenlet megoldásával valósítható meg. A  $\rho$  illetve  $\psi$  függvények megválasztása különböző becsléseket eredményez, Huber (1964).

Ismert  $\alpha$  paraméter esetén a stabil eloszlásból származó minta hely és skálaparaméterének együttes becslésére használható a Huber (1981) által definiált két változós M-becslés. A becslési eljárást Fegyverneki (2003) alapján mutatom be. Legyenek  $x_1, x_2, \dots, x_n$  megfigyelések, melyek az  $F$  eloszlásból származnak. Legyen  $F_0((x - T)/S) = F(x)$ , azaz  $F$  és  $F_0$  azonos típusú,  $F_0$  az eloszlástípus kitüntetett tagja, és az  $S$  skála és  $T$  helyparamétert  $F_0$ -hoz képest definiáljuk. A hely és skálaparaméter  $(T, S)$  együttes M-becslése  $(T_n, S_n)$  a következő egyenletrendszer megoldása:

$$\sum \psi\left(\frac{x_i - T_n}{S_n}\right) = 0,$$

$$\sum \psi^2\left(\frac{x_i - T_n}{S_n}\right) = (n-1)\mathcal{B},$$

ahol  $\psi$  alkalmas súlyfüggvény,  $\mathcal{B}$  egy konstans jelöl, melynek értéke  $1/12$ , ha a mintaelemek eloszlása éppen  $F_0$ , és

$$\mathcal{B} = D_{F_\xi}^2(\psi(\xi)),$$

egyébként. A fenti egyenletrendszer felírásához a Probability Integral Transformation (PIT) technikát és a momentumok módszerét használjuk.

Az egyenletrendszer iteratív algoritmussal, az ún. ping-pong módszerrel oldható meg. A módosított Newton-módszer alapján az alábbi két egyenletet felváltva oldjuk meg: az első egyenletből kapott helyparamétert a másodikba helyettesítve új skálaparaméter értékhez jutunk, aztán ezt felhasználva ismét az első egyenletet számítjuk ki. A kívánt pontosság eléréséig ismételjük a lépéseket.

A helyparaméter közelítése:

$$T_n^{(m+1)} = T_n^{(m)} + \frac{1}{n} S_n^{(m)} \sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{x_i - T_n^{(m)}}{S_n^{(m)}}\right),$$

A skálaparaméter közelítése:

$$[S_n^{(m+1)}]^2 = \frac{1}{(n-1)\mathcal{B}} \sum_{i=1}^n \psi^2\left(\frac{x_i - T_n^{(m+1)}}{S_n^{(m)}}\right) [S_n^{(m)}]^2.$$

A  $\psi$  súlyfüggvény:

$$\psi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2}. \quad (16)$$

A kezdeti értékek:

$$\begin{aligned} T_n^{(0)} &= \text{med}\{x_i\}, \\ S_n^{(0)} &= C \cdot MAD, \end{aligned}$$

ahol  $\text{med}\{x_i\}$  jelöli a mediánt,  $MAD$  jelöli a medián abszolút eltérést  $MAD = \text{med}\{|x_i - \text{med}\{x_i\}|\}$ ,  $S_n^{(m)}$  és  $T_n^{(m)}$  az  $S$  skála- és  $T$  helyparaméter aktuális becslései az  $m$ -edik iterációban. A  $C$  konstans értéke  $C = F_0^{-1}(3/4)$ , amelyet a kezdeti becslés torzítatlansága miatt alkalmazunk ( $F_0$  szimmetrikus eloszlás).

A ping-pong módszer segítségével rögzített  $\alpha$  esetén, azaz ha  $F_0 = F_{0,\alpha}$  ismert, a hely- és skálaparaméter becsülhető. Ha az alakparamétert is a mintából becsüljük, akkor  $F_{0,\alpha}$  nem ismert. A becslési eljárásban az  $F_{0,\alpha}$  eloszlásra a  $\psi$  függvény illetve a  $\mathcal{B}$  függvény számításakor van szükség. Mivel az  $F_{0,\alpha}$  nem ismert, a stabil eloszlások családjának két ismert szimmetrikus tagját, a normális eloszlást ( $\alpha = 2$ ), és a Cauchy-eloszlást ( $\alpha = 1$ ) használjuk a  $\psi$  függvényben (16) a skálaparaméter meghatározásához. Tehát, a skálaparaméter becslését mind a két ismert eloszlásfüggvény használatával előállítjuk.

A  $\mathcal{B}$  konstans szintén tartalmazza a  $\psi$  függvényt, illetve függ az  $\alpha$  paramétertől az integrandus miatt is, ezért legyen  $\mathcal{B}(\alpha)$  a továbbiakban az  $\alpha$

paraméter függvénye. Helyettesítsük be a normális és a Cauchy-eloszlást a  $\mathcal{B}(\alpha)$  függvényekbe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan x\right)^2 dF_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan x\right)^2 f_{\alpha}(x) dx = \mathcal{B}_1(\alpha),$$

ha  $F_0$  a standard Cauchy eloszlás, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 dF_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 f_{\alpha}(x) dx = \mathcal{B}_2(\alpha),$$

ha  $F_0$  standard normális. A  $\mathcal{B}_1$  és  $\mathcal{B}_2$  függvényeket előzetesen racionális törtfüggvénnyel közelítettem a numerikus integrálás elkerülése, és ezáltal az algoritmus gyorsítása miatt (Csendes (2013)).

A skálaparaméter meghatározása a  $\mathcal{B}(\alpha)$  függvény miatt az ismeretlen  $\alpha$  paramétertől függ. Ha tetszőleges  $\alpha$  értéket választanánk az  $[1, 2]$  intervallumból a  $\gamma$  paraméter becsléséhez, akkor a becslés torzított lenne, mivel nem a megfelelő  $F_{0,\alpha}$ -t alkalmaztuk. A minta valódi  $\alpha$  paramétere esetén ez a torzítottság eltűnik, a  $\mathcal{B}$  és  $\psi$  függvényekben lévő torzítottság kiegyenlíti egymást.

A valódi  $\hat{\alpha}$  paraméter becslés meghatározásához felhasználjuk a Cauchy és a normális eloszlással számított skálaparaméter becsléseket. Ha  $\alpha$ -t folytonosan változtatjuk az  $[1, 2]$  intervallumon (rögzített  $F_{0,\alpha}$  esetén), akkor a skálaparaméter becslések  $\alpha$  monoton növekvő, konkáv függvényét adják. Ha mind a két ismert eloszlásfüggvény esetén kiszámítjuk a skálaparamétereket, akkor két monoton növekvő, konkáv görbét kapunk, melyeknek a metszéspontja éppen a minta valódi  $\alpha$  paraméterénél van. A metszéspont meghatározásához válasszuk a kezdeti értékeket  $\alpha = 1$  és  $\alpha = 2$ -ként, és határozzuk meg a skálaparaméter értékeket ezekhez a kezdeti  $\alpha$  paraméterekhez. Ezután intervallumfelezéssel közelíthető a két görbe metszéspontja tetszőleges pontossággal.

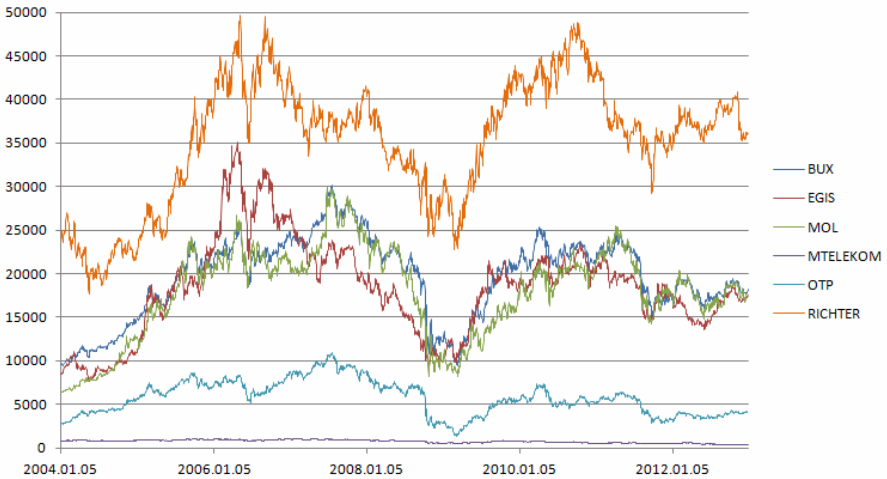
A PIT módszerrel való becslés könnyen implementálható, és rendelkezik a robusztus statisztikában ismert V-robusztus, B-robusztus, kvalitatív robusztus (lásd Huber (1981)) tulajdonságokkal. Kevésbé érzékeny az outlierekre, és megbízható eredményt ad. Vannak azonban korlátai is: csak abban az esetben használható, amikor a ferdeségi paraméter értéke nulla, mert a skálaparaméter közelítések meghatározásánál a módszer az ismert eloszlásfüggvényű Cauchy és a normális eloszlásra támaszkodik, amelyek szimmetrikusak. A módszer csak az  $1 < \alpha < 2$  paraméter értékekre működik, mert az algoritmusban használt függvényközelítéseket csak erre a paraméter tartományra határoztam meg. Bár numerikusan  $\alpha < 1$  -re is kiszámítható lenne a  $\mathcal{B}$  függvény, ebben az esetben a stabil eloszlás várható értéke nem véges. A portfólió optimalizálási feladatban a várható hozamnak léteznie kell, tehát gyakorlati szempontból az a tartomány kevésbé fontos, amely esetén nem létezik a várható érték.

Ha az  $\alpha$  paraméter közel esik valamelyik végponthoz, és a minta kicsi, akkor előfordulhat, hogy a két skálaparaméter görbének nincsen metszéspontja az  $(1, 2)$  intervallumon. Ennek oka a véletlen minták generálásánál

szerepet játszó véletlen hatás. Ilyenkor a módszer nem ad érvényes becslést az alakparaméterre. Szimulációk alapján ez 50-100 elemű minták esetén az ismétlések 1-6%-ánál, 400 elemű mintáknál viszont már egyáltalán nem fordult elő.

## 4 Eredmények

A dolgozatomban vizsgált adatsorok részvények napi záróár adatait tartalmazza 2004.01.01 és 2012.12.31 között. Az adatok forrása a *www.portfolio.hu* weboldal. A vizsgált részvények: OTP, Richter, Egis, Magyar Telekom, MOL, valamint a BUX Budapesti Értéktőzsde hivatalos indexe. Abban az esetben, amikor az adatsorból hiányzott az aznapi záróár, az árfolyamváltozást az előző napi meglévő adatból számítottam. Az 1. ábra a napi záróár adatokat mutatja.

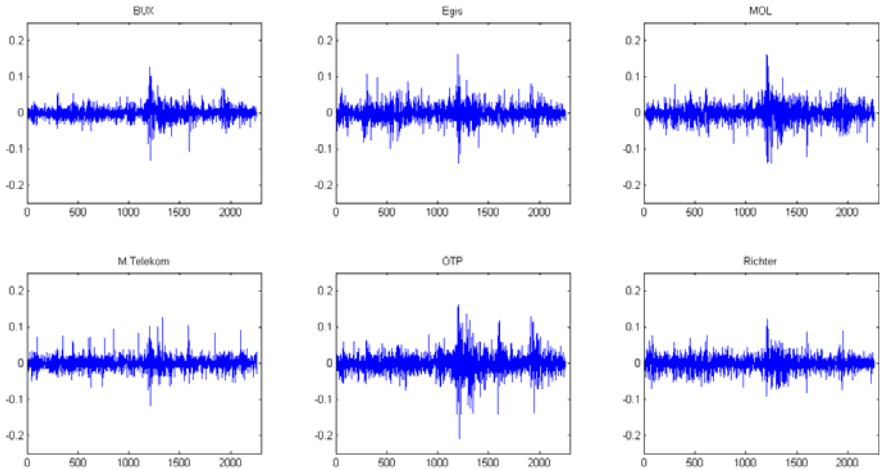


1. ábra. A részvények napi záróárainak alakulása a vizsgált időszakban

A részvényenkénti adatsorokból a (14) formula alapján meghatároztam a napi logaritmikus hozamokat, melyeket a 2. ábra mutat. A hozamok ábráján megfigyelhető a pénzügyi válság hatására az ún. *volatility clustering* jelenség, azaz látszik, hogy a válság kirobbanását követő időben sokkal volatilisabbak lettek a részvények, mindegyik részvény ára drasztikus ingadozásnak volt kitéve.

Feltételeztem, hogy a napi árfolyamadatokról képzett minta független, azonos eloszlásból származik. A részvényenkénti adatsorokat két változóra bontottam páros-páratlan sorszám alapján, és  $\chi^2$  teszttel vizsgáltam a két változó függetlenségét. A teszt nem utasította el a függetlenséget 95%-os szignifikancia szinten abban az esetben, amikor a felosztás intervallumainak száma 2-3 volt, de több intervallumra osztás esetén már igen. A függetlenséget

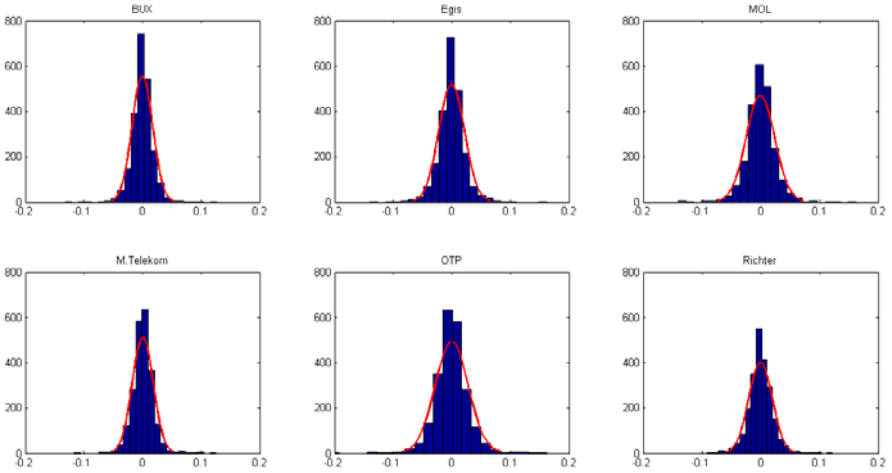
a vizsgálat második felében bemutatott mozgóablakok esetén is teszteltem, az 50 elemű ablakoknál általában teljesült a függetlenség kritériuma. A vizsgálat eredményeit terjedelmi okokból nem részleteztem.



2. ábra. Logaritmikus hozamok

A logaritmikus hozamok eloszlásának vizsgálatához gyakorisági hisztogramon (3. ábra) ábrázoltam az adatokat. A hisztogramokon láthatóak a hozam-  
 adatokra illesztett normális eloszlások görbéi is. A hisztogramokból kitűnik, hogy a normális modell nem illeszthető az adatokra, azok eloszlása inkább heavy-tailed eloszlást követ.

Meghatároztam a PIT becsléssel a minták  $\hat{\alpha}$  alak-,  $\hat{\delta}$  hely- és  $\hat{\gamma}$  skálaparaméter becsléseit a szimmetria feltételezése mellett. A számított paraméter-  
 értékeket mutatja az 1. táblázat. Az eredmények szerint az OTP és az Egis valamivel kockázatosabbnak bizonyult, a Richter, Mol és M. Telekom papírjai egy kicsivel stabilabbak, kevésbé kockázatosak. A  $\gamma$  paraméter értéke az OTP  
 esetében a legmagasabb,  $\gamma = 0.0211$ , ami arra utal, hogy a vizsgált papírok közül az OTP-re volt legnagyobb hatása a pénzügyi válságnak.



3. ábra. A részvények hozama logaritmusos modell szerint

Mivel a volatilisabb időszakokban az árfolyam változások átlaga eltávolodhat nullától, a logaritmusos hozam és a (13) formula alapján definiált százalékos hozam ebben az időszakban eltérhet. A stabil paramétereket a százalékos hozamok esetén is meghatároztam, azonban az eredmények alapján a teljes vizsgált időszakban megfigyelt eloszlás paramétereiben ez a különbség nem jelent számottevő változást. A dolgozat eredményeit a logaritmusos modellben ismertetem. A (13) formula alapján számított százalékos hozamok eloszlásának becsült paramétereit mutatja a 2. táblázat.

A STABLE programmal számított paraméter becslések eredményeit tartalmazza a 3. táblázat. Az egyes részvények alakparaméterére a két módszerrel nagyon hasonló eredményt kaptam. A STABLE programmal számított  $\alpha$  paraméter értékek minden esetben egy kicsivel (kb. 1-2 századdal) alacsonyabbak, de kockázatosság szempontjából ugyanaz a sorrend alakul ki. A  $\beta$  ferdeségi paraméter értéke minden részvény esetén nullához közeli, a leginkább szimmetrikus árfolyamú papír az Egis ( $\beta = -0.0037$ ) és az M. Telekom ( $\beta = -0.0070$ ). A skála és helyparaméter becslések is hasonlóan alakultak mindkét módszerrel.

Részvény	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
BUX	1.738710	0.013422	0.000371
EGIS	1.688192	0.016257	0.000356
MOL	1.732882	0.018634	0.000324
MTELEKOM	1.749846	0.013878	-0.000163
OTP	1.701002	0.021068	0.000409
RICHTER	1.764326	0.016072	0.000178

1. táblázat. A PIT módszerrel számított alak-  $\hat{\alpha}$ , hely-  $\hat{\delta}$  és skála-  $\hat{\gamma}$  paraméter becslések a logaritmusos modell szerint



Részvény	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
BUX	1.738707	0.013425	0.000418
EGIS	1.688284	0.016265	0.000426
MOL	1.731482	0.018630	0.000414
MTELEKOM	1.749941	0.013877	-0.000114
OTP	1.702944	0.021094	0.000526
RICHTER	1.762995	0.016065	0.000244

2. táblázat. A PIT módszerrel számított alak-  $\hat{\alpha}$ , hely-  $\hat{\delta}$  és skála-  $\hat{\gamma}$  paraméter becslések a százalékban kifejezett modell szerint

Részvény	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
BUX	1.7246	-0.0322	0.00991	0.00043
EGIS	1.6623	-0.0037	0.01212	0.00042
MOL	1.7211	0.0323	0.01376	0.00018
MTELEKOM	1.7359	-0.0070	0.01016	-0.00005
OTP	1.6904	-0.0852	0.01554	0.00080
RICHTER	1.7458	0.0721	0.01184	0.00012

3. táblázat. A STABLE programmal számított alak-  $\hat{\alpha}$ , ferdeségi-  $\hat{\beta}$ , hely-  $\hat{\delta}$  és skála-  $\hat{\gamma}$  paraméter becslések a logaritmikussal szembeállított modell szerint

Részvény	átlag	medián	szórás	MAD
BUX	0.000286	0.000531	0.017436	0.012381
EGIS	0.000327	0.000000	0.021753	0.015366
MOL	0.000448	0.000000	0.024080	0.017187
MTELEKOM	-0.000341	0.000000	0.017790	0.012699
OTP	0.000182	0.000160	0.028241	0.019900
RICHTER	0.000171	0.000000	0.019769	0.014426

4. táblázat. A hely- és skálaparaméter robusztus és normális eloszlás szerinti becslései a logaritmikussal szembeállított hozamokból

A hely és skálaparaméternek kiszámíthatók a robusztus becslései úgy, mint a medián és a medián abszolút eltérés (Median Absolute Deviation, MAD), illetve a normális modellből kiindulva megbecsülhető az átlag és szórás is. Ezeket a becsléseket tartalmazza a 4. táblázat. Az OTP és Egis részvényekre a magas skálaparaméter érték mellett magas szórást és MAD értéket kaptam, ami összhangban van az alacsonyabb  $\alpha$  paraméterrel. Valamint az alakparaméter alapján stabilabb, kevésbé kockázatos Richternél és M. Telekomnál a szórás és MAD is alacsonyabban alakult. A medián három részvénytől (Egis, Mol, M. Telekom) is nulla lett, és a többi esetben is nagyon közeli a nullához, így a STABLE program  $\beta$  becslésével is összevetve a szimmetria mellett szóló eredményt kaptam.

A mintának a becsült stabil paraméterű eloszláshoz való illeszkedését Kolmogorov-Smirnov próbával és  $\chi^2$  goodness-of-fit tesztekkel értékeltem. Az 5. táblázat a normalitás hipotézise és a becsült  $\alpha$ -stabil eloszláshoz való  $\chi^2$  illeszkedés vizsgálat eredményét mutatja. A próbákat a MATLAB szoftvercsomag *chi2gof* függvényével végeztem el. A táblázatban a tesztstatistika értékét, a hozzá tartozó p-értéket, valamint a szabadsági fokot tüntettem fel. Az intervallumok száma mind a két esetben kezdetben 10 volt, de a normális nullhipotézis esetében össze kellett vonni intervallumokat. A normális eloszlás esetében a becsült paraméterek száma 2, a stabil eloszlás esetében 4, így a

kritikus értékek 95%-os megbízhatósági szinten  $\chi_5^2 = 11.0705$ , illetve  $\chi_3^2 = 7.8147$  és  $\chi_2^2 = 5.9915$ . A teszt elvégzéséhez a hipotetikus stabil eloszlásfüggvények értékeit egy tizedenként vett  $\alpha = 1, \alpha = 1.1, \dots, \alpha = 2$  nagy elemszámú véletlen minták generálásával a minták percentiliseiből határoztam meg. A  $\chi^2$  teszt során a PIT módszerrel becsült  $\alpha$  paramétert kerekítettem az egy tizedesjegy pontos  $\alpha$  értékhez, és ehhez a hipotetikus eloszláshoz képest vizsgáltam az illeszkedést. Az elvégzett illeszkedés vizsgálat tesztek alapján azt mondhatjuk, hogy a stabil modellt több részvény esetében elfogadhatónak értékelték a tesztek, míg a normalitást egyértelműen el kell utasítanunk.

Részvény	$N_0$ : normális eloszlás			$N_0$ : stabil eloszlás		
	p-érték	tesztstat.	sz. fok	p-érték	tesztstat.	sz. fok
BUX	0.0000	52.2043	2	0.0259	12.7440	5
EGIS	0.0000	121.2358	2	0.0025	18.3700	5
MOL	0.0000	103.3843	2	0.1052	9.0975	5
MTELEKOM	0.0000	51.7739	2	0.0001	26.9211	5
OTP	0.0000	108.4685	2	0.5204	4.2039	5
RICHTER	0.0000	82.8593	3	0.0001	25.7553	5

5. táblázat. A  $\chi^2$  próba eredményei a logaritmus hozamokra

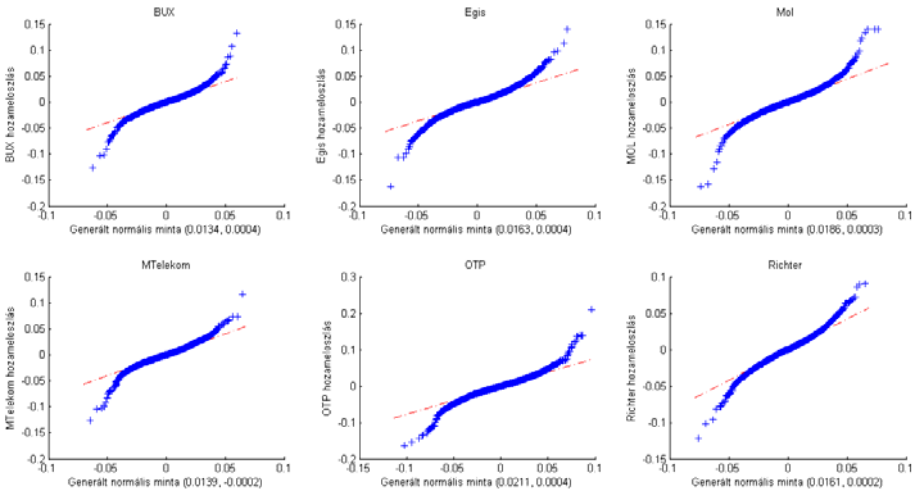
Részvény	Normális eloszlás		Stabil eloszlás	
	p-érték	tesztstat.	p-érték	tesztstat.
BUX	0.0000	0.0566	0.7804	0.0138
EGIS	0.0000	0.0658	0.2179	0.0221
MOL	0.0000	0.0585	0.8810	0.0123
MTELEKOM	0.0000	0.0563	0.0460	0.0288
OTP	0.0000	0.0641	0.8693	0.0125
RICHTER	0.0002	0.0455	0.2748	0.0209

6. táblázat. A Kolmogorov-Smirnov próba eredményei a logaritmus hozamokra

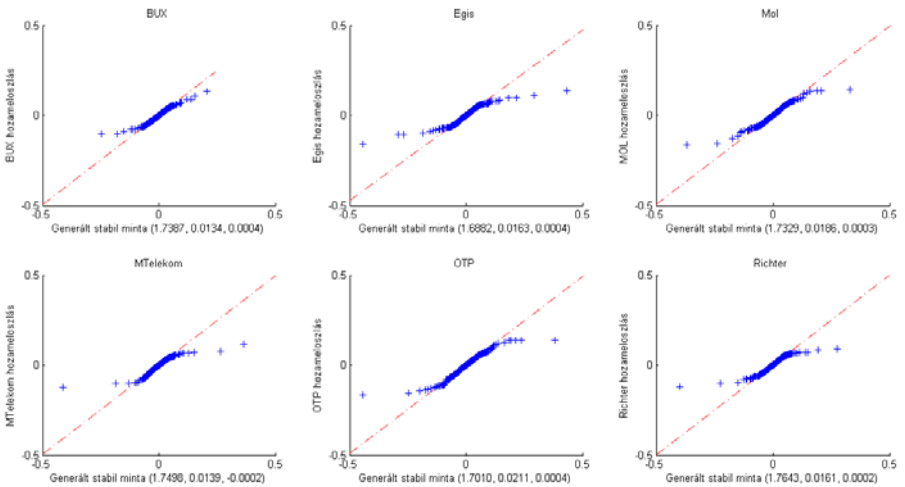
A 6. táblázat tartalmazza az elvégzett Kolmogorov-Smirnov tesztek p-értékeit és a tesztstatisztika értékeit. A 95%-os megbízhatósági szinthez tartozó kritikus érték a normális nullhipotézis esetén 0.00258, míg stabil eloszlású nullhipotézis esetére nem ismert a teszt aszimptotikus viselkedése. A stabil nullhipotézis esetében a p-értékek a normális eloszlásra ismert aszimptotikus eredmények alapján kerültek meghatározásra. A tesztek a MATLAB *kstest* függvényével végeztem el. Az eredményekből kitűnik, hogy a hipotetikus  $\alpha$ -stabil eloszlásoktól való eltérés minden esetben kisebb, mint a normális eloszlástól való eltérés, és a teszt csak egy esetben (MTelekom) utasította el a stabil nullhipotézist.

A hozamok empirikus eloszlásfüggvényét a normális eloszláshoz (4. ábra), illetve a becsült  $\alpha$  paraméterű stabil eloszláshoz (5. ábra) illetve ún. q-q ábrán ábrázoltam. A q-q ábra a megfigyelt és az elméleti, hipotetikus percentilis értékeket ábrázolja. Ha az illeszkedés megfelelő, azaz a hipotézisbeli és az empirikus eloszlás egyezik, akkor a pontok egy egyeneshez illeszkednek. Az elméleti eloszlásokat 10 000 elemű véletlen minták generálásával állítottam elő. Az ábrákon látható, hogy a normális eloszlás illesztése nem megfelelő, az eloszlás szélein jelentős eltérések figyelhetők meg az egyenestől.

Az 5. ábrán kevesebb pont tér el az egyenestől az eloszlás széleinél, tehát grafikusan is a várakozásnak megfelelő eredményt kaptam.



4. ábra. Q-Q ábrák a logaritmusos hozamok empirikus eloszlása és a normális eloszlás között (zárójelben a generált minta szórás és átlag paraméterei)

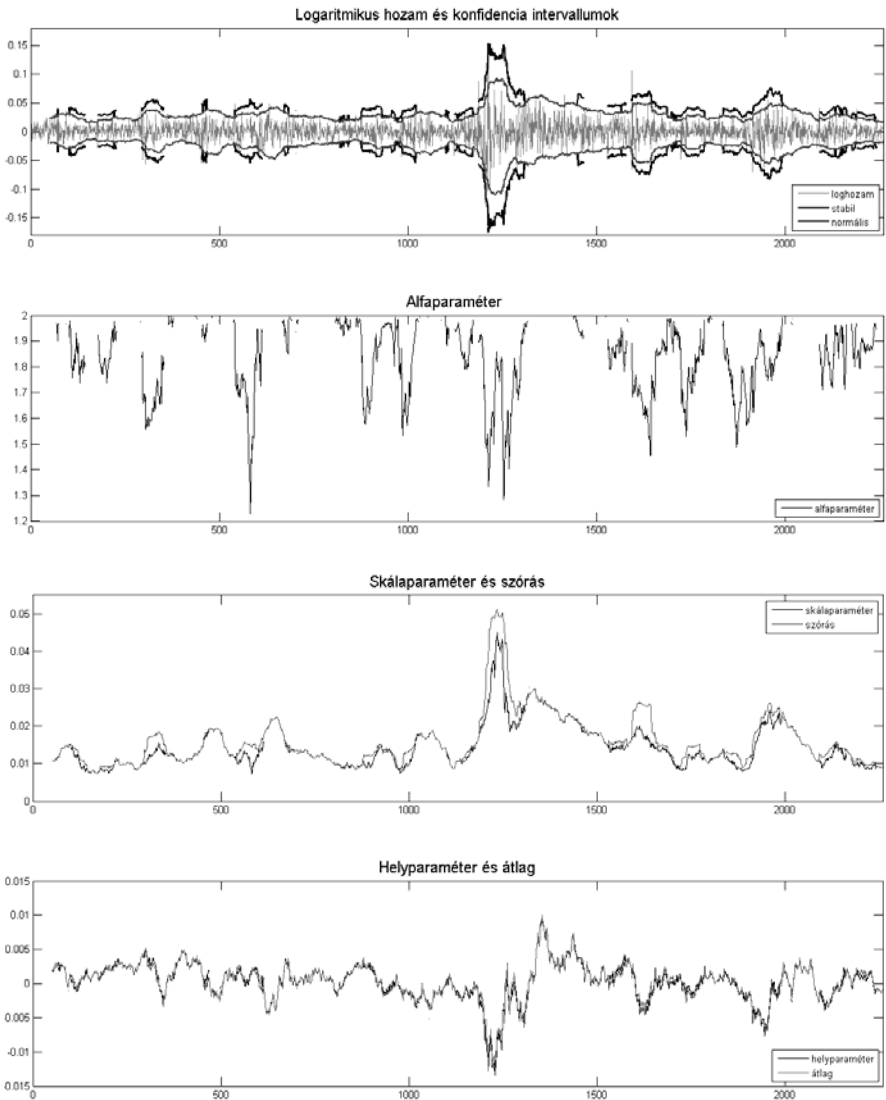


5. ábra. Q-Q ábrák a logaritmusos hozamok empirikus eloszlása és a becsült stabil eloszlás között (zárójelben a generált minta  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  paraméterei)

Elemzésem második felében azt vizsgáltam, hogyan alkalmazhatók az eredmények előrejelzésre. Ehhez változtatható méretű mozgóablakot készítettem, és ábrázoltam, hogyan változtak a paraméterek a vizsgált időperiódusban. Arra a kérdésre is próbáltam választ adni, hogy a 2008–2009-es pénzügyi válság hatása hogyan mutatkozott meg a hozamok eloszlásában. Az elkészült ábrák közül a BUX index ábráját mutatom be.

A 6. ábrán 50 elemű mozgóablak segítségével becsültem a paramétereket, és ábrázoltam a paraméterek változását az időben. Ez az ablakméret megfele-

lően kicsi ahhoz, hogy a változások gyorsan érvényesüljenek a becslésértékekben. Hátránya viszont, hogy előfordult olyan eset, amikor a paraméterek nem voltak meghatározhatók a PIT becsléssel az alacsony mintaelemszám miatt. A első ábra mutatja a logaritmusos hozam adatokat, 95%-os konfidencia intervallummal a normális eloszlás és a becült stabil eloszlás alapján. A második ábra az  $\alpha$  paramétert, a harmadik a skálaparamétert és a szórást, a negyedik a helyparamétert és az átlagot mutatja.



6. ábra. Konfidenciaintervallum normális és stabil eloszlás alapján  $n = 50$ , BUX teljes időszak

A pénzügyi válság hatása az ábra közepén, kb. az 1200. megfigyeléstől kezdődően látható. Az  $\alpha$  paraméter értéke nagyon meredeken csökkent: a

legalacsonyabb értékek 1.3 körüliek voltak. Hasonlóan alakult az OTP és az Egis hozameloszlásának  $\alpha$  paramétere, míg a többi vizsgált papírnál az alakparaméter nem csökkent kiugróan. Az  $\alpha$  paraméter becslése gyorsan változik, ebben közrejátszhat a becslési eljárás érzékenysége egy-egy nagyon extrém megfigyelésre, bár ez az érzékenység jóval kisebb, mint a hagyományos módszerek esetében.

A vizsgált időszakban megfigyelhető volt mindegyik részvénytől a szórás illetve a skálaparaméter növekedése a válság évében, és ezzel egyidejűleg a helyparaméter (azaz a hozam várható értékének) csökkenése. A skálaparaméter, illetve szórás értékének emelkedése nem volt hosszú távú, rövid idő alatt visszaálltak a 2008 előtti skála és szórás értékek. A stabil modellel becsült skálaparaméter általában alacsonyabb, mint a normális eloszlásból becsült szórás értéke. Azokban az időszakokban a legjelentősebb az eltérés amikor az alakparaméter jelentősen csökkent. Tehát minél inkább közelítünk a véges szórású esethez ( $\alpha = 2$ ), annál inkább érvényes a normális modell, míg ha az alakparaméter csökken, úgy válik az árfolyam volatilisabbé, és emelkednek a szóródást leíró paraméterek értékei.

## 5 Összefoglalás

Dolgozatomban bemutattam a stabil eloszláscsalád legfontosabb tulajdonságait, az ismert stabil pénzügyi modelleket, és a paraméter becslésére kidolgozott eljárásokat. A stabil eloszlások használata a pénzügyi modellezésben hosszú múltra tekint vissza, és az elméleti megalapozottsága széles körű, de az eloszláscsalád gyakorlati problémákban való alkalmazhatóságát nagyban nehezíti a zárt alakban ismert sűrűség- és eloszlásfüggvény hiánya, valamint a roppant számításigényes algoritmusok. Az olyan új statisztikai módszerek kidolgozása, melyek egyszerűen használhatóak, ezért időszerű és aktuális feladat.

Az általam kidolgozott PIT becslés szimmetrikus stabil eloszlások paraméterbecslésére ad megbízható, nagy pontosságú eredményt. A módszer a robusztus M-becslések családjába tartozik, és megfelelő statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik. Az algoritmus és a szükséges függvényközelítések rendelkezésre állnak, ezért az eljárás könnyen implementálható. Jelen dolgozatomban igazoltam a PIT becslés gyakorlati feladatokban való alkalmazhatóságát.

Cikkemben a Budapesti Értéktőzsde legjelentősebb részvényeinek árfolyamváltozásait vizsgáltam a 2004-2012 közötti időszakban a logaritmikusan hozamok eloszlásán keresztül. A hozameloszlások paramétereit a PIT becsléssel és a STABLE szoftver segítségével számítottam ki. Vizsgáltam a hozamok eloszlásának illeszkedését a normális, és a becsült paraméterű stabil eloszláshoz. Az elvégzett  $\chi^2$  és Kolmogorov-Smirnov tesztek alapján elutasítottam a normális modell használatát. A hozamok eloszlására konfidencia intervallumokat adtam, melyek korlátozott előrejelzési lehetőséget is biztosítanak.

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Fegyverneki Sándornak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségével, valamint ismeretlen lektoraimnak az észrevételeikért és hasznos tanácsaikért.

## Irodalom

1. Adler, J. R., Feldman, R. E., Taqqu, M. S., (Editors), *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser, Boston (1998).
2. Borak, Sz., Härdle, W., Weron, R., Stable Distributions. SFB 649 Discussion Papers, SFB649DP2005-008, Humboldt University, Berlin, Germany (2005).
3. Bradley, B. O., Taqqu, M. S., Financial Risk and Heavy Tails, in *Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance*, (ed. Rachev, S. T.), North-Holland (2003) 35–103.
4. Csenedes, Cs., Joint Robust Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions. *Journal of Statistical and Econometric Methods* **2**(2) (2013) 85–106.
5. Csenedes, Cs., Fegyverneki, S., Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions by Probability Integral Transformation. *Applied Information Science, Engineering and Technology, Topics in Intelligent Engineering and Informatics* **7** (2014) 1–18 DOI: 10.1007/978-3-319-01919-2.
6. Fama, E. F., Portfolio Analysis in Stable Paretian Markets. *Manage. Sci.* **11** (1965) 404–419.
7. Fama, E. F., Roll, R., Parameter Estimates of Symmetric Stable Distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **66** (1971) 331–338.
8. Fama, E. F., Roll, R., Some Properties of Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association* **63** (1968) 817–836.
9. Fegyverneki, S., Robust Estimators and Probability Integral Transformations. *Math. Comput. Modelling* **38** (2003) 803–814.
10. Gáll, J., Pap, Gy., *Bevezetés a hasznosság alapú portfólió-menedzsmentbe*, egyetemi jegyzet, mobiDIÁK könyvtár, Debreceni Egyetem (2004).
11. Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N., *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Cambridge, MA. (1954).
12. Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., Stahel, W. A., *Robust Statistics – The Approach Based on Influence Functions*, Wiley, New York (1986).
13. Hill, B. M., A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution. *Ann. Stat.* **3** (1975) 1163–1174.
14. Huber, P. J., *Robust Statistics*, Wiley, New York (1981).
15. Huber, P. J., Robust Estimation of a Location Parameter, *Ann. Math. Statist.* **35** (1964) 73–101.
16. Janecskó, B., Idősor-modellezés és opcióárazás csonkolt Levy-eloszlással. *Közgazdasági Szemle*, **47** (2000) 899–917.
17. Kogon, S. M., Williams, D. B. Characteristic function based estimation of stable parameters, in Adler, R., Feldman, R., Taqqu, M., (eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser, Boston (1998) 311–335.

18. Koutrouvelis, I. A., Regression-type Estimation of the Parameters of Stable Laws. *J. Amer. Statist. Assoc.* **75** (1980) 918–928.
19. Levy, P., *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris (1925).
20. Lintner, J., The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Rev. Econ. Stat.* **47** (1965) 13–37.
21. Lukács, P., Portfólió optimalizálása várható hozam – variancia és várható hozam – CVaR módszerrel. *Vezetéstudomány* **35** (2) (2004) 34–41.
22. Lux, T., Varga, J., A Pareto hipotézis vizsgálata: értékpapírpiazi hozamok és az extrémális hozamok eloszlása. *Sigma* **27** (1996) 1–23.
23. Mandelbrot, B., The Variation of Certain Speculative Prices, *The Random Character of Stock Market Prices* (ed. Cootner, P. H.), Cambridge, The M.I.T. Press (1964).
24. Markowitz, H., Portfolio Selection. *Journal of Finance* **7** (1952) 77–91.
25. McCulloch, J. H., Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters. *Commun. Statist. - Simula.* **15**(4) (1986) 1109–1136.
26. McCulloch, J. H., Measuring tail thickness to estimate the stable index alpha: a critique. *Journal of Business and Economical Statistics* **15** (1997) 74–81.
27. Mittnik, S., Rachev, S. T., Modeling Asset Returns with Alternative Stable Distributions. *Econometric Reviews* **12**(3) (1993) 261–330.
28. Nolan, J. P., Maximum Likelihood Estimation of Stable Parameters, in Barndorff-Nielsen, O. E. , Mikosch, T., and Resnick, S. I., (eds.), *Levy Processes: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston (2001) 379–400.
29. Nolan, J. P., Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions. *Comm. in Stat. - Stoch. Model.* **13** (1997) 759–774.
30. Nolan, J. P., stabil eloszláscsaláddal foglalkozó honlap: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>
31. Palágyi, Z., Árfolyamingadozások és kockázatbecslés a Budapesti Értéktőzsdén, *Sigma* **30**(1-2) (1999) 27–33.
32. Palágyi, Z., Pénzügyi idősorok elemzése Levy-hatvány GARCH modellel, *Statisztikai Szemle* **81** (7) (2003) 571–587.
33. Press, S. J., *Applied Multivariate Analysis*, Holt, Rinehart & Winston, New York (1972).
34. Rachev, S. T. (ed.), *Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance*, North-Holland, Amsterdam, (2003).
35. Rachev, S. T., Mittnik, S., *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, New York (2000).
36. Samorodnitsky, G., Taqqu, M., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, New York (1994).
37. Sharpe, W. F., Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance* **19** (1964) 425–442.
38. Uchaikin, V. V., Zolotarev, V. M., *Chance and Stability - Stable Distributions and their Applications*, VSP, Utrecht (1999).
39. Weron R., Performance of the Estimators of Stable Law Parameters. Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods, *Research Report HSC/95/1* (1995).
40. Zolotarev, V. M., *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs, **65**, American Mathematical Society, Providence (1986).

## ASSESSING ASSET RETURNS IN THE SYMMETRIC STABLE MODEL

In this study the basic characteristics of the stable distribution family, models of stable portfolio theory and parameter estimation methods are summarized. Usage of heavy-tailed distributions is widely accepted in financial modeling, thus the theoretical background is satisfactory. The distribution family has some property which is hard to handle in applications, e.g. the lack of known closed formula of the density and distribution function. Methods dealing with parameter estimation are unreliable, difficult to use or computationally very intensive. That's why research in that field is still conducive. A parameter estimation method for symmetric stable distributions is presented, based on Probability Integral Transformation (PIT). The estimation procedure is a robust M-estimate and it possesses good robust statistical properties. The method gives accurate and reliable results. The method is easy to implement, because the algorithm and all necessary function approximations are available. In the present study it is proven that the method can be applied in a practical application for real data sets. The logarithmic returns of some assets of Budapest Stock Exchange between 2004 and 2012 were modeled with symmetric stable distributions by PIT estimation procedure and STABLE software. The distribution of logreturns were fitted to normal and stable distributions. By  $\chi^2$  and Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit tests the normal model was rejected. Confidence intervals for the returns were also given which provide some sort of prediction.