

# ÁRJEGYZŐI VISELKEDÉS BELSŐ KOCKÁZATELOSZTÁS MELLETT<sup>1</sup>

HAVRAN DÁNIEL – SZŰCS BALÁZS ÁRPÁD

*Budapesti Corvinus Egyetem*

A pénzügyi piacok közvetítői (brókerségek, befektetési bankok) gyakran versenytársak és együttműködő partnerek is egyszerre. A közvetítők elsősorban a velük kapcsolatban álló befektetők (nyugdíj- és fedezeti alapok, stb.) kereskedési igényét szolgálják ki, valamint mindehhez árat jegyeznek nekik. Azonban ezek a szereplők igen gyakran egymással is kereskednek, amely során az ügyfeleiktől származó pozíciójuk kockázatát csökkenthetik. A közvetítők egymás közötti piacát három jellemző különbözteti meg a walrasi piacoktól: bilaterális cserék, a szereplők hálózatos elrendezése, és a játékosok eltérő alkuerije a cserék során. Egy ilyen piac jellemzésére egy egyperiódusos modellt építünk, amely alkalmas az ilyen közvetítői hálózatok elemzésére. A dolgozat második felében azt vizsgáljuk, hogy a közvetítők egymás közötti kereskedése mennyiben befolyásolja a befektetőkkel való piac működését. Elemzésünk ezen részében az árjegyzőket duopolista magatartás jellemzi (két árjegyző és sok befektető van) a befektetői piacon. Megmutatjuk, hogy különböző duopol piaci struktúrákban a belső piacnak az erőfölénybeli különbségeket mérséklő szerepe van. Ha az árjegyzők kockázatkerülőbbek lesznek, ez csökkenti az árjegyző-befektető piacon a gazdasági erőfölényt.<sup>2</sup>

*Kulcsszavak:* árjegyzői magatartás, árjegyzők közötti kereskedés, kockázatallokáció, pénzügyi piacok, mikrostruktúrák. *JEL:* G10, D43, D53.

## 1 Bevezető

A pénzügyi piacokon közvetítők bonyolítják a forgalom jelentős részét. Az amerikai gazdaságban kialakult árnyék-bankrendszer jó része ma a befektetési bankok közvetítői tevékenységét fedi (Pozsar, Adrian, Ashcraft és Boesky (2012)). A közvetítők gyakran árjegyzőként működnek közre a befektető ügyfeleikből alkotott piacon. Ezek a befektetési bankok, brókerségek azonban nem csak ügyfelekkel, hanem egymással is kapcsolatban állnak.

A közvetítők közötti kereskedés meglehetősen nagy figyelmet kapott a Lehman bankház csődje után, nem véletlenül, hiszen a bankház fontos szerep-

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2016. június 2. Havran Dániel a Budapesti Corvinus Egyetem docense, az MTA-KRTK KTI vendégkutatója. A tanulmány megírását a Magyar Tudományos Akadémia Posztdoktori Program 2013-2015-ös kutatási ösztöndíjának támogatása tette lehetővé. E-mail: [daniel.havran@uni-corvinus.hu](mailto:daniel.havran@uni-corvinus.hu). Szűcs Balázs Árpád a Budapesti Corvinus Egyetem tanársegédje. E-mail: [balazsarpad.szucs@uni-corvinus.hu](mailto:balazsarpad.szucs@uni-corvinus.hu).

<sup>2</sup>A szerzők köszönik az anonim lektor előrevívó észrevételeit és megjegyzéseit, amelyek sokat segítettek a tanulmány végső formájának kialakításában. Minden fennmaradó hibáért és tévedésért kizárólag a szerzők a felelősek.

lője volt ennek a piacnak, bukása a pénzügyi rendszer stabilitását is veszélyeztette. Az elszámolóházakon keresztül történő kereskedés kötelezővé válásával mára a partnerkockázatból fakadó rendszerkockázat jelentősen csökkent, a piaci szereplők közötti csere viszont továbbra is fontos kérdés maradt.

A tanulmányban a közvetítők magatartását vizsgáljuk egy olyan helyzetben, ahol a szereplők az ügyfeleiken kívül egymással is kereskednek, hogy ezzel csökkentsék a befektetőkkel kötött ügyletekből származó pozícióik kockázatát. Közgazdasági értelemben kétféle piacot különböztetünk meg az elemzés során: az ügyfelek felé történő árjegyzői szolgáltatást (*külső piac*), valamint a kockázatkezelési céllal létrejött egymás közötti kereskedelmet (*belső piac*). Elsősorban a bankközi hitel-betét és kamatcsere-ügyletek, amerikai államkötvények, önkormányzati kötvények, valamint a hitelderivatívák (főként a CDS ügyletek) piaca ilyen, de néhány más területen is találhatunk hasonló szerkezetű piacot (pl. londoni részvénybrókeri hálózat). A pénzügyi közvetítők az ügyfélpiacon versenytársak, ezzel szemben a belső piacon kooperálnak egymással. Ha a külső piacon egyes szereplőknek piaci erőfölényük van, az hathat az ügyfelekkel szembeni pozíciójukra, és ezáltal a belső piaci cserékre is. Továbbá, ha az árjegyzők beépítik a külső piacról szóló döntéseikbe a belső piaci cserék lehetséges hatásait is, az árjegyzők külső piaci stratégiai magatartása jelentősen módosulhat.

A dolgozatban két kérdést válaszolunk meg ehhez kapcsolódóan. Elsőként azt, hogy miként írható le a közvetítők belső piaca és az ott zajló elosztási mechanizmus mikroökonómiai megközelítésben. A belső piac legfontosabb jellemzője, hogy nem minden játékos tud a másikkal egyforma eséllyel találkozni, a játékosok felkeresése költséges. Fontos megérteni, hogy az árjegyzők hogyan találhatnak ilyen piaci súrlódás mellett cserepartnerre, hogyan határozzák meg az egymás közötti cserék árait a kétoldalú alkuk során, valamint az így létrejövő tranzakciókkal eljuthat-e a piac a minden félnek legnagyobb hasznot hozó egyensúlyi állapotba. A második kérdés a külső piac és a belső piac kapcsolataira fókuszál. A belső piaci kereskedés és erőviszonyok egyértelműen kihatnak a külső piaci árjegyzési tevékenységre. Vajon csökken, vagy nő az árjegyzők közötti verseny, ha van belső piac? Mit várunk, vajon a külső piacon lévő verseny erőssége nő vagy inkább csökken, ha az árjegyzők kockázatkerülőbbekké válnak? Itt egy olyan piaci struktúrát jellemezzünk elemi eszközökkel, amelyben két szereplő a külső piacon ugyanazokat a befektetőket éri el, tehát versenytársak, a belső piacon pedig egymással kereskedhetnek ezzel egy időben.

A tanulmány fő eredményei. Kockázatkerülő szereplőket feltételezve egy olyan belső piacot modellezünk, amelyben a kereskedők eltérő arányban keresik fel a többi játékos, majd bilaterális alkuk során bonyolítják le a tranzakciókat. A cserepartner-választási preferenciák exogének a modellben. Ezzel a módszerrel olyan kereskedési hálózatokat adhatunk meg, amelyeket a pénzügyi piacok hálózatait bemutató empirikus kutatások is leírnak. Teljes informáltság mellett megadjuk a piaci egyensúlyt az így definiált piacon. Megmutatjuk továbbá, hogy (1) a kockázatos pénzügyi eszköz egyensúlyi nettó elosztása nem függ az egyedi keresési preferenciáktól, és nem függ az egyedi alkuerőktől sem; (2) a bilaterális tranzakciók méretét a keresési preferencia

befolyásolja, de a tranzakciók nagysága nem függ az egyedi alkuerőtől; (3) az egyedi hasznosság növekménye (az eszköz elosztás és a szerzett pénz hasznai) annál nagyobb, minél népszerűbb és erősebb az alkukban egy szereplő; (4) a belső piaci egyensúly Pareto-optimális.

A dolgozat második felében a két piac közötti összefüggések elemzésére duopólium szerkezetű külső piacokat vizsgálunk, ahol a szereplők a belső piacon eltérő alkuerővel rendelkeznek. Csak az egyik oldali (a vételi) kereskedést vizsgálva megmutatjuk, hogy miként hat a stratégiai magatartás az árjegyzők által felkínált árrés nagyságára és az aggregált kockázatra, valamint azt, hogy hogyan befolyásolja a kockázatvállalási hajlandóság az árrés nagyságát. A különböző külső piacszerkezetek vizsgálata során azt találjuk, hogy amennyiben az árjegyzők kockázatelutasítási mértéke csekély (egy konjunktúra-helyzet, amikor a belső piac alig funkcionál), akkor a külső piaci erőfölény jól alkalmazható a külső piacon. Amikor az árjegyzők kockázatelutasítása erősebb, akkor az intenzívebb belső csere következtében a külső piacokon eltűnik a piaci erőfölény. Ilyenkor az árjegyzők kockázatviselési hajlandósága határozza meg elsősorban a forgalmat. Ez utóbbi eredmény összecseng Reiss és Werner (1998) a Londoni Értéktőzsdén talált empirikus megállapításaival is, mely szerint az árjegyzők a külső piacon ritkán alkalmaznak monopolárazási technikákat, a kockázatelutasítás mértéke a meghatározó az árazásuk során.

A tanulmány szerkezete a következő. A második szakaszban röviden ismertetjük a kapcsolódó szakirodalom jelentősebb eredményeit, kitérve az árjegyzői, a kereséses és a hálózatos pénzügyi piacokra is. A harmadik szakaszban a belső piac modelljét mutatjuk be. A negyedik szakaszban vizsgáljuk az olyan helyzeteket, amikor az árjegyzők a külső piacon duopóliumként tevékenykednek, a belső piacon pedig egymással is kereskednek. A dolgozatot a fő következtetéseink összefoglalásával zárjuk.

## 2 Árjegyzői magatartás és kockázatelosztás: rövid áttekintés

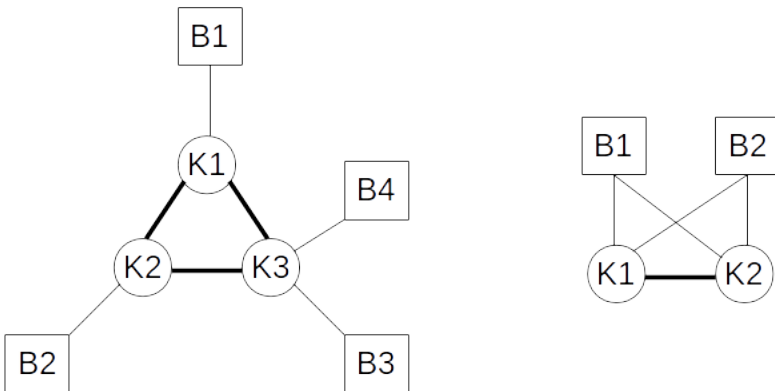
### 2.1 Árjegyzés és közvetítés

Árjegyzőknek nevezzük azokat a közvetítőket a pénzügyi piacokon, akik vételi és eladási árakat adnak meg más szereplőknek és cseréket bonyolítanak le velük. Az árjegyzők ára nyilvános és könnyen elérhető az ügyfelek számára, a közvetítési tevékenységükben felvállalt kockázat költségét pedig a vételi és eladási árak közötti árrésből fedezik. Ez a közvetítési költség egyrészt származhat információs hátrányukból (Glosten és Milgrom (1985), Kyle (1985), vagy az árjegyzés során tartott készleteik kockázatából (Garman (1976), Ho és Stoll (1981), Ho és Stoll (1983), Amihud és Mendelson (1980), Shen és Starr (2002)). Abból a célból, hogy az árrést tisztán az információs aszimmetriával, vagy a készletezés költségeivel magyarázzák, a felsorolt tanulmányok az árjegyzési tevékenységet általában tökéletesen versenyző (és így nulla profitot elérő) szereplőkkel modellezik. Azonban, az árjegyzőkre is jellemző lehet a

monopolista vagy oligopolista viselkedés, ebben az esetben az árjegyzők figyelembe veszik a befektetők vételi és eladási mennyiségre vonatkozó árrugalmasságát is az árazás során. A tökéletlen versenybeli árjegyzést Mildenstein és Schleef (1983), Kyle (1985), Pagano (1989), valamint Loertscher (2005) munkája mutatja be. A piaci mikrostruktúrák osztályozásáról magyar nyelven Erb és Havran (2015) ad áttekintést.

Az árjegyzői irodalomban korábban alig vizsgálták azt az esetet, amikor az árjegyzők ugyanazon eszköznek két, egymástól elkülönült, de egymással kapcsolatban álló piacon is egyszerre jelen vannak. Stoikov és Sağlam (2009) opciós árjegyzői modellje foglalkozik ilyen esettel. Tanulmányunk ez utóbbi esetet vizsgálja meg a készlettartási motívum alkalmazásával.

Az 1. ábra a kétféle piaci szereplőt helyezi el egy-egy szerkezetben. A közvetítőket  $K1$ ,  $K2$ ,  $K3$ -al, ügyfeleiket a befektetőket  $B1$ ,  $B2$ ,  $B3$ ,  $B4$ -el jelöljük. A bal oldali ábrán a külső piacon szegmentált ügyfélpiacot látunk, egy befektető csak egy közvetítővel van kapcsolatban, a közvetítők ügyfélköre nem keveredik egymással. A jobb oldali ábrán mindkét közvetítő képes elérni mindkét befektetőt, az ügyfelekért is kialakul verseny. A közvetítők a külső és a belső piacon eltérő piaci mikrostruktúrával szembesülnek. A külső piacon a jegyzett ár az ügyfeleknek nyilvános, ezt ismerve a befektetők jelentkeznek vételi és eladási mennyiséggel. A belső piacon a közvetítők nem jegyeznek árat, hanem kétoldalú alkuk során kereskednek. Az alkuk során határozzák meg a páronkénti tranzakciók árfolyamát. A belső piacon nem koncentrált piac, általában valamilyen keresési súrlódás is van. A belső piacon lévő kapcsolatokat vastag vonallal jeleztük az ábrán. Tanulmányunkban elsőként a bal oldalon fennálló esetet és exogén külső piacot feltételezve a belső piacot vizsgáljuk részletesen. Ezt követően térünk át a jobb oldali esetre, ahol a külső piac a hangsúlyos. Mivel a nem tökéletes verseny hatása ott jelentős, ahol kevés számú játékos lép a piacra, így duopol helyzeteket elemzünk egymással is tranzakciókat folytató közvetítőkre.



1. ábra. A belső és a külső piacok kapcsolata: a) Szegmentált ügyfélpiac; b) Közös ügyfélpiac (duopol).

## 2.2 A közvetítők belső piacai: empirikus tanulmányok

Belső piacoknak tekinthetjük a tőzsdén kívüli (OTC) pénzügyi piacok zömét. Az ilyen piacok nem, vagy alig szervezettek, és bár a kereskedők általában ismerik egymást, de megkeresés előtt nem ismerik egymás aktuális pozícióját. A kereskedők rendszeres vagy eseti kapcsolatban állnak egymással, többnyire közös számítógépes platformon és telefonon keresztül. Ha valaki vásárolni vagy eladni akar, azt jellemzően (1) keresési folyamat előzi meg, vagy (2) a kereskedő a már létező ismeretségi hálózatán keresztül szerez partnert.

Az empirikus dolgozatok közül Reiss és Werner (1998) valamint Hansch, Naik és Viswanathan (1998) a Londoni Értéktőzsdén lévő brókerségek közötti forgalom adatbázisát elemezték. Mindkét kutatás megerősítette, hogy az árjegyzők a készletezési motívum miatt lépnek egymással kapcsolatba. Amikor az árjegyző brókerségek nem képesek saját ügyfélkörükön belül ki-egyenlíteni nettó pozícióikat, sokkal aktívabban keresik meg egymást fedezési céllal. Más piacon, az amerikai CDS-piacokat Shachar (2012) empirikus tanulmánya vizsgálja, aki szintén készletpozícióból fakadó kockázatkezelést találta a belső piacra lépés legfontosabb céljának. A CDS-piac méreténél fogva lehetővé tette azt is, hogy a forgalom alapján magát a kereskedési hálózatot is megfigyelhesse. A CDS-piacokon tipikusan nem képes minden közvetítő egymással kapcsolatba lépni, ezért általában több közvetítőn keresztül ér el egy eszköz az egyik ügyféltől a másikig. Shachar (2012) azt találja, hogy két befektető közé átlagosan legalább két-három közvetítő ékelődik, a több kapcsolattal rendelkező szereplők általában jóval több forgalmat bonyolítanak. Más eszközosztályra, de hasonló belső struktúrát ismertet az amerikai önkormányzati kötvények piacának hálózatát jellemző Li és Schuerhoff (2012). A szerzők szerint a közvetítők egymással való forgalmából kirajzolódó hálózat a központ-periféria alakzathoz hasonlított. A hálózat központjában elhelyezkedők erősebbek is, magasabb felárakat kérnek el a periférikusan elhelyezkedő társaiktól. Ugyanilyen hálózati formát talált a bankközi hitelbetét piacokon Craig és von Peter (2010) valamint Fricke és Lux (2012), a magyar bankközi piacon pedig Berlinger, Michaletzky és Szenes (2011).

Az empirikus elemzésekben vizsgált piacok mérete eltér a szereplők száma szerint. A kisebb piacok 20-50 közvetítőt jelentenek inkább, míg a nagyok több ezres nagyságrendűek lehetnek. Míg a nagyobb létszámú piacokon gyakran eltérő informáltsággal rendelkeznek a kereskedők (eltérő elemzői, informatikai háttér, eltérő beágyazottság), addig a kisebb belső piacokon az eszköz értékét köztudott tudásnak tekinthetjük (mindenki szakértő). Ezt támasztja alá Dodd (2008), majd Dodd (2012) írása, melyben kifejti, hogy a kisebb piacokon a szereplők telefonon vagy más elektronikus eszközön könnyen és gyakran kommunikálnak egymással. Kisebb létszámú piacokon így a kapcsolati hálózat teljesnek tekinthető, de ebből nem következik, hogy a forgalmi adatokból készített hálózat is teljes lenne. Jelen tanulmányban arra az esetre szorítkozunk, ahol az információ mindenki számára könnyen elérhető.

### 2.3 Egyensúlyi kockázatelosztás a belső piacokon

A kockázatkezelési motivációt bemutató első elméleti dolgozat Borch (1962) nevéhez köthető, aki a viszontbiztosítási piacok mechanizmusaira koncentrált. Dolgozatában kockázatkerülő szereplők lépnek be a piacra és adják el kockázatos pozícióikat másoknak. Borch levezeti a piaci egyensúlyt valamint a piaci árat is, de modelljében nem foglalkozik a hálózatisággal. A hálózaton belüli cserék során eltérhetnek a tranzakciós árak. A kérdés az, hogy hogyan határozzák meg a tranzakciós árat a szereplők. A Borch által definiált piaci mechanizmus csak egy lehetőség a kockázat allokációjára, más lehetőség is adódhat stabil kockázati elosztás megadására (pl. Csóka, Herings és Kóczy (2009), Ágoston (2010)).

Az elmúlt években több nívós elméleti modell született a pénzügyi hálózatokon történő kereskedés magyarázatára. Atkeson, Eisfeldt és Weill (2013) a CDS-piacokat modellezi ebben a keretben. Modelljükben a közvetítő bankok piacra lépése fix költséggel jár, és a bankok partnerkockázati limitekkel rendelkeznek. A bankok kitettségeket csökkentik a belső piaci ügyletek kötésével. Ha találkozik két játékos, alkudnak a mennyiségen és az áron. Ehhez szorosan kapcsolódik Zawadowski (2013) cikke is, aki az OTC piacok rendszerkockázatára helyezi a hangsúlyt. Malamud és Rostek (2012) általánosabb modelljében kockázatkerülő játékosok egy rögzített hálózaton kereskednek. Ők a keresés és alku megközelítés helyett a kapcsolati hálózaton történő egyidejű kereskedés koncepcióját használják. A modellben a játékosok adott eltérő áreltérítő hatással (likviditással) rendelkeznek, amelyet figyelembe vesznek az egymással történő cserék során. Az egyes játékosok áreltérítő hatásai függetlenek az induló készleteiktől. Az egyensúlyban a játékosok hasznosságukat maximalizálják a hálón történő cserékkel. Babus és Kondor (2013) piaci modelljében különböző információval rendelkező kockázatsemleges játékosok alkudoznak egy rögzített hálózaton. Ők az információ hálózaton való közvetítését és diszperzióját mutatják be és megadják a piaci egyensúlyt is. A pénzügyi hálózatokon való kereskedésről (például a sztochasztikus hálózatokról, vagy a hálózaton való kockázatelosztásról) magyar nyelven Balog, Bátyi, Csóka és Pintér (2012) tanulmányában olvashatunk.

Dolgozatunkban kockázatkerülő játékosokat és keresés és alku jellegű megközelítést alkalmazunk, Atkeson et al. (2013) munkájához hasonlóan. A belső piacot leíró modellünk logikája más tekintetben viszont Malamud és Rostek (2012) elméletével rokon. Mindkét dolgozathoz képest alapvető különbség, hogy a piaci súrlódást egy speciális (időkorlátos) keresési súrlódásként adjuk meg, s ebből vezetjük le a belső piac fő jegyeit.

## 3 Kereskedés a belső piacon

Ebben a részben ismertetjük a belső piac működését leíró modellünket. A modellben egyperiódusú döntésként ragadjuk meg a közvetítők tevékenységét. Két egymástól jelentősen eltérő mechanizmusokkal jellemezhető piac létezik egymás mellett, amelyen ugyanazt az eszközt cserélik. Ezek: a befektetők

és az árjegyzők közötti piac (1), valamint az árjegyző kereskedők egymás közötti piaca (2). Az első típusú piacon a befektetők az árjegyzők ügyfelei, árelfogadók és csak egy árjegyzővel vannak kapcsolatban. A második típusú piacon az árjegyzők egyenrangú kereskedők, ahová a befektetők nem tudnak belépni. Az első típusú piacot adottnak véve, a második piacon történő cserét modellezzük ebben a részben.

Tegyük fel, hogy egy kockázatos eszköz van, amelynek értéke nem, csak eloszlása ismert és köztudott tudás a játékosok számára:  $v \sim N(\mu, \sigma^2)$ . A játékosok tarthatnak kockázatmentes eszközt is, ami fizetőeszközként is szolgál a kereskedés során (pénz). A szereplők által tartott vagyon  $w = v(x + y) + c$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$  az ügyfelektől szerzett kockázatos eszköz mennyisége, az  $y \in \mathbb{R}$  a többi játékoskal kereskedett mennyiség,  $c \in \mathbb{R}$  pedig a cserék során kifizetett/megkapott pénzösszeg. A játékosok racionálisak és kockázatkerülők. A játékosok egyperiódusú várható érték-variancia hasznosságfüggvénnyel rendelkeznek:

$$U(w) = E(w) - \frac{1}{2}\lambda \cdot \text{var}(w) ,$$

amelyet a következőkben az  $y$  mennyiségek függvényében írunk fel:

$$U(y) = E(w(y)) - \frac{1}{2}\lambda \cdot \text{var}(w(y)) . \tag{1}$$

A hasznosságban a  $\lambda$  kockázatkerülési együttható eltérhet az egyes szereplőknél. Legyen a játékosok száma  $K$ .

### 3.1 Kereskedés valószínűségi hálón

A tőzsdén kívüli piacok napi rutinját a következő feltevésrendszerrel ragadjuk meg. Egy periódus alatt zajlik le minden kereskedés a játékosok között. Ez alatt az egy periódus alatt nem lehet szekvenciálisan reagálni, vagyis a játékosoknak előre el kell dönteniük, hogy kit és hányszor keressenek meg, és így azt is, hogy mennyi tranzakciót bonyolítsanak le. A periódus hossza egy időegység, ebből a játékosok kontinuum sok infinitezimálisan kicsi időszakot tudnak felhasználni a kijelölt partner felkeresésére és a vele való tárgyalásra. Egy ilyen időszakban arányosan kicsi mennyiséget tudnak kereskedni. A tranzakciókban az ár a kereskedéssel egyidejűleg alakul ki, kétoldalú alku során. Ez az ár természetesen a tranzakciós mennyiség függvénye lesz. Összegezve, ha sok időt tölt is el egymással a két játékos, minden köztük lévő tranzakcióra ugyanaz az ár érvényes ugyanabban a periódusban.

Minden szereplő elérhető elvileg a másik számára. A szereplők keresése azonban költséges. Ez azt jelenti, hogy azokkal a más szereplőkkel lépnek inkább kapcsolatba, akiket valamiért jobban preferálnak (pl. olcsóbb a felkeresésük – Duffie, Gârleanu és Pedersen (2005), gyorsabban érik el őket vagy gyorsabban kötnek velük tranzakciót – Neklyudov (2012), korábban jobban ismerik őket – bizalom, vagy éppen jobbnak tekintik őket partnerkockázat szempontjából). E dolgozatban külső adottságként tekintünk erre a költségre, és a játékosok exogén preferenciájaként értelmezzük.

## Keresési preferencia-vektorok

Minden egyes  $i$  szereplő egy  $\gamma_i \in \mathbb{R}^K$  keresési preferencia-vektorral rendelkezik. Ez a preferencia-vektor azt mutatja meg, hogy milyen arányban nyilvánít kapcsolatteremtési szándékot az adott másik játékos irányába (mekkora a keresési súrlódás reciproka). A kapcsolatteremtés nem jelent automatikusan tranzakciót. A preferencia-vektorra igaz, hogy a súlyok összege egységnyi:  $\sum_{j=1}^K \gamma_{ij} = 1$ , és saját magával nem kereskedik a játékos:  $\gamma_{ii} = 0$ . Az összes szereplőre vonatkozó keresési mátrixot az alábbiak szerint adjuk meg:

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_K \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1K} \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{K1} & \gamma_{K2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A keresési mátrix elemei értelmezhetők úgy is, mint egy valószínűségi hálózatban annak az esélye, hogy az  $i$  játékos megtalálja a  $j$ -t. Mivel feltevésünk szerint az egy periódus alatt kontinuum sokszor kereskednek, így a megtalálás esélye azt is jelenti, hogy a kereső idejének mekkora arányát tölti a megtalált féllel, ha ő a kezdeményező. Ezzel egy egyirányú keresést definiálunk, vagyis annak a valószínűsége, hogy a „ $j$  játékos megtalálja  $i$ -t”, ettől eltérő is lehet. Összegezve tehát, a  $\Gamma$  mátrix általában nem tekinthető szimmetrikus mátrixnak.

## Szándékolt tranzakciós mennyiség

Tegyük fel, hogy a kereskedés során minden egyes  $i$  játékos  $y_i \in \mathbb{R}$  mennyiséget kíván összességében venni vagy (negatív előjelű mennyiség esetén) eladni. Ezt az  $y_i$  mennyiséget cserélik el partnereikkel. Azzal a feltevéssel élünk, hogy a tranzakciókat úgy osztják fel, hogy amennyiben az  $y_i$  pozitív, akkor minden egyes általuk indított tranzakció is pozitív lesz, vagyis egy játékos csak egy irányban kereskedik: vagy kizárólag vesz, vagy kizárólag elad. Azonban, más árjegyzők is megtalálhatják az adott szereplőt, akik kérését szimultán fogadniuk kell. A kérések fogadása esetén el kell fogadniuk a kereskedés irányát is: akkor is venniük kell, ha ők éppenséggel eladnak az indított tranzakcióik során. (Ez utóbbi esetben viszont előnyösebb árat alkudhatnak ki, és újra is értékesíthetik azt az indított tranzakcióikban.)

A kereskedést megadó egyenlet a következő. Jelölje  $\tau \in \mathbb{R}^K$  az egyes árjegyzőktől indított tranzakciók vektorát. Az indított tranzakciók mennyiségének és a beérkező tranzakciók nettó mennyiségének meg kell egyeznie a megcélzott végső kereskedési volumennel:

$$\tau - \Gamma' \tau = y. \quad (3)$$

Az egyenletet tekintve az  $(I - \Gamma') \tau = y$  kifejezésben a bal oldalon álló szorzat első tényezője nem invertálható. Mivel az  $I - \Gamma'$  mátrix sorösszegei nullával egyenlők, ezért a sajátértékek között a nulla is ott van. A lehetséges



megoldások halmaza azonban tovább szűkíthető. Ugyanis, ha például több szándékolt eladás van, mint vétel, és az átvétel kötelező (az átvett mennyiséget a  $\tau$  nem tartalmazza), akkor többszörösen „utaztatják” az árut (pénzügyi eszközöket).

A kereskedésnek adjuk meg további feltételként, hogy összesen pontosan ugyanannyi vételi, mint eladási szándékolt mennyiség van a piacon. Másképpen, a  $\tau_i$  indított tranzakciók összege nulla:

$$\underline{1}'\tau = 0. \tag{4}$$

Ez a feltevés nem zárja ki azt, hogy bizonyos szereplők közvetítsenek, vagyis továbbadják az átvett eszközt, abban az esetben, ha másként az nem juthatna el egy eladótól egy vevőhöz.

Egy elemi példával élve, két egymást tökéletesen elérő szereplőből álló piacon, ha  $y = [1 \ -1]'$ , akkor a  $\tau = [2 \ 1]'$  megoldása lenne ugyan a (3) egyenletnek, de mindkét szereplő ugyanolyan irányú kereskedést indítana, és redundánssá válna a csere. A  $\tau = [1/2 \ -1/2]'$  mennyiség-pár viszont a (4) feltételnek is eleget tesz: az első játékos így fél mennyiséget „megvesz” (szándékolt mennyiség), és fél mennyiséget „átvesz” (a partner szándékolt mennyiségének elfogadása), így összesen egy egységet vásárol.

A keresési hálón indított tranzakciók mennyisége alatt így azokat a  $\tau$  mennyiségeket értjük, amely kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} I - \Gamma' \\ \underline{1}' \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ahol a bal oldali mátrixban  $I$  a  $K$ -ad rendű egységmátrixot, míg  $\underline{1}$  a csupa egyesből álló  $K$ -elemű oszlopvektort, a  $0$  a skalár nullát jelöli. Vegyük észre, hogy az egyenletrendszerből következik az  $\underline{1}'y = 0$  összefüggést is. Ez összességében annyit jelent, hogy a piacon pontosan ugyanannyi a vételi, mint az eladási mennyiség.

### Tényleges tranzakciós forgalom

A  $\tau$  vektor ismeretében a következő alakban adható meg az  $i$  és  $j$  játékos közötti tényleges tranzakció mennyisége:

$$t_{ij} = \gamma_{ij}\tau_i - \gamma_{ji}\tau_j. \tag{6}$$

Az így definiált  $t_{ij}$  elemek egy  $T \in \mathbb{R}^{K \times K}$  kereskedési mátrixba rendezhetők. Látható, hogy a két játékos közötti tranzakció ebben az esetben a játékosok kereskedési preferenciájából és a megcélzott cseremennyiségéből adódik. A kifejezés első része az  $i$  játékos által  $j$  felé indított mennyiséget, míg a második kifejezés az érkező, megkapott mennyiséget mutatja.

**1. Lemma** (Egy játékos tranzakcióinak volumene). *A  $(\Gamma, y)$ -al definiált  $\tau$  szándékolt tranzakciós mennyiségekre az  $i$  játékos tranzakciós mennyiségeinek összege:  $\sum_j t_{ij} = y_i$ .*

*Bizonyítás.* Fejtsük ki a  $t_{ij}$  tényleges tranzakciós mennyiséget, és alakítsuk át azt:

$$\sum_{k=1}^K t_{ik} = \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \tau_i - \sum_{k=1}^K \gamma_{ki} \tau_k = \tau_i - \sum_{k=1}^K \gamma_{ki} \tau_k = [(I - \Gamma') \tau]_i = y_i ,$$

ahol  $[\cdot]_i$  jelölés egy oszlopvektor  $i$ -edik elemét jelenti.  $\square$

### Kereskedésre fordított idő

A keresési preferencia mellett a kereskedésre fordított idő fogalmát is fontos tisztázni. Egy szereplő fejenként 1 időegységet tud „eltölteni” a többiek keresésére. Ez összesen  $K$  időegységet jelent. A többi játékos fogadására is értelemszerűen így összesen  $K$  időegység telik el, amely minden szereplőnél különböző lehet (0 és  $K$  között). Összesen párhuzamosan  $2K$  időegységet használnak fel.

Amennyiben a játékosok kontinuum sokszor kereskednek, valamint mindenki egymástól függetlenül  $1/K$  eséllyel lép keresőként a piacra, akkor egy-egy játékos tranzakció indítására az összes idő  $1/K$  arányát használja el. Az  $i$  játékos helyzetét tekintve, az  $i$  játékos összes kereskedési idejének

$$h_{ij} \doteq \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{\sum_{k=1}^K (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})} \quad (7)$$

arányát használja a  $j$  játékosal való kereskedéshez. Az  $i$  szereplő összesen  $\sum_{k=1}^K h_{ik} = 1$  időegységet használ el.

### Osztzkodási alku

Egy-egy tranzakció során az  $i$  és  $j$  játékosok többlethasznót érhetnek el. A közösen elért többlethasznót Nash-alku során osztják ketté. Az alku alapja a piacon az a teljes  $\sum_j t_{ij} = y_i$  összesen elcserélt és  $\sum_i t_{ji} = y_j$  mennyiségekkel elérhető összes haszonnövekménynek azon része, amit ebből a szereplők a  $t_{ij}$  tranzakciónak tulajdonítanak. Mivel a tranzakcióban csak  $t_{ij}$  összeget cserélnek, ezért figyelembe vesszük, hogy a  $t_{ij}$  tranzakció a kereskedési idővel arányos mértékben járul hozzá az egyes felek haszonnövekményeihez. Az együttes többlethaszonból a két fél alkuerejétől függően  $i$  kap  $j$ -től  $d_{ij}$  összeget, amelyet a következő osztzkodási szabály szerint határoznak meg:

$$d_{ij} \doteq \theta_{ij} \left\{ \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{\sum_{k=1}^K (\gamma_{kj} + \gamma_{jk})} [U_j(y_j) - U_j(0)] \right\} - (1 - \theta_{ij}) \left\{ \frac{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}{\sum_{k=1}^K (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})} [U_i(y_i) - U_i(0)] \right\} . \quad (8)$$

A két játékos közötti alkuerőt  $\theta_{ij} \in (0, 1)$  jelöli. Ha  $\theta_{ij}$  nagyobb, akkor nagyobb összeget kap az  $i$  nemnegatív haszonnövekmények mellett. A  $d_{ij}$  előjeles mennyiség, ezért  $i$  fizethet is  $j$ -nek.

## Tranzakciós pénzáram

Az  $i$  és  $j$  játékos közötti tranzakcióban a fizetendő összeg két komponensből tevődik össze. Egyrészt,  $qt_{ij}$  mennyiséget fizet az  $i$  játékos a  $j$  játékosnak, ahol a  $q$  a játékosok által ismert belső piaci elszámolóár. Másrészt, alkuerejükötől függően  $i$  kap  $j$ -től  $d_{ij}$  előjeles összeget. Az  $i$  és  $j$  közötti pénzáramot tehát

$$c_{ij} \doteq -qt_{ij} + d_{ij} \quad (9)$$

összegként adhatjuk meg.

A (9) képlet értelmezése a következő. Tegyük fel, hogy  $i$  vesz  $j$ -től egy egység eszközt, vagyis  $t_{ij} = 1$ . Legyen az  $i$  és a  $j$  hasznosságnövekménye is 2-2 egység, a belső piaci elszámolóár  $q = 0.8$ , a találkozásuk időarányos mértéke pedig  $(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})/2 = 0.5$ . Egenlő alkuerők esetén ( $\theta = 0.5$ ) a pénztranszfer  $c_{ij} = -0.8 \cdot 1 + 0.5 \cdot (0.5 \cdot 2 - 0.5 \cdot 2) = -0.8$ , vagyis az  $i$  pontosan 0.8 egység pénzt fizet  $j$ -nek. Ha az  $i$  alkuereje nő ( $\theta = 0.75$ ), akkor a pénztranszfer  $c_{ij} = -0.8 \cdot 1 + 0.5 \cdot (0.75 \cdot 2 - 0.25 \cdot 2) = -0.3$ , vagyis ebben az esetben kevesebb összeget utal át  $i$  a  $j$ -nek ugyanazért a cseréért.

## 3.2 Az árjegyző nettó kereslete

Az egyedi árjegyzői feladat során tegyük fel, hogy érkezik  $x_i$  nettó mennyiségű kockázatos eszköz az  $i$ -edik játékos ügyfeleitől a külső piacról. A kereskedők ezt a mennyiséget szeretnék csökkenteni vagy növelni, attól függően, hogy a belső piacon a többiekkel milyen feltételek mellett tudnak kereskedni. Az  $i$ -edik kereskedő összesen  $y_i$  nettó mennyiséget cserélne el, amiért összesen nettó  $\sum_{k=1}^K c_{ik}$  előjeles mennyiségű pénzüsszeget kapna. Az  $i$ -edik játékos hasznosságfüggvénye a tranzakciókat is figyelembe véve:

$$U_i(y_i) \doteq \mu(x_i + y_i) - \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2(x_i + y_i)^2 + \sum_{k=1}^K c_{ik}(y_i), \quad (10)$$

ahol jelöljük, hogy a  $c_{ij}(y_i)$  a kereskedett mennyiség függvénye. A tranzakciós pénzáramot kifejtve, és az 1. lemmát alkalmazva kapjuk az

$$U_i(y_i) \doteq \mu(x_i + y_i) - qy_i - \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2(x_i + y_i)^2 + \sum_{k=1}^K \left\{ \theta_{ik} h_{ij} [U_k(y_k) - U_k(0)] - (1 - \theta_{ik}) h_{ji} [U_i(y_i) - U_i(0)] \right\} \quad (11)$$

alakot. Jól látszik, hogy az egyenlet jobb oldalán is megjelenik a hasznosság.

**1. Definíció** (Hasznosságok vektora). Legyen  $u(y) : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$  vektor értékű függvény, amelyre

$$u(y) \doteq a(y) + Bu(y), \quad (12)$$

ahol  $a(y) : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$  vektor értékű függvény  $i$ -edik eleme

$$a_i(y_i) \doteq \mu(x_i + y_i) - qy_i - \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2(x_i + y_i)^2 + \\ + \sum_{k=1}^K \left[ (1 - \theta_{ik}) h_{ki} U_i(0) - \theta_{ik} h_{ik} U_k(0) \right],$$

és  $B \in \mathbb{R}^K$  mátrixra igaz, hogy főátlójának elemei

$$b_{ii} \doteq - \sum_{k=1}^K (1 - \theta_{ik}) h_{ki},$$

valamint nem főátlóbeli elemei

$$b_{ij} \doteq \theta_{ij} h_{ij}.$$

Ekkor az  $u(y)$  függvényt a hasznosságfüggvények vektorának nevezzük.

Ezen vektoriális forma explicit alakra is átrendezhető, amelyben az  $u(y)$  képlete nem rekurzív.

**1. Állítás** (Explicit hasznosságok vektora). *A hasznosságok vektora az alábbi formában is kifejezhető:*

$$u(y) = (I - B)^{-1} a(y). \quad (13)$$

*Bizonyítás.* Be kell látnunk, hogy létezik az  $I - B$  inverze. Könnyű megmutatni, hogy az  $M \doteq (I - B)'$  mátrix egy szigorúan diagonálisan domináns mátrix, vagyis igaz minden  $i$ -re, hogy

$$|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|.$$

A bal oldalba behelyettesítve

$$|m_{ii}| = 1 + \sum_{k=1}^K (1 - \theta_{ik}) h_{ki} > 1,$$

a jobb oldal pedig

$$\sum_{j \neq i} |m_{ij}| = \sum_{k=1}^K \theta_{ik} h_{ik} < \sum_{k=1}^K h_{ik} = 1,$$

amelyből adódik a szigorú egyenlőtlenség. A Gershgorin-tétel következtében, mivel az  $M$  szigorúan diagonálisan domináns, ezért  $M$  lineárisan független oszlopvektorokból áll, tehát  $M$  és így az  $M'$  is invertálható.  $\square$

Az így átrendezett hasznosságfüggvény megadásával könnyebben értelmezhetővé válik a határhaszon, valamint a nettó kereslet fogalma is.

**2. Definíció** (Nettó kereslet). Az  $i$  játékos nettó keresletét az az  $y_i$  mennyiség jelenti, amely az  $i$  játékos  $q$  ár mellett az  $y_i$  szerinti határhaszna éppen nulla, és e mellett hasznossága maximális:

$$y_i^d(q) \doteq \left\{ y_i \mid \frac{\partial u_i}{\partial y_i}(y_i, q) = 0; \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2}(y_i, q) < 0 \right\}, \quad (14)$$

ahol  $u_i(y_i)$  az explicit hasznosságvektor  $i$ -edik eleme.

A nettó kereslet nem adja meg, hogy melyik játékos kivel szeretne cserélni, csak a játékos által elérni kívánt mennyiséget határozza meg.

### 3.3 Piaci egyensúly

Most vizsgáljuk meg a piac egyensúlyi helyzetét. Az eddigiek segítségével adjuk meg az egyensúly definícióját a belső piacon.

**3. Definíció** (Piaci egyensúly). Tekintsük az  $(x, \lambda, \Gamma, \theta)$  struktúrával definiált piacot. Minden  $i \in \{1 \dots K\}$  játékos feladata olyan  $y_i \in \mathbb{R}$  cseremennyiség megválasztása adott  $q$  mellett, amelyre hasznossága maximális:

$$\max_{y_i} u_i(y_i),$$

az alábbi korlátozó feltétel mellett:

$$\sum_{k=1}^K y_k^d(q) = 0. \quad (15)$$

Ez utóbbi a piac megtisztulásának feltétele.

A piac megtisztulása azt jelenti, hogy minden játékos a hasznának maximalizálására törekszik a cserék során, miközben csak egymás között kereskedhetnek a felek. Vegyük észre, hogy ezt a feltételt már korábban beépítettük, az (5) egyenlet megfogalmazásakor. Az alábbiakban megadjuk az egyensúlyi  $y$  allokációt és a piactisztító  $q$  belső elszámolóárat.

**2. Állítás** Adott  $(x, \lambda, \Gamma, \theta)$  piacon az  $i$  játékos nettó keresleti függvényének alakja:

$$y_i^d(q) = -x_i + \frac{1}{\lambda_i \sigma^2} \mu - \frac{1}{\lambda_i \sigma^2} q. \quad (16)$$

*Bizonyítás.* Az optimum elsőrendű feltétele szerint

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}(y_i) &\doteq \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ (I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial a_i}{\partial y_i}(y_k) \right\} = \\ &= \left[ (I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial a_i}{\partial y_i}(y_i) + \sum_{k \neq i}^K \left\{ \left[ (I - B)^{-1} \right]_{ik} \frac{\partial a_k}{\partial y_i}(y_k) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Az elsőrendű feltételben szereplő második tag zérus, így a feltétel az alábbira egyszerűsödik:

$$\left[ (I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial a_i}{\partial y_i} (y_i) = 0 .$$

Mivel az  $(I - B)$  mátrix főátlójának elemei pozitívak és a mátrix szigorúan diagonálisan domináns, így az inverzének főátlóelemei sem lehetnek nullák. Ezért a fenti egyenlet bal oldala csak akkor lehet zérus, ha  $\frac{\partial a_i}{\partial y_i} (y_i) = 0$ . Kibontva a deriváltat kapjuk:

$$\mu - q - \lambda_i \sigma^2 (x_i + y_i) = 0 ,$$

amelyből kifejezhetjük a nettó keresleti függvényt:

$$y_i^d(q) = \frac{1}{\lambda_i \sigma^2} (\mu - q) - x_i .$$

Ha minden játékos ehhez hasonlóan dönt, akkor a többi játékosról tett feltevés teljesül, és valóban ez lesz az optimális keresleti mennyiség elsőrendű feltétele. A másodrendű feltétel szerint:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2} (y_i) \doteq \left[ (I - B)^{-1} \right]_{ii} \frac{\partial^2 a_i}{\partial y_i^2} (y_i) < 0 . \quad (18)$$

Be kell látnunk, hogy a második derivált negatív az  $y_i$  helyen. Fejezzük ki az  $a_i(y_i)$  második deriváltját:

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial y_i^2} (y_i) = -\lambda_i \sigma^2 < 0 \quad (19)$$

minden  $i$  elemre. Vizsgáljuk meg az  $\left[ (I - B)^{-1} \right]_{ii}$  elemek előjelét. Az  $I - B$  mátrix inverzét kifejtethetjük a determináns és adjungált segítségével

$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{\det(I - B)} \text{adj}(I - B) , \quad (20)$$

ahol az adjungált mátrix főátlójának elemeit

$$[\text{adj}(I - B)]_{ii} = (-1)^{2i} [(I - B)]_{ii} \quad (21)$$

alakban írjuk fel. Mivel az eredeti  $I - B$  mátrix főátlójának elemei pozitívak és a  $-1$  páros hatványait vesszük, így az adjungált főátlójának elemei is pozitívak. A mátrix szigorúan diagonálisan domináns, pozitív főátlóbeli elemekkel és nempozitív főátlón kívüli elemekkel. Fiedler és Pták (1962) 4.3-as tételét alkalmazva, ha  $Z$  egy ilyen tulajdonságú négyzetes mátrix, akkor  $\det(Z) > 0$ . Ezt kihasználva az  $I - B$  mátrix determinánsa is pozitív, és ebből következik, hogy a (21)-beli inverz főátlójában lévő elemek is pozitívak. Összegezve, a másodrendű és az elsőrendű feltétel is teljesül a (16) alakú nettó keresleti függvényre.  $\square$

**3. Állítás** Adott  $(x, \lambda, \Gamma, \theta)$  piacon az egyensúlyi  $y^*$  allokáció az  $i$  játékosra:

$$y_i^* = \frac{\frac{1}{\lambda_i \sigma^2}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}} \sum_{k=1}^K x_k - x_i, \quad (22)$$

valamint a piactisztító belső elszámolóár:

$$q^* = \mu - \frac{\sum_{k=1}^K x_k}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}}. \quad (23)$$

*Bizonyítás.* Felhasználva a (15) egyenletbeli piac megtisztulásának feltételét és összegezve a játékosok nettó keresletét azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2} (\mu - q) = \sum_{k=1}^K x_k, \quad (24)$$

amelyet  $q$ -ra rendezve kapjuk az egyensúlyi belső elszámolóárat:

$$q^* = \mu - \frac{\sum_{k=1}^K x_k}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}}.$$

Ezt kifejezve kapjuk az  $i$  játékos nettó keresletét a piaci egyensúlyban:

$$y_i^* = \frac{\frac{1}{\lambda_i \sigma^2}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{\lambda_k \sigma^2}} \sum_{k=1}^K x_k - x_i.$$

□

Az eredmény következtében amennyiben a piac szereplői ismerik a piacon lévő eszközök teljes mennyiségét ( $\sum_{k=1}^K x_k$ ), úgy az eszközök allokációja nem tér el a walrasi piac (keresés nélküli piac) által javasolt eszközallokációtól: a játékosok egyensúlyi nettó kereslete és az egyensúlyi belső elszámolóár egyértelműen megadható a keresési preferenciák ismerete nélkül.

Fontos megjegyezni viszont, hogy a  $T$ ,  $c$ , így az egyedi hasznosságok és a bilaterális tranzakciók árai nem függetlenek mindezeketől. A keresési preferenciákat ismerve a hasznok elosztása is egyértelmű. A népszerűbb vagy erősebb több pénzt visz haza, mint minden másban hasonló helyzetben lévő társai. A hálózati sűrűlódások tehát jelentősen képesek befolyásolni a kereskedéssel megszerzett profitot.

**Következmény.** Ha a tranzakciókat az (5) és (6) egyenletekben megadottak szerint számoljuk az egyensúlyi nettó keresleti mennyiségek mellett, akkor a bilaterális tranzakciókban az ár  $i$  és  $j$  szereplő között

$$p_{ij} = q - d_{ij} \frac{1}{t_{ij}} \quad (25)$$

lesz minden  $t_{ij} \neq 0$ -ra.

Ha  $i$  vásárol, vagyis  $t_{ij} > 0$ , akkor pozitív (kapott)  $d_{ij}$  esetén olcsóbban vesz. Ha  $t_{ij} < 0$ , akkor pozitív (kapott)  $d_{ij}$  esetén drágábban ad el.

A  $t_{ij} = 0$  esetet tekintve felvetődik, hogy ugyan  $i$  és  $j$  között nincs eszkozmozgás, de a modellt szerint ettől még lehetne pénzmozgás. Ez azt jelentené, hogy az egyik játékos jótékonykodna a másikkal: csak azért adna pénzt, mert a belső piacon hasznosnak ítélné meg a létezését. Ez a modell keretein belül megmagyarázható, de nem egészen életszerű. A „nincs jótékonykodás” feltétele azonban könnyen beépíthető a modellbe. A számítási algoritmus a következő. Ehhez először a 3. állítást felhasználva adjuk meg az egyensúlyi  $y^*$  allokációt, majd az (5), (6) egyenletekből a tranzakciókat. Ahol  $t_{ij} = 0$  lett, ott módosítsuk a keresési együtthatókat a következőképpen  $\gamma'_{ij} = 0$  és  $\gamma'_{ji} = 0$ . Nem számoljuk újra a  $t_{ij}$ -ket, hiszen azok már adóttak, ez csak azt jelenti, hogy a keresésre szánt idő végül üresjárat lett, ezt azonban a felek előre nem tudják. Ezek alapján, a már meglévő  $y^*$  allokációval és  $q$  árral már kiszámolhatjuk a (13)-beli  $u$  hasznosságvektort és a (9)-beli pénzmozgás-vektort. Mivel az  $y^*$  optimumhely független  $\Gamma$ -tól, ezért az új egyensúlyi  $u$  értékek is az adott feltételek melletti legnagyobb hasznosságot adják meg.

**Következmény.** *A belső piacon minden  $i$  játékos számára az  $y_i$  elmozdulás Pareto-hatékony, hiszen a hasznosságmaximumba érkeznek, amelyre igaz, hogy*

$$u_i(y_i^*) \geq u_i(0) . \quad (26)$$

A belső piac értéket teremthet általa, hogy cserélnek egymással a felek. Önmagában a játékosok fedezési célokkal érkeznek a belső piacra, hiszen  $y_i$  cserével jobb helyzetbe kerülhetnek. A keresési súrlódás azt is előidézi, hogy nemcsak fedezési célból, hanem közvetítési célból lehetnek jelen piaci szereplők. A megkerülhetetlen (népszerű, keresett) játékosok induló  $x_i$  készletek nélkül is aktívak lehetnek a belső piacon, a közvetítésért díjat számolva fel. Ez a díj a hasznosságnövekményeken való alkudozásból képződik.

### 3.4 Numerikus példák

Az alábbiakban néhány elemi példán keresztül illusztráljuk a bemutatott modell fő jegyeit.

#### Elemi hálózatok

Az első példában  $K = 4$  szereplő cserélhet egymással a belső piacon. Az eszköz várható értéke  $\mu = 1$ , varianciája  $\sigma^2 = 1$ . A szereplők kezdeti  $x$  eszközeit, kockázatkerülési együtthatóit, valamint a kiinduló állapotbeli hasznosságait az 1. táblázat tartalmazza. Nem teszünk fel heterogenitást a kockázati attitűdben (minden  $\lambda = 2$ ) és az egyedi alkupozíciókban sem (minden játékos egyforma alkuerővel rendelkezik,  $\theta_{ij} = 0.5$  minden  $i$  és  $j$ -re). A fent definiált piacon néhány elemi hálózaton történő kereskedés egyensúlyi helyzetét mutatjuk be (2. táblázat). A következő hálózatokat vizsgáljuk:



- Teljes hálózat: minden játékos mindenkit egyforma arányban keres fel.
- Csillag alakú hálózat: az első változatban az  $x_1 = -1$  pozícióval rendelkező 1-es játékos, a második változatban az  $x_2 = 0$  pozícióval bíró 2-es játékos lesz a központi szereplő, mindenki más csak rajta keresztül tud kereskedni.
- Kör alakú hálózat: a játékosok egymással vannak összekötve a 1-2-3-4 vonalon, minden játékos csak a nála eggyel nagyobb sorszámú játékost keresi, a 4-es játékos az 1-essel van összekapcsolva.
- Vonal alakú hálózat: a kapcsolódást az 1-2-3-4 pontok mentén alakítottuk ki, úgy, hogy a köztes játékosok fele-fele arányban keresik két szomszédjukat.

A hálózatokat a keresési preferenciák segítségével adjuk meg. A teljes hálózat esetén minden szereplő egyenlő arányban keresi a többieket, a többi hálózatos formánál, ahol csak egyfelé irányul a keresés, 0 vagy 1 a súly nagysága. A csillagpontos hálózatokban a középpontbeli játékos szintén egyenlő arányban indít kereséseket.

	$x$	$\lambda$	$U(0)$	$y^*$
1	-1	2	-2	1
2	0	2	0	0
3	0	2	0	0
4	1	2	0	-1

1. táblázat. Kereskedés elemi hálózatokon: Induló paraméterek és az egyensúlyi alokáció

		Teljes	Csillag 1	Csillag 2	Kör	Vonal
$U(y^*) - U(0)$	1	0.800	1.000	0.833	0.833	0.786
	2	0.200	0.000	0.333	0.167	0.214
	3	0.200	0.000	0.000	0.167	0.214
	4	0.800	1.000	0.833	0.833	0.786
$p$	1-2	0.600	-	0.833	0.333	0.786
	1-3	0.600	-	-	-	-
	1-4	1.000	1.000	-	1.000	-
	2-3	-	-	-	1.000	1.000
	2-4	1.400	-	1.167	-	-
	3-4	1.400	-	-	1.667	1.214
$t$	1-2	0.250	0.000	1.000	0.250	1.000
	1-3	0.250	0.000	0.000	0.000	0.000
	1-4	0.500	1.000	0.000	0.750	0.000
	2-3	0.000	0.000	0.000	0.250	1.000
	2-4	0.250	0.000	1.000	0.000	0.000
	3-4	0.250	0.000	0.000	0.250	1.000

2. táblázat. Kereskedés elemi hálózatokon: Hasznosság, páronkénti tranzakciók árak és mennyiségek

A piaci egyensúlyt a következő jellemzi. Az egyensúlyi belső elszámolóár  $q = 1$  lesz, ami megegyezik az eszköz  $\mu$  várható értékével is. Az  $y^*$  egyensúlyi nettó keresleti mennyiség a tükröképe a kiinduló pozícióknak, a végső  $(x + y^*)$  allokációban minden szereplő zérus pozíciót tart az eszközből. Tekintsük a belső piaci cserékkel nyert hasznokat, amelyeket  $U(y^*) - U(0)$  formában adunk meg! A keresési preferenciák által alkotott teljes hálózat némileg eltérő eredményt ad az első intuícióhoz képest. Azt várnánk, hogy az 1-es és 4-es játékos cserélne egymással csak a teljes hálózaton. Azonban, a keresési súrlódás következtében előre el kell dönteni, hogy az erőforrások (idő) mekkora részét fordítják az egyes szereplők felkeresésére. Így az eszközpozícióval nem rendelkező játékosok is közvetítő szerephez jutnak. Vegyük észre, hogy ez a keresési koncepció eltér azoktól a megközelítésektől, amelyek során egy játékos addig keres, még meg nem találja az optimális jelöltet. Itt a felkeresés (és egyeztetés) ideje korlátos és szimultán. A 2-es és 3-as játékos közvetítővé válik, ezért pedig díjat szed, vételi-eladási árak  $0.6 - 1.4$  lettek, viszont csak  $0.25$  mennyiségű eszközt tudnak fejenként cserélni a keresési feltételek mellett. A 2-es és 3-as játékos nem cserél egymással. A *csillag 1* alakzatban az 1-es és 4-es játékos közvetlen kapcsolatban áll egymással és mivel csak kettejüknek van indítéka a kereskedésre, egymás között rendezik a tranzakciót. Más szereplő nem vesz részt a piaci allokációban. A *csillag 2* alakzat jó példája a tiszta közvetítői szerepvállalásnak. Amennyiben a pozícióval nem rendelkező 2-es játékos az 1 és 4 közé állva egy egységet közvetít, így ilyen kockázatkerülési attitűd mellett  $1 \pm 0.167$  áron vesz és ad eszközt, jelentős hasznot szerezve a közvetítésből. A kör alakú hálón jól látható, hogy közvetlen és közvetített csere is zajlik. A vonal struktúrán a két közvetítő csere hatása figyelhető meg. A két közvetítő együttesen több, de külön-külön kevesebb hasznot szerez, mint a *csillag 2*-ben a központi játékos. Mint látjuk, a megszerzett haszon mértékét a hálózatban való központoság és a kezdeti pozíció jelentősen befolyásolja.

### Keresési preferencia-arányos alkuerő központ-periféria hálózaton

Még egy példával illusztráljuk a belső piacok működését, jelen esetben olyan  $\Gamma$  mátrixot definiálunk, amelyben bizonyos szereplők népszerűbbek a többiekénél. Az így kialakuló hálózat hasonlít azokhoz a központ-periféria alakú hálózatokhoz, amelyet az empirikus tanulmányokban is megfigyelnek (pl. Li és Schuerhoff (2012)). A mátrix képzésének menete minden  $i \neq j$ -re:

$$\gamma_{ij} = \frac{e^{\rho \frac{i \cdot j}{K^2}}}{\sum_{k=1}^K e^{\rho \frac{i \cdot k}{K^2}}},$$

ahol  $\rho$  skálázási paraméter, amely a hálózat központosítottságát módosítja. Valamint minden  $i = j$  esetén a keresési arány értelemszerűen nulla. Két esetet mutatunk be. Az elsőben  $i$  és  $j$  játékos közötti Nash-alku során az alkuerőt a korábbi példában szereplő  $\theta_{ij} = 1/2$ -nek adjuk meg, míg a

másodikban

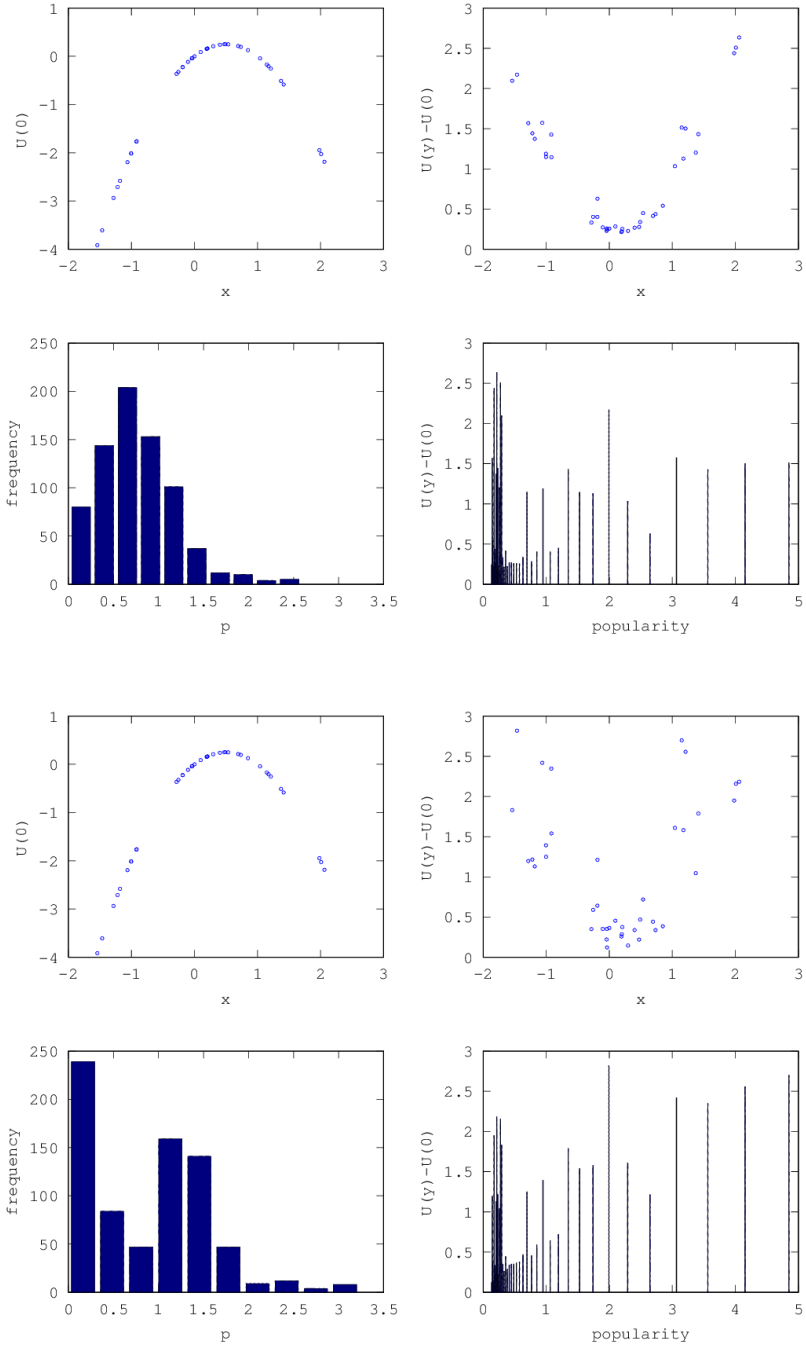
$$\theta_{ij} = \frac{\gamma_{ji}}{\gamma_{ij} + \gamma_{ji}}$$

nagyságúnak választjuk, ezzel érzékeltetve a központi helyzetben lévő szereplők többlet-alkupozícióját.

Az induló készletek legyenek standard normális eloszlásúak  $x_i \sim N(0, 1)$ , az eszköz várható értéke  $\mu = 1$ , varianciája  $\sigma^2 = 1$ . Ez a piacnak azon jegyét hordozza magában, hogy a játékosok képesek fedezni pozíciójukat a belső piacon, mert van megfelelő számú szereplő az ellentétes oldalon. (Más eredményt kapnánk, ha a pozíciók zömében egy oldalon lennének, ekkor a kockázatdiverzifikáció hatása lenne erősebb, nem pedig a fedezési hatás.) Minden játékos  $\lambda = 0.3$  kockázatelutasítási együtthatóval rendelkezik. A szereplők száma legyen  $K = 50$ . A korábban definiált preferencia-képzési módszerben a skálázási együttható értékét  $\rho = 20$ -nak választottuk.

A 2. ábrán a szimuláció négy tulajdonságát mutatjuk be. A kétféle  $\theta$  paraméterezésben készült szimulációkat 4-4 kisebb ábrán ismertetjük. Mindkét szimulációban a kiinduló  $x$  pozícióknak ugyanazt a generált véletlen realizációt használtuk fel, hogy jobban összevethetők legyenek az eredmények.

A 2.a ábrákon a kezdeti hasznosság látható a kiinduló készlet függvényében. Az eszköz várható értéke  $\mu = 1$ , de a kockázata kvadratikus, ami a hasznosságot is erősen meghatározza. A 2.b ábrák a csere után megvalósult hasznosságnövekedéseket adják meg. A  $\theta_{ij} = 1/2$  esetben a szélsőséges pozícióval rendelkező szereplőknek érte meg leginkább a piacon kereskedni, a hasznosságnövekmény is hasonló a kvadratikus formához, azonban bizonyos szereplők kiemelkednek hasznosságnövekedés tekintetében a mezőnyből. Ezek a játékosok a népszerű játékosok. A  $\theta_{ij} = \gamma_{ji}/(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})$  esetben a parabolikus alak kevésbé látszik, nagyobb a szerepe az hálózati alkuerőnek a profitszerzésben. A 2.d ábrákon a népszerűség (másoktól érkező megkeresések rátáinak összege) alapján rangsoroltuk a kereskedőket és ábráztuk a haszonnövekményt. Az ábrákon két mintázat figyelhető meg. Az egyik a szélsőséges pozícióból származó magas profitot elérők csoportja, az alacsony népszerűség melletti tartományon tömörülő kiemelkedő profitok. A másik mintázatnál azt találjuk, hogy a profit a nagyobb népszerűségben örvendő játékosok esetén nagyobb. Ez az összefüggés nem lehet tökéletes, mert a nagy induló készletpozíciójú szereplők ekkor is képesek a fedezést annyira kihasználni, hogy nagyon hasznosnak ítélik meg a kereskedést. A 2.c ábrákon a kétoldalú tranzakcióban szereplő árak gyakorisági diagramjait adjuk meg. A vízszintes tengelyen a tranzakciós árat, a függőlegesen a megfigyelt gyakoriságot látjuk. A legmagasabb 30 árból származó megfigyelés adatait nem tüntetjük fel az ábrákon, mert extrém értékeket jelentettek a többihez képest, és hisztogram releváns része nem lenne így látható. Jól megfigyelhető, hogy míg az egyenlő alkuerős esetben az árak eloszlásának egy módusza van, addig a központi alkuerős esetben két jellemző érték körül alakulnak a tranzakciós árak.



2. ábra. A szimuláció eredményei (felső:  $\theta = 1/2$ , alsó:  $\theta_{ij}$  központiságtól függ): a) Kiinduló hasznosság a kezdeti készlet függvényében; b) Haszonnövekedés a kezdeti készlet függvényében; c) Páronkénti tranzakciós ár hisztogramja; d) Haszonnövekedés a népszerűség függvényében



3. ábra. A szimulált kereskedési hálózat: a) A forgalom felső 50%-ából képzett súlyozott irányított gráf; b) A forgalom felső 20%-ából képzett súlyozott irányított gráf

A 3. ábrán a páronkénti tranzakciók forgalmi adatából készítettünk két gráfot. A bal oldali ábrán a tranzakciók felét jelenítettük meg, azokat is, amelyek léteznek ugyan, de közgazdasági értelemben aránylag jelentéktelennek számítanak. Súlyozott gráfot láthatunk, a legnépszerűbb (itt legnagyobb sorszámú) szereplők élei a legvastagabbak: itt megy a legnagyobb forgalom. Sok forgalmat bonyolítanak a szélsőséges induló készlettel rendelkezők is. Látható, hogy bár páronként egyirányú a forgalom, egy-egy játékos egyszerre vevő és eladó is a piacon, vagyis a közvetítési motívum jelen van. A jobb oldali ábrán a forgalom felső 20 százalékát ábrázoltuk, ahol ennél kisebb volt a tranzakciós mennyiség, azok esetén nem jelenítettük meg kapcsolatot. Jól látható, hogy az alacsonyabb sorszámú (népszerűtlen), valamint a kis induló készletű szereplők kevés kapcsolattal bírnak. A nagy sorszámú szereplők egymással sokat kereskednek, de egy-egy él összekapcsolja őket a periférián maradt játékosokkal is. Az is látható, hogy a népszerű szereplők inkább nagy forgalmat generálnak, míg a szélsőséges pozíciójú szereplők inkább sok egyéni kapcsolattal, de kisebb forgalommal rendelkeznek: náluk a fedezési motívum az elsődleges, és alig jellemző rájuk a közvetítési motívum.

## 4 Stratégiai viselkedés a külső piacon

A külső piacon azt a helyzetet vizsgáljuk, amikor az ügyfélkörök nem különülnek el, és az árjegyzők egymással versenyeznek az ügyfelekért. Ezen a piacon minden árjegyző ára nyilvános. Egyenlő árak esetén egyenletesen oszlanak meg a választott árjegyzők között a befektetők. Bár a következő speciális eseteket a pénzügyi piacok jegyeinek elemzésére konstruáljuk, akár hétköznapi szituációkra is alkalmazható a koncepció. Képzeljünk el egy nemzetközi repülőteret, ahol érkező turisták százai váltják saját valutájukat az ország pénznemére a repülőtéren üzemelő két pénzváltónál. A pénzváltók különböző váltási árfolyamot jegyezhetnek, amelyeket a turisták könnyen megfigyelhetnek, mindkettőt egyszerre. Emiatt érdemes összehangolniuk az árazásukat, és ezért is elsősorban a napi forgalom kívánt mennyiségéről döntenek. A pénzváltók az irodák mögötti folyosón egymáshoz át tudnak menni, és szükség esetén egymás között hiányukat pótolni vagy fölöslegüket leadni, némi alkudozás eredményeként. Mennyiben módosul a két pénzváltó közti verseny, ha van átjárás a folyosón, illetve ha az egyik pénzváltó (valamely külső ok folytán) jobb alkupozícióban van?

## 4.1 A kétszereplős feladat

Amennyiben a külső piacon egyének szintjén nincs egyensúly, de piaci szinten a vételi és eladási igény megegyezik, a belső piac funkciójának megfelelően működik. A belső piac működése akkor válik kritikussá, amikor rövid időre egyoldali ajánlatok kerülnek túlsúlyba a külső piac egészén. Ilyenkor fel kell mérni, hogy a belső piac mennyi kockázatot képes ebből elnyelni. Ilyen esetekben nem mindegy, hogy a közvetítők hogyan reagálnak egymás lépéseire, egymásra tudják-e vajon terhelni a kockázatokat. Ennek elemzésére a következő részben két szereplőre vonatkozóan többféle duopol struktúrát elemezzünk. Ezek: Cournot-duopólium; Stackelberg-duopólium; két Stackelbergvezetős duopol szituáció; kartellhelyzet. Az elemzési keretünknek a mennyiségvezérelt duopóliumokat választottuk az árvezérelt duopóliumokkal szemben (amelynek módszertanát lásd például Mas-Colell, Whinston és Green (1995) piaci erőfölénnyel foglalkozó fejezetében). Ez első ránézésre idegen az árjegyzői piacok logikájától, ahol jellemzően az árjegyzők egymással konzisztens (arbitrázsmentes), de egymástól különböző vételi és eladási árakat (ársávokat) jegyeznek, nem pedig mennyiségeket adnak meg. Mégis, az árjegyző brókerségek számára hosszabb távú kérdés lehet, hogy stabil kereskedési igények („kereslet”) esetén mennyi legyen jellemzően az a felvállalt árrés, amivel a megcélzott forgalom elérhető és profitot hoz. Ez implicite azt jelenti, hogy a befektető ügyfelek nem rendelkeznek információs többlettel a brókerségekhez képest az eszköz értékére vonatkozóan.

Mivel mindkét árjegyző árait látják a befektetők, ezért nincs értelme a két árjegyzőnek különböző árakat adni. Megcélozhatják viszont a kívánatos eladási és vételi mennyiségeiket, amellyel „kitapogatva” a megfelelő árfolyamokat már összhangban tud a két szereplő árat jegyezni. A befektetők (ügyfelek) inverz vételi és eladási „keresleti” függvényeit ezért a következő módon adjuk meg

$$\epsilon^a = \frac{a}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} (n_1^a + n_2^a) , \quad (27)$$

$$\epsilon^b = \frac{b}{\beta} - \frac{1}{\beta} (n_1^b + n_2^b) . \quad (28)$$

Ahol  $n_i^a$  az  $i$  árjegyző vételi,  $n_i^b$  az eladási mennyisége, az  $\epsilon$  a fél árrés, azaz  $\mu + \epsilon^a$  és  $\mu - \epsilon^b$  a jegyzett eladási és vételi ár. Az árrés nagysága  $\epsilon^a + \epsilon^b$ .

Az általunk vizsgált árjegyzői piac amnyiban tér el a hagyományos duopóliumoktól, hogy az árjegyzők a külső tranzakciót követően még a belső piacon elosztják egymás között a kockázatot, és ezért fizetnek, vagy pénzt kapnak. Kérdésünk, hogy mennyire változtatja meg ez a helyzet a szereplők magatartását. Ha egy szereplő például a külső kereslet-árrugalmasságoknak megfelelően nem nulla nettó pozíciót hoz létre, és ezzel nagy kockázatot vállal, akkor az itt keletkező profit egy részét fel kell ajánlania a másik (kockázatot elnyelő) szereplőnek. Ezért felmerül a kérdés, hogy a tudatos stratégiával milyen mértékű extraprofitot lehet elérni, és mi jellemezi az egyensúlyi helyzeteket.

Az árjegyzői feladat az első szereplőre a következő alakot ölti:

$$\max_{\{n_1^b, n_1^a, y\}} U \doteq \mu x_1 - R_1(x_1 + y) + E(\epsilon_1^b n_1^b + \epsilon_1^a n_1^a) + c_{12}, \quad (29)$$

ahol bevezettük az  $R_i(x) \doteq \frac{1}{2}\lambda_i\sigma^2x_i^2$  jelölést, valamint figyelembe vettük a külső piacon szerezhető várható profitot is. A külső piacon a bid és az ask árjegyzéstől függ a megszerezhető mennyiség nagysága:

$$n_1^a = a - \alpha\epsilon_1^a - n_2^a, \quad n_1^b = b - \beta\epsilon_1^b - n_2^b. \quad (30)$$

A nettó pozíciók pedig  $x_1 = n_1^b - n_1^a$ ,  $x_2 = n_2^b - n_2^a$ . A pénzáram definícióját a kétszereplős helyzetre alkalmazva kapjuk a

$$c_{12} = -qy + \theta[U_2(x_2 - y) - U_2(x_2)] - (1 - \theta)[U_1(x_1 + y) - U_1(x_1)]$$

kifejezést, amelyre behelyettesítés és átalakítás után adódik a

$$c_{12} = -\frac{1}{2}\left\{\mu y + \theta[R_2(x_2 - y) - R_2(x_2)] - (1 - \theta)[R_1(x_1 + y) - R_1(x_1)]\right\} \quad (31)$$

képlet. A második szereplő pénzmozgása  $c_{21} = -c_{12}$ .

## 4.2 Duopol-szituációk egyoldali jegyzés, egyenlő belső alkuerő esetén

Az első elemzési esetben a partnereknek egyenlő az alkuereje. A korábban bevezetett osztozkodási szabályt  $\theta = 1/2$  esetre alkalmazzuk. A két szereplőnek azonos kockázatviselő hajlandósága van, a kockázatelutasítási paraméterek ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ) nem térnek el egymástól. Az egyszerűség kedvéért csak a vételi ajánlatokat tekintjük, ezek keresleti paraméteréhez  $\beta = 1$ -et választjuk. Az eladási ajánlatok számát  $n^a = 0$ -ban rögzítjük. A  $\mu$  várható ár legyen 0. A kockázatos eszköz árának varianciája legyen  $\sigma^2 = 1$ . Döntési változóként az  $n^b$  elérni kívánt tranzakciós mennyiséget határozzuk meg, amelyekből következik majd a vételi ár (bid,  $\epsilon^b$ ) is.

$$\max_{\{n_1^b, y\}} U \doteq \epsilon_1^b n_1^b - \frac{1}{2}\lambda(n_1^b + y)^2 + c_{12}, \quad (32)$$

ahol  $\epsilon_1^b = b - n_1^b - n_2^b$ . Az első szereplőre jutó kockázatkezelésből származó pénzáram:

$$c_{12} = -\frac{1}{2}\mu y + \frac{1}{8}\lambda\left\{\left[(n_1^b + y)^2 - (n_1^b)^2\right] - \left[(n_2^b - y)^2 - (n_2^b)^2\right]\right\}.$$

A belső piaci egyensúly elsőrendű feltétele szerint az  $y$  csere  $y = 0.5(n_2^b - n_1^b)$ , a belső piaci elszámolóár pedig  $q = -0.5\lambda(n_1^b + n_2^b)$ . A pénzáram a belső piac egyensúly és  $\mu = 0$  esetén:

$$c_{12} = \frac{1}{8}\lambda\left[(n_2^b)^2 - (n_1^b)^2\right]. \quad (33)$$

Az átalakítás után az egyes játékosok hasznosságfüggvényére pedig az

$$U_1 = \epsilon_1^b n_1^b - \frac{1}{8} \lambda (n_1^b + n_2^b)^2 + \frac{1}{8} \lambda \left[ (n_2^b)^2 - (n_1^b)^2 \right] \quad (34)$$

$$U_2 = \epsilon_2^b n_2^b - \frac{1}{8} \lambda (n_1^b + n_2^b)^2 - \frac{1}{8} \lambda \left[ (n_2^b)^2 - (n_1^b)^2 \right] \quad (35)$$

alakot kapjuk.

Tekintsük elsőként a Cournot-duopólium esetét. Az előző levezetésből és a Cournot-duopol viselkedésből már könnyen megadható az 1. játékos hasznosságfüggvényének redukált alakja. Az első szereplő reakciófüggvénye

$$n_1^b = \frac{2}{\lambda + 4} b - \frac{1}{2} n_2^b,$$

ebből következően az egyensúlyi mennyiség

$$n_1^{b*} = \frac{2}{3} \frac{2}{\lambda + 4} b, \quad (36)$$

és az egyensúlyi árres fele pedig  $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [(\lambda + 4/3) / (\lambda + 4)] b$  lesz. Jól látszik, ha a szereplők kockázatelutasítása magasabb, akkor az árres nagyobb, és a tranzakciós mennyiség kevesebb. Következzen a Stackelberg duopólium ismertetése. Amennyiben az egyik árjegyző árvezérlőként előbb jegyez árat, mint a második, és a másik követőként viselkedik a külső piacon, akkor a két szereplő árjegyzése nyomán a második szereplő reakciófüggvénye a Cournot-féle magatartást követi, az első szereplő pedig beépíti a másik cselekvését a döntésébe. A vezető és a követő játékos egyensúlyi mennyisége

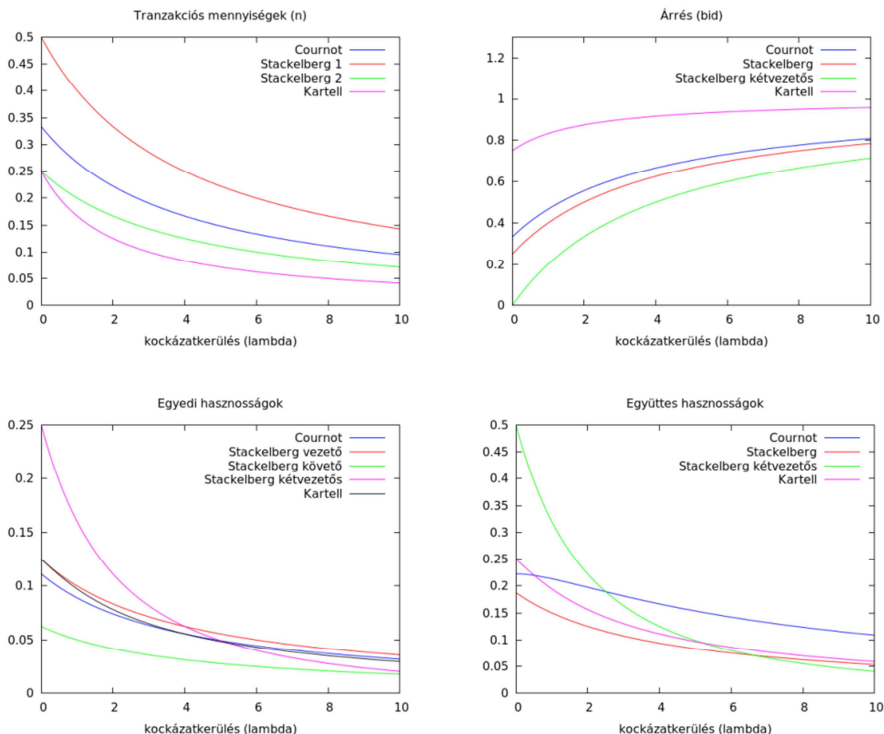
$$n_1^{b*} = \frac{2}{\lambda + 4} b, \quad n_2^{b*} = \frac{1}{2} \frac{2}{\lambda + 4} b, \quad (37)$$

az árjegyzésből fakadó fél árres az egyensúlyban  $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [(\lambda + 1) / (\lambda + 4)] b$ . A kétvezetős duopol szituációban, vagyis ha mindketten vezetőként lépnének fel  $n_1^{b*}$  mennyiséggel, amely a piacon azt eredményezné, hogy mindkét szereplő az  $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [\lambda / (\lambda + 4)] b$  árat jegyeznék. Kartell megállapodást kötő játékosok esetén a tranzakciós mennyiségek:

$$n_1^{b*} = n_2^{b*} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda + 2} b, \quad (38)$$

és az ehhez tartozó árresék:  $\epsilon_1^b = \epsilon_2^b = [(\lambda + 1) / (\lambda + 2)] b$ . A négy változat piaci egyensúlyi árait és mennyiségeit a  $\lambda$  kockázati paraméter függvényében a 4. ábra illusztrálja  $b = 1$  eset mellett. Az ábrán az árjegyzők forgalmát, a vételi árakat, a játékosok egyedi hasznosságait valamint az árjegyzők együttes hasznosságát mutatjuk be az általános kockázatkerülés függvényében. A nagyobb általános kockázatkerülési együttható óvatosabb szereplőket jelez, akik erősebben támaszkodnak a belső piacra. Ahogy a kockázatkerülés általános mértéke a játékosoknál nő, úgy tűnik el fokozatosan a külső piaci erőfölény a játékosok között. Ezt jelzi az is, hogy a piaci forgalom, az ár, valamint az egyedi és aggregált hasznosságok egymáshoz közeli értékeket vesznek fel a különböző piacszerkezetek mellett, ha nagy a kockázatelutasítás mértéke.





4. ábra. Különböző piaci szituációk, a kockázatkerülés függvényében, egyenlő alkuerők.  
 a) Árjegyzők egyéni tranzakciószáma, b) Piaci bid ajánlatok, c) Egyes árjegyzők hasznossága,  
 d) Az árjegyzők együttes hasznossága

### 4.3 Aszimmetrikus alkuerő a belső piacon

A második elemzési esetben az elosztási szabályban aszimmetrikus az alkuerő. Ebben a helyzetben a szimmetrikus külső piaci szituációk (Cournot, kétvezetős Stackelberg, kartell) nem változnak, hiszen ott nem is használják a belső piacot a cserére az azonos mértékben kockázatkerülő, és ezért a külső piacon azonos irányú és nagyságú pozíciót felvállaló játékosok. A Stackelberg duopólium eredményei viszont eltérnek az előző esethez képest. Tegyük fel, hogy az aszimmetrikus külső piaci viszonyok mellett a vezető játékos  $\theta$ , a követő játékos pedig  $1 - \theta$  alkuerővel rendelkezik a belső kockázatelosztást illetően. Minél nagyobb a  $\theta$ , annál inkább részesül az első (vezető) játékos a belső cseréből fakadó hasznokból. Viszont, a követő játékos is figyelembe veszi azt, ha a belső piacon drága a kockázat csökkentése, és mérsékelheti aktivitását a külső és belső piacon is. Nem egyértelmű tehát, hogy a Stackelberg vezető jobban vagy rosszabbul jár, ha alkuereje nagyobb a belső piacon. A kérdés fordítva is érdekes: vajon a külső piacon Stackelberg követő típusú (2. számú) játékos a belső piacon képes-e a vezető (1. számú) szereplő profitját is megszerezni, ha a belső piacon ő az erősebb?

A fentiekhez fejezzük ki az alkuerőtől függő pénztranszfert a belső piac

egyensúlya esetén:

$$c_{12} = \frac{1}{4}\lambda(n_2 - n_1)^2\theta + \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{1}{4}(n_2 + n_1)^2 - n_1^2\right). \quad (39)$$

Ezt a transzfert építi be mindkét szereplő (vezető és követő) a döntésébe. Mivel csak “féloldalas” (bid) külső piac van, ezért olyan kockázat-csökkentő belső csere nincs, amely esetén mindkét szereplő egyszerre csökkentené a kockázatát, a belső piacra lépés motívuma tehát nem a fedezés, hanem a kockázatok átadása-átvállalása. A fentieket figyelembe véve a vezető és a követő optimális mennyiségei:

$$n_1^{b*} = \frac{A_1}{B}b, \quad n_2^{b*} = \frac{A_1 - A_2}{B}b \quad (40)$$

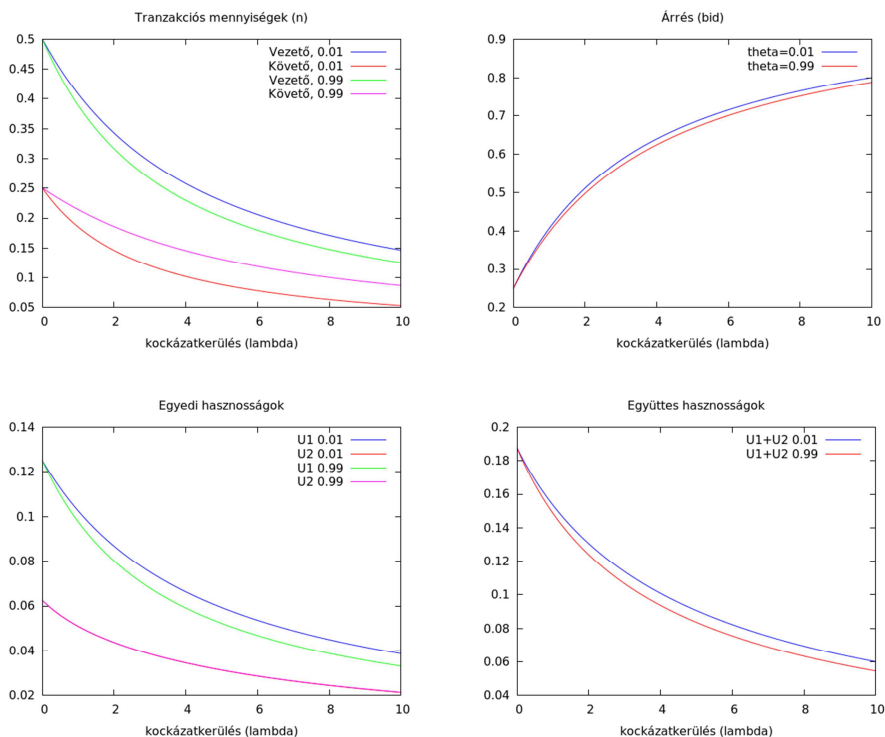
lesznek, ahol

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\lambda^2 [1 - 4\theta(1 - \theta)] + 16(\lambda + 4)^2 \\ A_2 &= 4(\lambda + 4)(2\lambda\theta - 3\lambda - 8) \\ B &= (\lambda + 4) [8\lambda^2\theta^2 - (6\lambda^2 - 8\lambda)\theta + 9\lambda^2 + 60\lambda + 128], \end{aligned}$$

valamint a jegyzett ár az egyensúlyban  $e_1^b = e_2^b = [1 - (2A_1 - A_2)/B]b$ . A külső piacon a Stackelberg vezető mennyisége nagyobb, mint a Stackelberg követőé, ennél fogva az ott begyűjtött kockázata is nagyobb. A Stackelberg vezető tehát ebben a példában a belső piacon mindig kockázat-átadó, vagyis pénzt fog adni a követőnek mindezért. Ehhez érdemes megvizsgálni azt, hogy mi a hatása, ha gyenge, illetve ha erős a vezető a belső piacon, és hogyan befolyásolja a hatásokat a kockázatelutasítási attitűd.

Az 5. ábrán ehhez két esetet számolunk ki és vizsgálunk. Az első esetben kicsi ( $\theta = 0.01$ ), a másodikban nagy ( $\theta = 0.99$ ) alkuereje van a vezetőnek. Azt találjuk, hogy amikor a vezetőnek nagyobb alkuereje van a belső piacon, akkor a vezető jobban vissza fogja szorítani külső piaci tevékenységét. A követők külső piaci mennyisége ellenben nagyobb lesz. Mindez azt eredményezi, hogy az össz mennyiség a külső piacon kevesebb, a külső piaci ár pedig magasabb lesz, mint amikor a vezető kis alkuerővel rendelkezik a belső piacon. Ez a befektetőknek összességében kedvezőtlenebb helyzetet jelent.

A követő játékos hasznossága nem változik a belső alkuerő változásával. A vezető hasznossága alacsonyabb, ha erősebb a belső piacon. Az intuíciónak látszólag ellentmondó eredmények magyarázata az, hogy mivel a gyenge követő nem keres jól a belső piacon való kereskedéssel, figyelme a külső piacra fordul, ott próbál meg érvényesülni. Ezért nagyobb pozíciókat halmoz fel, ami a belső piaci kockázatelnyelő képességét csökkenti. Az erős vezető így nem tud a külső piacon még nagyobb pozíciókat szerezni, hiszen drága és korlátos a külső piacról szerzett kockázat csökkentése.



5. ábra. Stackelberg külső piac, aszimmetrikus belső piac. a) Árjegyzők egyéni tranzakciószáma, b) Piaci bid ajánlatok, c) Egyes árjegyzők hasznossága, d) Az árjegyzők együttes hasznossága

Összegezve, a kétszereplős, egyoldali árjegyzős példákban jól látszik a két szereplő között zajló kockázatelosztás működése. Ez csökkenti a felek közötti erőfölény kialakulását, abban az értelemben, hogy ha az egyik szereplő – engedve a kereslet-kínálat igényeinek – csak az egyik irányba csinálna ügyleteket a külső szereplőkkel, előbb-utóbb a belső piacról érkező korrekciós nyomás (az egyre drágább kockázatcsökkentési költség) csökkenti ennek jövedelmezőségét. Erős belső piaci szereplő jobban ragaszkodik a belső piaci haszonhoz, ami miatt erősebben csökkenti a belső piacon a fedezésre szánt mennyiséget. Továbbá, minél erősebb a kockázatkerülés az árjegyzők körében, annál erősebb a belső piac hatása a külső piaci helyzetre, annál kiegyensúlyozottabb a külső piaci szereplők ereje.

Az ügyfélpiacon megfigyelhető árrés szempontjából ezek szerint az a kívánatosabb állapot, ha a belső piacon erős alkuerővel rendelkező játékos lesz a külső piacon vezető, és a belső piacon gyenge szereplő csak követő stratégiát alkalmaz. Az üzleti gyakorlatban általában az erősebb (szofisztikáltabb) közvetítők erősek a belső és a külső piacon is. Általában ők alkalmazhatnak oligopolstratégiát a külső piacon, és ők azok, akik a belső piaci hálózat közepén helyezkednek el. Ebből általános következtetést nehéz ugyan levonni az ilyen tőzsdén kívüli piacokon a nagy bankházakra vonatkozóan, de sikerült egy meglepő elméleti összefüggést azonosítani, amit érdemes lehet empirikusan is tesztelni különböző pénzügyi piacokon.

## 5 Összefoglalás

Tanulmányunkban a pénzügyi közvetítői piacok kettős szerkezetét elemezzük mikroökonómiai módszerekkel. A kettős szerkezet két közgazdaságilag elkülöníthető piacot jelent (amely fizikailag nem biztos, hogy eltér egymástól a gyakorlatban). Az egyik piac az árjegyzők és a befektetők közötti piac, amelyen az árjegyzők likviditást biztosítanak a piac többi szereplőjének közvetítési díjért cserébe. A másik piac az árjegyzők egymás közötti piaca, ahol semlegesítik nettó pozícióikat az árjegyzők, megszüntetve, vagy legalább csökkentve ezzel a kereskedett eszköz árváltozásából fakadó piaci kockázatukat.

A dolgozat első felében a belső piac egy esetét mutattuk be és jellemeztük. A kockázatkerülő árjegyzők kockázatcsökkentési céllal lépnek a belső piacra. A belső piacon a keresés és a kereskedés költséges, amelyet a kereskedési idő korlátosságával ragadtuk meg. Ez a súrlódás egy, a kereskedésre vonatkozó preferencia-rendszert implikált, amelynek következménye a szereplők páronkénti kereskedésének hálózatos alakja. A kétoldalú tranzakciókban eltérnek az árak, amelyeket a szereplők alkuereje is befolyásol. Ebben a keretben megadtuk a piac egyensúlyát és annak főbb jellemzőit.

A dolgozat második részében azt vizsgáltuk, hogy ha egy árjegyző gazdasági erőfölénnyel rendelkezik a befektetők piacán (oligopolistaként képes viselkedni), akkor a belső piac jelenléte hogyan befolyásolja a külső piaci versenyt. Megállapítottuk, hogy az általunk tárgyalt speciális esetben a belső piac jelenléte csökkenti a külső piaci versenyt, ami Reiss és Werner (1998) a Londoni Értéktőzsdén (London Stock Exchange) tevékenykedő árjegyzők közötti piacának empirikus elemzésével cseng össze. Bár az árjegyzői piacon jellemzőbb helyzet az, hogy nagyjából ugyanannyi árjegyző akar adni, mint venni az egymás közötti piacon, mi a kiegyensúlyozatlan piaci helyzetre fókuszáltunk. Ez az átmeneti helyzet is gyakran előfordul, ekkor az árjegyzői belső piac tulajdonságai megváltoznak, ami külön figyelmet igényel, hiszen ez figyelhető meg a pénzügyi krízisek során. A duopol árjegyző szereplők viselkedését különböző kockázati étvágy mellett elemeztük. Ezzel megmutattuk, hogy a kockázatkerülés emelése esetén csökken a piaci struktúra (duopólium típusa) okozta különbség a piacon.

## Irodalom

1. Ágoston, K. C. (2010): CVaR számítás SRA algoritmussal. *Sigma* **41**(1-2), 61–73.
2. Amihud, Y. és Mendelson, H. (1980): Dealership market: Market-making with inventory. *Journal of Financial Economics* **8**(1), 31–53.
3. Atkeson, A., Eisfeldt, A. L. és Weill, P.-O. (2013): The Market for OTC Derivatives. CEPR Discussion Papers 9403.
4. Babus, A. és Kondor, P. (2013): Trading and information diffusion in OTC markets. CEPR Discussion Papers 9271.
5. Balog, D., Bátyi, T. L., Csóka, P. és Pintér, M. (2012): Pénzügyi hálózatok modellezése Jackson és Watts (2002) nyomán. in *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*. Aula Kiadó. 151–168.

6. Berlinger, E., Michaletzky, M. és Szenes, M. (2011): A fedezetlen bankközi forintpiac hálózati dinamikájának vizsgálata a likviditási válság előtt és után. *Közgazdasági Szemle* **58**(3), 229–252.
7. Borch, K. (1962): Equilibrium in a Reinsurance Market. *Econometrica* **30**(3), 424–444.
8. Craig, B. és von Peter, G. (2010): Interbank tiering and money center banks. Technical Report 322. Monetary and Economic Department.
9. Csóka, P., Herings, P. J.-J. és Kóczy, L. Á. (2009): Stable allocations of risk. *Games and Economic Behavior* **67**(1), 266–276.
10. Dodd, R. (2008): Markets: Exchange or Over-the-Counter. *Finance and Development*, 34–35.
11. Dodd, R. (2012): Markets: Exchange or Over-the-Counter. How securities are traded plays a critical role in price determination and stability (Updated). Technical report.
12. Duffie, D., Gârleanu, N. és Pedersen, L. H. (2005): Over-the-Counter Markets. *Econometrica* **73**, 1815–1847.
13. Erb, T. és Havran, D. (2015): Mit veszítünk a piaci súrlódásokkal?: A pénzügyi piacok mikrostruktúrája. *Közgazdasági Szemle* **62**(3), 229–262.
14. Fiedler, M. és Pták, V. (1962): On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematical Journal* **12**(3), 382–400.
15. Fricke, D. és Lux, T. (2012): Core-Periphery Structure in the Overnight Money Market: Evidence from the e-MID Trading Platform. Technical Report 1759. Kiel Institute of the World Economy.
16. Garman, M. B. (1976): Market microstructure. *Journal of Financial Economics* **3**(3), 257–275.
17. Glosten, L. R. és Milgrom, P. R. (1985): Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics* **14**(1), 71–100.
18. Hansch, O., Naik, N. Y. és Viswanathan, S. (1998): Do Inventories Matter in Dealership Markets? Evidence from the London Stock Exchange. *Journal of Finance* **53**(5), 1623–56.
19. Ho, T. S. Y. és Stoll, H. R. (1983): The Dynamics of Dealer Markets under Competition. *Journal of Finance* **38**(4), 1053–74.
20. Ho, T. és Stoll, H. R. (1981): Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty. *Journal of Financial Economics* **9**(1), 47–73.
21. Kyle, A. S. (1985): Continuous Auctions and Insider Trading. *Econometrica* **53**(6), 1315–35.
22. Kyle, A. S. (1989): Informed Speculation with Imperfect Competition. *Review of Economic Studies* **56**(3), 317–355.
23. Li, D. és Schürhoff, N. (2012): Dealer Networks. Working paper.
24. Loertscher, S. (2005): Market making oligopoly. Diskussionsschriften dp0512. Universität Bern, Departement Volkswirtschaft.
25. Malamud, S. és Rostek, M. (2012): Decentralized Exchange. Working Papers 12-18. NET Institute.
26. Mas-Colell, A., Whinston, M. D. és Green, J. R. (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. New York.

27. Mildestein, E. és Schlee, H. J. (1983): The Optimal Pricing Policy of a Monopolistic Marketmaker in the Equity Market. *Journal of Finance* **38**(1), 218–231.
28. Neklyudov, A. V. (2012): Bid-Ask Spreads and the Decentralized Interdealer Markets: Core and Peripheral Dealers. Working paper.
29. Pagano, M. (1989): Endogenous Market Thinness and Stock Price Volatility. *Review of Economic Studies* **56**(2), 269–287.
30. Pozsar, Z., Adrian, T., Ashcraft, A. és Boesky, H. (2012): Shadow Banking. FRB of New York Staff Report 458.
31. Reiss, P. C. és Werner, I. M. (1998): Does Risk Sharing Motivate Interdealer Trading?. *Journal of Finance* **53**(5), 1657–1703.
32. Shachar, O. (2012): Exposing The Exposed: Intermediation Capacity in the Credit Default Swap Market. Technical report. Stern School of Business, New York University.
33. Shen, P. és Starr, R. M. (2002): Market-makers' supply and pricing of financial market liquidity. *Economics Letters* **76**(1), 53–58.
34. Stoikov, S. és Sağlam, M. (2009): Option market making under inventory risk. *Review of Derivatives Research* **12**(1), 55–79.
35. Zawadowski, A. (2013): Entangled Financial Systems. *Review of Financial Studies* **26**(5), 1291–1323.

#### MARKET MAKER BEHAVIOR WITH HEDGING ON INTER-DEALER MARKETS

Financial intermediary institutions often compete and cooperate with each other at the same time. These financial actors provide services to their investors (mutual funds, hedge funds, etc.) and enter into transactions with them. Moreover, these players very often trade with each other to mitigate their market risks related to their exposures against their clients. Inter-dealer markets differ from the walrasian textbook markets in three characteristics: transactions are bilateral, market players form a network, market players possess diverse bargaining power. We develop a one-shot market model for describing the market equilibrium and the effects of the network structure for the price distribution on the inter-dealer market. We analyze furthermore how the inter-dealer trading for risk allocation influences the market behavior on the customer markets. We investigate the situation of duopolist markets where market makers are able to trade with each other as well. The model shows that inter-dealer markets may mitigate the market power on customer markets. If the market makers become more risk averse, it decreases the market power on the customer markets.

*Keywords:* market making, inter-dealer markets, risk allocation, financial markets, market micro-structures.