A XXI. MAGYAR OPERÁCIÓKUTATÁSI KONFERENCIA SZEGED, 1993. OKTÓBER 2–4.[1]

ZIERMANN MARGIT
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

A hazánkban megrendezett operációkutatási konferenciák közel három évtizedes története mindenkor jól tükrözte azt a státuszt, amelyet az operációkutatás tudományának művelői, gazdag módszertani apparátusának felhasználói a társadalmi-gazdasági hierarchia eltérő szintjein elfoglalhattak, egyúttal azt is, hogy maguk a döntéshozók miképpen vélekedtek e tudomány hasznosságáról tevékenységeik körében. Voltak nagy nekibuzdulások 300 feletti résztvevővel, (közöttük nem ritkán a tudományok és a kormányzat reprezentásaival), 150-200 előadással, de ennél jóval kisebb létszámú és kevésbé jelentős összejöveteleink is. Mégis, egészében vizsgálva e folyamatot, kiegyensúlyozottnak és sikeresnek mondhatjuk. Aligha kételkedhetünk abban, hogy e rendezvényeink – természetesen szép számú nemzetközi konferenciáinkat is beleértve – jelentős mértékben hozzájárultak egy, a kor színvonalán álló és nemzetközileg is elismert hazai operációkutatási kultúra: felsőoktatás, tudományos és alkalmazott kutatások létrejöttéhez.

A magyar operációkutatási társadalom sokféle szakmai előképzettségű és érdeklődésű, az egész ország területén változatos munkahelyeken és tudományos egyesületekben tevékenykedő tagjai gyakran ezeken a hazai konferenciákon ismerkedhettek meg egymással, egymás problémáival, az eltérő szakterületeken tevékenykedő műhelyek gondjaival, eredményeivel. Ezek az eszmecserék rendszerint kölcsönös előnyökkel jártak, akár az elméletet, akár a konkrét alkalmazásokat tekintjük is.

Mint az sokak előtt ismeretes, az operációkutatási konferenciákat korábban évente, néhány éve azonban csak kétévente rendezzük meg, négy tudományos egyesület, illetve szakosztály szakmai összefogásával, miközben a szervezés oroszlánrészét mindig más-más társulat látja el. Követve az alfabetikus sorrendet, e tudományos szervezetek jelenleg a következők: a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) Alkalmazott Matematikai Szakosztálya, a Gazdaságmodellezési Társaság (GMT), a Neumann János Számítástudományi Társaság (NJSZT) Operációkutatási Szakosztálya, valamint a Magyar Operációkutatási Társaság (MOT), mely ez alkalommal a főszervezői tisztet is ellátta. A MOT az 1991. évi megalakulását követően másodízben vesz részt e

[1]Beérkezett: 1993. november 23.

nevezetes szakmai tanácskozások megrendezésében, de elsőízben felelős szervezője is annak. E kialakult rendnek megfelelően, a XXII. Magyar Operációkutatási Konferencia főszervezője a Gazdaságmodellezési Társaság lesz 1995-ben.

Egy társadalmi szerveződés életképességét hűen tükrözi, ha tartalmilag és tagságában folytonos megújulásra képes. A szegedi konferencia tapasztalatai ebből a szempontból is biztatóak, hiszen sikeres új műhelyek bemutatkozásának, és mind a hallgatóság, mind az előadók soraiban a fiatalabb generációk jelentkezésének lehettünk tanúi. Örvendetes jelenség volt az is, hogy néhány kiváló, határainkon túli neves magyar operációkutató kollégát is körünkben üdvözölhettünk, biztosítva számukra itteni tartózkodásuk anyagi feltételeit. Színvonalas előadásaikkal, a velük folytatott eszmecserékkel mindannyian gazdagabbak lettünk. Jó lenne, ha ez is hagyománnyá válna, s a jövő konferenciáinkon is rendszeresen vendégül láthatnánk a szomszédos országokban élő barátainkat.

Konferenciáink megrendezésének helyszínéül korábban is szívesen választottuk azokat a vidéki városainkat, amelyekben felsőoktatási intézmények működnek. Ez alkalommal Szegedre és a József Attila Tudományegyetemre esett a választásunk, ami valóban szerencsésnek bizonyult. Mindannyian igen jól éreztük magunkat, élvezve Szeged város és a JATE vendégszeretetét, a tiszaparti metropolisz sajátos hangulatát, a konferencia szegedi Szervezőbizottsága – Bartalos István és Csendes Tibor (elnök), valamint segítőtársaik: Csallner András Erik, Dudás Tibor és Kresz Miklós – számtalan részletkérdésre kiterjedő gondos előkészítő munkájának gyümölcseit. Mindehhez hozzájárult a Forrás Szálló kényelme és kitűnő konyhája. A konferenciai résztvevők túlnyomó többsége ugyanis ebben a szállodában lakott (ami kétségkívül megkönnyítette a személyes találkozásokat, s a kötetlen, gyakran éjszakába nyúló eszmecseréket), de az első nap kivételével itt bonyolítottuk le szakmai programjainkat is. Talán csak az időjárás bánt egy kissé mostohán velünk, ám még az esős, szeles idő se riasztotta vissza a társaságot a tiszai hajókirándulástól, ahonnan vidáman megtérve dicsérték a folyótorkolatok lenyűgöző szépségét.

A konferencia védnöki tisztét a JATE matematikus rektora, Csirik János professzor vállalta el, s noha rektori teendői külföldre szólították, s ezért személyesen megjelenni nem tudott, szívügyének tekintette a konferencia sikerét, csakúgy mint Imreh Balázs, a JATE Informatikai Intézetének vezetője, aki a rektor urat távollétében konferenciánkon képviselte. Segítőkészségükért e helyütt is köszönet illesse mindkettőjüket.

A konferencia ünnepélyes megnyitására október 2-án, délután 2 órakor, a JATE rektori tanácstermében került sor. A megnyitó ülésen elnöklő Ziermann Margit a külföldi tartózkodása miatt távollévő Prékopa András akadémikus, a konferencia és a MOT tiszteletbeli elnöke nevében is üdvözölte a megjelenteket. Az elnökségben helyet foglaló Imreh Balázs a JATE rektora nevében, Mécs Imre, a Szegedi Városi Önkormányzat Tudományos és Felsőoktatási Bizottsága elnöke, a JATE Biotechnológiai Tanszékének vezetője az Önkormányzat nevében köszöntötte meleg szavakkal a konferenciai résztvevőket, méltatva e szakmai tanácskozás tudományos és gyakorlati jelentőségét. Az elnöki megnyitó beszéd az operációkutatás hazai helyzetével és perspektívájával, a hazai operációkutatási tevékenységek nemzetközi megítélésével és a Magyar Operációkutatási Társaság nemzetközi kapcsolatai alakulásával foglalkozott. Ismertette annak az 1990-ben lezárult és az Európai Közösség Tanácsának felkérésére létrejött szakértői bizottság vizsgálati jelentésének néhány mondatát, amelyben leírták, hogy hazánk kiemelkedő eredményeket ért el az elméleti és alkalmazott matematikában, az operációkutatásban, a statisztikában és a valószínűségszámításban (l. Magyar Nemzet 1990. szeptember 5., a hivatkozott cikk címe: „Nem élvezünk különleges előnyöket").

Az ünnepélyes megnyitás emelkedett pillanataira került sor akkor, midőn az Elnök Martos Bélának, a matematikai tudomány kandidátusának, a közgazdaságtudomány doktorának átnyújtotta azt a diplomát, melynek tanúsága szerint 1982. évi közgyűlésén a MOT – az operációkutatás módszertanának fejlesztésében elért, nemzetközi elismertséget is kiváltó tudományos eredményeiért – Dr. Martos Bélát tiszteletbeli elnökké megválasztotta. A konferencia programja szakmai plenáris üléssel folytatódott, melyen Csiszár Imre akadémikus, meghívott előadó „A maximum entrópia módszer: axiomatika és algoritmusok" címen igen nagy érdeklődéssel kísért előadást tartott.

A plenáris ülést követően két szekció-ülést tartottunk, melynek a Bolyai Intézet adott otthont. Ezzel a konferencia első munkanapja be is fejeződött, s a résztvevők a fehér asztal mellett folytatták disputáikat a nevezetes Hági Étteremben, ahol a konferencia szervezői egy jól sikerült fogadást tartottak a tiszteletükre.

A konferencia második és harmadik napján nyolc-nyolc szekcióban folytatódtak az előadások. Az első két szekciót is hozzászámítva összesen tehát 18 szekciót szerveztünk, igen változatos témakörökben (matematikai programozás, társadalombiztosítás, matematikai irányításelmélet, döntéstámogató rendszerek, a matematikai programozás numerikus módszerei, rendszer- és irányításelmélet, intelligens rendszerek, döntések fuzzy környezetben, statisztika, közgazdasági modellek, belsőpontos módszerek, a matematikai programozás műszaki alkalmazásai, egészértékű programozás, hálózati folyamatok tervezése).

A gazdag programkínálatban történő eligazodást jól szolgálta a szép kiállítású két füzet, „Az előadások programja" és az „Előadáskivonatok és a résztvevők listája".

A résztvevők egybecsengő ítélete alapján jogosan vélhetjük, hogy a XXI. Magyar Operációkutatási Konferencia az utóbbi évek egyik legsikeresebb konferenciája volt, akár a magas részvételi arányt, akár az előadások számát, színvonalát tekintjük. Ezért is határozott úgy a SZIGMA folyóirat szerkesztősége, hogy az előadások egy részének cikk formájában történő közzétételét lehetővé teszi.

A konferencia szakmai sikerének megalapozásában jelentős szerepet játszottak a Programbizottság tagjai, Bod Péter, Harnos Zsolt, Ligeti Csák, Maros István, Rapcsák Tamás (elnök) és Szántai Tamás, akik egy-egy szekció megszervezéséért, s azok elnöki teendői ellátásáért is felelősek voltak. De előbbiekhez hasonlóan kitűnő munkát végeztek a felkért szekciófelelősök is: Bokor József, Chikán Attila, C. Fodor János, Friedler Ferenc, Gerencsér László, Illés Tibor, Imreh Balázs, Kolumbán József, Komlósi Sándor, Kovács Erzsébet, Molnár Sándor, Rapcsák Tamás, Sonnevend György, Vörös József.

Végezetül a konferencia sikeres megrendezését anyagi és erkölcsi támogatásukkal elősegítő intézményeknek és szervezeteknek mondunk köszönetet, így az Illyés Alapítványnak, a Pick Rt-nek, a József Attila Tudományegyetemnek, az MTA Operációkutatási Bizottságának, valamint a Zénon Kft-nek.

XXI. HUNGARIAN OPERATIONAL RESEARCH CONFERENCE (SZEGED, OCTOBER 2–4, 1993)

The paper is a report on this Conference, which was organized by the Hungarian Operational Research Society (HORS) as chief organizer, together with three other societies. The Conference was opened by the HORS President, and addressed by representatives for the Scientific University Szeged "József Attila" and for the Municipal Council of the town Szeged. At this occasion was awarded Dr. Béla Martos to Honorary Member of HORS. The opening ceremony was followed by the very notable invited presentation of Prof. Dr. Imre Csiszár, member of the Hungarian Academy of Sciences, on ,,Maximum entropy and related methods: axioms, algorithms". The work was continued in 18 sections. The papers reported on most recent developments relating to the theoretical, practical and computational aspects in operational research. All in all the meeting was widely regarded as being highly successful. The next, the XXII. Hungarian Operational Research Conference is planned to be held in 1996, and organized by the Economic Modelling Society.

ENTRÓPIAMAXIMALIZÁLÁS ÉS ROKON MÓDSZEREK: AXIOMATIKA, ALGORITMUSOK[1]

CSISZÁR IMRE
MTA Matematikai Kutató Intézet
1364 Budapest, Pf. 127

1. Bevezetés

Az entrópia eredetileg fizikai fogalom. A termodinamika második főtétele szerint zárt rendszerben az entrópia sohasem csökken, és az egyensúlyi állapotban éri el maximumát. Az információelmélet (Shannon [26]) az entrópia fogalmát új megvilágításba helyezte. Eszerint egy tetszőleges $P = (p_1, \dots, p_n)$ valószínűségeloszlás

$$H(P) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j \tag{1.1}$$

entrópiája azt méri, hogy a P eloszlással jellemzett kísérlet kimenetele menynyire véletlen (bizonytalan), abban az értelemben, hogy a kísérlet elvégzése átlagosan hány bit információt szolgáltat. Pontosabban, a bitben mért információmennyiség akkor adódik, ha az (1.1) képletben a log 2 alapú logaritmust jelent, az információelméletben szokásos konvenciónak megfelelően. Ebben a cikkben a szűkebb értelemben vett információelméleti szempontok nem játszanak szerepet, ezért egyszerűség kedvéért mindenütt természetes logaritmust használunk.

A fenti értelmezés természetesen sugallja az *entrópiamaximalizálás* elvét, melynek széleskörű alkalmazását elsősorban Jaynes kezdeményezte, vö. [19]: ha a P eloszlás nem ismert, csak az, hogy P egy $\mathcal{P}$ eloszláshalmaz eleme, akkor az ismereteinkkel kompatibilis eloszlások közül a leginkább véletlenszerűt választjuk, vagyis a maximális entrópiájú $P \in \mathcal{P}$ eloszlást. Ha pl. bizonyos $X_1, \dots, X_k$ valószínűségi változók $E(X_i) = b_i$ várható értékei ismertek, ahol X_i lehetséges értékei $a_{i1}, \dots, a_{in}$, akkor a $\mathcal{P}$ eloszláshalmaz a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, k \tag{1.2}$$

[1]**Beérkezett: 1994. január 23.**

egyenleteknek eleget tevő $P = (p_1, \ldots, p_n)$ eloszlásokból áll. Ekkor az (1.1) entrópiafüggvénynek az (1.2) lineáris feltételek melletti maximalizálása adja az ismereteinkkel kompatibilis legvéletlenszerűbb eloszlást.

Az (1.1) entrópiával rokon mennyiség az

$$I(P\|Q) = \sum_{j=1}^{n} p_j \log \frac{p_j}{q_j} \tag{1.3}$$

I-divergencia, amely több más néven is ismeretes, így relatív vagy kereszt-entrópia, diszkrimináló információ, vagy Kullback-Leibler információ; szokásos más jelölései $D(P\|Q)$ (az információelméleti irodalomban) és $K(P, Q)$ (a valószínűségszámítási irodalomban). Az I-divergencia nem szimmetrikus információelméleti mértékszáma annak, hogy a $P = (p_1, \ldots, p_n)$ eloszlás mennyire tér el a $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ eloszlástól. Statisztikai alkalmazását Kullback [23] alapozta meg, információelméleti alkalmazásairól l. Csiszár-Körner [13].

Az entrópiamaximalizálás elvének természetes általánosítása a *divergenciaminimalizálás elve:* Ha a P ismeretlen eloszlásról az a priori elképzelés $P = Q$, de ez nem kompatibilis a rendelkezésre álló ismeretekkel (tehát $Q \notin \mathcal{P}$), akkor azt a $P \in \mathcal{P}$ eloszlást választjuk, melynek a Q-tól vett I-divergenciája minimális. Ez az entrópiamaximalizálással azonos eredményre vezet, ha a $Q_0 = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ egyenletes eloszlás az a priori elképzelés (ami természetes akkor, ha semmi előzetes információ nem áll rendelkezésre). Valóban, (1.1)-ből és (1.3)-ból látható, hogy minden P eloszlásra

$$I(P\|Q_0) = \log n - H(P) . \tag{1.4}$$

Az entrópiamaximalizálás elvének a „maximális véletlenszerűség" heurisztikánál mélyebb alátámasztását adja a következő, lényegében Boltzmanntól származó meggondolás (Boltzmann [2], Jaynes [19]). Egy n lehetséges kimenetelű kísérletet N-szer ismételve, ahol $N \gg n$, legyen $p_j = \frac{N_j}{N}$, ahol N_j a j-edik kimenetel bekövetkezéseinek száma. Feltesszük, hogy az N_j gyakoriságok nem figyelhetők meg, és a $P = (p_1, \ldots, p_n)$ empirikus eloszlásról csak az állapítható meg, hogy $P \in \mathcal{P}$. Konkrétság kedvéért legyen pl.

$$\mathcal{P} = \{ P : |\sum_{j=1}^{n} p_j a_j - b| \le \epsilon \} \tag{1.5}$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$, b és $\epsilon > 0$ adottak. Itt N_j jelentheti egy N részecskéből álló fizikai rendszer részecskéi közül a fázistér j-edik cellájába esők számát, a_j az energia értékét ebben a cellában, és b az ϵ hibakorláttal mért átlagos energiát. Az N kísérlet kimeneteleinek lehetséges $(i_1, \ldots, i_N)$ konfigurációi közül (ahol

i_k a k-adik kísérlet kimenetelét jelenti)

$$\frac{N!}{\prod(Np_j)!} = e^{NH(P)+O(\log N)} \tag{1.6}$$

számúra adnak a $p_j = \frac{N_j}{N}$ relatív gyakoriságok egy meghatározott P empirikus eloszlást. Mivel a lehetséges kimenetel-konfigurációk száma n^N, míg a lehetséges P empirikus eloszlások száma N-nel csak polinomiálisan nő, (1.6)-ból következik, hogy a $P \in \mathcal{P}$ ismerettel kompatibilis $(i_1, \ldots, i_N)$ konfigurációk közt túlnyomó többséget alkotnak azok, melyekre az empirikus eloszlás entrópiája közel van a $\max_{P\in\mathcal{P}} H(P)$ maximumhoz. Az (1.5) szerinti konvex, zárt $\mathcal{P}$ halmazon $H(P)$ maximuma egyetlen P^* eloszlásra éretik el, és $H(P)$-nek $H(P^*)$-hoz való közelségéből következik P-nek P^*-hoz való közelsége. Ezért a rendelkezésre álló ismerettel kompatibilis konfigurációk túlnyomó többségére a P empirikus eloszlás nem különbözhet számottevően az entrópiamaximalizálással kapott P^* eloszlástól. Ekvivalens megfogalmazással, elenyészően kicsi annak valószínűsége, hogy a tényleges P számottevően különbözik a maximális entrópiájú P^*-tól, feltéve, hogy a lehetséges konfigurációk a priori valószínűségei egyenlők, vagy legalábbis nem különböznek egymástól N-ben exponenciális faktorral. A divergenciaminimalizálás elve hasonló meggondolással támasztható alá, azzal a különbséggel, hogy ott az $(i_1, \ldots, i_N)$ konfigurációk a priori valószínűségeit nem egyenlőknek vesszük, hanem a Q eloszlásból vett független mintavétel szerintinek.

A fenti elemi meggondolás és ennek matematikailag mélyebb változatai (pl. Csiszár [8], [9]) az entrópiamaximalizálás, illetve divergenciaminimalizálás elvének erős alátámasztását adják arra az esetre, amikor az ismeretlen eloszlás egy hosszú kísérletsorozatbeli empirikus eloszlásként, vagy bizonyos típusú feltételes eloszlásként interpretálható. Sajnos, a szokásos alkalmazások jelentős részében ez nem (vagy csak mesterkélten) lehetséges, sőt gyakran nem is valószínűségeloszlás meghatározása a feladat. Az utóbbi illusztrálására tekintsünk egy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, k, \quad k < n \tag{1.7}$$

egyenletrendszert, ahol a v_j ismeretlenek nemnegatívok, de (1.2)-től eltérőleg nincs kikötve, hogy az összegük 1. Az (1.7) egyenletrendszernek a divergenciaminimalizálás elve szerinti megoldásán azt értjük, hogy ha adott egy $\mathbf{u}$ vektor, mint a megoldásra vonatkozó a priori elképzelés, az (1.7)-nek eleget tevő $\mathbf{v}$ vektorok közül azt választjuk, melyre az I-divergencia

$$I(\mathbf{v}\|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} \left(v_j \log \frac{v_j}{u_j} - v_j + u_j\right) \tag{1.8}$$

által definiált általánosított változata minimális. A valószínűségeloszlások I-divergenciájától eltérőleg a tetszőleges nemnegatív komponensű vektorok I-divergenciájának nincs információelméleti jelentése, de az az értelmezés fenntartható, hogy $I(\mathbf{v}||\mathbf{u})$ a $\mathbf{v}$ vektornak az $\mathbf{u}$-tól való különbözőségének mértékszáma. Valóban, $I(\mathbf{v}||\mathbf{u})$ nemnegatív és csak $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ esetén nulla, mivel az (1.8) összeg minden tagja nemnegatív és $v_j \neq u_j$ esetén határozottan pozitív.

A következőkben feltételezzük, hogy az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorról valószínűségi ismeretek nem állnak rendelkezésre, így az (1.7) egyenlet megoldására statisztikai jellegű módszerek nem alkalmazhatók.

Az ebben a cikkben ismertetett axiomatikus megközelítés (Csiszár [11]) fő motivációja az a kérdés volt, hogy ilyen általánosságban mennyire indokolt a divergenciaminimalizálás elvének alkalmazása. Ezt a kérdést sikerült (a szerző számára) megnyugtatóan tisztázni, amennyiben a divergenciaminimalizálás több szempontból is kitüntetett módszernek bizonyult arra, hogy az (1.7) típusú egyenletrendszerek pozitív megoldásai közül kiválasszunk egyet. Korábban ilyen irányú eredményt ért el Shore és Johnson [27] és Skilling [28], de ők eleve feltételezték, hogy – a 2. pontban bevezetett terminológiával – a kiválasztási szabályt valamilyen függvény generálja. Az entrópiamaximalizálás módszerének ezen feltevés nélküli axiomatikus levezetését adták, a szerzővel egyidőben, Paris és Vencovská [25]. Az alábbi axiomatikus tárgyalás további lényeges eredménye, hogy elvezet alternatívaként számbajövő más módszerekhez is. Parallel módon vizsgálva azt az esetet, amikor a megoldásra nincs pozitivitási feltétel, az a frappáns, bár talán nem meglepő eredmény adódik, hogy ekkor a „legkisebb négyzetek" módszer a kitüntetett.

Érdemes rámutatni, hogy eredményeink az I-divergencia, az euklideszi távolság és más (tágabb értelemben vett) távolságfüggvények axiomatikus karakterizációit is jelentik. Ezek abban különböznek az ismert axiomatikus karakterizációktól (melyeknek kiterjedt irodalma van, l. Aczél és Daróczy [1]), hogy axiómáink nem magára a távolságfüggvényre vonatkoznak, hanem az általa generált vetítési szabályra írnak elő bizonyos természetes követelményeket.

Röviden foglalkozni fogunk bizonyos numerikus módszerekkel is, konkrétan a RAS módszer néven is ismert itaratív arányos illesztési eljárással és az általánosított iteratív skálázás vagy SMART néven ismert módszerrel. Az entrópiamaximalizálás, illetve divergenciaminimalizálás numerikus módszereinek elég nagy irodalma van, melynek áttekintése meghaladná e cikk kereteit. Az említetteket elsősorban illusztrációként tárgyaljuk, mint matematikailag egyszerű és szemléletesen könnyen interpretálható iteratív algoritmusokat. Megmutatjuk, hogy konvergenciájuk következik egy geometriai jellegű általános tételből, amely bizonyos általános értelemben vett vetítések iterációjának konvergenciájára vonatkozik.

Ez a cikk a szerzőnek a XXI. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott előadásának kibővített változata. Az ismertetett eredmények főleg a szerző [11] dolgozatából valók. A munka az OTKA támogatásával készült, szerződésszám 1906.

2. Lineáris inverz problémák; kiválasztási és vetítési szabályok

Lineáris inverz problémáról beszélünk, ha egy ismeretlen f függvényt bizonyos Rf lineáris funkcionálok értékei alapján kell meghatározni. Ezek általában nem határozzák meg egyértelműen f-et, ezért szükség van valamilyen szabályra, amely a lehetséges f-ek közül kiválasztja a megoldásként elfogadandót. Annak a kérdésnek a matematikai vizsgálata, hogy mi a legjobb kiválasztási szabály, már az indulásnál akadályba ütközik: nem látszik lehetségesnek általános objektív mértékszámát adni egy kiválasztási szabály jóságának. Vannak azonban bizonyos természetes követelmények, melyek egy „jó" kiválasztási szabálytól megkívánhatók, mintegy annak logikailag konzisztens voltát jelentik. A következő két pontban megfogalmazunk néhány ilyen követelményt, és – axiomatikus módszert alkalmazva – megvizsgáljuk, hogy milyen kiválasztási szabályok tesznek ezeknek eleget. Több gyakorlatilag fontos esetben a számításba jövő függvények halmazát nem lineáris egyenlőségek, hanem más típusú feltételek, például lineáris egyenlőtlenségek határozzák meg, l. a bevezetésben az (1.5) eloszláshalmazt. A lineáris inverz problémákra adódó „jó" kiválasztási szabályok kiterjesztése erre az általánosabb esetre nem okoz nehézséget, feltéve, hogy a számításba jövő halmaz konvex, vö. [12].

Következő vizsgálatainkban a lineáris inverz problémák diszkrét változatára szorítkozunk, amikoris valamely $\mathbf{A}$ $k \times n$-es mátrix és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ vektor esetén az $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek (l. (1.7)) eleget tevő $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorok közül kell kiválasztani egyet. Ez nem jelenti az általánosság lényeges csorbítását, mert a „folytonos" probléma helyett mindig vehetjük annak diszkrét közelítését.

Tipikus példaként röviden vázoljuk a röntgen-tomográfia rekonstrukciós problémáját, vö. [17], [4]. A feladat az f röntgen-abszorpciós függvény meghatározása egy síkbeli tartománynak tekinthető vékony rétegben, ha ismertek ennek $R_i f$ vonalintegráljai bizonyos $e_1, \ldots, e_k$ egyenesek mentén. Az e_i egyenesek a vizsgálatban használt röntgensugár-utak, és az $R_i f$ értékek abból határozhatók meg, hogy az i-edik sugár intenzitásának csökkenési faktora $e^{-R_i f}$. Mármost bontsuk fel a vizsgált síkbeli tartományt n cellára, melyekben az abszorpciós függvény már konstansnak tekinthető. Ekkor közelítőleg

$$f=\sum_{j=1}^{n} v_j f_j\,, \qquad R_i f=\sum_{j=1}^{n} v_j R_i f_j\,, \tag{2.1}$$

ahol f_j a j-edik cella indikátorfüggvénye és v_j az f (konstansnak tekintett) értéke ebben a cellában. Így, bevezetve az $a_{ij}=R_i f_j$, $b_i=R_i f$ jelölést, a feladat arra redukálódik, hogy meghatározzuk a v_j komponensek alkotta $\mathbf{v}$ vektort, ha a rendelkezésre álló ismeret az (1.7) egyenletek teljesülése.

A következőkben együtt tárgyaljuk azt a két esetet, amikor az (1.7) alakú egyenletrendszerek megoldásaként csak a pozitív komponensű vektorok (mint a fenti példában), illetve tetszőleges $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ vektorok megengedettek. Ezekre *pozitív* és *valós* esetként fogunk utalni. Definícióink és állításaink, ha mást nem mondunk, mindkét esetre vonatkoznak.

Jelölési konvenció: Jelölje S a pozitív esetben a pozitív komponensű $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ vektorok halmazát, valós esetben pedig a teljes $\mathbb{R}^n$ teret. Itt $n\geq 3$ rögzített. $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ mindig S-beli vektort fog jelölni, ha külön nem mondjuk is.

2.1 Definíció *Affin altéren S-nek egy lineáris feltételekkel meghatározott nem üres részhalmazát értjük. Az affin alterek halmazát $\mathcal{L}$-lel jelöljük, tehát $L\in\mathcal{L}$ akkor és csak akkor, ha valamely $k\leq n$-re megadható olyan $k\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix és $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ vektor, hogy*

$$L=\{\,\mathbf{v}:\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{b}\,\}\neq\emptyset\,. \tag{2.2}$$

Az $n-1$ dimenziós (tehát egyetlen lineáris feltétellel meghatározott) affin altereket hipersíknak nevezzük.

Megjegyzés: A valós esetben a 2.1 definíció azonos az affin altér, illetve hipersík szokásos definíciójával. A pozitív esetben viszont egy közönséges értelemben vett affin altér, illetve hipersík S-sel való metszetéről van szó. A következőkben L (vagy L', L'') mindig affin alteret fog jelölni, ha külön nem mondjuk is.

2.2 Definíció *Kiválasztási szabályon olyan $\pi:\mathcal{L}\to S$ leképezést értünk, melyre minden $L\in\mathcal{L}$ esetén $\pi(L)\in L$.*

A 2.1. definíció értelmében a teljes S halmaz is $\mathcal{L}$-be tartozik. $\pi(S)$ azt a $\mathbf{v}$ vektort jelenti, melyet akkor választanánk, ha semmi információ nem állna rendelkezésre, tehát az ismeretlen vektorra vonatkozó a priori elképzelést. A bevezetésben mondottak értelmében az, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{b}$ egyenletnek eleget tevő $\mathbf{v}$ vektorok közül melyiket választjuk, függhet a megoldásra vonatkozó a priori elképzeléstől. Ezt úgy formalizáljuk, hogy minden $\mathbf{u}\in S$ vektorhoz, mint lehetséges a priori elképzeléshez, hozzárendelünk egy $\pi(\cdot|\mathbf{u})$ kiválasztási szabályt, melyre $\pi(S|\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Ekkor a $\pi(L|\mathbf{u})$ vektort $\mathbf{u}$-nak az L affin altérre vett absztrakt vetületének tekinthetjük. Ez motiválja a következő definíciót:

2.3 Definíció *Vetítési szabályon kiválasztási szabályoknak olyan*

$$\{\,\pi(\cdot|\mathbf{u}), \mathbf{u} \in S\,\}$$

családját értjük, melyre minden $\mathbf{u}$ *esetén* $\pi(S|\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

Kiválasztási szabály megadása történhet az S halmazon értelmezett valamely F függvény segítségével: legyen $\pi(L)$ az a $\mathbf{v} \in L$ vektor, melyre $F(\mathbf{v})$ minimális az L halmazon. Egy adott F függvény akkor és csak akkor generál ily módon kiválasztási szabályt, ha F-nek L-en vett minimuma minden $L \in \mathcal{L}$ esetén éreretik, mégpedig egyetlen $\mathbf{v} \in L$-re. Speciálisan, szükséges feltétel, hogy F az S halmazon felvegye a minimumát, mégpedig egyetlen $\mathbf{v}^0$ pontban. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy itt $F(\mathbf{v}^0) = 0$.

Hasonlóan, vetítési szabály megadása történhet egy $S \times S$-en értelmezett $F(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ függvény segítségével, amely minden $\mathbf{u}$-ra $\mathbf{v}$ függvényeként eleget tesz az előző bekezdésben említett feltételeknek, és minimumát $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ esetén éri el. Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez a minimum 0, így

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) > F(\mathbf{u}|\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{ha} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{u}\,. \tag{2.3}$$

Egy (2.3)-nak eleget tevő F függvényt (tágabb értelemben vett) távolságfüggvénynek nevezünk.

Megjegyzés: Természetesen nem minden kiválasztási, illetve vetítési szabály generálható függvénnyel. A következő pontban azonban látni fogjuk, hogy bizonyos egyszerű természetes követelmények már elégséges feltételei a függvénnyel való generálhatóságnak.

A kiválasztási szabályok legfontosabb példái a valós esetben az

$$F(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \tag{2.4}$$

által generált „*legkisebb négyzetek*" kiválasztási szabály, a pozitív esetben pedig az

$$F(\mathbf{v}) = I(\mathbf{v}\|\mathbf{1}) = \sum_{j=1}^{n}(v_j \log v_j - v_j + 1) \tag{2.5}$$

által generált „maximális entrópia" kiválasztási szabály (a (2.5) függvény minimalizálása olyan L affin altéren, melyen $\sum v_j$ konstans, ekvivalens a $-\sum_{j=1}^{n} v_j \log v_j$ maximalizálásával, tehát valószínűségeloszlások alkotta affin altéren a $H(\mathbf{v})$ entrópia maximalizálásával). Vegyük észre, hogy a legkisebb négyzetek kiválasztási szabály a pozitív esetben nincs értelmezve, mert van olyan (pozitív komponensű vektorok alkotta) $L \in \mathcal{L}$, melyen a (2.4) függvény nem veszi fel a minimumát; másrészt a maximális entrópia kiválasztási szabály a valós esetben nincs értelmezve.

Hasonlóképp a vetítési szabályok legfontosabb példái a valós esetben az $F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2$ által generált *euklideszi vetítés*, a pozitív esetben pedig az $F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = I(\mathbf{v}\|\mathbf{u})$ által generált *I-divergencia vetítés*. Nyilvánvaló, hogy az előbbinél $\pi(L|\mathbf{u})$ az $\mathbf{u}$ vektornak az L affin altérre vett közönséges euklideszi vetülete; az utóbbinál a $\pi(L|\mathbf{u})$ vektort $\mathbf{u}$-nak L-re vett *I-vetületének* nevezzük.

3. A „legkisebb négyzetek” és „maximális entrópia” módszerek axiomatikus jellemzése

E pont két fő eredménye, hogy bizonyos alapvető axiómáknak csak összeg típusú függvények által generált kiválasztási és vetítési szabályok tesznek eleget, továbbá hogy hozzávéve egy természetes „kompozíciós konzisztencia” axiómát, a (2.4) vagy (2.5) által generált kiválasztási szabály, illetve az euklideszi vagy I-divergencia vetítés bizonyul az axiómáinknak eleget tevő egyedül lehetséges kiválasztási, illetve vetítési szabálynak, aszerint, hogy a valós vagy pozitív esetről van-e szó.

Alapvető axiómáink a 3.1 és 3.2 definíciók szerinti regularitás és lokalitás lesznek. Ezek megfogalmazása előtt rámutatunk az axiomatikus vizsgálat kiindulási pontját képező két implicit feltevésre. Egyrészt, hogy $\mathbf{v} \in L$ képviseli a $\mathbf{v}$ ismeretlen vektorra vonatkozó összes ismeretünket (speciálisan, az $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer L megoldáshalmazából kiválasztásra kerülő $\mathbf{v}$ vektor csak L-től függhet, és nem az egyenletrendszer konkrét alakjától), másrészt, hogy *minden* L affin altérből ki kell tudni választani egy $\mathbf{v}$ vektort, tehát hogy a kiválasztási szabály értelmezési tartománya a teljes $\mathcal{L}$. A lineáris inverz problémák konkrét típusai szempontjából ez utóbbi feltevés túlzott idealizáció lehet, és kívánatos olyan kiválasztási szabályok vizsgálata is, melyek értelmezési tartománya $\mathcal{L}$-nek egy meghatározott részhalmaza. Például, ha valószínűségeloszlás választásáról van szó (l. a bevezetést), akkor csak olyan L affin alterekből való választásra van szükség, melyek vektorai eleget tesznek a $\sum v_j = 1$ feltételnek. Az utóbbi típusú affin alterek halmazán értelmezett kiválasztási és vetítési szabályok axiomatikus vizsgálata szintén megtörtént, és az alább ismertetendőkhöz hasonló eredményekre vezetett, bár a technikai problémák nehezebbek voltak, l. Csiszár [11].

3.1. Definíció *(a) A $\pi : \mathcal{L} \to S$ kiválasztási szabály* reguláris, *ha* *(i)* $L' \subset L$ *affin alterekre* $\pi(L) \in L'$ *esetén* $\pi(L') = \pi(L)$

(ii) $L \neq L'$ *hipersíkokra* $\pi(L) \neq \pi(L')$, *kivéve, ha* L *és* L' *tartalmazza* $\pi(S)$*-t*

(iii) $\mathcal{L}$ *-nek bármely rögzített dimenziójú affin alterek alkotta részhalmazán* $\pi(L)$ *folytonosan függ* L*-től.*

(b) A $\{\pi(\cdot|\mathbf{u}),\, \mathbf{u} \in S\}$ *vetítési szabály* reguláris, *ha mindegyik* $\pi(\cdot|\mathbf{u})$ *kiválasztási szabály reguláris.*

Diszkusszió: Ha az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorra vonatkozó ismereteinket reprezentáló lineáris egyenletek L megoldáshalmazából a $\pi(L) = \mathbf{v}^*$ vektort választottuk ki, és újabb információk az L halmazt L'-re szűkítik, akkor $\mathbf{v}^* \in L$ esetén az új információ nem ad okot választásunk megváltoztatására. Az (i) követelmény ezt a természetes konzisztenciafeltételt formalizálja. Speciálisan, (i)-ből következik, hogy $\pi(S) \in L$ esetén mindig $\pi(L) = \pi(S)$. Így vetítési szabályokra (i)-ből következik az a szemléletesen elvárt tulajdonság, hogy $\mathbf{u} \in L$ esetén mindig $\pi(L|\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

A (ii) követelmény technikai jellegű, szemléletesen kevésbé kényszerítő, mint (i) vagy (iii). További vizsgálat tárgya lehet, hogy valóban szükség van-e rá, illetve hogy helyettesíthető-e szemléletesen kényszerítőbb követelménnyel. A (iii) követelmény evidens szemléletes tartalmú technikai feltétel. Vetítési szabályok esetén természetesnek tűnne $\pi(L|\mathbf{u})$-nak $\mathbf{u}$-tól való folytonos függését is megkövetelni, de erre nem lesz szükség.

Megjegyzés: Bizonyos esetekben indokolt az (i) feltételt nem teljesítő kiválasztási szabályt használni, például ha az a cél, hogy a kiválasztott vektor valamilyen értelemben maximálisan reprezentatív eleme legyen az ismereteink által megengedett vektorok halmazának. Az ilyen esetek jelen vizsgálataink körén kívül esnek.

A következő definíció megfogalmazásához tetszőleges $\mathbf{v} \in S$ vektor és tetszőleges $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ egészek alkotta $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ halmaz esetén jelölje $\mathbf{v}_J$ a $\mathbf{v}$ J-beli komponensei alkotta r-dimenziós vektort. Ha $\pi : \mathcal{L} \to S$ kiválasztási szabály, $\pi_J(L)$ a $\big(\pi(L)\big)_J$ vektort fogja jelölni.

3.2 Definíció *(a) A* $\pi : \mathcal{L} \to S$ *kiválasztási szabály* lokális, *ha minden olyan* $L = L' \cap L''$ *alakú affin altérre, melyre* L' *ill.* L'' *valamely* $J \subset \{1, \ldots, n\}$ *esetén a* $\mathbf{v}_J$*-re, illetve* $\mathbf{v}_{J^c}$*-re vonatkozó lineáris egyenletekkel definiálható, tehát*

$$L' = \{\mathbf{v} : \mathbf{A}'\mathbf{v}_J = \mathbf{b}'\}, \qquad L'' = \{\mathbf{v} : \mathbf{A}''\mathbf{v}_{J^c} = \mathbf{b}''\}, \tag{3.1}$$

teljesül

$$\pi_J(L) = \pi_J(L'), \qquad \pi_{J^c}(L) = \pi_{J^c}(L''). \tag{3.2}$$

(b) A $\{\pi(\cdot|\mathbf{u}), \mathbf{u} \in L\}$ *vetítési szabály* lokális, *ha* $\pi(\cdot|\mathbf{u})$ *minden* $\mathbf{u}$ *esetén lokális kiválasztási szabály, és ezenkívül a (3.1) feltétel mellett* $\pi_J(L'|\mathbf{u})$ *ill.* $\pi_J(L''|\mathbf{u})$ *csak* $\mathbf{u}_J$*-n, illetve* $\mathbf{u}_{J^c}$*-n keresztül függ* $\mathbf{u}$*-tól.*

Diszkusszió: A lokalitás azt jelenti, hogy ha az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorra vonatkozó ismeretek két komplementer részből tevődnek össze, nevezetesen $\mathbf{v}$-nek a J-beli, ill. a J^c-beli komponenseire vonatkozó ismeretekből, akkor a kiválasztásra kerülő $\mathbf{v}^* = \pi(L)$ vektor J-beli, illetve J^c-beli komponenseit a komplementer halmazba tartozó komponensekre vonatkozó ismeretek nem befolyásolhatják. Ez a követelmény szemléletesen evidensnek tűnik. Például a 2. pontban vázolt tomográfiai problémában, ha az e_i utak halmaza két olyan részre osztható, hogy a vizsgált tartomány minden celláján csak az egyik halmazba tartozó utak haladnak át, akkor a tartományt két függetlenül vizsgált diszjunkt részből állónak tekinthetjük, így természetes, hogy az f abszorbciós függvény értékének meghatározásához mindkét tartománybeli celláknál csak az e_i utak megfelelő halmazához tartozó $R_i f$ értékeket használjuk. A tomográfiában az ilyen két részre bonthatóság csak elméleti lehetőség, a gyakorlatban nem fordul elő. Mégis, ha előfordulna, az f abszorbciós függvénynek két tartományban függetlenül történő meghatározásával szemben felhozható volna az a kifogás, hogy így ellentmondásba kerülhetnénk az f-re vonatkozó esetleges simasági feltételekkel. A lokalitás követelményének ilyenfajta kritikája azonban – absztraktul megfogalmazva – azt feltételezi, hogy az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorról mást is tudunk, mint hogy $\mathbf{v} \in L$, ez pedig ellentmond kiindulási feltevésünknek.

A kiválasztási, illetve vetítési szabályokra egy további természetes követelményt fogalmazhatunk meg, ha olyan lineáris inverz problémáról van szó, amely két (vagy több) tényező együttes hatásával kapcsolatos. Formálisan, tételezzük fel, hogy $n = lm$, és a $\mathbf{v} \in S$ vektorokat azonosítsuk $\{v_{ij}\}$ $l \times m$-es mátrixokkal, pl. sorfolytonos reprezentációban.

Jelölje $\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^l$ és $\overline{\overline{\mathbf{v}}} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{v}$ mátrix marginálisait, melyek komponensei

$$\overline{v}_i = \sum_{j=1}^{m} v_{ij}, \quad i = 1, \ldots, l; \qquad \overline{\overline{v}}_j = \sum_{i=1}^{l} v_{ij}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.3}$$

Pl. a 2. pontban vázolt tomográfiai problémában a vizsgált tartományt sorok és oszlopok szerint természetes cellákra osztani. Ekkor v_{ij} az abszorbciós függvény értékét jelöli az i-edik sor j-edik cellájában, $\overline{v}_i$ és $\overline{\overline{v}}_j$ pedig a kumulatív érték az i-edik sorban illetve a j-edik oszlopban, tehát a „sor-hatás”, ill. „oszlop-hatás”.

Tetszőleges $\mathbf{v} \in S$ esetén jelölje $L_{\mathbf{v}}$ mindazon $\mathbf{w} \in S$ vektorok halmazát, melyekre, a vektorokat a fenti módon $l \times m$-es mátrixokkal azonosítva, $\mathbf{w}$

marginálisai megegyeznek $\mathbf{v}$ marginálisaival, azaz

$$L_{\mathbf{v}} = \{ \mathbf{w} : \overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{v}}, \overline{\overline{\mathbf{w}}} = \overline{\overline{\mathbf{v}}} \} . \tag{3.4}$$

Nyilvánvalóan $L_{\mathbf{v}} \in \mathcal{L}$.

3.3 Definíció *(a) Egy $\pi : \mathcal{L} \to S$ kiválasztási szabály $l \times m$ kompozíció-konzisztens, ha $lm = n$ és a $\mathbf{v} \in S$ vektorokat sorfolytonosan reprezentált mátrixoknak tekintve teljesül $\pi(L_{\mathbf{v}}) = \mathbf{v}$, valahányszor $\mathbf{v}$ megadható*

$$v_{ij} = s_i + t_j \tag{3.5}$$

alakban (a valós esetben), illetve

$$v_{ij} = s_i t_j \tag{3.6}$$

alakban (a pozitív esetben).

(b) Egy vetítési szabály $l \times m$ kompozíció-konzisztens, ha $\pi(\cdot|\mathbf{u})$ kompozíció-konzisztens kiválasztási szabály minden (3.5), illetve (3.6) alakban megadható $\mathbf{u} \in S$ esetén, a valós, illetve pozitív esetnek megfelelően.

(c) Egy kiválasztási, illetve vetítési szabály kompozíció-konzisztens, ha valamely $l > 1$, $m > 1$ esetén $l \times m$ kompozíció-konzisztens.

Diszkusszió: A $\mathbf{v}$ mátrix (3.5) vagy (3.6) alakú voltát (a valós, illetve pozitív esetben) úgy interpretáljuk, hogy a sor- és oszlop-hatások között nincs interakció. Ezzel az interpretációval mindenesetre összhangban van az, hogy a (3.5) ill. (3.6) alakú mátrixokat marginálisaik egyértelműen meghatározzák. Valóban, (3.5) ill. (3.6)-ból egyszerűen következik, hogy

$$v_{ij} = \frac{1}{m}\overline{v}_i + \frac{1}{l}\overline{\overline{v}}_j - \frac{1}{n}s(\mathbf{v}) \qquad \text{ill.} \qquad v_{ij} = \frac{1}{s(\mathbf{v})}\overline{v}_i\overline{\overline{v}}_j ,$$

ahol $s(\mathbf{v}) = \sum_{ij} v_{ij} = \sum_i \overline{v}_i = \sum_j \overline{\overline{v}}_j$. Az említett interpretáció különösen evidens akkor, amikor a $\mathbf{v}$ mátrix (kétdimenziós) valószínűségeloszlást reprezentál. Ekkor (3.6) azt fejezi ki, hogy két független valószínűségi változó együttes eloszlásáról van szó. Mármost $\pi(L_{\mathbf{v}}) = \mathbf{v}$ azt jelenti, hogy ha az ismeretlen mátrixról csak azt tudjuk, hogy marginálisai megegyeznek $\mathbf{v}$ marginálisaival, akkor kiválasztási szabályunk éppen a $\mathbf{v}$ mátrixot eredményezi. Mivel a marginálisok ismerete semmit sem mond a sor- és oszlop-hatások közötti interakcióról, természetes követelmény, hogy olyan mátrixot kell választani, melynél ilyen interakció nincs. A 3.3. definíció ezt a követelményt formalizálja, a (b) esetben tekintetbe véve azt is, hogy az a priori elképzelés se utaljon interakcióra. Természetesen kompozíció-konzisztens kiválasztási, illetve vetítési szabályról csak akkor beszélhetünk, ha n nem prímszám.

3.1 Tétel *(a) Minden reguláris, lokális kiválasztási szabály generálható*

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(v_j) \tag{3.7}$$

alakú függvénnyel, ahol – a valós ill. pozitív esetnek megfelelően – az f_j függvények a valós ill. pozitív számokon értelmezett nemnegatív, folytonosan differenciálható, konvex függvények, mindegyik f_j egyetlen v_j^0 pontban egyenlő nullával, és legfeljebb egyikük lehet nem szigorúan konvex; a pozitív esetben ezenkívül

$$\lim_{v \to 0} f_j'(v) = -\infty, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

A fenti tulajdonságú $F(\mathbf{v})$ függvényt a vetítési szabály (pozitív) konstans faktortól eltekintve egyértelműen meghatározza, és minden ilyen F generál egy reguláris, lokális kiválasztási szabályt.

(b) Minden reguláris lokális vetítési szabály generálható egy

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(v_j|u_j) \tag{3.8}$$

alakú (tágabb értelemben vett) távolságfüggvénnyel, ahol az $f_j(\cdot|u_j)$ függvények minden rögzített $\mathbf{u}$-ra rendelkeznek az (a) pontbeli tulajdonságokkal, $v_j^0 = u_j$-vel. A fenti tulajdonságú távolságfüggvényt a vetítési szabály (pozitív) konstans faktortól eltekintve egyértelműen meghatározza. Továbbá minden ilyen távolságfüggvény generál egy reguláris, lokális vetítési szabályt.

3.2 Tétel *Tegyük fel, hogy n nem prímszám.*

(a) A valós esetben a (2.4) függvény által generált „legkisebb négyzetek" kiválasztási szabály az egyetlen reguláris, lokális és kompozíció-konzisztens kiválasztási szabály, melyre $\pi(S) = \mathbf{0}$, a pozitív esetben pedig a (2.5) függvény által generált „maximális entrópia" kiválasztási szabály az egyetlen reguláris, lokális és kompozíció-konzisztens kiválasztási szabály, melyre $\pi(S) = \mathbf{1}$.

(b) Az egyetlen reguláris, lokális és kompozíció-konzisztens vetítési szabály a valós esetben az euklideszi vetítés, a pozitív esetben pedig az I-divergencia vetítés.

A 3.1 és 3.2 tételek bizonyítását l. [11]-ben. A 3.2 tétel egyszerű módon következik a 3.1 tételből, ennek illusztrálására vázoljuk az első állítás bizonyítását. Legyen a valós esetben π reguláris, lokális és $l \times m$ kompozíció-konzisztens kiválasztási szabály, melyre $\pi(S) = \mathbf{0}$. A 3.1 tétel szerint a π kiválasztási szabályt egy (3.7) alakú függvény generálja, melyet most, a

$\mathbf{v} \in S$ vektoroknak $l \times m$-es mátrixokkal való azonosításának megfelelően,

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(v_{ij}) \tag{3.9}$$

alakban írunk. Ha $\pi(L_\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, azaz a (3.9) függvény a (3.6) halmazon a $\mathbf{v}$ pontban éri el minimumát, (3.3) felhasználásával következik, hogy

$$f'_{ij}(v_{ij}) = \lambda_i + \mu_j \ , \qquad i = 1, \ldots, l;\ k = 1, \ldots, m \ , \tag{3.10}$$

ahol λ_i és μ_j Lagrange multiplikátorok. Így minden i, j, k, l-re

$$f'_{ij}(v_{ij}) + f'_{kl}(v_{kl}) = f'_{il}(v_{il}) + f'_{kj}(v_{kj}) \ . \tag{3.11}$$

Mivel feltevés szerint $\pi(L_\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ mindig teljesül, ha $\mathbf{v}$ (3.5) alakú, (3.11)-ből a következő függvényegyenlet-rendszert kapjuk:

$$f'_{ij}(s_i + t_j) + f'_{kl}(s_k + t_l) = f'_{il}(s_i + t_l) + f'_{kj}(s_k + t_j) \ . \tag{3.12}$$

A $\pi(S) = 0$ feltevés értelmében az f_{ij} függvények (nullával egyenlő) minimumukat a 0 pontban érik el, így ott deriváltjuk 0. Ezért (3.12)-ből az $s_i = s$, $t_j = t$, $s_k = t_l = 0$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$f'_{ij}(s + t) = f'_{il}(s) + f'_{kj}(t) \ . \tag{3.13}$$

Ebből a $t = 0$ ill. $s = 0$ helyettesítéssel látható, hogy az f'_{il} és az f'_{kj} függvény is azonosan egyenlő az f'_{ij} függvénnyel. Következésképp az f'_{ij} függvények egyazon g folytonos függvénnyel egyenlők, amely (3.13) értelmében eleget tesz a

$$g(s + t) = g(s) + g(t)$$

Cauchy-féle függvényegyenletnek. Az utóbbiból $g(t) = ct$, tehát $f_{ij}(t) = ct^2$ minden i, j-re. Ezzel igazoltuk, hogy π a „legkisebb négyzetek" kiválasztási szabály.

4. Más szóbajövő vetítési szabályok

Ebben a pontban azt vizsgáljuk, hogy ha a kompozíció-konzisztencia követelményét mellőzzük, de helyette – a regularitás és lokalitás megtartásával – bizonyos más természetes követelményeket teszünk, akkor melyek lesznek az ezeknek eleget tevő vetítési szabályok. Az előző ponttól eltérőleg most individuális kiválasztási szabályokkal nem foglalkozunk, csak vetítési szabályokkal.

Legyen

$$L_{ij}(t) = \{\, \mathbf{v} : v_i + v_j = t \,\} \,. \tag{4.1}$$

4.1 Definíció *(a) Egy vetítési szabály* kváziszimmetrikus, *ha minden (4.1) alakú affin altér és olyan* $\mathbf{u} \in S$ *esetén, melyre* $u_i = u_j$,

$$\mathbf{v}^* = \pi(L_{ij}(t)|\mathbf{u})\text{–ra} \qquad v_i^* = v_j^* \,.$$

(b) A pozitív esetben, egy vetítési szabály statisztikai, *ha minden (4.1) alakú affin altér és* $\mathbf{u} \in S$ *esetén*

$$\mathbf{v}^* = \pi(L_{ij}(t)|\mathbf{u})\text{–ra} \qquad \frac{v_i^*}{u_i} = \frac{v_j^*}{u_j} \,.$$

Diszkusszió: Ha az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorról csak annyit tudunk, hogy $v_i + v_j = t$, és az $\mathbf{u}$ a priori elképzelés i-edik és j-edik komponense ugyanaz, akkor természetes szimmetria-kívánalom olyan vektort választani, melynek i-edik és j-edik komponensei szintén azonosak. A pozitív esetben az is indokoltnak tűnik, hogy a $v_i + v_j = t$ ismeret alapján mindig olyan vektort válasszunk, melynek i-edik és j-edik komponensei az a priori elképzelés szerintiekkel arányosak.

Általánosabban, ha az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz valamely $(J_1, \ldots, J_k)$ partíciójára a $\sum_{j \in J_i} v_j$, $i = 1, \ldots, k$ összegek ismeretesek (és más nem), akkor természetes azt a $\mathbf{v}^*$ vektort választani, amely az a priori elképzelésnek ezen feltételekhez való *arányos illesztésével* kapható, tehát amelyre a $\frac{v_j^*}{u_j}$ hányadosok a J_i halmazokon belül állandók. Valószínűségeloszlások vonatkozásában ez az ún. Jeffrey-szabály általánosan elfogadott, vö. Diaconis-Zabell [16]. Erre utalva neveztük a (b) követelményt kielégítő vetítési szabályokat statisztikainak.

4.2 Definíció *Egy vetítési szabály* tranzitív, *ha minden* $L' \subset L$ *és* $\mathbf{u} \in S$ *esetén*

$$\pi(L'|\mathbf{u}) = \pi\big(L'|\pi(L|\mathbf{u})\big) \,. \tag{4.2}$$

Diszkusszió: A tranzitivitás azt jelenti, hogy ha az $\mathbf{u}$ a priori elképzelés és a $\mathbf{v} \in L$ ismeret alapján a $\mathbf{v}^* = \pi(L|\mathbf{u})$ vektort választottuk, és újabb információk a lehetséges $\mathbf{v}$-k halmazát L'-re szűkítik, akkor a $\mathbf{v} \in L'$ ismeret alapján való választásnál ugyanarra az eredményre jutunk, akár az eredeti $\mathbf{u}$-t akár $\mathbf{v}^*$-t használjuk a priori elképzelésként. Másrészt arra is gondolhatunk, hogy az ismereteinket reprezentáló lineáris egyenletrendszer két részből tevődik össze, melyek bizonyos L_1 és L_2 affin altereket határoznak meg. Ekkor az $L = L_1 \cap L_2$ által reprezentált ismereteinknek megfelelő választás kétféleképp végezhető el két lépésben: először vagy L_1-ből, vagy L_2-ből választunk, majd a priori elképzelésként az eredeti $\mathbf{u}$ helyett az így kapott vektort használva választunk második lépésben L-ből. A tranzitivitási követelmény biztosítja, hogy mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, amely megegyezik $\pi(L|\mathbf{u})$-val.

4.3 Definíció *A* $\{\pi(\cdot|\mathbf{u}), \mathbf{u} \in S\}$ *vetítési szabály* skála-invariáns, *ha minden* $\lambda > 0$, $L \in \mathcal{L}$, $\mathbf{u} \in S$ *esetén*

$$\pi(\lambda L|\lambda\mathbf{u}) = \lambda\pi(L|\mathbf{u}) .$$

Továbbá, a valós esetben, a vetítési szabály eltolás-invariáns, *ha minden* $\mu \in I\!R$, $L \in \mathcal{L}$, $\mathbf{u} \in S$ *esetén*

$$\pi(L + \mu\mathbf{1}|\mathbf{u} + \mu\mathbf{1}) = \pi(L|\mathbf{u}) + \mu\mathbf{1} .$$

Itt λL ill. $L + \mu\mathbf{1}$ mindazon $\lambda\mathbf{v}$ ill. $\mathbf{v} + \mu\mathbf{1}$ vektorok halmazát jelöli, melyekre $\mathbf{v} \in L$. Tehát ha $L = \{\mathbf{v} : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}\}$, akkor

$$\lambda L = \{\tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{b}\} , \qquad \lambda L + \mu\mathbf{1} = \{\tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{b} + \mu\mathbf{A}\mathbf{1}\} . \tag{4.3}$$

Diszkusszió: Ezek az invarianciatulajdonságok evidens szemléletes jelentésű, nyilvánvalóan kívánatos követelmények.

A 3.1 tétel szerint minden reguláris, lokális vetítési szabályt egy (3.8) alakú és a tételben leírt további tulajdonságokkal rendelkező távolságfüggvény generál. A következőkben F mindig ilyen távolságfüggvényt jelöl, anélkül, hogy ezt külön mondanánk. Alább olyan F-ek jellemzését adjuk meg, melyek a most megfogalmazott követelmények közül bizonyosaknak eleget tevő vetítési szabályokat generálnak. Korolláriumként az euklideszi vetítés és az I-divergencia vetítés újabb axiomatikus karakterizációját is kapjuk. A következő tételek a 3. pont végén vázolt bizonyításhoz hasonlóan igazolhatók, sőt a 4.1. tétel bizonyításához függvényegyenlet megoldására sincs szükség. A részletes bizonyításokat l. [11]-ben.

4.1 Tétel *(a) F akkor és csak akkor generál kváziszimmetrikus vetítési szabályt, ha a (3.8)-beli $f_j(v|u)$ függvények nem függnek j-től.*

(b) A pozitív esetben, F akkor és csak akkor generál statisztikai vetítési szabályt, ha

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j f\left(\frac{v_j}{u_j}\right) , \tag{4.4}$$

ahol $f(t)$ folytonosan differenciálható szigorúan konvex függvény, melyre

$$f(1) = f'(1) = 0\,, \qquad \lim_{t\to 0} f'(t) = -\infty\,.$$

Diszkusszió: (a) azt mutatja, hogy (reguláris, lokális vetítési szabályok esetén) a kváziszimmetria már elégséges feltétele a szimmetriának, tehát annak, hogy a vetítési szabály invariáns legyen a vektorok komponenseinek permutációjára nézve. A statisztikai vetítési szabályokat generáló (4.4) alakú távolságfüggvények osztályát, más meggondolásból, a szerző vezette be [6] dolgozatában, *f-divergenciák* néven (valószínűségeloszlások közötti távolságfüggvényként). A statisztikában használatos távolságfüggvények jelentős része az f-divergenciák közé tartozik; részletes tárgyalásukat l. a [24] könyvben.

4.2 Tétel *F akkor és csak akkor generál tranzitív vetítési szabályt, ha*

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(v_j) - \varphi_j(u_j) - \varphi_j'(u_j)(v_j - u_j))\,, \tag{4.5}$$

ahol a φ_j függvények folytonosan differenciálhatóak és szigorúan konvexek, és a pozitív esetben $\lim_{v\to 0}\varphi_j'(v) = -\infty$.

Korollárium *A pozitív esetben az egyetlen reguláris, lokális, tranzitív és statisztikai vetítési szabály az I-divergencia vetítés.*

Diszkusszió: (4.5) értelmében

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u}) - \nabla\Phi(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,, \tag{4.6}$$

ahol $\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\mathbf{v})$. Tehát $F(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ azt adja meg, hogy a Φ függvény gráfjának $\mathbf{v}$-hez tartozó pontja mennyivel van az $\mathbf{u}$-hoz tartozó pontban érintő hipersík felett. Az ilyen távolságfüggvények a *Bregman-divergenciák* l. Bregman [3]. Lineáris inverz problémákra való alkalmazásaikról, a folytonos esetben, l. Jones és Byrne [20], Jones és Trutzer [21]. Az f-divergenciák és a Bregman-divergenciák családjának közös eleme csak az I-divergencia és konstansszorosai; ez a korollárium tartalma.

4.3 Tétel *(a) A valós esetben, F akkor és csak akkor generál eltolás- és skálainvariáns tranzitív vetítési szabályt, ha*

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} c_j (v_j - u_j)^2\,, \tag{4.7}$$

ahol a c_j-k pozitív konstansok.

(b) A pozitív esetben, F akkor és csak akkor generál skálainvariáns tranzitív vetítési szabályt, ha

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} c_j h_\alpha(v_j|u_j) , \tag{4.8}$$

ahol a c_j-k pozitív konstansok, $\alpha \leq 1$, és

$$h_\alpha(v|u) = \begin{cases} v\log\frac{v}{u} - v + u, & ha\ \alpha = 1; \\ \log\frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 1, & ha\ \alpha = 0; \\ \frac{1}{\alpha}(u^\alpha - v^\alpha) + u^{\alpha-1}(v-u), & ha\ \alpha < 1,\ \alpha \neq 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Korollárium *(a) A valós esetben, az egyetlen reguláris, lokális, eltolás- és skálainvariáns, tranzitív és kváziszimmetrikus vetítési szabály az euklideszi vetítés.*

(b) A pozitív esetben a reguláris, lokális, skálainvariáns, tranzitív és kváziszimmetrikus vetítési szabályok az

$$F_\alpha(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} h_\alpha(v_j|u_j), \quad \alpha \leq 1 \tag{4.10}$$

távolságfüggvények által generált vetítési szabályok, ahol a h_α függvények a (4.9) szerintiek.

Diszkusszió: A (4.10) távolságfüggvény $\alpha = 1$ esetén az I-divergencia, $\alpha = 0$ esetén az Itakura-Saito távolság, l. [18]. Az α paraméter más értékeire adódó távolságoknak az irodalomban való előfordulásáról a szerzőnek nincs tudomása, kivéve Jones és Trutzer [21] munkáját, akik szerint egy ilyen alakú távolság folytonos megfelelője spektrumanalízis feladatoknál jobb eredményekre vezetett, mint az Itakura-Saito távolságot használó szokásos módszer. Mindenesetre a 4.3 tétel korolláriuma arra utal, hogy – a pozitív esetben – az I-divergencia vetítés alternatíváiként leginkább az $\alpha \neq 1$ paraméterű (4.10) távolságfüggvények szerinti vetítések jöhetnek szóba. Ezek közül azonban az Itakura-Saito távolság ($\alpha = 0$ eset) axiomatikus szempontból nincs kitüntetve.

5. Az I-vetület numerikus meghatározása

A lineáris inverz problémák egyik legegyszerűbb típusa, amikor egy nemnegatív elemű mátrixot kell rekonstruálni a marginálisai alapján, l. (3.3), felhasználva a mátrixra vonatkozó valamilyen a priori elképzelést. Erre általánosan használt módszer az eredetileg különösebb elméleti megalapozás nélkül bevezetett *iteratív arányos illesztési eljárás,* amely RAS módszer néven is ismeretes. Az irodalomban a szerző tudomása szerint először Kruithof [22] dolgozatában fordult elő, telefonforgalom becslésére; a statisztikában kontingenciatáblázatok elemzésére először Deming és Stephan [15] alkalmazta.

A módszer, kissé általánosabb formában, akkor alkalmazható, ha a pozitív esetről van szó (tehát S a pozitív komponensű $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorok halmaza), és az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorról annyit tudunk, hogy az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz bizonyos $(J_1^1, \ldots, J_{k_1}^1), \ldots, (J_1^r, \ldots, J_{k_r}^r)$ partícióira ismertek a

$$\sum_{j \in J_k^i} v_j = b_k^i, \qquad 1 \le i \le r, \quad 1 \le k \le k_r \tag{5.1}$$

összegek. Az iteráció abban áll, hogy az adott $\mathbf{u} \in S$ a priori elképzelésből kiindulva, a $\mathbf{v}(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ vektorokat a következőképp határozzuk meg: $\mathbf{v}(0) = \mathbf{u}$, és $t \ge 1$ esetén a $\mathbf{v}(t)$ vektort $\mathbf{v}(t-1)$-ből az $i(t)$-edik partíció által előírt $b_k^{i(t)}$ összegekhez való arányos illesztés származtatja, ahol $i(t) \equiv t \pmod{r}$. Másszóval

$$v_j(t) = \frac{b_k^{i(t)}}{\sum_{l \in J_k^{i(t)}} v_l(t-1)} v_j(t-1) \qquad \text{ha} \qquad j \in J_k^{i(t)} . \tag{5.2}$$

Speciálisan, ha $\mathbf{v}$ mátrixot jelent, melynek $\bar{\mathbf{v}}$ és $\bar{\bar{\mathbf{v}}}$ marginálisai vannak megadva, akkor itt $r = 2$, a két partíció a mátrix sorainak ill. oszlopainak felel meg, és az iteráció a megadott sor- és oszlopösszegekhez való arányos illesztések ciklikus ismétlése.

Az alábbi 5.1 tételből speciális esetként következik, hogy ha egyáltalán létezik az (5.1) feltételeket kielégítő $\mathbf{v} \in S$ vektor, akkor

$$\mathbf{v}^* = \lim_{t \to \infty} \mathbf{v}(t) \tag{5.3}$$

létezik, és egyenlő az $\mathbf{u}$ I-vetületével az (5.1) feltételekkel definiált L affin altérre. Vegyük észre, hogy az (5.2) által definiált $\mathbf{v}(t)$ vektor nem más, mint $\mathbf{v}(t-1)$ I-vetülete az $L_{i(t)}$ affin altérre, ahol

$$L_i = \{ \mathbf{v} : \sum_{j \in J_k^i} v_j = b_k^i, \ 1 \le k \le k_i \} . \tag{5.4}$$

Figyelemreméltó azonban, hogy míg az iteráció egyes lépései nemcsak az I-divergencia, hanem már f-divergenciák szerinti vetítésnek is tekinthetők, vö.

4.1 tétel, u-nak az $L = \bigcap_{i=1}^{r} L_i$ affin altérre való vetületéről ez már nem állítható, és az (5.3) limesz éppen az I-vetülettel egyenlő. Ez azzal függ össze, hogy az iteratív vetítés konvergenciája a tranzitív vetítési szabályok tulajdonsága, és az f-divergenciák szerinti vetítések közül egyedül az I-divergencia vetítés tranzitív, l. a 4.2 tétel korolláriumát.

5.1 Tétel *Legyen* $\{\pi(\cdot|\mathbf{u}), \mathbf{u} \in S\}$ *reguláris, lokális, tranzitív vetítési szabály, és tegyük fel, hogy*

$$L = \bigcap_{i=1}^{r} L_i \neq \emptyset\,, \tag{5.5}$$

ahol $L_1, \ldots, L_r$ *tetszőleges affin alterek. Legyen* $\mathbf{v}(0) = \mathbf{u}$ *és* $t \geq 1$ *esetén legyen* $\mathbf{v}(t) = \pi\big(L_{i(t)}|\mathbf{v}(t-1)\big)$, *ahol* $i(t) \equiv t \pmod r$. *Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{v}(t) = \pi(L|\mathbf{u})\,, \tag{5.6}$$

feltéve, hogy $\|\mathbf{v}(t)\|$ *nem tart végtelenhez. Speciálisan, a következő két feltétel bármelyike elégséges (5.6) teljesüléséhez:*

(i) az L_i *halmazok legalább egyike korlátos*

(ii) a vetítési szabályt generáló (4.5) távolságfüggvényben szereplő φ_j *függvények mindegyikére*

$$u\varphi_j'(u) - \varphi_j(u) \to \infty\,, \quad \text{ha} \quad |u| \to \infty\,. \tag{5.7}$$

Diszkusszió: Az 5.1. tétel a pozitív és a valós esetben egyaránt érvényes (a pozitív esetben (5.7)-ben $|u| \to \infty$ helyett $u \to \infty$ értendő). Az (i) feltétel a pozitív esetben jön szóba, tipikus esete, amikor az L_i affin alterek egyike olyan $\mathbf{v}$ vektorokból áll, melyek komponenseinek összege konstans. A (ii) feltétel teljesül pl. a 4.3 tételben szereplő vetítési szabályok közül az (a) esetbeliekre, és a (b) esetbeliekből azokra, amelyekre $0 \leq \alpha \leq 1$, így speciálisan az euklideszi vetítésre, az I-divergencia vetítésre és az Itakura-Saito távolság szerinti vetítésre.

Nyitott kérdés, hogy az 5.1. tételben nem állítható-e (5.6) minden további feltétel nélkül, tehát hogy $\|\mathbf{v}(t)\| \to \infty$ előfordulhat-e egyáltalán.

Az 5.1. tétel egyszerű következménye annak, hogy a tranzitív vetítési szabályokat generáló (4.5) alakú F távolságfüggvényekre teljesül a

Pitagorasz tétel: *Tetszőleges L affin altér,* $\mathbf{u} \in S$ *és* $\mathbf{v} \in L$ *esetén*

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = F(\mathbf{v}|\mathbf{v}^*) + F(\mathbf{v}^*|\mathbf{u}) \quad \text{ahol} \quad \mathbf{v}^* = \pi(L|\mathbf{u})\,. \tag{5.8}$$

Vegyük észre, hogy az $F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2$ esetben (5.8) az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{v}$ által alkotott derékszögű háromszögre vonatkozó közönséges Pitagorasz tétel. Az $F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = I(\mathbf{v}\|\mathbf{u})$ esetre vonatkozó (5.8) azonosság fontos szerepet játszik az I-divergencia statisztikai alkalmazásaiban, l. Kullback [23].

Az (5.8) Pitagorasz tétel bizonyításához jegyezzük meg, hogy mivel a vetítési szabályt az

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{n} \big(\varphi_j(v_j) - \varphi_j(u_j) - \varphi_j'(u_j)(v_j - u_j)\big) \tag{5.9}$$

távolságfüggvény generálja, (5.9) $\mathbf{v}$ szerinti gradiensvektora a $\mathbf{v}^* = \pi(L|\mathbf{u})$ pontban merőleges L-re, így speciálisan a $\mathbf{v}-\mathbf{v}^*$ vektorra is. Tehát

$$\sum_{j=1}^{n} (v_j - v_j^*)\big(\varphi_j'(v_j) - \varphi_j'(u_j)\big) = 0\ , \tag{5.10}$$

ami ekvivalens (5.8)-cal.

Mármost az 5.1. tétel a következőképp bizonyítható, vö. Csiszár [7], ahol a tétel az I-divergencia vetítésre volt kimondva, valószínűségeloszlások esetére szorítkozva. Alkalmazzuk az (5.8) Pitagorasz tételt $\mathbf{u}$ és L szerepében $\mathbf{v}(t-1)$-re és $L_{i(t)}$-re (az 5.1. tétel jelöléseivel) és legyen $\mathbf{v} \in \bigcap_{i=1}^{r} L_i$ tetszőleges. Az így adódó azonosságokat $t = 1$-től N-ig összegezve azt kapjuk, hogy minden $\mathbf{v} \in L = \bigcap_{i=1}^{r} L_i$ esetén

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = F\big(\mathbf{v}|\mathbf{v}(N)\big) + \sum_{t=1}^{N} F\big(\mathbf{v}(t)|\mathbf{v}(t-1)\big)\ . \tag{5.12}$$

Speciálisan, minden $\mathbf{v} \in L$ esetén az $F\big(\mathbf{v}|\mathbf{v}(t)\big)$, $t = 0, 1, \ldots$ sorozat monoton csökkenő, és

$$F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \lim_{t\to\infty} F\big(\mathbf{v}|\mathbf{v}(t)\big) + \sum_{t=1}^{\infty} F\big(\mathbf{v}(t)|\mathbf{v}(t-1)\big)\ . \tag{5.13}$$

Ha $\|\mathbf{v}(t)\|$ nem tart végtelenhez, a $\mathbf{v}(t)$ sorozatból kiválasztható egy $\mathbf{v}(t_k) \to \mathbf{v}^*$ konvergens részsorozat. Itt $\mathbf{v}^* \in S$ a pozitív esetben is teljesül, mert ha $\mathbf{v}^*$ valamelyik komponense 0 volna, akkor $\lim_{v\to 0} \varphi_j'(v) = -\infty$ miatt (l. 4.2 tétel) $F\big(\mathbf{v}|\mathbf{v}(t_k)\big)$ végtelenhez tartana, ellentmondásban $F\big(\mathbf{v}|\mathbf{v}(t)\big)$ monoton csökkenő voltával.

(5.13)-ból következik, hogy $F\big(\mathbf{v}(t)|\mathbf{v}(t-1)\big) \to 0$. Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{u}$ S-nek egy kompakt részhalmazából való, akkor $F(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ tetszőlegesen kicsi voltából következik $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$ tetszőlegesen kicsi volta. Ezért abból, hogy $\mathbf{v}(t_k) \to \mathbf{v}^* \in S$, következik $\mathbf{v}(t_k+1) \to \mathbf{v}^*, \ldots, \mathbf{v}(t_k+r-1) \to \mathbf{v}^*$ is. Így, mivel a $\mathbf{v}(t_k), \mathbf{v}(t_k+1), \ldots, \mathbf{v}(t_k+r-1)$ vektorok valamely ciklikus permutáció szerint rendre az $L_1, \ldots, L_r$ affin alterekből valók, szükségképpen $\mathbf{v}^* \in \bigcap_{i=1}^r L_i = L$. Felhasználva, hogy az $F(\mathbf{v}|\mathbf{v}(t))$ sorozat minden $\mathbf{v} \in L$ esetén monoton csökkenő, most már következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} F(\mathbf{v}^*|\mathbf{v}(t)) = \lim_{k\to\infty} F(\mathbf{v}^*|\mathbf{v}(t_k)) = 0\,, \tag{5.14}$$

tehát nemcsak $\mathbf{v}(t_k) \to \mathbf{v}^*$, hanem $\mathbf{v}(t) \to \mathbf{v}^*$ is teljesül. Ezután (5.13)-at $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$F(\mathbf{v}^*|\mathbf{u}) = \sum_{t=1}^{\infty} F(\mathbf{v}(t)|\mathbf{v}(t-1))\ ; \tag{5.15}$$

ezt (5.13)-ba visszahelyettesítve látható, hogy $F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \geq F(\mathbf{v}^*|\mathbf{u})$ minden $\mathbf{v} \in L$-re, tehát $\mathbf{v}^* = \pi(L|\mathbf{u})$.

Végül még azt kell belátni, hogy az 5.1 tételbeli (i) ill. (ii) feltétel kizárja a $\|\mathbf{v}(t)\| \to \infty$ lehetőséget. Az (i) feltételnél ez nyilvánvaló, (ii)-nél pedig abból következik, hogy $\|\mathbf{v}(t)\| \to \infty$ esetén az $F(\mathbf{v}|\mathbf{v}(t))$ sorozat nem lehetne monoton csökkenő, sőt végtelenhez tartana. Valóban, a (ii) feltétel mellett egyszerűen igazolható, hogy bármely rögzített $\mathbf{v} \in S$ esetén $F(\mathbf{v}|\mathbf{u}) \to \infty$ ha $\|\mathbf{u}\| \to \infty$.

Az 5.1. tétel elvi lehetőséget ad bármely L affin altérre való I-vetület, vagy általánosabban, tetszőleges reguláris, lokális, tranzitív vetítési szabály szerinti $\pi(L|\mathbf{u})$ vetület kiszámítására, legalábbis az (i) vagy (ii) feltétel teljesülése esetén. Valóban, minden L affin altér előállítható hipersíkok metszeteként. Így $\pi(L|\mathbf{u})$ kiszámítása történhet olyan iterációval, melynek minden lépése hipersíkra, azaz egyetlen lineáris feltétellel meghatározott L_i affin altérre való vetítés. Ezek a lépések azonban általában lényegesen számításigényesebbek az (5.4) speciális alakú affin alterekre való I-divergencia vetítésnél, ami egyszerűen csak arányos illesztést jelent.

A következő módszerrel minden olyan L affin altérre vett I-vetület kiszámítható az iteratív arányos illesztési eljáráshoz mérhető számítási komplexitással, amely L-re a $\mathbf{v} \in L$ vektorok komponenseinek összege állandó. Mivel az I-divergencia vetítés skálainvariáns, az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy ez az összeg 1, azaz, hogy L-et valószínűségeloszlások alkotják.

Legyen tehát L a pozitív komponensű $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorok S halmazának olyan affin altere, hogy minden $\mathbf{v} \in L$ vektorra $\sum_{j=1}^n v_j = 1$. Könnyű belátni, hogy ekkor L előállítható $L = \{\mathbf{v} : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}\}$ alakban olyan $\mathbf{A}$ $k \times n$-es mátrixszal és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ vektorral, hogy $\mathbf{A}$ elemei nemnegatívok és oszlopösszegei 1-gyel egyenlők, továbbá $\mathbf{b}$ elemei pozitívok és összegük 1.

Egy ilyen előállítást véve alapul, legyen $\mathbf{v}(0) = \mathbf{u}$ (az a priori elképzelést reprezentáló vektor), és a $\mathbf{v}(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ vektorokat definiálja

$$v_j(t) = v_j(t-1) \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b_i}{\sum_{l=1}^{n} a_{il} v_l(t-1)} \right)^{a_{ij}} \tag{5.16}$$

Ezt az iterációt először Darroch és Ratcliff [14] javasolták, és bebizonyították, hogy $\mathbf{v}(t)$ konvergál $\mathbf{u}$-nak L-re vett I-vetületéhez. Az I-vetület kiszámításának ez a módja az irodalomban SMART algoritmus néven is ismeretes.

Az (5.16) iterációval származtatott $\mathbf{v}(t)$ sorozat konvergenciája $\mathbf{u}$-nak L-re vett I-vetületéhez egyszerűen levezethető az 5.1 tételből (l. [10]). Ehhez jelölje M azoknak az (i,j) pároknak a halmazát, melyekre $a_{ij} \neq 0$, és jelölje $\tilde{S}$ a $\{\tilde{v}_{ij} : (i,j) \in M\}$ alakban írt pozitív komponensű $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^m$ vektorok halmazát, ahol $m \leq nk$ az M elemszáma. Legyen $\tilde{L}$ mindazon $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{S}$ vektorok halmaza, melyek komponensei $\tilde{v}_{ij} = a_{ij} v_j$ alakúak valamely $\mathbf{v} \in L$ vektorra, és legyen $\tilde{\mathbf{u}} = \{ a_{ij} u_j, (i,j) \in M \}$. Ekkor $\tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{L}$ esetén $I(\tilde{\mathbf{v}} \| \tilde{\mathbf{u}}) = I(\mathbf{v} \| \mathbf{u})$, ezért $\tilde{\mathbf{u}}$ $\tilde{L}$-ra vett I-vetülete az $\mathbf{u}$ L-re vett $\mathbf{v}^*$ I-vetületének megfelelő $\tilde{\mathbf{v}}^*$-gal egyenlő. Mivel $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \cap \tilde{L}_2$, ahol

$$\tilde{L}_1 = \{ \tilde{\mathbf{v}} : \sum_j \tilde{v}_{ij} = b_i, \quad i = 1, \ldots, k \} \tag{5.17}$$

$$\tilde{L}_2 = \{ \tilde{\mathbf{v}} : \sum_l \tilde{v}_{lj} - \frac{1}{a_{ij}} \tilde{v}_{ij} = 0, \quad (i,j) \in M \} \tag{5.18}$$

(itt az összegek azokra a j ill. l indexekre vonatkoznak, melyek a szóbanforgó i ill. j indexszel M-beli párt alkotnak), az 5.1. tétel szerint $\tilde{\mathbf{v}}^*$ megkapható az $\tilde{L}_1$-ra ill. $\tilde{L}_2$-ra való vetítések ciklikus ismétlésével származtatott $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ vektorok sorozatának limeszeként. Egyszerű számolással adódik, hogy ez az iteráció ekvivalens az (5.16) iterációval, pontosabban az (5.16) szerinti $\mathbf{v}(t)$ vektorok a $\tilde{\mathbf{v}}(2t)$ vektoroknak felelnek meg.

6. Kiegészítő megjegyzések

A lineáris inverz problémáknak a 2. pont szerintinél általánosabb változatában az ismeretlen f függvényt bizonyos Rf funkcionálok értékeinek *pontatlan* ismerete alapján kell meghatározni. Formálisan, a diszkrét esetben, az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorról rendelkezésre álló ismereteket (1.7) helyett egy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j + e_i = b_i \,, \qquad i = 1, \ldots, k \tag{6.1}$$

alakú egyenletrendszer írja le, ahol $e_1, \ldots, e_k$ az ismeretlen e hibavektor komponensei. Ezeket szokásos ismert vagy részben ismert együttes eloszlású (legtöbbször független normális) valószínűségi változóknak tekinteni, amikoris a feladat a statisztika módszereivel közelíthető meg. Az eddigiekkel összhangban gondoljunk ehelyett arra az esetre, amikor az e hibavektor nem véletlen (vagy ha igen, eloszlásáról nincs információnk), így statisztikai módszerek megalapozottan nem alkalmazhatók. Pl. a 2. pontban vázolt tomográfiai problémában, ha azt hiba megengedésével modellezzük, e a diszkrét közelítésből és a berendezés geometriájának pontatlan ismeretéből származó szisztematikus hibát fogja jelenteni, mert a véletlen mérési hibák ehhez képest elhanyagolhatók. Ha az e hibavektorról feltehető, hogy $|e_i| \leq \epsilon$, $i = 1, \ldots, k$, akkor mondhatjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektort egy affin altér helyett a

$$\{ \mathbf{v} : |\sum_j a_{ij} v_j - b_i| \leq \epsilon \,, \; i = 1, \ldots, k \} \tag{6.2}$$

konvex halmazból kell kiválasztani, vö. (1.5); a dolgozatban tárgyalt axiomatikus eredmények egyszerűen kiterjeszthetők úgy, hogy erre a feladatra is alkalmazhatók legyenek, l. [12]. A (6.2) alakú halmazra való vetítés numerikus módszereit illetőleg az [5] cikkre utalunk, amely bőséges irodalomjegyzéket is tartalmaz.

A (6.1) probléma más megközelítése, hogy azt olyan szűkebb értelemben vett lineáris inverz problémának tekintjük, melyben a $(\mathbf{v}, \mathbf{e})$ pár az ismeretlen, és ennek megválasztására alkalmazunk valamilyen „jó" kiválasztási szabályt. Így a pozitív esetben számításba jön $||\mathbf{v}||^2$ és $||\mathbf{e}||^2$ valamely lineáris kombinációjának minimalizálása a (6.1) feltételek mellett, vö. [4], [17].

A klasszikus legkisebb négyzetek módszere a $\sum_j a_{ij} v_j = b_i$, $i = 1, \ldots, k$ egyenletrendszer közelítő megoldására szolgál abban a tipikusan $k > n$-re előforduló esetben, amikor az egyenletek inkompatibilisek; ilyenkor a (6.1) egyenletrendszernek azt a megoldását fogadjuk el, amelyre $||\mathbf{e}||^2$ minimális. Az, hogy $||\mathbf{v}||^2$ és $||\mathbf{e}||^2$ valamely lineáris kombinációját minimalizáljuk, természetes közös általánosítása a 2. pontbeli és a klasszikus értelemben vett legkisebb négyzetek módszerének. A (6.1) egyenletrendszer ily módon történő megoldásának axiomatikusan kitüntetett voltát azonban nem sikerült bizonyítani többek között azért, mert a (6.1) alakú egyenletek nagyon speciálisak, így szó sincs arról, hogy a $(\mathbf{v}, \mathbf{e})$ párokból képezhető minden affin altérből ki kell tudni választani egy $(\mathbf{v}, \mathbf{e})$ párt.

Visszatérve a 2. pontbeli értelemben vett inverz problémákra, egy „folytonos" probléma diszkrét közelítése nem csak az ott vázolt módon lehetséges. Általánosabban, a (2.1) közelítésben az f_j függvények egy felosztás celláinak indikátorfüggvényei helyett más bázisfüggvények is lehetnek, vö. [4]. Ekkor azonban a diszkrét közelítés már nem tükrözi közvetlenül a folytonos probléma geometriáját, és ezért a lokalitás (3.2 definíció) nem tűnik kényszerítő követelménynek. Ilyenkor számításba jöhet olyan Bregman-divergencia – azaz (4.6) alakú távolságfüggvény – által generált vetítési szabályt alkalmazni, ahol a $\Phi(\mathbf{v})$ függvény (szigorúan konvex és folytonosan differenciálható, de) nem $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(v_j)$ alakú. Ezekre az (5.8) Pitagorasz-tétel és következésképpen a tranzitivitás változatlanul teljesül, és az 5.1. tétel is kiterjeszthető erre az esetre. Nyitott kérdés, hogy a tranzitivitás követelménye önmagában vagy esetleg valamilyen egyszerű technikai feltétellel együtt elégséges-e az ilyen vetítési szabályok axiomatikus jellemzéséhez.

Vizsgálatainkban fontos szerepe volt annak a feltevésnek, hogy a számításba vehető vektorok S halmaza vagy a teljes $\mathbb{R}^n$, vagy ennek a pozitív komponensű vektorokból álló részhalmaza. Kívánatos volna hasonló eredményeket bizonyítani más S alaphalmaz esetén is; ez sikerült arra az esetre, amikor S mindazon vektorok halmaza, melyek komponensei pozitívak és összegük 1, l. [11].

Egyszerű észrevétel, hogy a pozitív komponensű vektorok alkotta S esetére értelmezett π reguláris, lokális kiválasztási szabályok közül bizonyosaknak triviális módon megfeleltethető olyan $\tilde{\pi}$ kiválasztási szabály, melynek alaphalmaza S lezártja. Nevezetesen, ha a 3.1 tétel szerinti $F(\mathbf{v})$ függvény olyan $f_j(v_j)$ függvények összege, melyekre az $f_j(0) = \lim_{v\to 0} f_j(v)$ határértékek végesek, $F(\mathbf{v})$ folytonos kiterjesztése $\mathrm{cl}(S)$-re egy $\tilde{\pi}$ kiválasztási szabályt generál $\mathrm{cl}(S)$ affin altereinek (vagyis (2.2) alakú részhalmazainak) halmazán. Természetesen ha L affin altere S-nek, akkor $\mathrm{cl}(L)$ affin altere $\mathrm{cl}(S)$-nek és

$$\tilde{\pi}(\mathrm{cl}(L)) = \pi(L)\ . \tag{6.2}$$

Az utóbbi észrevételhez kapcsolódik az 5.2. tétel következő általánosítása, a pozitív esetben. Tegyük fel, hogy az adott tranzitív vetítési szabályt generáló (4.5) távolságfüggvényben szereplő φ_j függvényekre a $\varphi_j(0) = \lim_{v\to 0} \varphi_j(v)$ határértékek végesek. Ekkor az 5.2 tételben a $\bigcap_{i=1}^{r} L_i \neq \emptyset$ feltétel helyett elég azt feltenni, hogy

$$\overline{L} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{cl}(L_i) \neq \emptyset\ , \tag{6.3}$$

ha (5.6)-ban $\pi(L|\mathbf{u})$ helyett $\tilde{\pi}(\overline{L}|\mathbf{u})$-t írunk, ahol $\tilde{\pi}(\overline{L}|\mathbf{u})$ az előző bekezdés szerint értendő. Valóban, $F(\mathbf{v}|\mathbf{u})$ értelmezésének $\mathbf{v} \in \mathrm{cl}(S)$-re való természetes kiterjesztésével az 5.2 tétel bizonyítása változatlanul alkalmazható, figyelembe véve, hogy az (5.8) Pitagorasz tétel nyilvánvalóan $\mathbf{v} \in \mathrm{cl}(L)$ esetén is érvényes.

Az 5.2 tétel fenti általánosabb változata érvényes speciálisan az I-divergencia vetítésre. Ezt alkalmazva, az (5.2) iteratív arányos illesztési algoritmus konvergenciája nemcsak akkor állítható, ha létezik az (5.1) feltételeket kielégítő pozitív komponensű **v** vektor, hanem az is igaz, hogy az (5.3) limesz létezik és egyenlő **u**-nak az (5.1) feltételeket kielégítő nemnegatív komponensű vektorok halmazára vett I-vetületével, ha ez a halmaz nem üres. Hasonlóképp, az (5.16) iteráció mindig konvergál **u**-nak az $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ feltételt kielégítő nemnegatív komponensű vektorok halmazára vett I-vetületéhez, ha ez a halmaz nem üres, akkor is, ha nem tartalmaz pozitív komponensű vektort (az **A** mátrixra és a **b** vektorra az iteráció definiálása előtt megfogalmazott feltételek mellett). Végül érdekességként bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy az (5.16) iteráció akkor is konvergens, ha nem létezik az $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ feltételt kielégítő nemnegatív komponensű vektor. Ekkor $\mathbf{v}(t)$ az **u**-nak azon nemnegatív komponensű **v** vektorok halmazára vett I-vetületéhez tart, melyekre az $I(\mathbf{Av}||\mathbf{b})$ I-divergencia minimális.

Irodalom

1. Aczél, J. – Daróczy, Z. *On Measures of Information and Their Characterizations.* Academic, New York, 1975.
2. Boltzmann, L. Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. *Wien. Ber.* 76 (1877) 373–435.
3. Bregman, L. M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.* 7 (1967) 200-217.
4. Censor, Y. Finite series-expansion reconstruction methods. *Proc. IEEE* 71 (1983) 409–419.
5. Censor, Y., De Pierro, A., Elfving, V., Herman, G. T., Iusem, A. N. On iterative methods for linearly constrained entropy maximization. *Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* Banach Center Publications, Vol. 24, 145–163. Polish Scientific Publishers, Warsaw 1990.
6. Csiszár, I. Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 8 (1963) 85–108.
7. Csiszár, I. I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *Ann. Probab.* 3 (1975) 146–158.
8. Csiszár, I. Sanov property, generalized I-projection, and a conditional limit theorem. *Ann. Probab.* 12 (1984) 768–793.
9. Csiszár, I. An extended maximum entropy principle and a Bayesian justification. *Bayesian Statistics 2* (Eds. J. M. Bernardo etc.), 83–89. North Holland, Amsterdam, 1985.
10. Csiszár, I. A geometric interpretation of Darroch and Ratcliff's generalized iterative scaling. *Ann. Statist.* 17 (1989) 1409–1413.
11. Csiszár, I. Why least squares and maximum entropy? An axiomatic approach to inference for linear inverse problems. *Ann. Statist.* 19 (1991), 2032–2066.

12. Csiszár, I. New axiomatic results on inference for inverse problems. *Studia Sci. Math. Hungar.* 26 (1991) 207–237.

13. Csiszár, I. – Körner, J. *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems.* Akadémiai Kiadó, Budapest – Academic, New York, 1981.

14. Darroch, J. N. – Ratcliff, D. Generalized iterative scaling for log- linear models. *Ann. Math. Statist.* 43 (1972) 1470–1480.

15. Deming, W. E. – Stephan, F. F. On a least square adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known. *Ann. Math. Statist.* 11 (1940) 427–444.

16. Diaconis, P. – Zabell, S. L. Updating subjective probability. *J. Amer. Statist. Assoc.* 7 (1982) 831–834.

17. Herman, G. T. – Lent, A. Iterative reconstruction algorithms. *Computers in Biology and Medicine* 6 (1976) 273–294.

18. Itakura, F. – Saito, S. Analysis synthesis telephony based on the maximum likelihood method. *Reports of the Sixth International Congress on Acoustics* (Ed. Y. Kohasi), 17–20. Tokyo, Japan, 1968.

19. Jaynes, E. T. On the rationale of maximum entropy methods. *Proc. IEEE* 70 (1982) 939–952.

20. Jones, L. K. – Byrne, C. L. General entropy criteria for inverse problems, with applications to data compression, pattern classification and cluster analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-36 (1990) 23–30.

21. Jones, L. – Trutzer, V. Computationally feasible high-resolution minimum-distance procedures which extend the maximum-entropy method. *Inverse Problems* 5 (1989) 749–766.

22. Kruithof, J. Telefoon verkeerrekening. *Het Engenieur* 52 (1937) E15–E16.

23. Kullback, S. *Information Theory and Statistics.* Wiley, New York, 1959.

24. Liese, F. – Vajda, I. *Convex Statistical Distances.* Teubner, Leipzig, 1987.

25. Paris, J. B. – Vencovská, A. A note on the inevitability of maximum entropy. *Internat. J. Inexact Reasoning* 4 (1990) 183–223.

26. Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.* 27 (1948) 379–423, 623-656.

27. Shore, J. E. – Johnson, R. W. Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-26 (1980) 26–37. Correction: IT-29 (1983) 942–943.

28. Skilling, J. The axioms of maximum entropy. *Maximum Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering,* Vol. 1, 173–187. Kluwer, Amsterdam, 1988.

MAXIMUM ENTROPY AND RELATED METHODS: AXIOMS, ALGORITHMS

In this survey, for systems of k linear equations with n unknowns, where $n \geq 3$ is fixed and $k < n$ is arbitrary, we consider rules to select a distinguished solution vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Two cases are treated: (i) the positive case, when solution vectors with positive components are assumed to exist and the distinguished $\mathbf{v}$ is selected from those (ii) the real case, when there are no such constraints. Certain natural axioms are imposed on the permissible rules of selection. A set of such axioms imply that the selected $\mathbf{v}$ must be the feasible solution of maximum entropy resp. minimum Euclidean norm, according to the positive resp. real case, or if a prior guess $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ is given, the feasible solution closest to $\mathbf{u}$ in the sense of I-divergence (1.8) resp. of Euclidean distance. Some weaker axioms permit using other distances, viz. the f-divergences (4.4) or the Bregman distances (4.5). Out of algorithms for minimizing I-divergence, we consider interative scaling (RAS) and generalized iterative scaling (SMART). Both are particular cases of iterative Bregman distance minimization, whose convergence follows from the Pythagorean theorem for Bregman distances.

A KELET-ÁZSIAI KERESKEDELEM MODELLJE[1]

SIMON ANDRÁS[2]
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

E modell a nemzetközi kereskedelem magyarázatának új megközelítésén alapszik. Ennek a megközelítésnek az elméleti alapjait [1]-ben ismertettem. Lényege, hogy a termékek változatainak gazdagításával az exportálók változatlan árak mellett, tehát a kereslettől függetlenül növelhetik exportjukat. Így exportjuknak csak költségeik szabnak határt, akár a klasszikus tökéletes piaci modellben. E felfogás alkalmazására a kelet-ázsiai régió gazdasága a legjobb terep, mert kiváló példát nyújt egyes exportálók drámai előretörésére a világpiacon.

1. Általános jellemzők

A modell tulajdonképpen egy rendszer, amely országmodelleket kapcsol össze a kereskedelmen keresztül. A kereskedelem modellje a *feldolgozott termékekre korlátozódik*. A következő országok szerepelnek a rendszerben:

USA, Japán, Korea, Taiwan, Fülöp-szigetek, Thaiföld, Kína, Indonézia, Hong-Kong, Malájföld, Szingapúr.

Ezen országok közül hét teljes modellel szerepel a rendszerben, melyek az ICSEAD-ban vagy az illető országok kutatóhelyein készültek. A következő modelleket használtam:

USA, Japán: ICSEAD modell (Inada-Wescott)
Korea: KDI-modell éves változata
Taiwan: Academia Sinica modell (Lo és tsai)
Kína: ICSEAD modell (Simon)
Fülöp-szigetek: Asian Development Bank modellje
Thaiföld: ICSEAD modell (Simon)

A többi országra a kereskedelmi modellhez szükséges változókat exogénnek tekintjük. A rendszer szimulációja sorozatban történik, először országonként, majd a kereskedelemre, majd újra országonként, stb. Háromféle változó van:

[1]Beérkezett: 1994. január 23.

[2]A tanulmány a szerzőnek az International Center for the Study of East Asian Developments (Kitakyushu, Japán)-ben végzett kutatásain alapszik. A szerző köszönettel tartozik ICSEAD-beli kutatási asszisztensének, Jin-Myon Leenek, aki a számítások technikai lebonyolítását végezte.

1. az országmodellek számára belső változók
2. a kereskedelmi modell számára belső változók
3. összekapcsoló változók.

Egy ország-modell szimulálásakor az 1. és a 3. kategóriájú változókat számítjuk ki, a kereskedelmi modell szimulálásakor a 2. és 3. típusú változókat. Az összekapcsoló változók

a) vagy az országmodellek kimenő (endogén) változói és a kereskedelmi modell bemenő (exogén) változói:

- termelő kapacitás
- belföldi kereslet
- belföldi árak,

b) vagy a kereskedelmi modell kimenő (endogén) változói és az országmodellek bemenő (exogén) változói:

- exportárak
- importárak
- export mennyiségek
- import mennyiségek.

A kereskedelmi modell minden egyes kereskedelmi relációra meghatározza az árakat és a mennyiségeket, de csak az összes export és import értékeit adja át az országmodelleknek. Ezek részt vesznek a belföldi kereslet, árak, kapacitás meghatározásában, amelyek azután visszacsatolódnak a kereskedelmi modellbe. Ebben a tanulmányban nem térek ki az országmodellek struktúrájának tárgyalására, csak a kereskedelmi modellt ismertetem.

2. Az egyenletek

2.1 Exportárak

Az árképzési viselkedés leírásához a piaci struktúrák utóbbi években kidolgozott modelljére támaszkodtam. Feltételeztem, hogy a vállalatok piaconként áraznak („Pricing to the market"), tehát minden ország N különböző árat alakít ki, egyet a belföldi piacra és $N-1$-et az exportpiacokra.

A meghatározás módja a modellben nem szimmetrikus. A belföldi árak az országmodellekben határozódnak meg, költség-bázison. Ezek az árak mintegy lehorgonyozzák a többi árat, minthogy az egyes kereskedelmi áramlások árainak nincs saját meghatározójuk, csak az érintett két ország árai. Az exportáló és az importáló ország belföldi árai osztott késéssel határozzák meg az adott viszonylat kereskedelmének árát, melyet közös valutában értelmezünk. Az árváltozásokat nem bontjuk árfolyam- illetve költségek okozta tényezőre. Ez szakmai zsargonban fogalmazva azt jelenti, hogy a a költségek és az árfolyam változásának átterhelési (pass-through) együtthatója azonos. Az osztott késések együtthatóit úgy korlátozzuk, hogy a leértékelések hosszú távon semlegesek legyenek a cserearány szempontjából. Ha a közeli évek exportárainak súlya viszonylag nagy (az importárakkal szemben), akkor a cserearány rövid távon romlik. Az export-, illetve importár összes súlyának egyezősége biztosítja a cserearány-semlegességet.

$$\begin{aligned}\log p_{ij} &= \alpha_{2ij} + \gamma_{1j}\log\frac{p_i^d}{r_i} + \gamma_{2j}\log\frac{p_j^d}{r_j} + \gamma_{3j}\log\left(\frac{p_i^d}{r_i}\right)_{-1} + \gamma_{4j}\log\left(\frac{p_j^d}{r_j}\right)_{-1}\\ &+ \gamma_{5j}\log\left(\frac{p_i^d}{r_i}\right)_{-2} + \gamma_{6j}\log\left(\frac{p_j^d}{r_j}\right)_{-2} + \gamma_{7j}\log(p_{ij})_{-1} + \gamma_{8j}t\,,\\ &\gamma_{1j}+\gamma_{3j}+\gamma_{5j} = \gamma_{2j}+\gamma_{4j}+\gamma_{6j} \qquad i \neq j\,,\end{aligned} \tag{1}$$

ahol

p_{ij}, $i \neq j$ – exportár dollár-alapon,
p_i^d, p_j^d – belföldi ár,
r_i, r_j – valutaárfolyam (helyi/dollár).

Az együtthatókra előírjuk, hogy egy-egy piacon exportálók szerint azonosak legyenek. Hadd fejtsem ki e specifikáció előnyeit kissé részletesebben.

A legtöbb keynesista modellben az exportárak belföldi valutában merevek, ami azt jelenti, hogy a leértékelés rontja a cserearányt. Az exportárak és az importárak között létrejövő árszintkülönbség végtelen ideig eltart, hacsak az országmodellekben nincs valamilyen beépített áralkalmazkodási mechanizmus. Ha van ilyen mechanizmus, akkor az áralkalmazkodás után már csak a fizetési mérleg monetáris megközelítésével magyarázhatjuk a kereskedelmi mérleget. A legtöbb országmodellben azonban nincsen olyan kifinomult pénzügyi blokk, amely megfelelhetne ennek az elméleti követelménynek. Ha a kereskedelmet csak az ár és a jövedelem magyarázza, és a pénzügyi blokk nem képes arra, hogy az árfolyam hatását az összkeresletre nyomon tudja követni, akkor csak a nemzetközi árarányok, tehát a cserearány lehet az egyetlen tényező, amely az import csökkenését kikényszerítheti.

Nem ilyen a helyzet, ha a modell a kínálatot is magába foglalja. Ahhoz, hogy a kereslet átváltson importra, az árarányoknak *egy országon belül* meg kell változniuk, ahhoz azonban, hogy a kínálat több exportra álljon át, elegendő, ha az árak *országok között* különböznek. A termelők (kereskedők) arbitrázs-tevékenysége nő, és ennek következtében a kereskedelmi mérleg változik, valahányszor az országok közötti árarány változik, bármi legyen is a cserearány. Ez a gondolat – Hume pénz-termék áramlási mechanizmusa – nem kevesebb, mint 300 éves, csoda, hogy a kereskedelem modellezőinek elkerülte a figyelmét, bár a csodának van magyarázata: a modellépítők gondolkodásába az ármeghatározók piacának tiszta árversenyes változata ivódott bele, úgy, hogy a klasszikus modellt teljes egészében elvetették, annak hasznos elemeivel együtt.

Ha a kínálaton keresztül beépítjük az árszintkülönbségek hatását is a modellbe, akkor nincs szükségünk arra az elméletileg indokolhatatlan feltevésre, hogy a leértékelések cserearányhatását örök időkre változatlannak tekintsük. A valósághoz közelebb áll, ha magának a cserearánynak a hosszútávú változatlanságát tételezzük fel.

E tanulmányban nem vállalkozom annak becslésére, hogy mennyi is ez a hosszú táv, hanem rákényszerítem az egyenletekre, hogy leértékelés hatására a cserearányok három évre kilendülnek egyensúlyi helyzetükből, majd attól kezdve egy alkalmazkodási folyamattal közelítenek az eredeti helyzethez. Ez a hosszútávú cserearány-semlegesség nem jelenti az egységes ár elvének érvényességét, mert ahhoz maguknak az árszinteknek is az egyenlőséghez kellene konvergálniuk. A cserearány helyreállása például gyorsabb lehet, mint az árszintek kiegyenlítődési folyamata. Ami fontosabb, hogy ez a helyreállás az országmodellek részéről nem igényli a monetáris szektor kidolgozását, és azon belül az árszintek nemzetközi kiegyenlítődésének modellezését, melyet az ilyen modellek egyébként sem szoktak kezelni.

Röviden összefoglalva, a modellben a cserearány-hatás 3 év után fokozatosan eltűnik. Az árszintkülönbségek hatása bármeddig eltarthat, amíg az országmodellek struktúrája megengedi. A modell tehát nem biztosítja a hosszútávú vásárlóerőparitás érvényesülését, ez az országmodellek problémája marad.

2.2 Volumenek

Mint ahogy a Szigma előző számában megjelent ismertető cikkben tárgyaltuk, az eladó kapacitását a a piacok közötti *várható* árarányok függvényében osztja fel az értékesítési piacok között.

Tegyük fel, hogy e várható árarány két ország vonatkozásában az érintett két ország belföldi árainak arányától függ, egy éves késleltetéssel.

A termékek és a piacok heterogének, különösen egy makroökonómiai modellben. Ez azt jelenti, hogy az exporttermékek és a hazai felhasználású termékek árai egymástól eltérően változhatnak. A legtöbb országban az exporttermékek termelékenysége gyorsabban nő, mint a gazdaság egészéé, ami azt jelenti, hogy az exporttermékek relatív ára csökken. Sajnos az árstatisztikák nem különböztetik meg az exportálható és a csak belföldön értékesíthető termékek *belföldi* árát. Így az exporttermékek belföldi ára helyett a belföldi árszint egészének adatait kell használnunk. A kettő közötti eltérést egy trenddel reprezentáljuk az egyenletben. A becslési eredmények azt sejtetik, hogy ez a megoldás nem bizonyult teljesen kielégítőnek, de sajnos jobb nem adódott.

A *várható* ârarányok tehát:

$$\log \frac{\bar{p}_{i\cdot}}{\bar{p}_{\cdot j}} = \beta_{0ij} + \beta_{ij} \log\left(\frac{p_i^d/r_i}{p_j^d/r_j}\right)_{-1} + \beta_{2j}t \qquad (j = 1,\ldots,N, \quad i = 1,\ldots,N, \quad i \neq j) \tag{2}$$

ahol

$\bar{p}_{\cdot i}$, $\bar{p}_{j\cdot}$ az exporttermék várható belföldi ára az exportáló országban, illetve az importáló ország várható átlagos árszintje, közös valutára átszámítva,

p_i^d, p_j^d belföldi eredetű termékek belföldi ára helyi valutában,

r_i, r_j valutaárfolyam (helyi/dollár).

Mivel a várható árak nem figyelhetők meg közvetlenül, a (2) egyenletet nem becsüljük közvetlenül, hanem behelyettesítjük az alábbi volumen-egyenletbe (az egyenlet specifikációjának magyarázatát [1] tartalmazza):

$$\log \frac{x_{ii}}{x_{jj}} = \delta_{1j} \frac{\bar{x}_{i\cdot}^s}{\bar{x}_{j\cdot}^s} + \delta_{1j} \log \frac{p_i^d/r_i}{p_j^d/r_j} + \delta_{2j} \log \frac{p_{ij}}{p_j^d/r_j} + (\delta_{3j} + \delta_{4i})t \qquad (i = 1,\ldots,N, \quad j = 1,\ldots,N, \quad i \neq j) \tag{3}$$

ahol

p_{ij}, p_j^d exportár (dollárban), hazai ár (helyi valutában),

$\bar{x}_{i\cdot}^s$ az i-edik ország kapacitása (tervezett értékesítése).

A tervezett értékesítés megintcsak nem megfigyelhető. Definíció szerint ez azonos a tervezett kapacitással. Mivel a tervezett és a tényleges kapacitás feltehetően erősen korrelálnak egymással, a tényleges kapacitás adatait használtam, mint a tervezett értékesítés indikátorát. Ez azt jelenti, hogy $\bar{x}_{i\cdot}^s$, $\bar{x}_{j\cdot}^s$ az i-edik, illetve j-edik ország termelő kapacitása.

Az összegzési azonosságot (azt, hogy az értékesítések összege azonos az összes fogyasztással), úgy biztosítjuk, hogy a hazai forrás súlyát az összes fogyasztásból maradékként képezzük. Ez az eljárás azonos a kereslet-meghatározta modellekben alkalmazottal.

$$x_{jj} = x_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} x_{ij} \qquad (j = 1,\ldots,N) \tag{4}$$

Azáltal, hogy a modell relációnként becsüli a forgalmat, nem kell megbírkóznunk az ún. kétszintű költségvetési korlát problémájával, vagyis elegendő, ha egy ország költekezésére vonatkozóan betartjuk a költségvetési korlátot, nem kell azzal is törődnünk, hogy az importok összessége kiadja az összes importot. Az összes importra ugyanis a relációnkénti megközelítés miatt nincs szükségünk külön egyenletre, az a részek összegeként adódik.

Továbbra sem biztosított természetesen az, hogy a keresletelmélet által adott egyéb feltételek teljesüljenek (mint például a keresztárrugalmasságok tulajdonságai, stb)

2.3 Egyéb változók

Minden folyóáras forgalom (a diagonális elemek kivételével) a volumenek és az árak szorzata:

$$x\$_{ij} = x_{ij}p_{ij} \qquad (i \neq j) \tag{5}$$

Az összes export változatlan és folyóáron:

$$x_{i.} = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} x_{ij} \tag{6}$$

$$x\$_{i.} = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} x\$_{ij} \tag{7}$$

Az összes import változatlan és folyó áron:

$$x_{.j} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} x_{ij} \tag{8}$$

$$x\$_{.j} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} x\$_{ij} \tag{9}$$

Kereskedelmi mérleg a feldolgozott termékek piacán:

$$b\$_j = x\$_{j.} - x\$_{.j} \tag{10}$$

Aggregált export és import árak:

$$p_{i.} = \frac{x\$_{.i}}{x_{.i}} \tag{11}$$

$$p_{.j} = \frac{x\$_{.i}}{x_{j.}} \tag{12}$$

2.4 Adatkorlátok

Az (1)-(4) egyenletrendszer adatigénye igen nagy. Relációnkénti kereskedelmi áramlások és azok árainak adatait igényli.

Az ENSZ Titkársága összeállította a világkereskedelem mátrixának idősorait és az annak megfelelő árindexeket. Ez az adatbázis szolgált modellem egyik alapjául. Az adatok összeállítása azonban speciális célra készült: a Link-Project keresletdeterminálta, integrált nemzetközi piacot feltételező kereskedelmi modelljének szükségleteit elégíti ki. E szerint a modell szerint az exportárak csak az exportáló szerint különböznek és az importárak az exportárak átlagaként adódnak. Mivel az adatösszeállítók elfogadták ezt a feltevést, csak az exportárakra gyűjtöttek adatokat (egységérték-indexeket), az importárakat pedig átlagként számították. Így az áramlások árindexei importálók szerint definíciószerűen azonosak. Nyilvánvaló, hogy ilyen adatbázissal értelmetlen volna az (1) egyenlet becslése.

A helyes becsléshez áramlásonkénti adatokra volna szükség. Ezek összeállítása meghaladta volna a rendelkezésemre álló erőforrásokat, így egyszerűbb megoldáshoz kellett folyamodnom. Mind a 11 országra rendelkezésre állt az összes import deflátora, nemzeti statisztikai forrásokból. A világ többi részének importára a

$$\sum_{j=1}^{N} x_{.j} = \sum_{i=1}^{N} x_{i.}$$

azonosság felhasználásával volt kiszámítható. Az ENSZ adatbázisának értékadatait a nemzeti statisztikák import deflátor adataival elosztva import volumen adatokhoz jutottam. Ezek természetesen nem voltak konzisztensek az ENSZ mátrixának adataival. RAS algoritmus segítségével hoztam létre a konzisztenciát. Ez az eljárás elvezetett ugyan az egyes áramlások adataihoz, de kétségtelen, hogy nem a nyújtott áramlásonkénti többletinformációt. Így a modell adatbázisa ténylegesen gyengébb, mint ami a "megfigyelések" számából látszana.

3. Becslési eredmények

A becsléshez az országok szerinti keresztmetszeti információt is felhasználtam, feltételezve, hogy az árakra való reakciók országok szerint azonosak, csak a trendekben van különbség. A paneladatok használatával tulajdonképpen nem annyira a becslés szabadságfokának növelése volt a célom, mint az, hogy ne próbáljak a becsléssel olyan információt nyerni, amelyet az adatok nem tartalmaznak. Illúzió lett volna áramlások szerinti paramétereket becsülni olyan adatokból, amelyeket összesen-adatokból generáltunk, tehát nem tartalmaznak áramlásonkénti specifikus információt.

A modellben 11 ország szerepel, az adatbázis az 1972–1987-es éveket öleli fel. Eredetileg egy panelt szerettem volna felállítani a 11 × 11 × 16 megfigyelésre. Számítástechnikai korlátok azonban arra kényszerítettek, hogy felosszam az adatokat. A kereskedelmi áramlásokat importáló országok szerint felosztva két csoportot alakítottam ki. Az első csoportba tartozott az USA, Japan, Korea, Taiwan, Singapúr. Igyekeztem ebbe a csoportba sorolni a fejlettebb országokat. A második csoport országai: Kína, Fülöp-szigetek, Hong-Kong, Thaiföld, Malaysia, Indonézia. Mindkét panelt tovább kellett feleznem megfigyelések szerint. Így külön számítottam együtthatókat az 1972–1979 és az 1980–1987 évekre.

Az alkalmazott becslési eljárás az ún. becsült általánosított legkisebb négyzetek módszerének („estimated generalized least squares method") iteratív változata volt, amely egy olyan súlyozott legkisebb négyzetek módszere, ahol a heteroszkedaszticitás miatti korrekciót minden egyes keresztmetszetre empirikusan becsüljük.

3.1 Exportárak

Az *1. táblázat* mutatja az (1) egyenlet becslési eredményeit. Az együtthatók szignifikánsak. Az áregyütthatók késési struktúrája olyan, hogy az exportáló országnak több súlyt ad a korábbi években. Ez azt jelenti, hogy a cserearány a leértékelés függvényében, mielőtt kiegyenlítődne, először romlik.

1. táblázat: Áregyenletek együtthatói

	Exportáló ország ára			Importáló ország ára			késlelt. end. v.	R^2	DW
	(t)	$(t-1)$	$(t-2)$	(t)	$(t-1)$	$(t-2)$			
1.csoport, 1. periódus	0.58 (10)	0.04 (0.4)	-0.45 (8.8)	0.21 (5.2)	-0.13 (2.5)	0.09 (2.5)	0.37 (7.1)	0.979	1.99
1.csoport, 2. periódus	0.75 (18)	-0.3 (4.4)	-0.34 (7.6)	-0.06 (2.4)	0.15 (5.3)	0.01 (0.3)	0.62 (12.3)	0.958	2.55
2.csoport, 1. periódus	1.06 (16)	-0.57 (5.6)	-0.15 (2.3)	0.28 (4.9)	-0.01 (0.2)	0.07 (1.0)	0.3 (5.9)	0.979	2.19
2.csoport, 2. periódus	0.55 (21)	-0.5 .(9.5)	-0.04 (1.0)	0.01 (0.8)	-0.01 (0.3)	-0.00 (0.01)	0.12 (2.1)	0.917	1.84

3.2 Volumenek

A *2. táblázat* a kereskedelmi áramlások egyenleteinek becslési eredményeit mutatja. Az árelaszticitások meglehetősen alacsonyak. Mint a szimulációs eredményeknél látjuk majd, ez azt eredményezi, hogy a japán jen leértékelésének hatása olyan, hogy a Marshall-Lerner feltétel csak 5 év után érvényesül.

Bár lehetnek érvek, melyek ilyen lassú alkalmazkodás mellett szólnak, a becsült paraméterek valószínűleg mégis lefelé torzítottak. A problémát az okozza, hogy a relatív árak tagjának számlálója és nevezője nem ugyanarra a termékkosárra vonatkozik, mert a nevező tartalmazza külkereskedelmi forgalomba nem kerülő árukat is. Ezeknek az áruknak az ára stabilabb és kevésbé kötődik az exportárakhoz, mint az exportálható termékek belföldi ára. Így a két ár hányadosa erősen ingadozhat, aminek az eredményeként a relatív árak elaszticitásának becslése lefelé torzított lesz.

A második országcsoportra nem mutatható ki a kínálat válasza az árakra. Ez lehet, hogy annak a következménye, hogy az ezekre a kis piacokra szállító exportőröknek olyan nagy a piaci erejük, hogy áraikkal nem kell a helyi árszínvonalhoz igazodniuk. Ebben az esetben az észlelt árkülönbségek csak a termékkosarak eltéréséből származnak.

2. táblázat: Keresleti és kínálati árelaszticitások

	Importár / belföldi ár (keresleti hatás)	Relatív belf. ár (kínálati hatás)	R^2	DW
1. csoport, 1. periódus	–0.60 (6.1)	–0.44 (6.2)	0.999	1.60
1. csoport, 2. periódus	–0.23 (2.8)	–0.22 (6.6)	0.999	2.31
2. csoport, 1. periódus	–0.96 (8.0)	–	0.999	1.64
2. csoport, 2. periódus	–1.05 (11.5)	–	0.999	1.50

4. Szimulációk

Egy nemzetközi kereskedelmi modell szimulációs számításai alkalmasak arra, hogy egy országon belüli esemény nemzetközi hatásait megbecsüljük. Gyakran felmerül például az a kérdés, hogy az USA-ban keletkező gazdasági „sokkok" milyen hatást váltanak ki a kelet-ázsiai országokban. Igaz-e az a mondás, hogy ha az USA tüsszent, akkor Kelet-Ázsia náthát kap?

A hagyományos kereslet-meghatározta modellek azt sugallnák, hogy Kelet-Ázsia nagyon érzékeny az USA gazdasági zavaraira. Ha például egy tipikus ország USA-ba való exportjának jövedelemrugalmassága 2 vagy 3, akkor egy 1 százalékos recesszió az USA-ban 2-3 százalékos exportvisszaesést kellene hogy okozzon a Csendes-óceán túlsó felén, ami az össztermelés 0,5 százalékos visszaeséséhez is vezethet.

Ez a modell nem mutat ilyen nagy függőséget Amerikától. Érdekes lehet megtudni, hogy a kétféle megközelítés predikciói mennyire térnek el egymástól. Annak érdekében, hogy közös bázisunk legyen az összehasonlításhoz, felállítottam egy olyan modell-változatot is, amely az ország-modelleket illetően azonos az eredeti modellel, de a kereskedelem egyenletei más, keresletorientált specifikációra épülnek.

4.1 A keresletorientált modell

Ez a modell tulajdonképpen nem egy tipikusan keynesiánus modell. Annak érdekében ugyanis, hogy minél kevesebbet változtassak az eredeti modellhez képest, megőriztem a piaconként változó árképzés feltevését. Így csak a (4) egyenlet helyébe lép egy másik:

$$x_{ij} = \varepsilon_{0ij} + \varepsilon_{1i} \log x_{jj} + \varepsilon_{2i} \log \frac{p_{ij}}{p_j^d / r_j} \tag{13}$$

Ez a módosítás alapjában megváltoztatja a modell viselkedését.

A becslési eredményeket két táblázat tartalmazza. A *3. táblázat* az árelaszticitásokat, a *4. táblázat* a jövedelemelaszticitásokat mutatja. Az árelaszticitásokat a becslés úgy korlátozta, hogy országonként azonosak legyenek, míg a jövedelemelaszticitások országonként különböznek.

3. táblázat: Árelaszticitások a keresleti modellben

	Árelaszticitás (ε_2)	R^2	DW
1. csoport, 1. periódus	−0.77 (9.5)	0.999	1.46
1. csoport, 2. periódus	−0.92 (11.7)	0.999	2.52
2. csoport, 1. periódus	−0.84 (8.4)	0.999	1.59
2. csoport, 2. periódus	−1.23 (15.1)	0.999	1.62

4. táblázat: Keresleti elaszticitás a keresleti modellben

Országok	1. periódus		2. periódus	
	elasztic.	t-próba	elasztic.	t-próba
USA	4.3	(19)	4.2	(28)
Japán	19	(6.4)	1.5	(6.3)
Korea	1.4	(12)	1.3	(9.6)
Taiwan	0.8	(6.8)	1.0	(2.6)
Fülöp-szigetek	3.9	(18)	1.9	(2.4)
Thaiföld	0.7	(8.9)	1.3	(10)
Hongkong	1.2	(16)	1.6	(14)
Indonézia	0.2	(1.0)	2.2	(7.6)
Malaysia	1.0	(10)	1.4	(12)
Singapúr	1.4	(8)	0.5	(2.8)
Kína	2.3	(4.6)	2.2	(7.6)

4.2. Eredmények

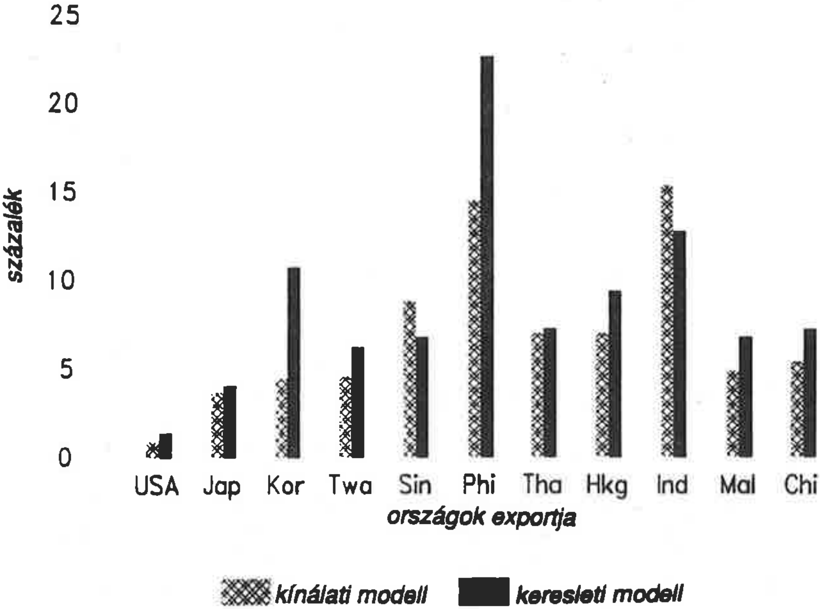
Az összehasonlítás érdekében mindkét modellel azonos szimulációkat futtattam le. Az egyik modellt keresleti, a másikat kínálati modellnek hívom az egyszerűség kedvéért. Valójában tudjuk, hogy az utóbbinál a helyes elnevezés az árak és változatok versenyének modellje lenne.

5. táblázat: Szimulációs hibák (1972 – 1987)

export változók	Kínálati modell				Keresleti modell			
	A	B	C	D	A	B	C	D
US	1244.81	1010.98	.97	.81	1854.16	1498.41	1.45	1.18
Japán	5387.99	4017.43	3.76	3.06	5197.26	4063.72	4.14	3.38
Korea	608.19	493.81	4.54	3.76	1351.45	931.15	10.78	7.37
Taiwan	754.71	619.25	4.62	3.74	1733.84	1090.45	6.27	5.01
Singapúr	740.98	585.14	8.88	7.61	830.98	533.22	6.82	5.01
Fülöp-sz.	261.31	155.45	14.51	9.14	357.84	276.55	22.71	15.56
Thaiföld	281.13	183.65	7.01	5.76	340.19	204.56	7.35	5.86
Hongkong	1868.68	1206.14	7.11	5.58	1990.07	1467.30	9.43	7.64
Indonézia	482.83	307.67	15.38	13.02	358.54	240.18	12.78	10.58
Malaysia	179.66	158.88	4.91	4.17	305.43	239.53	6.80	5.70
Kína	726.35	535.52	5.40	4.71	1560.76	824.69	7.22	5.55
exportárak változók	**Kínálati modell**				**Keresleti modell**			
	A	B	C	D	A	B	C	D
US	.00	.00	.42	.36	.00	.00	.42	.36
Japán	.03	.02	2.74	2.19	.03	.02	2.72	2.17
Korea	.01	.01	2.11	1.49	.02	.01	2.19	1.52
Taiwan	.02	.02	2.63	2.02	.02	.02	2.63	2.01
Singapore	.04	.03	4.79	3.56	.04	.03	4.90	3.65
Fülöp-sz.	.04	.03	5.17	4.08	.04	.03	5.28	4.11
Thaiföld	.02	.02	3.01	2.27	.02	.02	3.02	2.27
Hongkong	.02	.01	2.45	1.73	.02	.01	2.34	1.71
Indonézia	.05	.04	7.57	6.37	.05	.04	7.38	6.26
Malaysia	.02	.02	3.20	2.81	.02	.02	3.17	2.78
Kína	.03	.02	3.76	3.03	.03	.02	3.68	3.01

A = hibák szórása (RMSE)
B = átlagos abszolút hiba (AAE)
C = relatív hibaszórás (RMSPE)
D = relatív átlagos abszolút hiba (AAPE)

1. ábra: Szimulációs hibák szórása (1972–1987)



Keresleti sokk

Először egy keresleti sokk hatását szimuláljuk Kelet-Ázsiára. A következő kérdésre keressük a választ: hogyan változnak az érintett országok főbb változói, ha az USA fogyasztási hajlandósága 1 százalékkal csökken? Mintaként csak Japán és az USA adatait közlöm a *6. Táblázat*ban. A többi országra az eredmény nagyon hasonló. A két modell nagyon különbözőnek mutatja Japán gazdasági érzékenységét az USA-tól. Az USA fogyasztásának egyszeri (egy évig tartó) autonóm növekedése multiplikátor-hatás révén növeli az USA-ban is és Japánban is a keresletet, az előbbiben az első évben 1,3 százalékos a növekedés, az utóbbiban 0,22 százalékos. Ez nagyon magas szám, hiszen a japán export nem több, mint 1,2–2 százaléka az USA GDP-jének és 3-5 százaléka a japán GDP-nek. A kínálati modellben az átgyűrűző hatás kisebb. A multiplikátor-hatás nagyobb otthon és kisebb Japánban. Az első évben a GDP multiplikátora 0,06 százalék. Az eltérés az importelaszticitások különbségeiből adódik. A keresleti modellben a hatást felnagyítja az irreálisan magas jövedelmi rugalmasság.

A keresleti modell torzításai nyilvánvalóak még akkor is, ha nem számítunk szimulációkat. Gondoljuk meg, hogy az USA recessziója esetén Kelet-Ázsiában jobban kellene csökkennie az oda irányuló exportnak, mint az átlag. Valójában a tapasztalat egészen mást mutat: a kelet-ázsiai export éppenhogy ellenállóbb a recessziókkal szemben. A keresleti modell keretei között gondolkodva azt kellene mondanunk, hogy a piac aszimmetrikusan viselkedik recesszióban és fellendülésben, pedig csak a figyelmen kívül hagyott kínálat az, ami az aszimmetrikus viselkedés látszatát kelti: a kínálat hatása mind recesszióban, mind a fellendüléskor pozitív előjellel adódik hozzá a keresletéhez.

6. táblázat: Multiplikátorok, ha az USA fogyasztási hajlandósága 1 százalékkal nő

USA		1. év	2. év	3. év	4. év	5. év
Import	Kínálati modell	0.51	0.05	0.06	0.07	0.05
	Keresleti modell	1.89	0.65	0.16	0.18	0.11
Export	Kínálati modell	0.10	0.06	–0.03	–0.02	0.02
	Keresleti modell	0.25	0.06	–0.06	–0.04	0.03
Keresk. mérleg (md. dollár)	Kínálati modell	–1.04	0.09	0.04	–0.07	–.011
	Keresleti modell	–3.08	–1.22	–0.33	–0.46	0.36
GDP	Kínálati modell	1.45	0.40	0.07	0.09	0.05
	Keresleti modell	1.30	0.30	0.03	0.04	0.00
Belföldi ár	Kínálati modell	–1.44	0.18	0.24	0.25	0.29
	Keresleti modell	–1.40	0.17	0.20	0.20	0.21
Cserearány	Kínálati modell	–0.21	0.04	0.13	0.08	0.05
	Keresleti modell	–0.16	0.02	0.10	0.07	0.04
Japán		**1. év**	**2. év**	**3. év**	**4. év**	**5. év**
Import	Kínálati modell	0.10	0.12	–0.01	–0.00	0.01
	Keresleti modell	0.46	0.17	–0.02	0.02	0.05
Export	Kínálati modell	0.33	0.04	0.04	0.04	0.03
	Keresleti modell	1.21	0.49	0.11	0.11	0.06
Keresk.mérleg (md. dollár)	Kínálati modell	0.63	–0.06	–0.00	0.05	0.06
	Keresleti modell	1.87	0.76	0.20	0.26	0.19
GDP	Kínálati modell	0.06	0.02	0.02	0.02	0.03
	Keresleti modell	0.22	0.14	0.08	0.07	0.08
Belföldi ár	Kínálati modell	–0.03	0.02	0.04	0.04	0.04
	Keresleti modell	0.01	0.07	0.10	0.10	0.10
Cserearány	Kínálati modell	0.42	–0.04	–0.20	–0.12	0.07
	Keresleti modell	0.45	0.04	–0.14	–0.07	0.03

4.3 Árfolyam-sokk

Az árfolyam-sokk szimuláció egy 10 százalékos jen-leértékelés hatását számítja ki. Egy felértékelés hatása természetesen egyszerűen az előjelek megváltoztatásával adódik.

7. táblázat: Multiplikátorok a jen 10 százalékos leértékelése esetén

USA		1. év	2. év	3. év	4. év	5. év
Import	Kínálati modell	0.16	0.46	0.40	0.33	0.26
	Keresleti modell	0.50	0.68	0.50	0.24	0.02
Export	Kínálati modell	−0.06	−0.15	−0.14	−0.14	0.13
	Keresleti modell	−0.32	−0.27	−0.23	−0.26	0.23
Keresk. mérleg (md. dollár)	Kínálati modell	1.44	1.20	0.69	0.43	0.22
	Keresleti modell	0.40	0.54	0.48	0.44	0.86
GDP	Kínálati modell	−0.09	−0.07	−0.01	−0.02	0.03
	Keresleti modell	−0.16	−0.13	−0.05	−0.03	0.00
Belföldi ár	Kínálati modell	−0.28	−0.39	−0.37	−0.36	0.35
	Keresleti modell	−0.24	−0.38	−0.41	−0.40	0.40
Cserearány	Kínálati modell	1.04	1.12	0.76	0.53	0.35
	Keresleti modell	1.00	1.12	0.81	0.51	0.35
Japán		**1. év**	**2. év**	**3. év**	**4. év**	**5. év**
Import	Kínálati modell	−0.42	−1.17	−1.09	−1.07	0.95
	Keresleti modell	−2.13	−2.01	−1.72	−1.78	1.55
Export	Kínálati modell	0.87	1.62	1.33	1.12	0.99
	Keresleti modell	1.74	2.34	1.73	1.24	0.86
Keresk. mérleg (md. dollár)	Kínálati modell	−1.70	−1.20	−0.53	−0.15	0.24
	Keresleti modell	0.16	0.17	0.24	0.40	0.24
GDP	Kínálati modell	0.48	0.12	0.10	0.09	0.26
	Keresleti modell	0.71	0.35	0.31	0.24	0.38
Belföldi ár	Kínálati modell	4.27	4.25	4.55	4.65	4.80
	Keresleti modell	4.27	4.30	4.64	4.75	4.91
Cserearány	Kínálati modell	−2.14	−2.25	−1.33	−0.93	0.69
	Keresleti modell	−1.91	−2.12	−1.28	−0.88	0.69

Feltűnő, hogy milyen sokáig tart, amíg a kereskedelmi mérleg javulni kezd a kínálati modell szerint. A keresleti modellben ezzel szemben a javulás késés nélküli és a mennyiség változásának a hatása már az első évben döntő. A kínálati modellben az első négy évben a cserearány romlásának a hatása nagyobb, mint a volumenváltozásé, és csak az 5. évben javul a mérleg értéke. Bár az árelaszticitások becslésének már említett torzítottsága eltúlozhatja az alkalmazkodási folyamat becsült hosszát, az utóbbi 6 év eseményei az USA-Japán kereskedelemben megerősíteni látszanak az eredményt. A dollár 1985-ben megindult gyengülése évekig nem hozta meg a japán kereskedelmi mérleg romlását. Ez érthető, ha meggondoljuk, hogy a forgalom változásai mögött jórészt a kínálat viselkedése áll. Márpedig a termelőknek időre van szükségük, hogy átállítsák terveiket, megváltoztassák piaci stratégiájukat, új üzemeket állítsanak fel, stb. A felszínen a változás úgy mutatkozhat meg, mint a jövedelemrugalmasságok megváltozása, mint ahogy az több forrásban is szerepel.[2] Valójában ez a kínálat hatása, a japán cégek exportstratégiájáé.

Érdekes, hogy mindkét modell jól közelíti a tényeket, mégis egészen más predikcióra vezetnek. Ez a tény arra figyelmeztet, hogy a modellek megalkotásánál nem a függvények illeszkedési tulajdonságai a fontosak, hanem a mögöttük lévő közgazdasági elmélet.

4.4 Modellméret, szimulációs technika

A modellrendszer 1300 egyenletből áll. Ahhoz, hogy ez kezelhető legyen személyi számítógépen az AREMOS szoftverrel, a feladatot fel kellett osztani. Külön futtatjuk az országmodelleket és a kereskedelmi modellt. A kapacitás és a belföldi árak egzogének a kereskedelmi modell számára, de endogének az országmodellekben. Az export és import árai és mennyiségei egzogének az országmodellekben, de endogének a kereskedelmi modellben. Az országmodellek szimulációinak outputjai képezik a kereskedelmi modell inputjait és viszont. Egy AREMOS program gondoskodik az outputok és inputok diszken való tárolásáról illetve hozzáférhetőségéről és az iterációkról. Mintegy 5 szimuláció kielégítő konvergenciát biztosít. Futtatása 5 évre mintegy 2 órát vett igénybe egy 25 Mhz 386-os AT-n, ram-diszk nélkül. Ez az eljárás kissé nehézkesnek és lassúnak tűnhet, de kétségtelenül egyszerűbb, mint bármilyen nagygépes megoldás.

Az [1] cikk nemcsak a modell elméleti hátterének leírását, de a kapcsolódó irodalmi hivatkozásokat is tartalmazza. A modellben szereplő ökonometriai országmodellek leírásait az érdeklődő olvasó számára a szerző szívesen rendelkezésre bocsátja, de sajnos publikált leírásuk nem létezik.

Irodalom

1. Simon András (1993): A nemzetközi kereskedelem modellezése heterogén termékek esetén. *Szigma* 24 (1993). 1–21.

[2] Lásd például az [1] cikk irodalomjegyzékében a következőket: Nomura Medium-term Economic Outlook for Japan and the World (1989) vagy Industrial Bank of Japan (1990).

A MODEL OF EAST-ASIAN TRADE

The author applies his ideas on trade determination explained in the previous issue of this journal in an empirical model. His model contains variables that explain variety competition together with traditional variables of price competition. The model is designed in a way that it has the classical property of the law of one price for tradable goods in the long run and terms of trade effects of the Neo-Keynesian tradition in the short run. Differentiating among trade prices flow-by-flow it contains pricing-to-the market effects as well. It contains simulation results in comparison with a purely price competitive model.

AZ ÁRVÁLTOZÁSOK ÉS A JÖVEDELEMSZINT VÁLTOZÁSA KÖZÖTTI KAPCSOLAT MODELLEZÉSE AZ ÉLELMISZERGAZDASÁGBAN[1]

VINCZE MÁRIA
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

Az élelmiszergazdaság fejlődésének alapvető feltétele a jövedelemérdekeltség biztosítása a vertikális lánc minden eleme szintjén. Az a feltevés, hogy a feladat megoldható az élelmiszergazdasági rendszer főbb láncszemei közti jövedelemátcsoportosítással ellentmond a tényeknek, mert például jelenleg Romániában nem csak a mezőgazdasági, de az élelmiszeripari egységek jó része is ráfizetéses vagy jobb esetben is az átlagos nemzetgazdasági jövedelmezőségi rátánál alacsonyabb értéket ér el. A valós feladat: megteremteni a jövedelemtermelés feltételeit minden egyes láncszem vonatkozásában. Tanulmányunkban a mezőgazdaság és az élelmiszeripar területén vizsgáljuk azoknak a külső és belső feltételeknek az összefüggéseit, amelyek a jövedelmezőség változását befolyásolják.

1. A modell koncepciója

A piacgazdaság körülményei között a legtöbb vállalat az input és output árakkal mint külső tényezőkkel számol, amelyek a jövedelmezőséget döntő mértékben befolyásolják. A mezőgazdaságban az agrárolló alakulását tekintik döntőnek, míg az élelmiszeriparban főleg a mezőgazdasági alapanyagok és az élelmiszertermékek termelési ára közti arány változása a mérvadó. Ez a megközelítés azon alapszik, hogy a mezőgazdaságban és az élelmiszeriparban is átlagosan 60%-os nagyságrendű az a költséghányad, amit az ipari inputok jelentenek a mezőgazdaságban, illetve a mezőgazdasági nyersanyag költsége tesz ki az élelmiszerek önköltségében. A külső tényezőként kezelhető áralakulást a vállalatok csakis a belsőnek tekinthető hatékonysági tényezők alakításával ellensúlyozhatják. A mennyiségi összefüggések levezetésénél néhány egyszerűsítő feltételt fogadtunk el:

- Egytermékes input-output kapcsolat esetét vizsgáljuk, azaz egyszerű indexszel dolgozunk és ismertnek tekintjük a termelési függvényt.

[1] Beérkezett: 1994. január 23.

- A vállalati jövedelem változásának számításánál állandónak tekintjük a bérjellegű költségeket, valamint a termelési támogatások és elvonások egyenlegét is az egymást követő időszakokban; így a mezőgazdaságban a bevételekből az ipari inputok költségeit, míg az élelmiszeriparban csak a mezőgazdasági nyersanyagok költségeit vonjuk le a bevételekből a jövedelem becslésénél, illetve a jövedelem változási indexének a számításánál.

Az első feltevés csak a képletek levezetésének az egyszerűsítését szolgálja, a számítások, bizonyítások összetett index esetén is fennállnak; ezt ellenőriztük is. A második feltétel lehetővé teszi, hogy a jövedelem változásának gazdasági elemzése során az agrárolló, illetve az élelmiszer- és agrárár arányának a változására alapozhassunk (2), amelyek makrogazdasági szinten is könnyen nyomon követhetők.

Az alábbi jelöléseket vezettük be:

1. táblázat

	bázis időszak	jelen időszak
Mezőgazdasági input árak	PI^0	PI^1
Mezőgazdasági output, illetve élelmiszeripari input árak	PO^0	PO^1
Élelmiszeripari output árak	PA^0	PA^1
Mezőgazdasági input volumen	QI^0	QI^1
Mezőgazdasági output volumen	QO^0	QO^1
Élelmiszeripari input volumen	QO_p^0	QO_p^1
Élelmiszeripari output volumen	QA^0	QA^1
Mezőgazdasági vállalati bruttó nyereség	NO^0	NO^1
Élelmiszeripari vállalati bruttó nyereség	NA^0	NA^1
Mezőgazdasági termelési érték	TO^0	TO^1
Élelmiszeripari termelési érték	TA^0	TA^1
Mezőgazdasági termelésben felhasznált ipari input költsége	KI^0	KI^1

Vizsgáljuk meg előbb részletesen a mezőgazdasági láncszem jövedelmezőségi tényezőit.

2. A jövedelmezőség változása és az agrárolló közti összefüggés a mezőgazdaságban

A gazdasági elemzés alapját a következő összefüggés képezi (levezetését lásd az 1. függelékben):

$$\frac{\frac{QO^0 \cdot PO^0}{QI^0 \cdot PI^0}\left(\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0} - i_{NO}\right) + i_{NO}}{\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0}} \cdot \frac{\frac{QO^1}{QI^1}}{\frac{QO^0}{QI^0}} = \frac{\frac{PI^1}{PI^0}}{\frac{PO^1}{PO^0}} \tag{1}$$

Az (1) összefüggésben szereplő mennyiségek jól körülírható gazdasági tartalommal bírnak:

$\frac{QO^0 \cdot PO^0}{QI^0 \cdot PI^0}$ – az input értékének a hatékonyságát méri a bázis időszakban (HI_e^0)

$\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0}$ – a mezőgazdasági termelési érték indexe (i_{TO})

i_{NO} – a mezőgazdasági vállalat bruttó nyereségének indexe

$\frac{QO^1}{QI^1} : \frac{QO^0}{QI^0}$ – az inputfelhasználást mérő transzformációs tényező indexe (i_{HI})

$\frac{PI^1}{PI^0} : \frac{PO^1}{PO^0}$ – az agrárolló, vagyis a mezőgazdasági input és output árváltozások aránya (i_{IO})

Ezeknek a jelöléseknek a felhasználásával a fenti (1) összefüggés így írható fel:

$$\frac{HI_e^0(i_{TO} - i_{NO}) + i_{NO}}{i_{TO}} \cdot i_{HI} = i_{IO} \tag{2}$$

vagy a nyereségindex kifejezésével

$$i_{NO} = \frac{i_{TO}}{i_{HI}} \cdot \frac{HI_e^0 \cdot i_{HI} - i_{IO}}{HI_e^0 - 1} \tag{2'}$$

Ezek a tényezők azonban nem függetlenek egymástól, könnyen levezethető az alábbi azonosság:

$$i_{TO} = \frac{i_{HI}}{i_{IO}} \cdot i_{KI} \tag{3}$$

ahol a mezőgazdasági termelési érték indexe (i_{TO}) egyenlő az inputfelhasználás transzformációs indexe (i_{HI}) és az agrárolló (i_{IO}) hányadosa szorozva az ipari input költség érték indexével (i_{KI}).

Ebből viszont világosan kitűnik, hogy a mezőgazdasági termelés változását főleg az agrárolló és az ipari input költség érték változása, valamint a hatékonysági transzformációs index változása befolyásolja. Ezek közül az agrárolló alakulása a külső tényező és részben az input költség alakulása is külsőnek tekinthető; belső – vállalati – szinten kezelhető viszont a hatékonyság befolyásolása. Ha a vizsgált időszakban nem változik az ipari input felhasználás és azonos arányban változnak az input és output árak, akkor a mezőgazdasági termelés növekedését döntően az inputfelhasználás hatékonyságának a változása határozza meg.

Ha a (3) azonosságot a (2') összefüggésbe behelyettesítjük, akkor az alábbi képletet kapjuk:

$$i_{NO} = \frac{i_{KI}}{i_{IO}} \cdot \frac{HI_e^0 \cdot i_{HI} - i_{IO}}{HI_e^0 - 1} \tag{4}$$

A (2') és a (4) összefüggések olyan modellnek tekinthetők, amelyek lehetővé teszik az egyes tényezők hatásának vizsgálatát a jövedelmezőségre. Ha feltételezzük, hogy a bázisévben az input értéke ($QI^0 \cdot PI^0$) az output értékének ($QO^0 \cdot PO^0$) 60%-át teszi ki, akkor $HI_e^0 = 1,66$ és

$$\frac{HI_e^0 \cdot i_{HI} - i_{IO}}{HI_e^0 - 1} \approx 2,5 i_{HI} - 1,5 i_{IO} \ ,$$

ahonnan

$$i_{NO} = \frac{i_{TO}}{i_{HI}}(2,5 i_{HI} - 1,5 i_{IO}) \ , \tag{2''}$$

illetve

$$i_{NO} = \frac{i_{KI}}{i_{IO}}(2,5 i_{HI} - 1,5 i_{IO}) \ . \tag{4'}$$

Lényeges kérdés, hogy az agrárolló nyílása esetén ($i_{IO} > 1$) milyen feltételeknek kell teljesülniök, hogy a jövedelem növekedjék ($i_{NO} > 1$). Erre vonatkozóan a szakirodalomból [3, 2] ismert két ekvivalens feltétel: az inputfelhasználás hatékonyságának növekedése meghaladja az agrárolló nyitását ($i_{HI} > i_{IO}$); illetve a mezőgazdasági termelési értéknövekedés nagyobb fokú, mint az ipari inputköltségek növekedése ($i_{TO} > i_{KI}$). Bármelyik feltétel teljesülése esetén a jövedelem az agrárolló nyitása mellett is növekedik ($i_{NO} > 1$).

A (2) összefüggésből az a kevésbé szigorú feltétel is levezethető, hogy a bruttó nyereség szinten tartása vagy növelése ($i_{NO} \geq 1$) az agrárolló nyitásánál alacsonyabb ütemű inputhatékonyság-növekedés ($i_{HI} < i_{IO}$) esetén is megvalósítható. Ehhez viszont az szükséges, hogy a mezőgazdasági termelési érték növekedése meghaladja a nyereség növekedését ($i_{TO} \geq i_{NO}$), ami a gyakorlatban általános jelenség. A fenti kijelentés igazolására bevezetjük az alábbi jelölést:

$$k = \frac{HI_e^0(i_{TO} - i_{NO}) + i_{NO}}{i_{TO}} \tag{5}$$

Egyszerűen igazolható, hogy $k > 1$, azaz

$$HI_e^0(i_{TO} - i_{NO}) + i_{NO} > i_{TO} \ ,$$

mivel

$$(HI_e^0 - 1)(i_{TO} - i_{NO}) > 0\,, \qquad \text{ha} \qquad i_{TO} > i_{NO}\,.$$

A (2) összefüggés a bevezetett jelöléssel $k \cdot i_{HI} = i_{IO}$, azaz $i_{HI} = i_{IO}/k$ formában írható, és mivel $k > 1$, következik, hogy $i_{HI} \leq i_{IO}$.

A következőkben bemutatjuk, hogyan használhatók a (2') és (4) összefüggések a bruttó nyereség változásának (i_{NO}) tanulmányozására az agrárolló (i_{IO}), az input transzformációs hatékonyság (i_{HI}), a mezőgazdasági termelési érték (i_{TO}) és az ipari inputköltség (i_{KI}) változásának a függvényében. Mennyiségi szimuláció végezhető, ami a döntéshozatal jobb megalapozottságát és a koherens tervezést segítheti elő.

Jelöljük a tanulmányozott tényezők változásának a mértékét a következőképpen:

$$i_{NO} = 1 + \frac{a}{100};\; i_{IO} = 1 + \frac{b}{100};\; i_{HI} = 1 + \frac{c}{100};\; i_{TO} = 1 + \frac{d}{100};\; i_{KI} = 1 + \frac{e}{100}; \tag{6}$$

A következő típusú kérdésekre kaphatunk mennyiségileg jellemezhető választ:

– Hány százalékos input transzformációs hatékonysági tényező ($c = ?$) mellett érhető el a bruttó nyereség a százalékkal való növelése, ha az agrárolló nyitását b százalékra becsülik és a mezőgazdasági termelési érték d százalékos növekedését tervezik, ismerve a bázisév inputértékének hatékonyságát (HI_e^0)? A (2) összefüggésből a (6) jelölések felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$1 + \frac{c}{100} = \frac{(1 + \frac{b}{100})(1 + \frac{d}{100})}{HI_e^0(1 + \frac{d}{100}) + (1 + \frac{a}{100})(1 - HI_e^0)}\,, \tag{7}$$

ahonnan c értéke kifejezhető. Hasonlóképpen válaszolhatók meg más kérdések is, például:

– Milyen mezőgazdasági termelési értéknövekedést ($d = ?$) szükséges biztosítani ahhoz, hogy az előzetesen becsült b százalékos agrárolló-nyílás mellett a jövedelem ne csökkenjen ($i_{NO} \geq 1$), feltételezve, hogy az input transzformációs hatékonysági index c százalékos csökkenése várható?

– Hány százalékos agrárolló-nyitás ($b = ?$) mellett tarthatók szinten a vállalati jövedelmek ($i_{NO} = 1$) abban az esetben, ha a mezőgazdasági termelési érték változása d százalék, az inputhatékonysági indexé pedig c százalék?

– Hány százalékos bruttó nyereségváltozás ($a = ?$) érhető el, ha az agrárolló nyílása b, a mezőgazdasági termelés változása d, és az input hatékonysági index változása c százalékos?

– Hány százalékos bruttó nyereségváltozás ($a = ?$) érhető el, ha az agrárolló nyílása b, az ipari inputköltség változása e és az input hatékonysági index változása c százalékos?

Vizsgálható a tényezők 1 százalékos változásának (az elaszticitásnak, rugalmasságnak) a hatása is, valamint két vagy több tényező közötti kapcsolat, adottnak tekintve a többit. Gyakorlati elemzések céljából ajánlatos nomogramot, táblázatot összeállítani.

Az élelmiszertermelés mezőgazdasági láncszemének elemzéséből kitűnik, hogy a jövedelmezőség változását befolyásolja az ipari inputköltségek alakulása és az agrárolló változása mint külső tényezők, valamint az ipari input felhasználási hatékonysága, illetve a mezőgazdasági termelési érték változása, mint a vállalaton belüli tényezők.

3. A jövedelmezőség változását befolyásoló főbb tényezők az élelmiszeriparban

Az élelmiszeriparban a legnagyobb költséghányadot a mezőgazdasági nyersanyagok jelentik, így ezek árváltozása, illetve hatékony feldolgozása döntő módon hat a jövedelmezőség, így a bruttó nyereség alakulására is. Felhasználva a már bevezetett jelöléseket, a fenti meggondolások analógiájára levezethető a következő összefüggés:

$$\frac{\dfrac{QA^0 \cdot PA^0}{QO_p^0 \cdot PO^0}\left[\dfrac{QA^1 \cdot PA^1}{QA^0 \cdot PA^0} - i_{NA}\right] + i_{NA}}{\dfrac{QA^1 \cdot PA^1}{QA^0 \cdot PA^0}} \cdot \frac{\dfrac{QA^1}{QO_p^1}}{\dfrac{QA^0}{QO_p^0}} = \frac{\dfrac{PO^1}{PO^0}}{\dfrac{PA^1}{PA^0}} . \tag{8}$$

Az egyszerűsítő jelöléseket alkalmazva az alábbi képletet kapjuk:

$$\frac{HO_e^0(i_{TA} - i_{NA}) + i_{NA}}{i_{TA}} \cdot i_{HO} = i_{OA} \tag{9}$$

ahol

- HO_e^0 a feldolgozott mezőgazdasági nyersanyag értékének gazdasági hatékonyságát méri a bázisévben;
- i_{TA} az élelmiszer termelési érték indexe az elemzett időszakban;
- i_{NA} a bruttó nyereség indexe az élelmiszeripari vállalat szintjén;
- i_{HO} a mezőgazdasági nyersanyag kihozatali-hatékonysági indexe;
- i_{OA} a mezőgazdasági nyersanyag és az élelmiszeripari termék árváltozási indexeinek az aránya.

A nyereségindex értékét kifejezve kapjuk:

$$i_{NA} = \frac{i_{TA}}{i_{HO}} \cdot \frac{HO_e^0 \cdot i_{HO} - i_{OA}}{HO_e^0 - 1} \tag{9'}$$

Levezethető a tényezők közötti alábbi összefüggés is:

$$i_{TA} = \frac{i_{HO}}{i_{OA}} \cdot i_{TO} \cdot i_f \tag{10}$$

ahol

$$i_f = \frac{QO_p^1}{QO^1} : \frac{QO_p^0}{QO^0}$$

az össz mezőgazdasági termelés feldolgozásra kerülő részarányának indexe.

Ha feltételezzük, hogy $QO_p \approx QO$, akkor $i_f = 1$ és

$$i_{TA} = \frac{i_{HO} \cdot i_{TO}}{i_{OA}} \tag{10'}$$

A (10) azonosságot behelyettesítve a (9')-be kapjuk:

$$i_{NA} = \frac{i_{TO} \cdot i_f}{i_{OA}} \cdot \frac{HO_e^0 \cdot i_{HO} - i_{OA}}{HO_e^0 - 1} \tag{11}$$

A (9') és a (11) összefüggések lehetőséget nyújtanak arra, hogy az élelmiszeripari vállalatok jövedelmezőségének változását vizsgáljuk a külső (i_{OA}, i_{TO}), valamint a belső tényezők (HO_e^0, i_{HO}) változásai függvényében adott feldolgozási arány (i_f) változás mellett.

Az elemzések konkrét mennyiségi formában végezhetők ugyanolyan módon, mint ahogy azt a mezőgazdasági vállalatok esetében kifejtettük.

4. Az élelmiszertermelési lánc jövedelmezőségét befolyásoló tényezők kapcsolati modellje

Miután az ipari input (I) és a mezőgazdasági output (O), illetve a mezőgazdasági input (O_p) és élelmiszeripari output (A) vonatkozásában levezettük a jövedelmezőségi összefüggéseket, most ezek összekapcsolásával az ipari input – mezőgazdasági termék – élelmiszeripari output képezte lánc jövedelmezőségi tényezőit foglaljuk egy képletbe.

Egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy csak az ipari feldolgozásra kerülő mezőgazdasági termelést vesszük számba, azaz $QO \approx QO_p$, és akkor az alábbi összefüggést kapjuk (levezetés a 2. függelékben):

$$\frac{HI_e^0 \cdot HO_e^0(i_{TA} - i_N) + i_N}{i_{TA}} \cdot i_{HI} \cdot i_{HO} = i_{IO} \cdot i_{OA} \tag{12}$$

ahol

$$i_N = \frac{i_{NA} \cdot \dfrac{1}{NO^0} + i_{NO} \cdot \dfrac{1}{NA^0}}{\dfrac{1}{NO^0} + \dfrac{1}{NA^0}} ; \tag{13}$$

$$NO^0 = QO^0 \cdot PO^0 - QI^0 \cdot PI^0 ,$$

és

$$NA^0 = QA^0 \cdot PA^0 - QO^0 \cdot PO^0 ,$$

azaz a bruttó nyereség értéke a bázisidőszakban a mezőgazdasági, illetve az élelmiszeripari vállalat szintjén.

A (12) összefüggésből kifejezhető a nyereség indexe is:

$$i_N = \frac{i_{TA}}{i_{HI} \cdot i_{HO}} \cdot \frac{HI_e^0 \cdot HO_e^0 \cdot i_{HI} \cdot i_{HO} - i_{IO} \cdot i_{OA}}{HI_e^0 \cdot HO_e^0 - 1} \tag{14}$$

Rendre behelyettesítve a (10') és a (3) összefüggéseket, a következő képleteket kapjuk:

$$i_N = \frac{i_{TO}}{i_{HI} \cdot i_{OA}} \cdot \frac{HI_e^0 \cdot HO_e^0 \cdot i_{HI} \cdot i_{HO} - i_{IO} \cdot i_{OA}}{HI_e^0 \cdot HO_e^0 - 1} \tag{14'}$$

vagy

$$i_N = \frac{i_{KI}}{i_{IO} \cdot i_{OA}} \cdot \frac{HI_e^0 \cdot HO_e^0 \cdot i_{HI} \cdot i_{HO} - i_{IO} \cdot i_{OA}}{HI_e^0 \cdot HO_e^0 - 1} . \tag{14''}$$

A levezetett összefüggésekből kitűnik, hogy a külső tényezőként tekinthető árváltozások (i_{IO}, i_{OA}) hatása a nyereség változására (i_N) függ a vállalati hatékonyság már elért szintjétől (HI_e^0, HO_e^0), az input tényezők felhasználási hatékonyságának módosulásától (i_{HI}, i_{HO}), valamint az egyes vertikumok szintjén mutatkozó termelés, illetve felhasználás mértékétől (i_{TO}, i_{KI}, i_{TA}). A (14), (14'), (14") képletek gazdasági szimuláció végzését is lehetővé teszik, ugyanolyan módon, mint ahogy azt a mezőgazdasági vállalatok vonatkozásában már jeleztük.

A gyakorlati alkalmazási lehetőség illusztrálására közöljük a 2. és 3. táblázatokat. Előbbi a bruttó nyereségindex változását leíró összefüggéseket tartalmazza adott bázisévi input hatékonysági értékek mellett, míg az utóbbi konkrét számítási értékeket is bemutat az inputfelhasználás indexére vonatkozóan. Kitűnik, hogy lehetséges olyan helyzet is, amikor nyíló agrárolló mellett is fenntartható a rentabilitás szintje anélkül, hogy az inputhatékonyság növekedne, de az árváltozások negatív hatása általában a hatékonyság növelésével ellensúlyozható.

Az egyes tényezők hatását elkülönülten is lehet vizsgálni a többszörös standardizálás módszerének alkalmazásával. Eszerint rendre vizsgálható az egyes tényezők változásának hatása a többi tényezőt állandó szinten tartva. Természetesen a „konstans" szint is rendre változtatható, különböző értékeken rögzítve. Ily módon sor kerülhet minden egyes okozati tényező hatásának külön-külön való vizsgálatára, majd kettesével, hármasával vehető figyelembe az okozati tényezők változásának hatása a nyereségindexre.

A levezetett összefüggések lehetőséget nyújtanak a bruttó nyereségindex számítására, így előrejelzés végezhető.

További pontosítást jelenthet az indexváltozások valószínűségének becslése alapján való számítás; ekkor az eredmény is aleatórikus változóként fejezhető ki.

2. táblázat: A bruttó nyereségindex változása a külső és belső tényezők függvényében (az input részaránya 0.60; $HI_e^0 = HO_e^0 = 1.66$*)*

A vertikális lánc elemei	A bruttó nyereségindex képlete	Meghatározó tényezők		
		külső	belső	részleges
Mezőgazdaság	$i_{NO} = \frac{i_{TO}}{i_{HI}}(2.5i_{HI} - 1.5i_{IO})$	i_{IO}	i_{HI}	i_{TO}
	$i_{NO} = \frac{i_{KI}}{i_{IO}}(2.5i_{HI} - 1.5i_{IO})$	i_{KI} i_{IO}	i_{HI}	–
Élelmiszeripar	$i_{NA} = \frac{i_{TA}}{i_{HO}}(2.5i_{HO} - 1.5i_{OA})$	i_{OA}	i_{HO}	i_{TA}
	$i_{NA} = \frac{i_{TO}}{i_{OA}}(2.5i_{HO} - 1.5i_{OA})$	i_{TO} i_{OA}	i_{HO}	–
Élelmiszergazd.	$i_N = \frac{i_{TA}}{i_{HI}i_{HO}}M$ $M = 1.57i_{HI}i_{HO} - 0.57i_{IO}i_{OA}$	i_{IO} i_{OA}	i_{HI} i_{HO}	i_{TA}
	$i_N = \frac{i_{TO}}{i_{HI}i_{OA}}M$	i_{IO} i_{OA}	i_{HI} i_{HO}	i_{TO}
	$i_N = \frac{i_{KI}}{i_{IO}i_{OA}}M$	i_{KI} i_{IO} i_{OA}	i_{HI} i_{HO}	–

9. táblázat: Milyen mértékű hatékonyságváltozás biztosíthatja a bruttó nyereség szinten tartását a külső tényezők becsült változása esetén? ($HI_e^0 = HO_e^0 = 1.66$)

Mezőgazdaság

$$i_{HI} = \frac{i_{IO}}{2.5 i_{KI}}(1 + 1.5 i_{KI})$$

i_{KI} \ i_{IO}	0.95	1.00	1.05
1.05	0.932	0.981	1.030
1.10	0.915	0.964	1.012
1.15	0.900	0.948	0.995

Élelmiszeripar

$$i_{HO} = \frac{i_{OA}}{2.5 i_{TO}}(1 + 1.5 i_{TO})$$

i_{TO} \ i_{OA}	0.95	1.00	1.05
1.02	0.942	0.992	1.042
1.04	0.935	0.985	1.034
1.06	0.928	0.977	1.026

Élelmiszergazdaság

$$i_{HI} i_{HO} = \frac{i_{IO} i_{OA}}{1.57 i_{KI}}(1 + 0.57 i_{KI})$$

i_{IO} i_{OA} \ i_{KI}	1.05	1.10	1.15
0.902	0.875	0.850	0.827
0.950	0.921	0.895	0.871
0.997	0.967	0.939	0.914
1.000	0.970	0.942	0.917
1.050	1.018	0.989	0.963
1.102	1.069	1.007	1.010

A modellszámítás logikája bármely vertikális lánc esetében használható és levonható az alapvető gazdasági következtetés: csakis a hatékonyság növelésével alkalmazkodhat a vállalat a piacgazdaság változó árviszonyaihoz.

1. Függelék

A modellszámítás egyszerűsítő feltételei és a bevezetett jelölések alapján előbb a mezőgazdasági vállalat bruttó nyereségének számítási képletét, majd annak az indexét írjuk fel:

$$NO = QO \cdot PO - QI \cdot PI$$

$$i_{NO} = \frac{QO^1 \cdot PO^1 - QI^1 \cdot PI^1}{QO^0 \cdot PO^0 - QI^0 \cdot PI^0}$$

Átszorozva:

$$QO^1 \cdot PO^1 - QI^1 \cdot PI^1 = (QO^0 \cdot PO^0 - QI^0 \cdot PI^0)i_{NO}$$

Átcsoportosítva és felhasználva, hogy a tagok pozitív értékűek:

$$QO^1 \cdot PO^1 - QO^0 \cdot PO^0 \cdot i_{NO} = QI^1 \cdot PI^1 - QI^0 \cdot PI^0 \cdot i_{NO}$$

$$QO^0 \cdot PO^0 \Big(\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0} - i_{NO}\Big) = QI^0 \cdot PI^0 \Big(\frac{QI^1 \cdot PI^1}{QI^0 \cdot PI^0} - i_{NO}\Big)$$

$$\frac{QO^0 \cdot PO^0}{QI^0 \cdot PI^0}\Big(\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0} - i_{NO}\Big) + i_{NO} = \frac{QI^1}{QI^0} \cdot \frac{PI^1}{PI^0}$$

Végigosztva a $\frac{QO^1}{QO^0} \cdot \frac{PO^1}{PO^0}$ kifejezéssel:

$$\frac{\frac{QO^0 \cdot PO^0}{QI^0 \cdot PI^0}\Big(\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0} - i_{NO}\Big) + i_{NO}}{\frac{QO^1}{QO^0} \cdot \frac{PO^1}{PO^0}} = \frac{\frac{QI^1}{QI^0} \cdot \frac{PI^1}{PI^0}}{\frac{QO^1}{QO^0} \cdot \frac{PO^1}{PO^0}}$$

A volumen indexeket átcsoportosítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{QO^0 \cdot PO^0}{QI^0 \cdot PI^0}\Big(\frac{QO^1 \cdot PO^1}{QO^0 \cdot PO^0} - i_{NO}\Big) + i_{NO}}{\frac{QO^1}{QO^0} \cdot \frac{PO^1}{PO^0}} \cdot \frac{\frac{QO^1}{QI^1}}{\frac{QO^0}{QI^0}} = \frac{\frac{PI^1}{PI^0}}{\frac{PO^1}{PO^0}}.$$

Hasonló típusú összefüggést kapunk, ha az $N = \sum QO \cdot PO - \sum QI \cdot PI$ kifejezésből indulunk ki, és összetett indexekkel dolgozunk.

2. Függelék

Az egész élelmiszerláncra vonatkozó bruttó nyereséget számítjuk:

$$N = (QA \cdot PA - QO \cdot PO) + (QO \cdot PO - QI \cdot PI) = QA \cdot PA - QI \cdot PI$$

A nyereség indexe:

$$i_N = \frac{QA^1 \cdot PA^1 - QI^1 \cdot PI^1}{QA^0 \cdot PA^0 - QI^0 \cdot PI^0}$$

Ebből kiindulva és az 1. függelék gondolatmenetét követve kapjuk:

$$\frac{\frac{QA^0 \cdot PA^0}{QI^0 \cdot PI^0}\left(\frac{QA^1 \cdot PA^1}{QA^0 \cdot PA^0} - i_N\right) + i_N}{\frac{QA^1}{QA^0} \cdot \frac{PA^1}{PA^0}} \cdot \frac{\frac{QA^1}{QI^1}}{\frac{QA^0}{QI^0}} = \frac{\frac{PI^1}{PI^0}}{\frac{PA^1}{PA^0}}.$$

Felírható, hogy

$$\frac{QA^0 \cdot PA^0}{QI^0 \cdot PI^0} = \frac{QA^0 \cdot PA^0}{QO^0 \cdot PO^0} \cdot \frac{QO^0 \cdot PO^0}{QI^0 \cdot PI^0}$$

$$\frac{\frac{QA^1}{QI^1}}{\frac{QA^0}{QI^0}} = \frac{\frac{QA^1}{QO^1}}{\frac{QA^0}{QO^0}} \cdot \frac{\frac{QO^1}{QI^1}}{\frac{QO^0}{QI^0}} \quad \text{és} \quad \frac{\frac{PI^1}{PI^0}}{\frac{PA^1}{PA^0}} = \frac{\frac{PA^1}{PA^0}}{\frac{PO^1}{PO^0}} \cdot \frac{\frac{PO^1}{PO^0}}{\frac{PI^1}{PI^0}}$$

A megfelelő jelölések bevezetésével kapjuk a (12) összefüggést.

Irodalom

1. FEYNÉ VINCZE MÁRIA: A jövedelem változása és az agrárolló nyílása közötti kapcsolat mennyiségi jellemzése. Gazdálkodás, 12 (1990), Budapest.
2. SEBESTYÉN LUKÁCSNÉ: Az agrárolló vállalati hatásai. Gazdálkodás, 3 (1986), Budapest.
3. SIPOS A. – HALMAI P.: Válaszúton az agrárpolitika. A mezőgazdaság szervezeti rendszere a reformfolyamatban. KJK, Budapest, 1988.

MODELLING OF THE RELATIONS BETWEEN THE CHANGES OF PRICE INDEXES AND THE PROFIT INDEX IN THE FOOD ECONOMY

The author has worked out a model for the quantitative characterization of the relations between profit index and the price gap and efficiency index. Food production sector was approached as a vertical integration chain, with the basic links: agriculture and processing industrial enterprises, for which the relations were deduced. Some formulas were obtained which provided an oppurtunity for the simulation of the interrelations among the changes in the profit index, the agricultural and industrial input price gap, food products and agricultural output price gaps and the input transformation-efficiency index. On the level of enterprises in the process of changing of prices, there are external factors of profit index. Their effect could be compensated for, by the internal growth of the efficiency index and by an increase in the "economies of scale".

KÖNYVEKRŐL

WILLIAM H. GREENE: *Economic Analysis* (Second Edition).
Macmillan P. Co., New York, 1993. pp. 791.

Greene könyve középfokú (intermediate) ökonometriai kézi-, illetve tankönyv, és mint ilyen követője a méltán híressé vált műveknek, melyek közül a 60-as években *Goldberger* könyve (Econometric Theory), a 70-es években *Theil* munkája (Principles of Econometrics), a 80-as évtizedben pedig *Judge et al.* kétrészes, több kiadást is megért művei (Introduction to the Theory and Practice of Econometrics) emelhetők ki. Úgy tűnik, hogy Greene könyve a 90-es években tölti be azt a szerepet, amit a korábbi évtizedekben az említett művek játszottak. Érdekes megemlíteni, hogy az itt ismertetésre kerülő második kiadás viszonylag röviddel az első kiadás után látott napvilágot. Ennek oka egyrészt a nagy siker, hiszen az első kiadás váratlanul gyorsan elfogyott, de az is kétségtelen, hogy a szerző ez idő alatt elég lényegesen átdolgozta könyvét, kiegészítette a korábbi változatot a tudományág egyes lényeges új elemeivel. Emellett természetesen az új kiadásban több, a korábbiban meglévő hibát, következetlenséget kiküszöbölt a szerző (sajnos nem mindet).

Szándéka szerint a könyv egy kétféléves graduális szintű kurzus anyaga, és tudomásom szerint a világ több egyetemén, ahol az ökonometria oktatása előbbre tart, mint nálunk, valóban ilyen célra használják is. *Szemléletében* számomra azért szimpatikus a könyv, mert a szerzőnek sikerült magát túltennie a 80-as évek végének válságán, destruktív irányzatain, és az ökonometria módszertanában új magasabb szinten sikerült szintézist kialakítania. Természetesen egy ilyen enciklopédikus műben nem lehet nem odafigyelni az ökonometria válsága által kitermelt hasznos és előrevivő gondolatokra, szemléletre és természetesen módszerekre, de az igazán jó műveket arról lehet felismerni, hogy nem tévesztik el az arányokat és nem dobják el a tudományág klasszikus eredményeit csak azért, hogy egy-egy divatos irányzatot túllihegjenek. Úgy vélem, hogy Greene könyve mind szemléletében, mind tárgyalásmódjában jól ötvözi az évtizedek óta bevált eredményeket a legújabb idők időtálló termékeivel, és kellő szakmai magaslatról tud szelektálni az utóbbi évek eredményeiből is.

Bármennyire is konvencionális szemléletű és az egész témát áttekinteni kívánó műről is van szó, természetes, hogy a szerző – saját ítélete alapján – koncepciójának megfelelően, egyes témákat kiemelt súllyal kezel. Éppen az ilyen súlyponti témák adják meg az egyes könyvek „fazonját". Nem ritka, hogy egyes szerzők saját kutatási eredményeiket kívánják népszerűsíteni ilyen átfogó kézikönyvekben is, ami gyakorta visszatetsző arányalanságokra vezet.

Nos, Greene elkerülte ezt a hibát, ugyanakkor azzal sem vádolható, hogy könyve valamiféle átlagosan szükséges ismeretanyag szürke tálalása lenne.

Amennyire az olvasó ki tudja venni a könyv tanulmányozása alapján, a szerző alapvető koncepciója az volt, hogy elméletileg jól megalapozott, de gyakorlatorientált, konstruktív ökonometriát adjon. Erre bizonyítékként a könyv jellegzetesen súlyosan kezelt témait lehet megemlíteni. Ezek közül talán első és legfontosabb a *nemlineáris modellek* kérdése. Ismeretes, hogy a hagyományos ökonometria alapvetően a lineáris modellek köré épült ki, ugyanakkor a valóság csak ritkán szorítható lineáris keretek közé. Greene megkísérli a jól kidolgozott lineáris elmélet és a nem lineáris valóság közti szakadékot áthidalni, a nemlineáris eljárásokkal visszatérő módon részletesen foglalkozik.

Ugyancsak a gyakorlati szituációk gyakori információhiánya virágoztatta fel az idősoros és keresztmetszeti adatokat együttesen felhasználó *panel modelleket,* amelyekkel – bár ez nem egyedi jelenség – e könyv is részletesen foglalkozik. Talán még jellemzőbb és egyéni színt ad a műnek a minőségi eredményváltozók (kétértékű és korlátozott eredményváltozók, logit, probit modellek, csonkított és cenzorált modellek stb.) részletes tárgyalása. A szerző saját bevallása szerint nem talált az ökonometriai irodalomban olyan leírást, ahol e témákból érthető bevezetést, színvonalas tárgyalásmódot és a terület friss eredményeit együtt kapta volna meg, holott a téma aktualitása ezt indokolttá tenné. (Egyebek közt ez volt egyik fő motivációja a viszonylag gyors átdolgozásnak.)

A könyv részletesen – bár nem túl nagy terjedelemben – tárgyalja az idősorelemzés egyes kérdéseit, beleértve a legutóbbi időkben született fontosabb eredményeket is (pl. VAR folyamatok, egységgyök tesztek stb.) Végül, a klasszikus hagyományokon nevelkedett ökonométerek számára kellemes meglepetést kelt a többegyenletes modellek mára már szinte elfeledett világos és alapos tárgyalása. Jóllehet a modern ökonometria egyre inkább elszakad a szimultán egyenletek gondolatvilágától, mégis talán ez az a terület, ami megadja az ökonometria specifikumát a statisztika és a regressziószámítás egyéb területeivel szemben, ami az ökonometriát önálló tudományterületté avatja. Ezért talán több egyszerű nosztalgiánál az, ha az olvasó üdvözli ennek, a gyakorlat számára talán kisebb jelentőséggel bíró, de a rendszerszemléletű modellezési gondolkodást kétségkívül serkentő terület alapos taglalását.

Egy könyvet természetesen nem csupán a vizsgált és tárgyalt témák köre, de azok tárgyalásának módja, mélysége is minősít. Úgy vélem, Greene könyve ebből a szempontból is helyes arányokat tükröz: elegendően mély és alapos a tárgyalása ahhoz, hogy a figyelmes olvasó megértse az anyagban lévő gondolatiságot, ugyanakkor nem megy felesleges részletekbe, amelyek áttekinthetetlenné tennék a fontosabb eredményeket. Három terjedelmes fejezetet szentel a módszertani eszköztár bemutatásának (algebra, valószínűségszámítás, statisztika), és az itt ledöngölt alapokra következetesen építkezik. Ez azt jelenti, hogy azok számára, akik nem veszik a fáradságot, hogy az alapokat jól végiggondolják, esetenként követhetetlen. Ugyanakkor, ha valaki az eszköztár birtokában van, annak számára már meglehetősen egyszerűen követhető az anyag. Nem megy feleslegesen bele bizonyításokba, nem a tétel fontosságát, hanem a bizonyítás hasznát, didaktikus értékét tekinti elsődlegesnek. (Erre példa lehet az, hogy a központi határeloszlás tételeket nem bizonyítja, mivel ez szerinte nem vinne előre az *ökonometria* megértésében, ugyanakkor természetesen ezeket a tételeket kimondja, és kiterjedten használja is őket.) A könyv általában nem követi szigorúan a *definíció – tétel – bizonyítás – következmény* felépítést, de ez nem szokatlan ebben a műfajban.

A könyv erőssége a nagyszámú, többcélú felhasználásra is alkalmas valós adatállomány, amelyek egy jó része feldolgozott példákon keresztül jelenik meg, de ezek más feladatokhoz is hasznos segítséget adnak. Élvezetesek a gyakran példáknak nevezett esettanulmányok, és az egyes fejezeteket kiegészítő bőséges feladatanyag. Sajnos – és ebben követi az utóbbi időkben elterjedt divatot – a feladatok megoldását semmilyen formában, illetve részletezettséggel nem közli. A könyvet a már standarddá vált név- és tárgymutató, hivatkozási jegyzék, valamint a szokásosnál nem lényegesen bővebb táblázatanyag egészíti ki.

Összefoglalásként csak annyit mondhatok, hogy ez a könyv jó áttekintést ad az ökonometria jelenlegi valós helyzetéről, arányairól, problémáiról. Sajnos távol állunk attól, hogy oktatási anyagként komolyan szóba jöhessen, és természetesen arra sem alkalmas, hogy elméletileg nem kellően felkészült kutatók receptkönyv módjára használva felszínes és látszólagos tudást nyerjenek belőle. Bár hivatkozik a fontosabb, forgalomban lévő ökonometriai programcsomagokra, szerencsére, nem kötelezi el magát egyik mellett sem, nem adva lehetőséget arra, hogy eredménytábla desifrirozó szerepre degradálják. „Csak" arra alkalmas, hogy ha valaki veszi a fáradságot az alapok megemésztésére, illetőleg megvannak a módszertani alapjai, akkor sokoldalú, logikus, didaktikus és arányos formában mutatja be a 90-es évek ökonometriájának legfőbb eredményeit. Úgy gondolom, ez nem kevés.

Hunyadi László

BERDE ÉVA – PETRÓ KATALIN: *Mikroökonómia. Feladatok*

A Műszaki Könyvkiadónál most megjelent kötet hiánypótló a magyar nyelvű közgazdasági irodalom piacán. Mikroökonómia könyv, magyar és külföldi szerzőktől is található már a könyvesboltokban, de a mikroökonómiai elméletet konkrét feladatokon keresztül illusztráló munka ezidáig csak egyetemi jegyzet formájában létezett. Berde Éva és Petró Katalin példatára nemcsak ezért ajánlható az olvasók figyelmébe, hanem azért is, mert a feladatmegoldás szellemi kalandjának nekivágó ifjabb és idősebb szakembereket fokozatosan vezeti be a mikroökonómia sajátos világába, és nemzetközi mércével mérve is élenjáró áttekintést nyújt a neoklasszikus mikroökonómia alapvető problémaköreiről.

A feladatgyűjtemény a BKE Mikroökonómia Tanszékének immár ötödik éve felhalmozott tapasztalataira, és a tanszék két korábbi, jegyzet formájában megírt példatárának didaktikai módszereire épít. A kötet szervesen kapcsolódik a Műszaki Könyvkiadó és az Aula Kiadó által 1993-ban megjelentetett, Kopányi Mihály által szerkesztett *Mikroökonómia* kézikönyvhöz, ily módon magában foglalja a BKE mikroökonómia tananyagának kérdéseken alapuló feldolgozását. Emellett azonban jól használható más egyetemek és főiskolák saját mikroökonómia oktatásában, illetve mindazoknak a közgazdászoknak és más érdeklődő olvasóknak érdemes kézbe venniük, akik a mikroökonómia elméleti összefüggéseit a gyakorlati alkalmazásokon keresztül szeretnék nyomon követni. A feladatok különböző jellegűek, közöttük egyaránt találhatók konkrét, a valóságban felmerülő problémák, illetve olyan elméleti kérdések, amelyek megválaszolása magasabb szintű matematikai és közgazdasági ismereteket követel.

A feladatgyűjtemény szerkezete követi a neoklasszikus mikroökonómia felépítését, az első öt fejezet a fogyasztói magatartással, a termelői viselkedéssel és a kínálattal, a piaci szerkezetekkel, a termelési tényezők piacával és az általános egyensúllyal, illetve a jóléti közgazdaságtannal foglalkozik. A 6. fejezet tudáspróbája elsősorban a mikroökonómia iránt különösen érdeklődő, és a matematikai apparátust biztonságosan kezelő olvasóknak ajánlható. A használhatóság megkönnyítése érdekében a Bevezetés utáni részben a szerzők felsorolják az alkalmazott jelöléseket, valamint megmagyarázzák a magyarul még nem teljesen elterjedt, illetve csak a példatárban szereplő kifejezéseket. Az egyes fejezetek összefoglaló kérdései az alapvető összefüggések tudatosítására, a felmerülő problémák összehasonlító elemzésére és az összefüggések átgondolására késztetnek. A tesztfeladatok, illetve az igaz vagy hamis állítások az elméleti tudás ellenőrzését, a mikroökonómia törvényszerűségeinek rögzítését segítik elő. A szöveges és geometriai feladatok a mikroökonómia jellegzetes algebrai és geometriai eszköztárának alkalmazását, és igazán elmélyült gondolkodást igényelnek. Ezek a példák igyekeznek rávezetni az olvasót arra, hogy a mikroökonómia első pillanatra talán túlságosan elvontnak tűnő rendszere hogyan modellezi a valóságot. Mind az igaz – hamis állítások, mind a szöveges és geometriai feladatok közt a bonyolultabbakat csillaggal jelölték a szerzők. Érdemes rászánni az ezek megoldásához szükséges hosszabb időt, mert segítségükkel a mikroökonómia néhány bonyolultabb összefüggése tárul fel. Az összefoglaló kérdéseket kivéve, minden fejezet példasorát a megoldási útmutatások, illetve eredmények, időnként maguk a megoldások követik.

Végezetül hadd idézzem a példatár bevezetőjének utolsó szavait: „abban a reményben szeretnénk jó munkát és hasznos időtöltést kívánni a Kedves Olvasóknak, hogy ki-ki saját erőfeszítései révén, a feladatok megoldásán keresztül még inkább megérti, illetve elsajátítja a közgazdasági problémakezelés módszereit, és a mikroökonómia belső logikáját."

Eszterhainé Daruka Magdolna

Wiley katalógus, 1993

John Wiley & Sons Ltd Kiadói katalógusára szeretnénk felhívni olvasóink figyelmét. A kiadó repertoárja igen széles. Ezért csak lapunk profiljába vágó, vagy hozzá közel álló témakörök kiadványaiból készítünk válogatást és ajánlást.

A vaskos kötet a következő nagy fejezetekre tagolódik:

- LIFE SCIENCES, MEDICAL SCIENCES AND RELATED AREAS
- CHEMISTRY AND RELATED AREAS
- EARTH SCIENCES AND THE ENVIRONMENT
- MATHEMATICS, STATISTICS, PHYSICS AND OPTICS & OPTICAL ENGINEERING
- COMPUTERS & DATA PROCESSING, BUSINESS DATA PROCESSING AND INFORMATION SCIENCE, LIBRARY SCIENCE & DOCUMENTATION
- ENGINEERING, ARCHITECTURE AND RELATED AREAS
- ACCOUNTING, BUSINESS ADMINISTRATION, BUSINESS LAW, ECONOMICS, FINANCE, LAW AND MARKETING
- HUMANITIES, PSYCHIATRY, SOCIOLOGY AND RELATED AREAS

A katalógus mintegy 550 minibetűkkel szedett háromhasábos oldalon ismerteti kiadványait, New megjelöléssel a legújabb termékeket. Minden fejezet végén az adott fejezet témaköréhez kapcsolódó számítógépes szoftver irodalomról és videolemez kínálatról nyerhet képet az olvasó. A kötet végén szerző/cím szerint betűrendbe szedett indexből tudhatjuk meg a könyvek árát angol fontban és USA dollárban.

John Wiley & Sons Ltd katalógusát haszonnal forgathatják egyetemi hallgatók és oktatók, speciális területen kutatók, vagy könyvtárak felfrissítését végzők egyaránt.

Mint a fejezetek felsorolásából láthattuk, az egyik fejezet a könyvvitel, az üzleti adminisztráció – ezen belül a menedzsment tudomány és az operációkutatás –, az üzleti jog, a közgazdaságtan, a pénzügy és a marketing témakör könyv, kézikönyv, szótár, címkatalógus és folyóirat kínálatáról ad tájékoztatást. Napi aktualitása miatt érdeklődésre tarthat számot az alábbi válogatás.

ANSELL, J. and WHARTON, F.
Risk: Analysis, Assessment and Management.

A szerzők a kockázat kezelésének legfontosabb és legnehezebb szempontjait veszik vizsgálat alá. Vizsgálják a kockázat elemzés, értékelés és menedzselés főbb állomásait. A kötetben az olvasó példákat talál az ipar, a pénzügy, a szállítás és környezetgazdaság területéről. Ajánlott egyetemi hallgatóknak és gyakorlati szakembereknek.

COPELAND, T., KOLLER, T. and MURIN, J.
Valuation: Measuring and Managing The Value of Companies. (Wiley Professional Banking and Finance Series).

Ez az 1990-es kötet vállatatok értékelésének step-by-step kézikönyve. Pénzügyi intézmények, konglomerátumok, memzetközi és multinacionális vállalatok és üzletek értékelését tartalmazza. Látható belőle, hogyan kell lebonyolítani az olyan fő tranzakciókat, mint egyesítések, csatolások, leválások, újra tőkésítések és részvény eladások.

CHOI, F. D. S.
Handbook of International Accounting

Korunkban a világpolitikában, világgazdaságban és a világpiacon zajló gyors változások a könyvvitel tudományterületét sem hagyják érintetlenül, akár elméleti, akár gyakorlati szempontból nézzük. A nemzetközi könyvviteli tételek értelmezése és megértése döntő a nemzetközi üzleti kommunikáció, és az üzleti kapcsolatokbeli tisztánlátás szempontjából. A könyv tartalmában lefedi a nemzetközi pénzügy és könyvvitel összes fontos fejezetét. A szerzők ezzel a művel könyvviteli, adóügyi, illetve bank szakembereket, pénzügyi szakértőket és befektetőket szándékoztak célba venni.

WHITE, G. I., SONDI, A. C., FRIED, D.
The Analysis and Use of Financial Statements

A könyv széleskörű áttekintését adja az elméleti és analitikus pénzügyi tételeknek, és bemutatja azok pénzügyi jelentésekben történő megjelenítésének legújabb fejlődését. Összehasonlító elemzést láthatunk USA-beli és más országokban használatos pénzügyi elszámolási tételek közötti lényeges különbségekről. A könyvet a szerzők egyetemi hallgatóknak, pénzügyi elemzőknek és tanácsadóknak szánják.

Gyetván Ferenc