A DINAMIKUS OLIGOPOL PROBLÉMA IRÁNYÍTHATÓSÁGÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR – SZIDAROVSZKY FERENC
Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem

Dolgozatunkban N-személyes dinamikus oligopol játékok termelési vektorának teljes irányíthatóságával foglalkozunk. Szükséges és elégséges irányíthatósági feltételt bizonyítunk be a linearitás és adaptív becslések esetén. Speciális esetként kimutatjuk, hogy Cournot becslések feltételezése mellett a termelési vektor akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha két nem-szimmetrikus játékos alkotja a termelői oldalt.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban az N-személyes dinamikus oligopol játékokat, mint diszkrét dinamikus rendszereket vizsgáljuk. Az alapmodell a következő. Tegyük fel, hogy N termelő (továbbiakban játékos) ugyanazt a terméket állítja elő és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje x_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ a k-dik termelő által előállított mennyiséget és jelölje C_k ugyanezen termelő költségfüggvényét. Feltesszük, hogy az egységár a teljes termelt mennyiség függvénye: $p(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$. Ekkor a k-adik termelő profitfüggvénye:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k p(x_1 + \ldots + x_n) - C_k(x_k) \,. \tag{1}$$

Ha $S_k = [0, \infty)$ a k-adik $(k = 1, 2, \ldots, N)$ játékos stratégiahalmaza, akkor a fentiekkel egy N-személyes játékot definiálhatunk:

$$\Gamma = \{\, N; S_1, \ldots, S_N; \varphi_1, \ldots, \varphi_N \,\} \,,$$

amelyet N-személyes *oligopol-játéknak* nevezünk. A játék egyensúlypontjának létezéséről és az egyensúlypont egyértelműségéről Okuguchi (1976) ad összefoglalást. A játék többtermékes kiterjesztésével és az egyensúlypontok numerikus meghatározásával Okuguchi és Szidarovszky (1990) foglalkozik. A továbbiakban az oligopol játék dinamikus kiterjesztését vizsgáljuk. Tegyük

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta.

fel, hogy minden $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontban az összes játékos először megbecsüli a többiek által együttesen termelt mennyiséget, majd optimalizálja saját várható profitját. Jelölje $s_k^E(t)$ a k-adik játékos becslését a többiek által termelt mennyiségről, akkor várható haszna az

$$x_k p(s_k^E(t) + x_k) - C_k(x_k) \tag{2}$$

formulával számítható. Ha feltesszük, hogy a kormány ártámogatással, adókedvezménnyel, költségátvállalással kívánja befolyásolni a piacot, akkor ezt az irányítást matematikailag úgy modellezhetjük, hogy a játékosok költségfüggvényét egy $u(t)$ irányítási változóval beszorozzuk. Ekkor minden t időpontban minden játékos stratégiaválasztása az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \{x_k p(s_k^E(t) + x_k) - C_k(x_k)u(t)\} \tag{3}$$

szabállyal adódik. Vegyük észre, hogy ez a dinamizmus függ az $s_k^E(t)$ becslési módszertől. Ebben a dolgozatunkban feltételezzük, hogy az összes játékos *adaptív* becslést alkalmaz:

$$s_k^E(t) = s_k^E(t-1) + \alpha_k \Big[\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\Big] , \tag{4}$$

amelyet úgy értelmezhetünk, hogy az aktuális becslés az előző időpontbeli becslésből úgy adódik, hogy ahhoz a becslési hiba egy részét hozzáadjuk. Itt feltételezzük, hogy $0 < \alpha_k \leq 1$ minden k esetén. Helyettesítsük a (4) egyenlőséget a (3) egyenletbe:

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \Big\{x_k p(s_k^E(t-1) + \alpha_k \Big[\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\Big] + x_k) - C_k(x_k)u(t)\Big\} . \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletek egy dinamikus rendszert definiálnak, ahol x_k ($1 \leq k \leq N$) jelöli az állapotváltozókat és u az irányítást. A következő paragrafusban ennek a rendszernek az irányíthatóságát vizsgáljuk meg.

2. A rendszer irányíthatósága

A matematikai kezelhetőség érdekében tegyük fel a következőket:

(a) $$p(s) = b - As \qquad (b, A > 0) \, ;$$

(b) $$C_k(x_k) = c_k x_k + d_k \quad (c_k, d_k > 0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \, ;$$

(c) $\qquad x_k(t) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N;\ \ t = 0, 1, 2, \ldots)$

Ekkor $x_k(t)$ maximalizálja az

$$x_k\{b - A[s_k^E(t-1) + \alpha_k(\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)) + x_k]\} - (c_k x_k + d_k)u(t) \quad (6)$$

függvényt. A c) feltétel mellett egyszerű deriválással adódik, hogy

$$x_k(t) = -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - \frac{1-\alpha_k}{2}s_k^E(t-1) + \frac{b}{2A} - \frac{c_k}{2A}u(t)\,. \quad (7)$$

Vezessük be az új állapotváltozókat:

$$z_k = x_k - \frac{b}{A(N+1)} \qquad \text{és} \qquad w_k = s_k^E - \frac{b(N-1)}{A(N+1)}\,, \quad (8)$$

ekkor egyszerű helyettesítéssel adódik, hogy a (7) egyenlőségben a $b/(2A)$ konstans tag kiesik. Tehát a (7) és (4) egyenlet a következőre redukálódik:

$$z_k(t) = -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l \neq k} z_l(t-1) - \frac{1-\alpha_k}{2}w_k(t-1) - \frac{c_k}{2A}u(t) \quad (9)$$

$$w_k(t) = \alpha_k \sum_{l \neq k} z_l(t-1) + (1-\alpha_k)w_k(t-1)\,. \quad (10)$$

Feladatunk tehát a z_k állapotváltozó irányítása. Minthogy a w_k becslési változó is állapotváltozó, problémánk nem egy egyszerű állapotirányítás, hiszen nem célunk w_k irányítása. A probléma az ún. output-irányítási feladattá redukálódik, ha a rendszer outputját úgy definiáljuk, hogy az csak az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ állapotváltozókat tartalmazza. Modellünk tömören a következő alakban írható át:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ -2\mathbf{B} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_N}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} \\ -\frac{c_2}{2A} \\ \vdots \\ -\frac{c_N}{2A} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_N - 1}{2}\right),$$

és az $\mathbf{x}$ állapotvektor az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N, \mathbf{s}_1^E, \mathbf{s}_2^E, \ldots, \mathbf{s}_N^E$ vektorokat tartalmazza ebben a sorrendben. A lineáris rendszerelméletből tudjuk, hogy $t \geq 0$ esetén

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}u(1) + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{b}u(t-1) + \mathbf{b}u(t)\right), \tag{12}$$

így a rendszer outputja:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}u(1) + \ldots + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b}u(t-1) + \mathbf{C}\mathbf{b}u(t)\right). \tag{13}$$

Ebből az egyenlőségből közvetlenül leolvasható, hogy tetszőleges $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból kiindulva a rendszer outputja tetszőleges $\mathbf{y}(t)$ értékre irányítható a $[0,t]$ intervallumon akkor és csak akkor, ha a

$$\mathbf{K}_M(t) = \left(\mathbf{C}\mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}\right) \tag{14}$$

módosított Kalman-mátrix rangja N. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{C}\mathbf{b} & = & \mathbf{c} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b} & = & \mathbf{B}\mathbf{c} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{b} & = & (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{B}\mathbf{c} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b} & = & (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})^{t-2}\mathbf{B}\mathbf{c}, \end{array} \tag{15}$$

ennek következtében a módosított Kalman-mátrix tovább egyszerűsödik:

$$\mathbf{K}_M(t) = \left(\mathbf{c}, \mathbf{B}\mathbf{c}, (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{B}\mathbf{c}, \ldots, (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})^{t-2}\mathbf{B}\mathbf{c}\right). \tag{16}$$

Minthogy a $\mathbf{B} - 2\mathbf{D}$ mátrix $N \times N$ típusú, a Cayley-Hamilton tételből (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978) azonnal következik, hogy

$$\mathrm{rank}(\mathbf{K}_M(N+1)) = \mathrm{rank}(\mathbf{K}_M(N+2)) = \ldots, \tag{17}$$

vagyis a $\mathbf{K}_M(t)$ mátrix rangja nem növekszik $t \geq N+1$ esetén. Az output irányíthatósága szempontjából ez azt jelenti, hogyha az output nem válik teljesen irányíthatóvá a $t = N+1$ időpillanatig, akkor már nem válhat teljesen irányíthatóvá később sem. A fentiek a következőképpen foglalhatók össze:

Tétel. *A dinamikus oligopol játék termelési vektora akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha a $\mathbf{K}_M(N+1)$ módosított Kalman-mátrix rangja N.*

Tekintsük először az $N = 2$ speciális esetet. Ekkor

$$\mathbf{B}-2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1-\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} \\ -\frac{c_2}{2A} \end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 c_2}{4A} \\ \frac{\alpha_2 c_1}{4A} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}-2\mathbf{D})\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\alpha_1)\alpha_1 c_2 - \alpha_1\alpha_2 c_1}{8A} \\ \frac{-\alpha_1\alpha_2 c_2 + 2(1-\alpha_2)\alpha_2 c_1}{8A} \end{pmatrix}.$$

A termelési vektor teljesen irányítható a $[0,2]$ intervallumon, ha a

$$\mathbf{K}_M(2) = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} & \frac{\alpha_1 c_2}{4A} \\ -\frac{c_2}{2A} & \frac{\alpha_2 c_1}{4A} \end{pmatrix} \tag{18}$$

mátrix rangja 2. Minthogy

$$\det(\mathbf{K}_M(2)) = \frac{-\alpha_2 c_1^2 + \alpha_1 c_2^2}{8A^2},$$

ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{c_1^2}{c_2^2}. \tag{19}$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy a $\mathbf{K}_M(3)$ mátrix rangja kisebb, mint 2 akkor és csak akkor, ha $\alpha_1 = \alpha_2$ és $c_1 = c_2$. Ez a feltétel a játék szimmetriáját jelenti, és nyilvánvalóan nem teljesen irányítható a termelési vektor, hiszen szimmetrikus kezdeti vektorból kiindulva a termelési vektor szimmetrikus marad, így nem-szimmetrikus vektorra semmiképpen sem irányítható.

Tekintsük ezután az $N \geq 3$ esetet. Ha valamilyen két játékos mellett $c_k = c_l$ és $\alpha_k = \alpha_l$, akkor a $\mathbf{K}_M(t)$ mátrix k-adik és l-edik sora megegyezik, azaz rangja kisebb, mint N. Így a termelési vektor nem teljesen irányítható, ami ugyanúgy is magyarázható, mint az $N = 2$ esetben. Megjegyezzük, hogy a nem-szimmetrikus eset nem garantálja a teljes irányíthatóságot. Ilyenkor a feltétel sokkal bonyolultabb, a $\mathbf{K}_M(N+1)$ mátrix rangját kell meghatároznunk. Két konkrét példával illusztráljuk, hogy akkor mindkét eset lehetséges.

1. Példa. Tegyük fel, hogy $N = 3$, $A = \frac{1}{2}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ és $\alpha_1 = \frac{1}{2}$,

$\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}$. Ekkor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{B} - 2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{5}{48} \\ \frac{7}{72} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{K}_M(3) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{48} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{72} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \det\bigl(\mathbf{K}_M(3)\bigr) = \frac{-1}{576} \neq 0\,,$$

vagyis a termelési vektor teljesen irányítható a $[0, 3]$ intervallumon.

2. Példa. Legyen most is $N = 3$, $A = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ és $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Ekkor az előző példához hasonlóan látható be, hogy $\operatorname{rank}\bigl(\mathbf{K}_M(4)\bigr) < 3$, így a termelési vektor nem teljesen irányítható.

Befejezésül az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 1$ esetet vizsgáljuk meg általában. Megjegyezzük, hogy ebben a speciális esetben a (4) egyenlet leegyszerűsödik:

$$s_k^E(t) = \sum_{l \neq k} x_l(t-1)\,. \tag{20}$$

Ezt a módszert *Cournot-féle* becslésnek nevezik az irodalomban, és arra a hipotézisre épül, hogy minden időpontban az összes játékos azt feltételezi, hogy a többiek által együttesen termelt mennyiség ugyanaz marad, mint az előző időpontban volt. Ebben a speciális esetben $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{E})$, ahol $\mathbf{I}$ az N-edrendű egységmátrix, és $\mathbf{E}$ összes eleme 1. Így

$$\mathbf{K}_M(t) = \bigl(\mathbf{c}, \mathbf{Bc}, \mathbf{B}^2\mathbf{c}, \ldots, \mathbf{B}^{t-1}\mathbf{c}\bigr)\,. \tag{21}$$

Kimutatjuk ezután, hogy $\mathbf{K}_M(t)$ rangja legfeljebb 2 lehet, így Cournot-féle becslések esetén a termelési vektor soha sem teljesen irányítható, ha $N > 2$. Minthogy $\mathbf{E}^2 = N\mathbf{E}$,

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{I} - 2\mathbf{E} + \mathbf{E}^2) = \frac{1}{4}(\mathbf{I} + (N-2)\mathbf{E}) = \frac{N-1}{4}\mathbf{I} - \frac{N-2}{2}\mathbf{B} ,$$

így

$$\mathbf{B}^2\mathbf{c} = \frac{N-1}{4}\mathbf{c} - \frac{N-2}{2}\mathbf{B}\mathbf{c} , \tag{22}$$

és indukcióval azonnal adódik, hogy $\mathbf{B}^3\mathbf{c}$, $\mathbf{B}^4\mathbf{c}$, ... mind kifejezhetők $\mathbf{c}$ és $\mathbf{Bc}$ lineáris kombinációjaként. Ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{Bc}$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathbf{K}_M(t)$ rangja 2, különben 1.

3. Megjegyzések

A matematikai modell felírásánál feltételeztük, hogy az irányítási változó a költségfüggvény szorzójaként szerepel. Valóban ez a helyzet, ha az irányítás költségcsökkentő (vagy költségnövelő) a termelői oldalon. Azonban fogyasztói ártámogatás esetén az árfüggvény szorzójaként kell szerepeljen. Ha az irányításban mindkét szempont érvényesül, akkor elvileg két irányítási változót kellene bevezetnünk, azonban az (5) optimum-feladat megoldása csak ezek hányadosától függ. Ezért tehát elegendő egyetlen irányítási változóval foglalkoznunk, mint ahogy ezt a modellben mi is tettük.

Az általános esetben a $\mathbf{K}_M(N+1)$ mátrix rangját kell meghatároznunk. A Gauss-féle kiküszöbölés (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978) igen gyors és könnyen kezelhető módszer. Néhány speciális esetben, például Cournot becslések mellett, vagy szimmetrikus esetekben a termelési vektor nem lehet teljesen irányítható. A Cournot esetben bebizonyítottuk, hogy $N > 3$ esetén a termelési vektor nem lehet teljesen irányítható. Befejezésül megjegyezzük, hogy ez az eredmény analóg Theocharis (1959) híres tételével, miszerint $N > 3$ esetén a diszkrét lineáris dinamikus oligopol játék nem lehet globálisan aszimptotikusan stabilis.

Irodalom

1. OKUGUCHI, K. (1976) *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
2. OKUGUCHI, K. és SZIDAROVSZKY F. (1990) *The Theory of Oligopoly with Multi/Product Firms.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. SZIDAROVSZKY, F. és A. T. BAHILL (1993) *Linear Systems Theory.* CRC Press, Boca Raton/London.

4. SZIDAROVSZKY, F. és S. YAKOWITZ (1978) *Principles and Procedures of Numerical Analysis.* Planem Press, New York/London.
5. THEOCHARIS, R. D. (1959) On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, Vol. 27, pp. 133–134.

ON THE CONTROLLABILITY OF THE DYNAMIC OLIGOPOLY PROBLEM

In this paper the controllability of production vector of the N-person dynamic oligopoly games is examined. Sufficient and necessary controllability conditions are given under linearity and adaptive expectations. Under Cournot expectations the controllability of the production vector is proven.