A VALUE AT RISK ÉS AZ EXPECTED SHORTFALL ÖSSZEHASONLÍTÁSA TÖRTÉNETI SZIMULÁCIÓ SEGÍTSÉGÉVEL[1]

MISKOLCZI PANNA
Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar

Jelen tanulmányban a pénzügyi kockázat mérésével, valamint a különböző kockázati mértékek összehasonlításával foglalkozom. Öt kockázati mértéket ismertetek, ezek a szórás, a variancia, a szemivariancia, a kockáztatott érték (VaR) és az expected shortfall (ES). Belátható, hogy ezen kockázati mértékek közül csak az ES elégíti ki az un. koherens kockázati mértékekre vonatkozó tulajdonságokat, így az ES az egyetlen mérték, amely alkalmas a kockázat mérésre. Ennek ellenére a VaR a ma legtöbbet használt kockázati mérték, így gyakorlati szempontból ezt a két mértéket hasonlítom össze. Az összehasonlításhoz a történeti utótesztelés (backtesting) módszerét választottam, melyet részletesen ismertetek mind a VaR, mind pedig az ES esetében. Az elemzést több alfa szinten, hét részvény ár adatait felhasználva végeztem el. Az elméleti és a gyakorlati vizsgálatok alapján is arra a megállapításra jutottam, hogy az ES pontosabb képet ad a kockázatról, mint a VaR.

1 Bevezetés

A mai modern pénzügyi világ egyik fontos kérdése, hogy hogyan tudjuk mérni, illetve összehasonlítani különböző pénzügyi eszközök, például részvények, portfóliók kockázatát.

A dolgozatomban mind elméleti, mind pedig gyakorlati szinten, arra keresem a választ, hogy már ismert kockázati mértékek közül, melyikkel tudjuk megbecsülni pontosabban a pénzügyi kockázatot. Öt, sokat használt kockázati mértéket vetek górcső alá, ezek: a variancia, a szórás, a szemivariancia, a kockáztatott érték (Value at Risk) és az expected shortfall (ES). A gyakorlati számításokhoz a történeti utótesztelés módszerét használom.

Az első fejezetben tárgyalom a kockázat, valamint a kockázati mérték, a szakirodalomban leginkább elfogadott matematikai megfogalmazását. Összefoglalom továbbá a fent említett kockázati mértékek definícióit és legfontosabb tulajdonságait. Belátható, hogy elméleti szinten ezen kockázati mértékek közül csak az expected shortfall segítségével tudjuk megfelelően mérni a kockázatot, hiszen ez az egyetlen koherens kockázati mérték.

Annak ellenére viszont, hogy a kockáztatott értéket nagyon sok kritika érte, a mai napig is a legtöbbet alkalmazott kockázati mértékről van szó.

[1]Beérkezett: 2017. április 24. Miskolczi Panna PhD hallgató, Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar. E-mail: miskolczipanna@gmail.com.

Ezért gyakorlati szempontból a VaR-et és az ES-t hasonlítom össze az ún. történeti utótesztelés módszerével. A módszerről a harmadik fejezetben írok részletesebben. Az elemzéshez a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról letöltött részvényárakat, illetve az azokból képzett logaritmikus hozamokat használom. Az adatok alapvető statisztikái, valamint a normalitásvizsgálat megtalálhatóak a második fejezetben.

A negyedik fejezet tartalmazza a történeti szimuláció futtatásával kapott eredményeket és következtetéseket. A gyakorlati számítások is igazolni látszanak azt az elméleti tényt, hogy az ES segítségével pontosabb képet kaphatunk a kockázatról.

2 Kockázat és kockázati mértékek

A közelmúlt pénzügyi válságai és a pénzügyi piac egyre komplexebb volta miatt egyre nagyobb szükség van a kockázat minél pontosabb mérésére és számszerűsítésére. Tulajdonképpen mi is a kockázat? Egy lehetséges megfogalmazás szerint a kockázat annak a lehetőségnek a mérlegelése, hogy valami értékkel bírót elvesztünk vagy megnyerünk („Risk is the potential of losing something of value, weighted against the potential to gain something of value." (Hubbard, 2014)). Ezt, a kockázatnak egy nagyon általános megfogalmazását természetesen sokféleképpen értelmezhetjük. Általában, ha kockázatról beszélünk, akkor a legtöbben negatív eseményekre, veszteségre gondolnak. Ezzel szemben a kockázatot úgy is lehet értelmezni, hogy annak a valószínűsége, hogy a befektetés hozama különbözik az elvárt hozamtól. Tehát a kockázat magában foglalja a downside kockázat mellett (vagyis, amikor a tényleges hozam kisebb, mint az elvárt hozam) az upside kockázatot is (amikor a tényleges hozam nagyobb, mint az elvárt) (Damodaran, 2003).

Annak ellenére, hogy a kockázat megfogalmazása nem teljesen egységes és pontos, matematikai szempontból az a cél, hogy minél egyszerűbb mutatókkal, egyetlen mérőszámmal jellemezzük, fejezzük ki azt. A pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat kockázati mértékeknek nevezzük (Gáll, 2010). Ahogy azt a következő definíció is mutatja, matematikai szempontból a kockázat mérése tulajdonképpen kapcsolatot létesít a véletlen változók és a valós számok között (Szegö, 2002).

2.1 Definíció (Kockázati mérték). *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *egy valószínűségi mező, és legyen* $\mathcal{X}$ *valószínűségi változóknak (portfóliók, pénzügyi eszközök profitjának) egy halmaza* Ω*-n. Kockázati mértéknek nevezünk minden* $\mathcal{X}$ *halmazon értelmezett valós értékeket felvevő funkcionált:* $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Látható, hogy a 2.1 definíció egy nagyon tág fogalom. Ahhoz, hogy a kockázat „értelmes" definíciójához jussunk, bizonyos korlátozásokat, tulajdonságokat meg kell fogalmazni a kockázati mértékekkel kapcsolatban.

Az irodalomban (Artzner et al., 1999) leggyakrabban előforduló, legtöbbet használt tulajdonságok a monotonitás, szubadditivitás, pozitív homogenitás és az eltolás invariancia.

Monotonitás

Ha egy befektetés hozama sosem kisebb mint egy másiké, akkor ez a befektetés ne legyen kockázatosabb mint a másik, azaz

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y), \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X} \ . \tag{1}$$

Szubadditivitás

A szubadditivitást más néven diverzifikációs hatásnak is nevezik. Ez azt jelenti, hogy két befektetés eredő kockázata nem lehet nagyobb, mint az egyedi kockázataik összege, azaz

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \qquad \forall X, Y, X + Y \in \mathcal{X} \ . \tag{2}$$

Pozitív homogenitás

Ha megtöbbszörözünk egy portfóliót, de megtartjuk annak összetételét, akkor elvárjuk, hogy a kockázat a nagysággal arányosan változzon, azaz

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \qquad \forall X, \lambda X \in \mathcal{X}, \ \forall \lambda \geq 0 \ . \tag{3}$$

Eltolás invariancia

Ha pozíciónkhoz adott hozamú kockázatmentes eszközt adunk, akkor a kockázat ennek a pénzáramnak a nagyságával csökkenjen, azaz

$$\rho(X + a) = \rho(X) - a \qquad \forall X, X + a \in \mathcal{X}, \ \forall a \in \mathbb{R} \ . \tag{4}$$

2.2 Definíció (Koherens kockázati mérték). *Egy kockázati mértéket koherens kockázati mértéknek nevezünk, ha teljesíti a fent említett mind a négy tulajdonságot, azaz monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns.*

Megjegyzendő, hogy a pozitív homogén tulajdonság estében, ha λ helyére nullát helyettesítünk, akkor $\rho(0) = 0$, azaz, ha nem birtoklunk semmilyen pénzügyi eszközt, portfóliót, akkor a kockázatunk nulla. Ezt a tulajdonságot és az eltolás invarianciát felhasználva látható, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\rho(a) = \rho(0 + a) = \rho(0) - a = -a$. Ez azt jelenti, hogy a biztos pénzáramlás kockázati mértéke (-1)-szerese önmagának, vagyis a biztos veszteség kockázata pozitív és a biztos nyereség kockázata negatív (Gáll, 2010).

Az optimalizáció szempontjából fontos továbbá kiemelni a konvexitási tulajdonságot. Egy $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ kockázati mértéket konvexnek nevezünk, ha minden $\lambda \in [0, 1]$ és $X, \ Y, \ \lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{X}$ esetén:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y). \tag{5}$$

A pozitív homogenitásból és a szubadditivitásból következik a konvexitás:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) = \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y). \tag{6}$$

Tehát ahhoz, hogy a kockázatot minél pontosabban és ésszerűbben mérni tudjuk, olyan kockázati mértékre van szükség, amely kielégíti a négy alaptulajdonságot, azaz koherens kockázati mérték.

A továbbiakban az irodalomban és a gyakorlatban legtöbbet használt kockázati mértékeket mutatom be, valamint megvizsgálom, hogy a négy tulajdonság közül melyeket teljesítik.

2.1 Variancia és szórás

A variancia, illetve a szórás kockázati mértékként való bevezetése Markowitz (Markowitz, 1952) nevéhez fűződik és így az egyik legrégebben használt kockázati mérték.

2.3 Definíció (Variancia). *Az X valószínűségi változó varianciáját az átlagtól való átlagos eltéréssel mérhetjük:*

$$\sigma^2(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2 \ ,$$

ahol $\mathbf{E}(X)$ jelöli az X valószínűségi változó várható értékét.

2.4 Definíció (Szórás). *Az X valószínűségi változó szórása a variancia négyzetgyöke:*

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} \ .$$

A gyakorlatban a hozamnak mint valószínűségi változónak a mintarealizációja áll rendelkezésre, azaz egy folytonos valószínűségi változó adott, konkrét értékei. Jelölje ezt a mintarealizációt r_i, $i = 1, \ldots, n$ és legyen $r = (r_1, \ldots, r_n)$. Ebben az esetben a varianciát a következő módon közelíthetjük:

$$\widehat{\sigma^2}(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \overline{r})^2}{n-1}, \tag{7}$$

ahol tehát r_i az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) hozam-érték, míg $\overline{r}$ ezen hozamoknak az átlaga.

Természetesen a szórás a variancia négyzetgyökével közelíthető:

$$\widehat{\sigma}(r) = \sqrt{\widehat{\sigma^2}(r)} \tag{8}$$

Mivel a kockázat mérésére koherens kockázati mértékre van szükség, érdemes megvizsgálni, hogy a variancia illetve a szórás kielégíti-e a koherencia négy tulajdonságát. Elmondható, hogy annak ellenére, hogy a variancia az egyik legrégebben és legszélesebb körben használt kockázati mérték, a négy tulajdonság egyikét sem elégíti ki, azaz nem monoton, nem szubadditív, nem pozitív homogén és nem eltolás invariáns (Joshi, 2013).

További probléma, hogy a variancia nem tesz különbséget a veszteségek és nyereségek között (Bugár, 2006), hiszen $\sigma^2(-X) = (-1)^2\sigma^2(X) = \sigma^2(X)$. Tehát a variancia csak abban az esetben használható a kockázat mérésére, ha a valószínűségi változó (profit, hozam, stb.) eloszlása elliptikus (Eftekhari, 2000).

A szórás a varianciától eltérően kielégíti ugyan a szubadditivitási és a pozitív homogenitási tulajdonságokat, de a varianciához hasonlóan nem monoton, nem eltolás invariáns, és továbbra sem tesz különbséget a nyereségek és veszteségek között (Joshi, 2013).

Az előzőeket figyelembe véve, sem a variancia, sem pedig a szórás nem alkalmas a kockázat mérésére, hiszen a variancia például (egyebek mellett) megsérti a szubadditivitási tulajdonságot, azaz az egyik minimum követelményt, hogy a diverzifikáció nem növelheti a portfólió kockázatát. Továbbá a variancia és a szórás is szimmetrikus, azaz ugyanúgy „büntezi" a magas hozamot, mint a nagy veszteségeket.

2.2 Szemivariancia

A variancia és a szórás szimmetrikus tulajdonságát tudjuk kiküszöbölni a szemivarianciával. Ez a kockázati mérték az ún. downside kockázat mérésére szolgál, azaz a várható értéknél (várható hozamnál) kisebb értékeket veszi figyelembe (Alexander, 2009).

2.5 Definíció (Szemivariancia). *Az X valószínűségi változó szemivarianciáját a következőképpen határozhatjuk meg:*

$$\mathrm{SV}(X) = \mathbf{E}((\min\{X - \mathbf{E}(X), 0\})^2).$$

Hasonlóan a varianciához, a gyakorlatban természetesen a hozamnak, mint valószínűségi változónak a mintarealizációja áll rendelkezésre, azaz egy folytonos valószínűségi változó adott, konkrét értékei. Ebben az esetben a szemivariancia a következő módon közelíthető:

$$\widehat{\mathrm{SV}}(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\min\{r_i - \overline{r}, 0\})^2}{n}, \tag{9}$$

ahol $r = (r_1, \ldots, r_n)$, r_i az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) hozam értéke, míg $\overline{r}$ ezeknek az átlaga.

Bebizonyítható, hogy a szemivariancia ugyan eltolás invariáns, de se nem monoton, se nem pozitív homogén és a szubadditivitási tulajdonságot sem teljesíti, és ezzel a Markowitz elmélet minimum követelményének a diverzifikációs elvnek sem tesz eleget (Joshi, 2013). Igaz ugyan, hogy a szemivariancia nem egy szimmetrikus kockázati mérték, azaz ebből a szempontból pontosabb képet ad a kockázatról, mint a variancia, illetve a szórás, viszont a négy legfontosabb tulajdonságból csak egyet teljesít, tehát a szemivariancia sem koherens, így nem alkalmas a kockázat pontos mérésére.

2.3 A kockáztatott érték (VaR)

A kockáztatott érték az utóbbi évek leggyakrabban használt mértéke a kockázat mérésére. Használata az 1980-as évek végén, az 1987-es részvénypiaci összeomlás után vált egyre elterjedtebbé (Jorion, 2006).

A fejezet megírásánál legnagyobbrészt Gáll (Gáll, 2010) könyvére támaszkodtam, ahol további részletek és bizonyítások találhatóak a VaR-ra vonatkozóan. A VaR definiálásához szükség van a p-kvantilis fogalmára.

2.6 Definíció (p-kvantilis). *Legyen X egy valós értékű valószínűségi változó F_X eloszlásfüggvénnyel és $p \in (0,1)$. Ekkor azt a q értéket amelyre:*

$$P(X \leq q) \geq p$$

és

$$P(X < q) \leq p$$

teljesül, az eloszlás p-kvantilisének nevezzük.

A p-ed rendű kvantilis tehát azt a számot jelenti, amelynél az összes előforduló ismérvértékek p-ed része nem nagyobb és $(1-p)$-ed része nem kisebb. Másképpen kifejezve, a p-ed rendű kvantilis az az érték, ahol az eloszlásfüggvény keresztezi vagy átugorja a p értéket.

Előfordulhat, hogy a kvantilis nem egyértelmű, illetve egy szám több értéknek is a p-kvantilise. Mivel több különböző érték is lehet p-kvantilis, ezért eltérő jelölést vezetek be az ún. alsó, vagy más néven legkisebb és a felső, vagy más néven legnagyobb kvantilis fogalmára.

2.7 Definíció (Legkisebb és legnagyobb p-kvantilis). *Az X valószínűségi változó legkisebb p-kvantilise:*

$$q_p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} .$$

Az X valószínűségi változó legnagyobb p-kvantilise:

$$q^p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} .$$

Mivel $\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} \subset \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$, így

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\},$$

vagyis $q_p(X) \leq q^p(X)$. Azaz $p \in (0,1)$ esetén a p-kvantilisek halmaza egy zárt, korlátos intervallum: $[q_p(X), q^p(X)]$. Az alsó és felső kvantilisek akkor és csak akkor egyenlőek, ha az

$$\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) = p\} = \begin{cases} [q_p(X), q^p(X)), & \text{ha } P(X = q^p(X)) > 0 \\ [q_p(X), q^p(X)], & \text{ha } P(X = q^p(X)) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

halmaz legfeljebb egyelemű.

Összefoglalva, ez azt jelenti, hogy a p-hez tartozó alsó és felső kvantilisek abban az esetben nem azonosak, ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és ezen a szakaszon az értéke éppen p.

Az alsó és a felső kvantilis fogalmának felhasználásával az egyik legszélesebb körben alkalmazott kockázati mérték, a kockáztatott érték (VaR), a következőképpen definiálható:

2.8 Definíció (Kockáztatott érték, Value at Risk). *Legyen X egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn, és $\alpha \in (0,1)$. Ekkor X felső α-ad rendű kockáztatott értéke:*

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X)\,.$$

Hasonlóan, X alsó α-ad rendű kockáztatott értéke:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X) = -q_{\alpha}(X)\,.$$

A továbbiakban az angol elnevezés után az esetek legnagyobb részében a VaR rövidítést fogom használni a kockáztatott érték jelölésére.

A kvantilishez analóg módon az alsó és felső kockáztatott értékek csak abban az esetben nem azonosak, ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans, és ezen a szakaszon az értéke éppen α.

A gyakorlatban a hozamoknak, mint folytonos valószínűségi változóknak a mintarealizációját tudjuk felhasználni a számolásokhoz. Jelölje r_i az i-edik hozam $(i = 1, \ldots, n)$ mintarealizációját, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ és r_i^* az r_i elemek növekvő sorrendbeli permutációjának az i-edik elemét: $r_1^* \leq r_2^* \leq \ldots \leq r_n^*$. Ekkor az α-kvantilis a k-adik elem, ahol $k = [n\alpha] = \max\{m | m \leq n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. Az alsó VaR-et ennek az elemnek a (-1)-szeresével közelíthetjük. Máshogy megfogalmazva a VaR értékét az empirikus eloszlásfüggvény általánosított inverzének (-1)-szeresével becsülhetjük:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{\alpha}(r) = -r_k^* = -\widehat{F}^{\leftarrow}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(\alpha), \tag{11}$$

ahol $\widehat{F}^{\leftarrow}_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{r_i \leq x\}}$ és $\mathbf{1}_A$ az A halmaz indikátorfüggvénye.

Ezek alapján a felső VaR mintabeli becslése pedig:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}^{\alpha}(r) = -r_l^*, \tag{12}$$

ahol $l = \min\{m | m > n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. A továbbiakban és a számítások elvégzéséhez az alsó VaR-t fogom használni.

Tehát a kockáztatott érték az a szám, amelynél nagyobb veszteség α-nál kisebb vagy egyenlő valószínűséggel fordul elő.

Belátható, hogy a VaR (mind az alsó, mind a felső) monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns kockázati mérték (Gáll, 2010). A VaR pozitív tulajdonsága, hogy a kockázatot egyetlen számban és pénznemben méri, így könnyen értelmezhető és a különböző értékek könnyen összehasonlíthatóak (Acerbi et al., 2001). A VaR a szemivarianciához hasonlóan downside kockázati mérték. Viszont nagy probléma a VaR-ral, hogy nem támogatja a diverzifikációt, azaz nem szubadditív. Továbbá, annak ellenére, hogy a VaR megmutatja, hogy mely értéknél nem fogunk többet veszíteni és mekkora valószínűséggel, de az ezen az értéken túli veszteségekkel nem foglalkozik, pedig a súlyos, extrém események ismerete fontos lenne. Tehát a VaR csak elliptikus eloszlások esetén alkalmas a kockázat mérésére, nem elliptikus eloszlások esetén – ami a gyakorlatban nem ritka jelenség – a kockázat téves megítéléséhez vezethet (Embrechts, 2000). Mindezeken felül, mivel a VaR nem szubadditív, így nem is konvex, amely lehetetlenné teszi a használatát optimalizációs problémák esetén (Szegö, 2002).

2.4 Expected Shortfall (ES)

Látható, hogy a VaR sem elégítette ki a koherens kockázati mértékek alapvető tulajdonságait. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e koherens kockázati mérték. A válasz igen, például az expected shortfall (ES), ami magyarul várható veszteséget jelent, de mivel a magyar irodalomban is angolul honosult meg a kifejezés, ezt fogom használni a továbbiakban. A fejezet megírásában Acerbi (Acerbi et al. (2001), Acerbi and Tasche (2002), Acerbi and Szekely (2014)) és Gáll (Gáll, 2010) munkáit vettem alapul.

A VaR arra a kérdésre ad választ, hogy mi az a minimális veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában bekövetkezhet. Tegyük fel most a kérdést egy kicsit másképpen: Mi az a várható veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában bekövetkezhet (Acerbi et al., 2001)? A választ az ES adja meg, amely tehát az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában mutatja a veszteség (profit) várható értékét.

2.9 Definíció (Expected Shortfall, ES). *Legyen X egy valószínűségi változó, valamint $\alpha \in (0,1)$ és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}((X)^-) < \infty$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X Expected Shortfall-ja α szinten:*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(u)\,du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_u(X)\,du\,.$$

Mivel az alsó és a felső kvantilisek csak egy nulla valószínűségi halmazon különböznek egymástól, és így $\int_0^\alpha q_u(X)du = \int_0^\alpha q^u(X)du$, a definícióban az alsó és a felső kvantilisek kicserélhetőek, azaz

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q^u(X)\,du\,. \tag{13}$$

A gyakorlatban a hozamoknak, mint folytonos valószínűségi változóknak a mintarealizációjával számolunk. Legyen r_i az i-edik $(i = 1,\dots,n)$ hozam értéke és $r = (r_1,\dots,r_n)$. Ekkor az ES kiszámításához először növekvő sorrendbe kell rendezni az elemeket: $r_1^* \leq r_2^* \leq \ldots \leq r_n^*$, ahol r_i^* jelöli az r_i mintarealizáció növekvő sorrendbeli permutációjának i-edik elemét. Ekkor az α-kvantilis a k-adik elem, ahol $k = [n\alpha] = \max\{m | m \leq n\alpha, m \in I\!N\}$, azaz $r_1^*, r_2^*, \dots, r_k^*$ a legrosszabb α százaléknyi eset. Az ES-t ennek a k elemnek az átlagával közelíthetjük (Acerbi et al., 2001):

$$\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(r) = -\frac{\sum_{i=1}^k r_i^*}{k}. \tag{14}$$

A (14) kifejezést átalakítva:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(r) &= -\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i^*}{k} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^* \mathbf{1}_{\{i\le k\}}}{k}\\ &= -\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i^*\mathbf{1}_{\{r_i^*\le r_k^*\}} - \sum_{i=1}^{n} r_i^*\mathbf{1}_{\{r_i^*\le r_k^*\}} + \sum_{i=1}^{n} r_i^*\mathbf{1}_{\{i\le k\}}\Big)\\ &= -\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i^*\mathbf{1}_{\{r_i^*\le r_k^*\}} - \sum_{i=1}^{n} r_i^*\big(\mathbf{1}_{\{r_i^*\le r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i\le k\}}\big)\Big)\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Az $\mathbf{1}_{\{r_i^*\le r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i\le k\}}$ különbség értéke az esetek legnagyobb részében nulla, hiszen az $\{r_i^* \le r_k^*\}$ és $\{i \le k\}$ halmazok megegyeznek. Ezen halmazok csak akkor különböznek egymástól, ha $i > k$ esetén létezik r_k^*-gal megegyező elem. Ezekben az esetekben $\mathbf{1}_{\{r_i^*\le r_k^*\}} = 1$ és $\mathbf{1}_{\{i\le k\}} = 0$, azaz a különbség értéke 1-gyel egyenlő. Így a (15) egyenlet átalakítása a következőképpen folytatható:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha(r) &= -\frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i\mathbf{1}_{\{r_i\le r_k^*\}} - r_k^*\sum_{i=1}^{n}\big(\mathbf{1}_{\{r_i\le r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i\le k\}}\big)\Big)\\ &= -\frac{n}{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i\mathbf{1}_{\{r_i\le r_k^*\}} - r_k^*\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{\{r_i\le r_k^*\}} - \frac{k}{n}\Big)\right)\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Mivel α-t $\frac{k}{n}$-nel, a várható értéket az átlaggal, míg a valószínűséget a kedvező/összes kifejezésekkel közelíthetjük, illetve számolhatjuk ki, ezért a (16) képletből látható, hogy az ES a következőképpen is definiálható:

2.10 Definíció. *Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}((X)^-) < \infty$, és legyen $\alpha \in (0,1)$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X expected shortfall-ja α-szinten:*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\Big(\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{X\le q_\alpha(X)\}}) + q_\alpha(X)\big(\alpha - P(X \le q_\alpha(X))\big)\Big)\,.$$

Elmondható, hogy – ellentétben az eddig vizsgált, és igen gyakran használt kockázati mértékekkel – az ES monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns, azaz koherens kockázati mérték (Gáll, 2010). Viszont annak ellenére, hogy az ES több pozitív tulajdonsággal rendelkezik, ez sem bizonyult tökéletesnek, hiszen például míg a VaR mindig létezik, addig az ES létezéséhez az $\mathbf{E}((X)^-) < \infty$ feltételezéssel kell élni.

Az előzőekben bemutatott kockázati mértékek tulajdonságait az *1. táblázatban* foglaltam össze. A kockázat pontos mérésére egy olyan kockázati mértékre lenne szükség, amely kielégíti a monotonitás, szubadditivitás, pozitív homogenitás és eltolás invariancia tulajdonságait, azaz koherens. Látható, hogy a legtöbbet használt kockázati mértékek közül csak az ES koherens, azaz elméleti szinten a vizsgált öt kockázati mérték (variancia, szórás, szemivariancia, VaR és ES) közül egyedül az ES alkalmas a kockázat mérésére.

	Monotonitás	Szubadditivitás	Pozitív homogenitás	Eltolás invariancia
variancia	–	–	–	–
szórás	–	√	√	–
szemivariancia	–	–	–	√
VaR	√	–	√	√
ES	√	√	√	√

1. táblázat. Néhány ismert kockázati mérték tulajdonsága

3 Az adatok

A számításokhoz az adatokat a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról (bet.hu) töltöttem le. Hét részvény, nevezetesen az FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba és Richter napi árfolyam adataival dolgoztam 2005.07.01-2015.06.29 között, azaz 10 évre vonatkozóan.

Ezen adatok megvizsgálásához, elemzéséhez és a számításokhoz az R/ Rmetrics programot használtam.

A tanulmányban nem a konkrét részvény árakkal, hanem a hozamokkal, pontosabban a logaritmikus hozamokkal számoltam. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban, ha hozamot említek, akkor mindig logaritmikus hozamra gondolok.

A mellékletben, a *2. és 3. ábrákon* látható a hét részvény napi logaritmikus hozama és azok eloszlása. A hisztogramba rajzolt függőleges vonal az átlagot, míg a piros görbe az adatokból számolt átlaggal és szórással megegyező átlagú és szórású normális eloszlást jelenti.

A legtöbb elmélet normalitást feltételez az adatok eloszlására vonatkozóan. Természetesen a gyakorlatban ez ritkábban valósul meg, ami téves következtetésekhez vezethet. Így először az alapvető statisztikákat és a normalitást vizsgálom meg. Alapvető statisztikák alatt értem a minimumot, az első kvartilist, a mediánt, az átlagot, a harmadik kvartilist, a maximumot, a szórást és a ferdeséget, valamint a csúcsosságot. A százalékban kifejezett logaritmikus hozamokból számolt alapvető statisztikákat a *2. táblázatban* foglaltam össze. Látható, hogy az FHB részvény hozama rendelkezik a legnagyobb minimummal, a Raba részvény hozama pedig a legnagyobb maximummal. Leolvasható továbbá, hogy a hét részvény közül csak a Raba és a Richter rendelkezik pozitív átlaggal, valamint, hogy a szórás az OTP esetében a legnagyobb.

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
Minimum, %	-19,720	-16,223	-12,573	-16,235	-16,138	-16,229	-12,189
1. kvartilis, %	-1,140	-1,184	-0,905	-1,314	-0,786	-0,900	-0,954
Medián, %	0	0	0	0	0	0	0
Átlag, %	-0,025	-0,008	-0,031	-0,009	0,000	0,021	0,012
3. kvartilis, %	0,970	1,176	0,860	1,351	0,645	0,852	0,961
Maximum, %	20,891	14,027	11,680	20,916	13,961	24,701	9,074
Szórás, %	2,385	2,268	1,701	2,686	1,931	2,131	1,821
Ferdeség	0,248	0,153	-0,535	-0,059	0,294	0,689	-0,105
Lapultság	8,860	5,966	6,379	6,128	12,359	15,446	3,533

2. táblázat. A hét részvény százalékban kifejezett logaritmikus hozamaira vonatkozó alapvető statisztikák

A normalitás vizsgálatának egyik módja a ferdeség és a csúcsosság megvizsgálása. A ferdeséggel tulajdonképpen a szimmetriától való eltérés mérhető. A normális eloszlás ferdesége például nulla, hiszen a Gauss-görbe szimmetrikus, és bármely egyéb szimmetrikus eloszlás ferdesége szintén nulla. Negatív ferdeség azt jelenti, hogy az eloszlás bal széle hosszabb, vastagabb, míg a pozitív ferdeség hosszabb, illetve vastagabb jobb farkat jelent. A vizsgált részvények közül az OTP és a Richter állnak a legközelebb a szimmetrikus eloszláshoz.

A lapultság tulajdonképpen azt mutatja meg, hogy az eloszlásfüggvény hogyan viszonyul a normális eloszláséhoz. A normális eloszlás lapultsága nulla, míg az ennél csúcsosabb sűrűségfüggvények pozitív, a kevésbé csúcsos sűrűségfüggvények negatív lapultsági mutatóval rendelkeznek. Az általam elemezni kívánt hét részvény mind csúcsosabb a normális eloszlásnál. A mérőszám a Raba illetve a Pannergy esetén a legmagasabb: a Raba esetében 15,446, míg a Pannergy esetében 12,359.

Az előbbiekben a hozamok eloszlására tett megállapítások a 2. és a 3. ábrák hisztogramjain is megfigyelhetőek. Mind a hét részvény esetében viszonylag szimmetrikus eloszlásról van szó, és látható, hogy mindegyik hozam eloszlásfüggvénye sokkal csúcsosabb, mint a normális eloszlásé. Tehát az első vizsgálatok alapján egyik eloszlásról sem feltételezek normalitást.

Egy másik lehetőség a normalitás megvizsgálására a hipotézisvizsgálat. Többek között a Shapiro-Wilk és a Kolmogorov-Szmirnov teszt alkalmas annak a nullhipotézisnek a tesztelésére, hogy az adatok normális eloszlásból származnak-e. Mindkét tesztet lefuttattam a hét részvény hozamainak tesztelésére, és minden esetben a p-érték jóval kisebb volt, mint a választott küszöbérték (0,05). Ez azt jelenti, hogy mindkét teszt és mind a hét részvény esetén elvetjük a nullhipotézist, vagyis a hozamok nem normális eloszlásból származnak.

Ezt támasztja alá az ún. Q-Q plot (kvantilis-kvantilis ábra) is (Melléklet *4. ábra*), amely a minta tapasztalati kvantiliseit veti össze az illesztett eloszlás kvantiliseivel. Amennyiben a két eloszlás azonos, a pontok egy egyenesen – a 45°-os egyenesen – helyezkednek el. Minél jobban rásimulnak a pontok az egyenesre, annál jobbnak mondható az illeszkedés a két eloszlás között. A vizsgált hét részvény egyikének esetében sem illeszkednek a pontok az egyenesre annyira, hogy normalitást feltételezhetnénk az eloszlásukról.

4 Utótesztelés

Az ún. utótesztelés (backtesting) módszerét használom annak megvizsgálására, hogy melyik kockázati mérték bizonyul jobbnak a gyakorlatban. Jobbnak akkor nevezek egy kockázati mértéket a másiknál, ha azzal pontosabban meg lehet becsülni a kockázatot, azaz, ha a tényleges és a becsült értékek között kisebb eltérés tapasztalható.

A piaci kockázat kiszámításának három főbb módszere ismert: a variancia-kovariancia módszer, a Monte Carlo szimuláció és a történeti szimuláció

(Embrechts et al., 2005). Ezen módszerek tulajdonképpen a hozam/veszteség (P&L) eloszlásfüggvény becslésének módszerében különböznek egymástól (Bugár, 2006). A tanulmányban célom a VaR és ES összehasonlítása történeti szimuláció segítségével, így a másik két módszerről csak említést teszek.

A variancia-kovariancia módszer lényege – ahogy a neve is mutatja – a portfólióban szereplő eszközök varianciájának, valamint ezen eszközök páronkénti kovarianciájának a kiszámítása. A variancia-kovariancia mátrixot (a portfólióban szereplő eszközöknek megfelelően) súlyozva kapjuk meg a portfólió varianciáját. Ahhoz, hogy a variancia segítségével kiszámítsuk a kockázatot, valamilyen feltételezéssel kell élni a hozamok eloszlására vonatkozóan. Legkézenfekvőbb (főleg számolási szempontból) a normalitás feltételezése (Damodaran, 2008). A hozamok normalitása a legtöbb esetben, főleg napi illetve rövid időintervallumra vonatkozó hozamok esetén, nem teljesül a gyakorlatban, mint ahogy az általam bemutatott adatok esetén sem (4. fejezet). Napi adatok esetén sokkal csúcsosabb eloszlás tapasztalható, mint a normális eloszlásé: a napi hozamokra jellemző eloszlás ,,középső" része sokkal vékonyabb, valamint jóval hosszabb és vastagabb farokkal rendelkezik, mint a normális eloszlás. Ez azt is jelenti, hogy több extrém érték jellemző ezen hozamokra, mint amit a normális eloszlás feltételez, ami a kockázat alul becsléséhez vezethet (Embrechts et al., 2005). Ezen probléma orvoslására az irodalomban több javaslatot is találhatunk, de a nem-normális modellek alapján, a paraméterek becslése, valamint a kockázat kiszámítása igen bonyolulttá válhat. További pontatlanságot okozhat az az általános feltevés, hogy a varianciák és a kovarianciák időben állandóak. Ezzel szemben a különböző GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modellek segítségével, az időbeli változást figyelembe véve becsülhetjük meg a varianciát, ezzel egy pontosabb képet alkotva arról, valamint a kockázatról (Damodaran, 2008). Egy további kritikája a variancia-kovariancia módszernek, hogy nemcsak a kockázati faktorok többdimenziós normális eloszlását, hanem azt is feltételezi, hogy az eloszlásfüggvény a kockázati faktorok lineáris függvénye. Ezen feltevések általában a valóságban nem teljesülnek (Embrechts et al., 2005).

Egy másik, igen gyakran használt módszer a piaci kockázat becslésére a Monte Carlo szimuláció. A Monte Carlo szimuláció összefoglaló neve minden olyan módszernek, amelyben az eloszlásfüggvényt szimuláció segítségével becsüljük. A szimuláció első lépése egy modell illesztése és kalibrálása a történeti adatokra. Második lépés a modell segítségével, az adatokkal megegyező eloszlású, m (nagy számú) realizáció generálása. Ezen m szcenárió segítségével meghatározható az eloszlásfüggvény, melyből a kockázat már kiszámolható. Vegyük észre, hogy a módszer nem oldja meg a modell-illesztési problémát, és a szimuláció eredménye az illesztett modell pontosságától függ (Embrechts et al., 2005). A gyakorlatban sokat előforduló példa a Monte Carlo szimulációra, amikor a részvény árak változását az ún. geometriai Brown-mozgással (GBM) szimulálják. A GBM azzal a feltételezéssel él, hogy a logaritmikus hozamok normális eloszlást követnek (Hull, 2006). Mint azt már többször megemlítettem, az általam elemezni kívánt adatok hozamai nem követnek normális eloszlást, így a GBM alkalmazása téves eredményre vezetne.

A fentieket figyelembe véve a következőekben csak a történeti szimulációval fogok foglalkozni. Ennek a módszernek előnye az előzőekkel szemben, hogy semmilyen előzetes feltételezéssel nem kell élni az eloszlásfüggvényekre vonatkozóan.

4.1 Utótesztelés történeti szimuláció segítségével

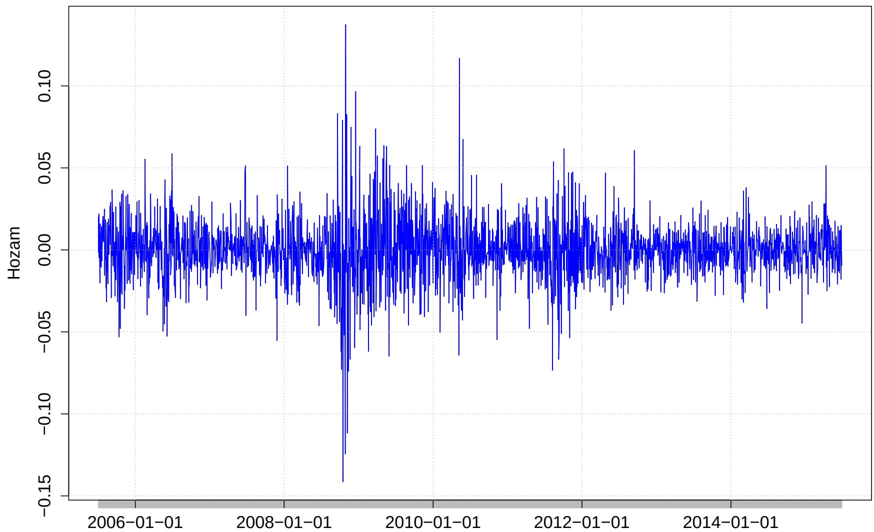
Az utótesztelés végrehajtásához létre kell hozni az ún. idő-ablakokat (time window). Az irodalomban és a gyakorlatban is ennek értéke leggyakrabban egy év, azaz 250 kereskedési nap ($T = 250$). Az első ablak így az 1. naptól a 250. napig tart. A második ablak a 2. naptól a 251. napig, és így tovább. Az első idő-ablak adatait felhasználva ki lehet számolni a szükséges kockázati mérték értékét az első 250 napra vonatkozóan, amely egyben egy előrejelzés a 251. napra. Ha rendelkezésre áll a 251. napi hozam is, akkor az első idő-ablak alapján számított becsült érték összehasonlítható a valódi hozam értékével. Ekkor már kiszámolható a második idő-ablakra vonatkozó kockázati mérték, amely egy becsült érték lesz a következő napra, azaz a 252. napra vonatkozóan. Ha rendelkezésre áll a 252. napi hozam, akkor a becsült kockázat összehasonlítható a tényleges értékkel. És így tovább, az összes adaton végiglépkedve (*3. táblázat*). Ezt a módszert történeti módszernek (historical simulation) nevezzük, hiszen azzal a feltételezéssel él, hogy a múltban történt eseményekkel le tudjuk írni, meg tudjuk becsülni a jövőbeli eseményeket.

idő-ablak	első nap	utolsó nap	becslés
1.	1.	250.	251.
2.	2.	251.	252.
3.	3.	252.	253.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(N-249)$.	$(N-249)$.	N.	$(N+1)$.

3. táblázat. A számításokhoz használt idő-ablakok

A fent bemutatott módszert fogom tehát alkalmazni a két leggyakrabban használt kockázati mérték, a VaR és az ES összehasonlítására. Elméleti szinten már láthattuk, hogy csak az ES alkalmas a kockázat mérésére, hiszen ez az egy kockázati mérték koherens. Ezért a továbbiakban azt vizsgálom, hogy a VaR vagy az ES bizonyul jobbnak a gyakorlatban.

A 3. fejezetben említett hét részvény logaritmikus hozamait használom tíz évre vonatkozóan. Egy olyan portfóliót hozok létre, amely mind a hét részvényből pontosan egyet tartalmaz. Ennek a portfóliónak a logaritmikus hozama a portfólió árakból számolt logaritmikus hozammal egyezik meg (Petters and Dong, 2016), azaz $r_t := \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$, ahol r_t a portfólió logaritmikus hozamát, míg P_t a portfólió árát jelenti a t-edik időpillanatban. Így a portfólió hozamok egy $N = 2606$ elemből álló adatsort képeznek (*1. ábra*).



1. ábra. A portfólió napi logaritmikus hozamai 2005.07.01 és 2015.06.29 között

A számításokhoz – a könnyebb áttekinthetőség végett – először táblázatba rendezem a hozamokat, azaz az adatokat: az első oszlopba kerül az első 250 elem, a másodikba a második 250 elem és így tovább (*4. táblázat*). Így minden oszlop tulajdonképpen egy idő-ablak, ami az adott esetben megegyezik az ún. szcenárióval. Jelölje r_t^m az m-edik szcenárióhoz és t-edik időpillanathoz tartozó hozam értékét, ahol $m = 1, \dots, M$ és $t = 1, \dots, T$. Az elemezni kívánt adatok esetében $N = 2606$, $T = 250$ és így $M = 2357$. Vegyük észre, hogy a konstrukció miatt például $r_2^1 = r_1^2$ vagy $r_3^1 = r_2^2 = r_1^3$. A VaR_α^m és az ES_α^m jelölik az m-edik szcenárió adataiból számolt VaR és ES értékeket. Természetesen, mivel mintarealizációról van szó, a kockázati mérték kiszámításához a (11) és (14) képleteket használom, azaz ha $r^m = (r_1^m, \dots, r_{250}^m)$, akkor

$$\mathrm{VaR}_\alpha^m := -r_k^{m^*} = -\widehat{F}^{\leftarrow}_{\{r_1^m, \dots, r_{250}^m\}}, \tag{17}$$

illetve

$$\mathrm{ES}_\alpha^m := -\frac{\sum_{t=1}^k r_t^{m^*}}{k}, \tag{18}$$

ahol $r_i^{m^*}$ jelöli az r_i^m mintarealizáció növekvő sorrendbeli permutációjának i-edik elemét ($i = 1, \dots, 250$) az adott m-edik szcenárióra vonatkozóan.

	Szcenárió (m)					
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$\cdots$	$m=2356$	$m=2357$
$t=1$	r_1^1	r_1^2	r_1^3	$\cdots$	r_1^{2356}	r_1^{2357}
$t=2$	r_2^1	r_2^2	r_2^3	$\cdots$	r_2^{2356}	r_2^{2357}
$t=3$	r_3^1	r_3^2	r_3^3	$\cdots$	r_3^{2356}	r_3^{2357}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$t=250$	r_{250}^1	r_{250}^2	r_{250}^3	$\cdots$	r_{250}^{2356}	r_{250}^{2357}
	VaR_α^1	VaR_α^2	VaR_α^3	$\cdots$	$\mathrm{VaR}_\alpha^{2356}$	VaR_α^{2357}
	ES_α^1	ES_α^2	ES_α^3	$\cdots$	ES_α^{2356}	$\mathrm{ES}_\alpha^{2357}$

4. táblázat. Portfólió hozamok

4.2 A VaR utótesztelése

Ahogy már fentebb említettem, a VaR tesztelésére idő-ablakokat használok. Ezen idő-ablakok adatait felhasználva ki lehet számolni a VaR értékét és ezt az értéket össze lehet hasonlítani a következő napi valódi hozam értékével. Az összehasonlítás azt jelenti, hogy minden egyes esetben megvizsgálom, hogy az adott hozam értéke kisebb-e, mint az arra a napra becsült VaR érték (-1)-szerese, majd összeszámolom, hogy hány esetben volt ez tapasztalható, azaz hogy hány esetben becsülte alá a VaR a tényleges kockázat értékét. Ennek a valószínűsége – a VaR definíciója alapján – meg kell, hogy egyezzen a konfidenciaszinttel, azaz α-val (Danielsson, 2011).

Jelölje R^m az m-edik szcenárióhoz tartozó valószínűségi változót és r_t^m az R^m egy mintarealizációját, $t = 1, \ldots, 250$. A VaR definíciója alapján:

$$P(R^{m+1} < -\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})) = \alpha \tag{19}$$

és így

$$\begin{aligned} \alpha &= P(R^{m+1} < -\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})) \\ &= \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{R^{m+1} < -\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}}\right) , \end{aligned} \tag{20}$$

ahol $\mathbf{1}_{\{R^{m+1} < -\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}}$ az $\{R^{m+1} < -\mathrm{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}$ halmaz indikátorfüggvénye.

A mintarealizáció segítségével a várható érték a relatív gyakorisággal míg az $(m+1)$-edik szcenárióhoz tartozó VaR az m-edik szcenárióhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvény segítségével közelíthető, és így:

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{1}_{\{r_T^{m+1} < -\mathrm{VaR}_\alpha^m\}} . \tag{21}$$

Minél közelebb van a becsült kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsülhető meg a VaR-ral a kockázat, annál közelebb lesz ez az érték α-hoz.

4.3 Az ES utótesztelése

A Bázeli Bizottság 2012-ben – az 1996 óta használt VaR kockázati mérték helyett – az ES, mint új szabályozói kockázati mérték bevezetését javasolta.

A probléma csak az volt, hogy ellentétben a VaR-ral, úgy gondolták, hogy bizonyos matematikai tulajdonsága (elicitability) miatt az ES nem utótesztelhető. (A definíció és részletes leírás a témával kapcsolatban megtalálható például Emmer et al. (2015) és Acerbi and Szekely (2014) cikkében.) Így a Bázeli Bizottság azt javasolta, hogy adaptálják az ES-t mint kockázati mértéket és folytassák az utótesztelést a VaR használatával. A legújabb kutatások megoldani látszanak ezt a problémát is, hiszen kimutatták, hogy az ES is utótesztelhető.

Az ES utótesztelését Acerbi és Székely cikke (Acerbi and Szekely, 2014) alapján végzem el. Belátható (Acerbi and Tashe, 2002), hogy az ES folytonos esetben a következőképpen írható:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\{X<q_\alpha\}})\,. \tag{22}$$

Továbbra is jelölje R^m az m-edik szcenárióhoz tartozó valószínűségi változót és r_t^m az R^m egy mintarealizációját, $t = 1,\ldots,250$, valamint VaR_α^m, illetve ES_α^m az m-edik szcenárióhoz tartozó mintarealizációból számolt VaR és ES értékeket α-szinten. Az $I^m := \mathbf{1}_{\{R^m<-\,\mathrm{VaR}_\alpha(R^m)\}}$ jelöléssel, valamint az $X = R^m$ helyettesítéssel élve

$$\mathrm{ES}_\alpha(R^m) = -\frac{1}{\alpha}\mathbf{E}(R^m I^m)\,. \tag{23}$$

A (23) egyenletet, valamint a várható érték tulajdonságait felhasználva látható, hogy:

$$0 = \mathbf{E}\left(\frac{R^m I^m}{\alpha\,\mathrm{ES}_\alpha(R^m)} + 1\right). \tag{24}$$

Mindkét oldal M-szerinti átlagát véve:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} 0 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{E}\left(\frac{R^m I^m}{\alpha\,\mathrm{ES}_\alpha(R^m)} + 1\right). \tag{25}$$

A (25) egyenlet átrendezésével kapjuk, hogy

$$0 = \mathbf{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{R^m I^m}{\mathrm{ES}_\alpha(R^m)}\right) + \alpha, \tag{26}$$

azaz

$$\alpha = -\mathbf{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{R^m I^m}{\mathrm{ES}_\alpha(R^m)}\right). \tag{27}$$

Hasonlóan a VaR-hez a várható érték a relatív gyakorisággal közelíthető, és így a mintarealizációból számolt α becsült értéke:

$$\widehat{\alpha} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{r_t^m\mathbf{1}_{\{r_t^m<-\,\mathrm{VaR}_\alpha^m\}}}{\mathrm{ES}_\alpha^m}. \tag{28}$$

Minél közelebb van a becsült kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsülhetjük meg az ES-sel a kockázatot, annál közelebb lesz ez az érték α-hoz.

5 Eredmények és következtetések

A számításokat a már bemutatott adatokon az R statisztikai program segítségével végeztem el. Az *5. táblázatban* láthatóak az utótesztelés eredményei, $0,5\%$, 1%, 2%, $2,5\%$ és 5%-os szinteken, a VaR, valamint az ES esetében. Az $\widehat{\alpha}$ oszlopokban tüntettem fel a történeti szimulációval kapott alfa értékeket. Az $|\widehat{\alpha}-\alpha|$ oszlopokban lévő számok azt mutatják, hogy a tényleges alfa érték mennyire tér el az előrejelzések alapján számított alfa értéktől.

	VaR		ES	
α	$\widehat{\alpha}$	$\lvert\widehat{\alpha}-\alpha\rvert$	$\widehat{\alpha}$	$\lvert\widehat{\alpha}-\alpha\rvert$
0,5	0,89	0,39	0,41	0,09
1	1,27	0,27	0,83	0,17
2	1,99	0,01	1,68	0,32
2,5	2,72	0,22	2,42	0,08
5	5,17	0,17	4,85	0,15

5. táblázat. Az utótesztelés eredménye, %

A számításokhoz használt adatok alapján, az utótesztelés eredményeiből látható, hogy $\alpha = 2\%$-os szinten a VaR sokkal jobbnak bizonyul az ES-nél. Közeli eredmények születtek $\alpha = 5\%$-os szinten: a VaR esetében az eltérés $0,17\%$, míg az ES esetében $0,15\%$, azaz ezen a szinten az ES bizonyult jobbnak. Hasonlóan az összes többi alfa esetéhez. Ez azt jelenti, hogy $\alpha = 2\%$ kivételével minden vizsgált alfa szinten az ES segítségével számított alfa érték közelebb volt az elméleti értékhez, mint a VaR segítségével számított alfák.

A két kockázati mérték a különböző alfa szinteken számolt abszolút hibák vizsgálata mellett összehasonlítható a relatív hiba segítségével is. Vektorok relatív hibájának kiszámítása a következő összefüggéssel történik (Pryce, 1984):

$$\mathcal{E}_{re} = \frac{\| \widehat{\alpha} - \alpha \|}{\| \alpha \|}, \tag{29}$$

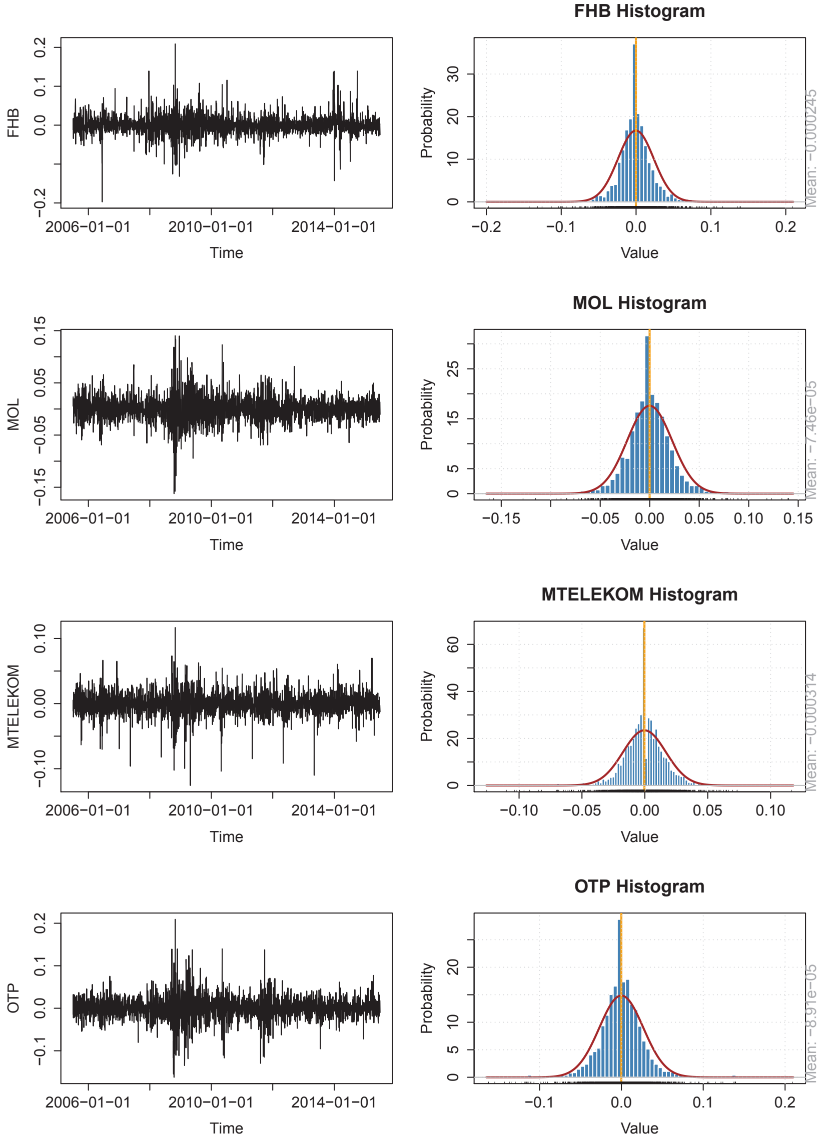
ahol $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \ldots, \widehat{\alpha}_n)$ jelöli az elméleti értékekből, míg $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $n \in I\!N$ a számított, mért értékekből képzett vektort. A VaR és az ES relatív hibáinak összehasonlításához a leggyakrabban használt normát, az euklideszi normált használom:

$$\mathcal{E}_{re} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} (\widehat{\alpha}_i - \alpha_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} \alpha_i^2}}. \tag{30}$$

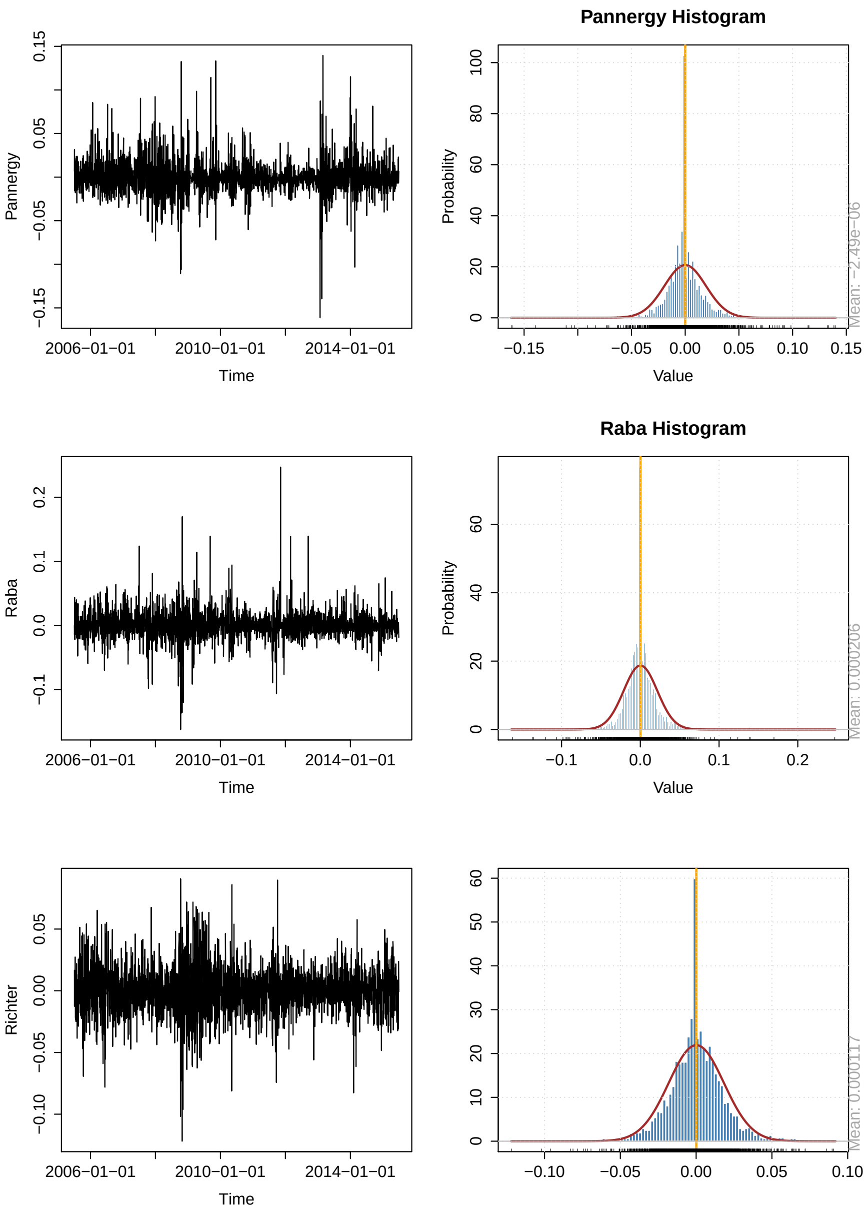
A (30) egyenlet alapján a VaR relatív hibája az 5. táblázatban bemutatott alfa szinteket figyelembe véve $\mathcal{E}_{re}^{\mathrm{VaR}} = 0,091$, míg az ES relatív hibája $\mathcal{E}_{re}^{\mathrm{ES}} = 0,068$. Vagyis a többdimenziós relatív hibákat összehasonlítva elmondható, hogy az ES-nek kisebb a relatív hibája, így összességében jobb kockázati mértéknek bizonyul.

A fentebb bemutatott számításokat, valamint az elméleti tényeket is figyelembe véve úgy gondolom, hogy az expected shortfall-lal pontosabb képet kaphatunk a kockázatról, mint a VaR kockázati mértéket használva.

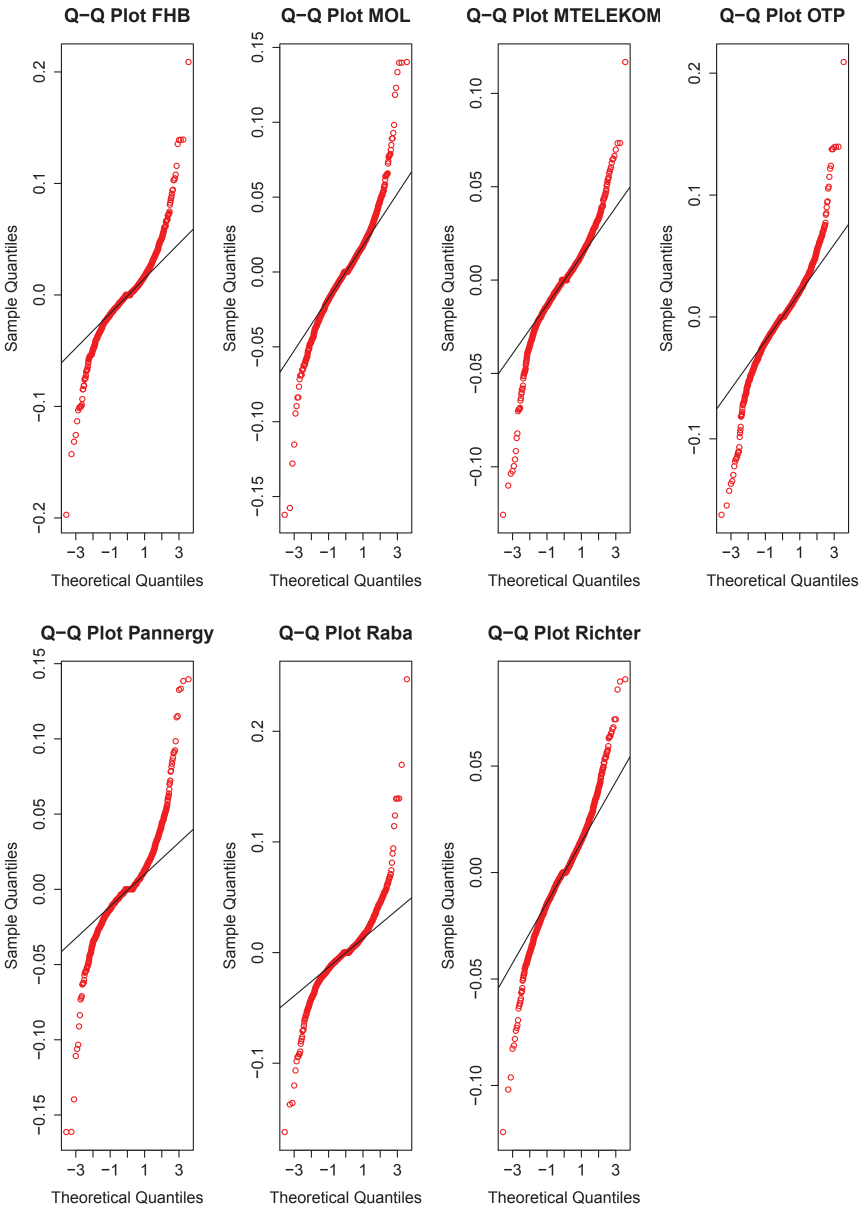
Melléklet



2. ábra. Az FHB, MOL, MTELEKOM és OTP részvények napi logaritmikus hozamai és azok eloszlásai 2005.07.01 és 2015.06.29 között



3. ábra. A Pannergy, Raba és Richter részvények napi logaritmikus hozamai és azok eloszlásai 2005.07.01 és 2015.06.29 között



4. ábra. A hét részvény logaritmikus hozamainak kvantilis-kvantilis ábrája

Irodalom

1. Acerbi, C., Nordio, C., and Sirtori, C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. arXiv preprint cond-mat/0102304.
2. Acerbi, C. and Szekely, B. (2014). Backtesting expected shortfall. *Risk,* 27(11).
3. Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance,* 26(7):1487–1503.
4. Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, volume 4. John Wiley & Sons.
5. Arratia, A. (2014). *Computational Finance.* Springer.
6. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance,* 9(3):203–228.
7. Bugár, Gyöngyi és Uzsoki, M. (2006). Befektetések kockázatának mérése. *Statisztikai Szemle*, 84(9).
8. Damodaran, A. (2003). *Investment philosophies: successful strategies and the investors who made them work,* volume 185. John Wiley & Sons.
9. Damodaran, A. (2003-2008). (Unpublished paper) Value at Risk (VaR). http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf . Accessed: 2017-04-25.
10. Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: The theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*, volume 588. John Wiley & Sons.
11. Eftekhari, B., Pedersen, C. S., and Satchell, S. E. (2000). On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from European markets. *The European Journal of Finance,* 6(1):18–38.
12. Embrechts, P. (2000). Extreme value theory: Potential and limitations as an integrated risk management tool. Derivatives Use, Trading & Regulation, 6.
13. Embrechts, P., Frey, R., and McNeil, A. (2005). Quantitative risk management. *Princeton Series in Finance,* Princeton, 10.
14. Emmer, S., Kratz, M., and Tasche, D. (2015). What is the best risk measure in practice? a comparison of standard measures. *Journal of Risk,* 18:31–60.
15. Gáll, József és Pap, G. (2010). *Bevezetés a pénzügyi matematikába.* Szegedi Egyetemi Kiadó.
16. Hubbard, D. W. (2014). *How to measure anything: Finding the value of intangibles in business.* John Wiley & Sons.
17. Hull, J. C. (2006). *Options, futures, and other derivatives.* Pearson Education India.
18. Jorion, P. (1999). *A kockáztatott érték.* Panem.
19. Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.* McGraw-Hill.
20. Joshi, M. S. and Paterson, J. M. (2013). *Introduction to Mathematical Portfolio Theory.* Cambridge University Press.
21. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance,* 7(1):77–91.
22. Petters, A. O. and Dong, X. (2016). *An introduction to mathematical finance with applications.*

23. Pryce, J. (1984). A new measure of relative error for vectors. *SIAM Journal on Numerical Analysis,* 21(1):202–215.

24. Szegö, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking & Finance,* 26(7):1253–1272.

COMPARING VALUE AT RISK AND EXPECTED SHORTFALL USING HISTORICAL BACKTESTING

In this paper I deal with financial risk measures and their comparison. I describe five risk measures: variance, standard deviation, semivariance, Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES). It can be proven that from these risk measures only ES satisfies the natural properties of so called coherence and according to this it is the only 'useable' risk measure. However, despite this fact, Value at Risk is nevertheless the most often used risk measure in industry. Therefore in my empirical study I compare VaR and ES. For the comparison I chose the method of historical backtesting, which is described in detail individually for VaR and for ES. The analysis has been carried out at several alpha levels, using price data of seven stocks. Considering both the theoretical and the empirical results, I came to the conclusion that ES provides a more precise picture of the risk than VaR.