MÉRFÖLDKÖVEK A BEFEKTETÉSI KOCKÁZAT MODELLEZÉSÉBEN[1]

BUGÁR GYÖNGYI
PTE KTK

A tanulmány a befektetési kockázat modellezésében napjainkig végbement módszertani fejlődés fontosabb mérföldköveit tekinti át. A befektetési kockázat modellezése befektetés-kombinációk, azaz portfóliók kockázatának becslését igényli. E folyamat két kritikus pontját a kockázati mérték jó megválasztása és az egyes portfólió elemek közötti kapcsolat szorosságának korrekt mérése képezi. A varianciától a várható többletveszteségig illetve a lineáris korrelációs együtthatótól a kopulák alkalmazásáig tartó fejlődés főbb sajátosságainak áttekintését követően megmutatjuk, hogyan alkalmazható a kopulamódszertan a várható többletveszteség becslése során.

Kulcsszavak: portfólió optimalizálás, kockázati mérték, kopula

1 Bevezetés

Szegö (2004), a Journal of Banking and Finance folyóirat egykori főszerkesztője a pénzügyi kutatások szakterületének „harmadik forradalmaként" említette a kockázatmérés területén az 1990-es évek végétől felgyorsult kutatási érdeklődést. Mindez jól érzékelteti, hogy a modern portfólió elmélet kialakulásától kezdődően – de különösen az utóbbi két évtizedben – e témakörben számos értékes hozzájárulás született.

A kockázat megfelelő modellezése nemcsak a befektetési portfóliók optimalizálásában játszik kulcsfontosságú szerepet, hanem döntő jelentőségű a bankok szabályozói tőkekövetelményének megállapításában, valamint a biztosítási tevékenységben is.

A jelen írás célja, hogy áttekintse a befektetési portfóliók kockázatának becslésében végbement módszertani fejlődés főbb sajátosságait, és rámutasson néhány jövőben megoldandó problémára is.

A tanulmány az alábbi módon épül fel: a következő rész Markowitz modern portfólió elméletet megalapozó modelljét mutatja be, majd rátérünk a befektetési kockázat becslésével kapcsolatos problémákra. Ezek között külön alfejezetekben tekintjük át a kockázati- és a függőségi mérték megválasztásával kapcsolatos fejlődés fontosabb állomásait. Ezt követően megmutatjuk, hogyan használható a kopula módszertan napjaink „favorizált" kockázati mértékének, a várható többletveszteségnek (ES) a becslésében. A tanulmányt rövid összefoglalással és néhány, a szükséges jövőbeli kutatási irányokat felvázoló megjegyzéssel zárjuk.

[1] Beérkezett: 2017. február 4. E-mail: `bugar@ktk.pte.hu`.

2 A modern portfólió elmélet megalapozása

A kockázat önálló döntési változóként történő alkalmazása és a modern portfólió elmélet megalapozása Markowitz nevéhez köthető.

A modern portfólió-elmélet kezdete az 1950-es évekre tehető. Markowitz (1952) definiálta a várható hozam-kockázat hatékonyság fogalmát és a kockázatot célfüggvényként bevonta az optimális befektetés-kombináció kialakításának folyamatába. Mind az egyedi befektetések rangsorolásában, mind pedig a portfóliók optimalizálásában – azaz a portfóliót alkotó egyes befektetések optimális arányának meghatározásában – két döntési változót alkalmazott: a várható hozamot (E) és a hozamok varianciáját (V). Míg az elsővel az átlagos jövedelmezőséget, addig a másodikkal a befektetés kockázatát jellemezte. A portfóliót alkotó egyedi befektetések hozama közötti kapcsolat szorosságának mérésére ugyanakkor a lineáris korrelációs együtthatót használta fel.

A Markowitz-féle E-V hatékony portfóliók – a bemenő paraméterek (μ és $\mathbf{C}$) becslését követően – egy kvadratikus parametrikus programozási feladat megoldásával nyerhetők:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} &= V \rightarrow \min \\ \mu^T\mathbf{x} &= E \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1}$$

Az (1) modellben szereplő $\mathbf{x}$ és μ n-dimenziós vektorok megfelelő komponensei az egyes értékpapírokba fektetett tőkehányadot és az értékpapírok várható hozamát jelentik. $\mathbf{A}$ a portfólió kiválasztást korlátozó lineáris feltételrendszer együtthatómátrixa ($m \times n$-es), $\mathbf{C}$ pedig a hozamok variancia-kovariancia mátrixa ($n \times n$-es). E a létrehozott portfólió várható hozamának, míg V a portfólióhozam varianciájának jelölésére szolgál, a ^{T} szimbólum pedig a megfelelő vektor transzponáltjára utal. A feladat megoldása n értékpapírból álló portfólió esetében az egyes (lehetséges) várható hozamszintekhez tartozó, minimális varianciát biztosító befektetési arányok ($\mathbf{x}$) meghatározását célozza. Mint látható, a felírt modellben kizártuk a fedezetlen eladásokat (short sales), azaz azt, hogy az egyes értékpapírokba történő befektetési arányok negatívak legyenek.

Az (1) modellben az egyes értékpapír-párok hozama közötti kapcsolat erősségét a Pearson-féle lineáris korrelációs együttható méri:

$$\rho(r_i, r_j) = \frac{C(r_i, r_j)}{\sigma(r_i)\sigma(r_j)} = \frac{C_{ij}}{\sigma_i\sigma_j} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2}$$

A (2) összefüggésben $\rho(r_i, r_j)$ az i és j értékpapír-pár hozama közötti korrelációt, C_{ij} pedig a köztük lévő kovarianciát jelenti (az (1) modellben szereplő variancia-kovariancia mátrix megfelelő eleme). σ_i az i értékpapír hozamának szórása, amelyre $\sigma_i^2 = C_{ii}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Markowitz az E-V hatékony portfóliók analitikus meghatározására – azaz az (1)-ben szereplő probléma megoldására a Kuhn-Tucker feltételeket alkalmazva – kidolgozta az ún. kritikus vonal algoritmust. Bebizonyította, hogy az (1) modell megoldásait képező hatékony portfóliók szakaszonként lineáris halmazt alkotnak az n-dimenziós térben. Ennek a szakaszonként lineáris halmaznak a megfelelő szakaszai a kritikus vonalak (innen az algoritmus elnevezése).[2]

Markowitz modelljét – amelynek kifejlesztéséért 1990-ben megkapta a közgazdasági Nobel-díjat – sok kritika érte amiatt, hogy alkalmazása csak abban az esetben tekinthető elméletileg teljesen megalapozottnak, ha a befektető hasznossági függvénye kvadratikus vagy a befektetés hozama normális eloszlású. Eftekhari és szerzőtársai (2000) az elliptikus eloszlást (amelynek speciális esete a normális eloszlás) említik annak feltételeként, hogy a kockázat a variancia segítségével egzakt módon mérhető legyen. Szegő (2005) kimutatta, hogy a hozamok elliptikus eloszlása minden olyan kockázati mutató alkalmazhatóságának alapfeltétele, amely a hozamok közötti kapcsolat mérésére a lineáris korrelációs együtthatót használja.

Markowitz (1991) a fent említett feltételeken túl újabb, empirikusan is alátámasztható érveket hozott fel modellje előnyeinek érzékeltetésére. Rámutatott ugyanakkor arra is, hogy módszere általában csak közelítő megoldást ad. Az említett érvek mögött meghúzódó alapgondolat, hogy módszere összhangban van a várható hasznosság maximalizálásával. Igazolta, hogy a befektető hasznossági függvényének másodfokú polinommal való közelítése – bizonyos hasznossági függvényosztályokra – közel azonos eredményekhez vezet, mint amelyekhez a Markowitz-modell alkalmazásával jutunk.[3]

3 Kritikus pontok a befektetési kockázat modellezésében

A befektetési kockázat mérése egy befektetés-kombináció, azaz portfólió kockázatának becslését igényli. Ennek a folyamatnak két kritikus összetevője van (Dowd, 2005). Az első egy megfelelő kockázati mérőszám azonosítása és alkalmazása, míg a második a portfólióban szereplő különféle egyedi befektetések hozama együttmozgásának (statisztikai függőségének) számszerűsítése. Napjainkra bebizonyosodott, hogy a kockázat becslésében széleskörűen használt mérőszámok, mint például a variancia vagy a kockáztatott érték, megbízhatatlanok. Egy további jelentős kihívás, hogy az egyes portfólió elemek hozama közötti kapcsolatnak a lineáris korrelációs együtthatóra alapozott becslése torz képet ad a hozamok közötti kapcsolat erősségéről.

[2] Az E-V hatékony portfóliók explicit származtatásához kapcsolódóan Vörös Józsefnek jelentek meg értékes munkái. Lásd Vörös (1986), Vörös (1987) és Vörös et al. (1999).

[3] A fentieket lásd részletesen Bugár (1997).

3.1 A varianciától a várható többletveszteségig

A kockázati mértékeket több szempont szerint rendszerezhetjük. Az egyik – talán leginkább elterjedt – csoportosítás azon alapul, hogy valamihez viszonyítva határozzuk-e meg kockázat értékét, vagy ún. abszolút módon. Ebben az értelemben relatív és abszolút mérőszámokat különböztethetünk meg. A relatív kockázati mutatók egy előre meghatározott értéktől való eltérés nagyságaként értelmezik a kockázatot, az abszolút kockázati mérőszámok pedig egy adott pénzügyi pozíció megteremtéséhez szükséges tőkenagysággal mérik azt.

A kockázati mutatók csoportosítása történhet annak alapján is, hogy csak bizonyos kedvezőtlen értékeket veszünk-e figyelembe a mutató kiszámításánál (pl. egy célértéknél csak kisebb értékeket) vagy az ingadozásra jellemző valamennyi értéket. Ezen az alapon beszélhetünk egyoldali vagy kétoldali mutatókról.

A variancia kockázati mértékként történő használatának a legfőbb előnye, hogy segítségével a portfóliók kockázata visszavezethető az egyedi befektetések kockázatára. Ezzel a portfólió optimalizálás – az (1) modell megoldásával – analitikusan könnyen elvégezhető. A variancia előnyei között fontos hangsúlyozni, hogy szubadditív, így támogatja a diverzifikációt. Alkalmazásának hátránya ugyanakkor, hogy kétoldali kockázati mérték, így nincs összhangban a befektetők által a kockázatról alkotott intuitív képpel, miszerint csak azoknak az értékeknek a bekövetkezése kedvezőtlen a befektető számára, amelyek a várható értéknél kisebbek.

A kockázatott érték nevének VaR rövidítése a mutató angol nevének (Value at Risk) kezdőbetűiből ered. Általános használata csak az 1990-es években honosodott meg a szakirodalomban, annak ellenére, hogy a világ jelentősebb multinacionális bankjai már az 1970-es évek végétől kezdődően használták belső kockázat előrejelző modelljeikben. Említésre méltó, hogy a mérőszám alkalmazása valójában sokkal korábbról eredeztethető: az aktuáriusok már a huszadik század elején használták a belső tartalékok becslésére. A VaR befektetés-elméletben történő alkalmazása Baumol (1963) nevéhez kötődik, aki a kockázat mérésére a $\mu - k\sigma$ értéket javasolta. Az előzőekben μ a befektetés (portfólió) várható hozama, σ a portfólió hozamának szórása, k pedig az a szubjektív paraméter, amely a döntéshozó kockázattal szembeni attitűdjét (kockázatérzékenységét) fejezi ki. A Baumol által bevezetett kockázati mérőszám elliptikus hozameloszlás esetén egyenértékű a kockáztatott értékkel.

Adott α megbízhatósági szinthez tartozóan a VaR a veszteségeloszlás α-kvantilise:

$$P(L \leq VaR_\alpha) = F(VaR_\alpha) = \alpha \;, \tag{3}$$

amelyből

$$VaR_\alpha(L) = F^{\leftarrow}(\alpha) \;, \quad 0 < \alpha < 1 \;. \tag{4}$$

A fentiekben az $F^{\leftarrow}(\alpha)$ a veszteséget jelentő véletlen változó (L) $F(x)$ eloszlásfüggvényének általánosított inverze (lásd Embrechts és szerzőtársai, 1999), azaz:

$$F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\} \,. \tag{5}$$

A VaR új szemléletet képvisel a kockázatkezelés gyakorlatában. Legfőbb előnye, hogy veszteség alapú, abszolút kockázati mérték. Egyoldali mutatóként a kedvezőtlen értékeken alapul. Értelmezése egyszerű, mert egy előre meghatározott megbízhatósági szinthez tartozó maximális veszteséget számszerűsíti. Eredménye közérthető, mert a befektetés pénznemében adja meg a kockázatot.

A kockáztatott érték kockázati mértékként történő felhasználásával kapcsolatos egyik legfontosabb probléma, hogy nem veszi figyelembe a VaR-t meghaladó veszteségeket, ami vastagszélű eloszlások esetében a kockázat alábecsléséhez vezet. A VaR másik hiányossága, hogy nem teljesíti a szubadditivitás követelményét, ezért a kockáztatott értékkel mért portfólió-kockázat magasabb lehet, mint a portfóliót alkotó értékpapírok kockázatának összege. Harmadik nagy hátránya, hogy nem konvex, így a VaR-t minimalizáló portfólió nem határozható meg egyértelműen.

A Bázeli Bizottság 2004 júniusában hozta nyilvánosságra Bázel II (BCBS, 2004) néven ismert ajánlásait, amelyek a piaci kockázat VaR-ral történő becslését támogatták. A Bázel II ajánlások 2006-ban kerültek be az Európai Unió által foganatosított, az egyes tagországokra – így Magyarország számára is – egységesen alkalmazandó pénzügyi szabályozásba.

A VaR alkalmazásával kapcsolatos kétségeiket már a 2000-es évek elejétől kezdődően megfogalmazták a kutatók és a kockázati szakértők. Egy sor olyan tanulmány jelent meg, amely rámutatott a VaR hiányosságaira, sőt a ,,Journal of Banking and Finance" 2002-ben külön kötetet is szentelt a kockázatkezelés területén előforduló statisztikai és mérési problémáknak. Szegö (2002) a kötetben megjelent tanulmányokat bemutató szerkesztői előszavának a ,,Soha többé VaR (ez nem sajtóhiba)" provokatív címet adta. Kiemelte, hogy a VaR alkalmazása módszertani szempontból ,,aggályos", és leginkább a ,,problémakeresésben bizonyult megoldásnak". A figyelmeztető jelzéseket azonban a bankok szabályozásáért felelős döntéshozók nem vették komolyan.

Egy igazán figyelemreméltó mérföldkő a kockázatelmélet fejlődésében a kockázati mértékek axiomatikus felépítése, azaz a kockázati mérőszámoktól elvárt sajátosságok megfogalmazása és rendszerbe foglalása. A kockázati axiómarendszerek közül a leginkább elfogadott az Artzner és szerzőtársai (1999) koherens mértékeket leíró rendszere, amelyre a szerzők nevének kezdőbetűiből álló ADEH rövidítéssel szokás hivatkozni. A rendszer négy axiómát foglal magába, a transzlációs invariancia, a szubadditivitás, a pozitív homogenitás és a monotonitás tulajdonságok megfogalmazására (lásd bővebben: Bugár, 2015).

A koherens kockázati mértékek nevezetes képviselője a várható többletveszteség (ES – Expected Shortfall) vagy más néven feltételes kockázatott érték (CVaR – Conditional Value at Risk). Meghatározott α megbízhatósági szinthez tartozóan ES a VaR-t meghaladó veszteségek várható értéke:

$$ES_\alpha(L) = E(L \mid L > VaR_\alpha) \,. \tag{6}$$

Folytonos veszteségeloszlásra (6) a következő alakot ölti (Embrechts, 2014):

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_x(L)\,dx\;. \tag{7}$$

Az ES olyan kockázati mérték, amely egyrészt kiküszöböli a VaR-ral kapcsolatos módszertani problémák nagy részét, másrészt újakat is felvet. Az ES mindenekelőtt – a VaR-hoz hasonlóan – egyoldali, abszolút mutató. A VaR-t meghaladó átlagos veszteségként értelmezhető, ami különös jelentőséggel bír vastagszélű eloszlások esetén. Mint már említettük, koherens kockázati mérték, azaz eleget tesz az ADEH axiómarendszer követelményeinek. A fentieken túl említésre méltó technikai sajátossága, hogy konvex. Ez utóbbi tulajdonság nagy jelentőséggel bír a portfólió-optimalizálásban. A várható hozam-várható többletveszteség hatékony portfóliók előállítása – ahogy Rockafellar és Uryasev (2000) megmutatta – egy lineáris programozási feladat megoldását igényli.

Az ES becslésének pontosságában nagy szerepet játszik az eloszlásfüggvény szélének modellezése. Nem megfelelő modell használata esetén az ES alkalmazása félrevezető lehet, hiszen a VaR-nál jóval érzékenyebb a becslési hibákra (Sarykalin és szerzőtársai, 2008). Adott konfidencia-szinten a VaR-becslések általában stabilabbak, mint az ES becslések. Az eltérés a vastagszélű eloszlások esetén a legjelentősebb és elhanyagolható a normálishoz közeli eloszlás esetén. A mintaméret növelése csökkenti az ES becslésének hibájából eredő modellkockázatot (Yamai és Yoshiba, 2002). A nagy minta elemszámot azonban csak Monte Carlo szimulációval tudjuk biztosítani.

Az ES alkalmazásának leginkább vitatott pontja visszatesztelhetőségével (back-testing) kapcsolatos. A visszatesztelés célja, hogy a kockázati mérték előrejelzéseinek pontosságát értékeljük múltbeli adatok alapján. Létezik egy statisztikai tulajdonság, az eliszitabilitás, amely lehetővé teszi az előrejelző modellek rangsorolását. A kockázat $r(L)$ becslőfüggvénye eliszitabilis, ha egyértelmű megoldása az alábbi egyenletnek:

$$r(L) = \arg\min_x E\big[s(x,L)\big]\;, \tag{8}$$

ahol $s : I\!R^2 \to [0,\infty)$ szigorúan konzisztens értékelő-függvény.

Gneiting (2011) bizonyította, hogy az ES – a VaR-ral ellentétben – nem eliszitabilis kockázati mérték. Egyes vélemények szerint az eliszitabilitás hiánya lehetetlenné teszi az ES alkalmazására épülő modellek visszatesztelését (lásd például Carver, 2013). Más szerzők kiállnak az ES-modellek visszatesztelhetősége mellett. Acerbi és Székely (2014)[4] kifejlesztettek három modell-független, nem parametrikus visszatesztelési eljárást. A biztató eredmények ellenére még sok ezen a területen a tennivaló addig, amíg az alkalmazandó módszertan tekintetében kielégítő szakmai konszenzus születik.

A pénzügyi szektor dinamikus fejlődése, az újonnan megjelenő piaci innovációk újabb és újabb megoldandó kérdéseket vetnek fel a szabályozók számára. A másodrendű jelzáloghitel-piaci válság felhívta a figyelmet a VaR-ral

[4]Külön érdekesség, hogy az említett szerzők rámutattak arra, hogy habár a VaR eliszitabilis, visszatesztelése során sohasem használták ki ezt a tulajdonságát.

történő kockázatmérés tarthatatlanságára. A válság idején a bankok veszteségei lényegesen meghaladták a VaR-ral kalibrált minimális tőkekövetelmény értékét. Ennek hatására – csaknem egy évtizeddel a válság kitörése után – 2016 januárjában – gyökeres változás következett be a bázeli szabályozásban: a kereskedési könyvben szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók után képzendő szabályozói tőkekövetelmény megállapításánál a VaR helyett az ES alkalmazását írták elő az ún. belső modellt használó bankok számára (BCBS, 2016). Ezzel mintegy elismerést nyert az a sok erőfeszítés, amellyel az akadémiai szféra a kockázati mértékek kutatásához hozzájárult. Az ehhez fűződő euforikus képet némiképp árnyalja az ES visszateszteléséhez fűződő, fent említett bizonytalanság. A szabályozás ezt úgy igyekezett áthidalni, hogy a belső kockázatértékelő modell validitásának ellenőrzésére továbbra is a VaR alkalmazását írja elő.

3.2 A lineáris korrelációtól a kopulákig

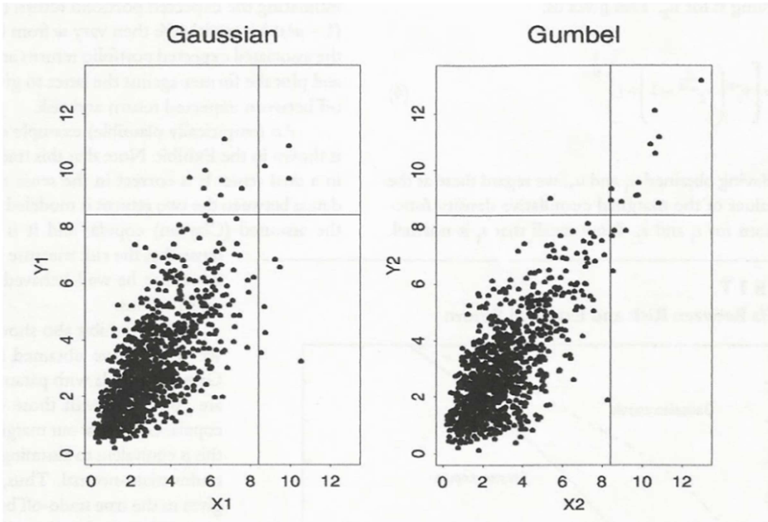
A lineáris korrelációs együtthatóval kapcsolatos legfőbb probléma, hogy kizárólag a lineáris függőséget méri. A korrelálatlanság csak akkor jelent függetlenséget, ha a változók együttes eloszlása elliptikus. Napjainkban a pénzügyi változók eloszlása általában nélkülözi a szimmetriát és vastagszélű. Ez utóbbi együtt jár azzal, hogy a normális eloszlásnál jelzetthez képest nagyobb a nagy veszteségek együttes bekövetkezésének az esélye. Mindez felveti a változók közötti kapcsolatnak a lineáris korrelációra alapozott becslésétől eltérő modellezésének igényét.

A lineáris korrelációs együttható alkalmazását az is korlátozza, hogy kizárólag véges varianciával rendelkező valószínűségi változókra értelmezhető. Nem definiálható például 2-nél nem nagyobb szabadságfokú kétdimenziós t-eloszlásra (Dowd, 2005).

További jelentős probléma, hogy a lineáris korrelációs együttható nem invariáns a valószínűségi változók szigorún monoton növekvő, nem lineáris $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációjával szemben, azaz:

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y) \ . \tag{9}$$

Ha például a befektetések hozamait logaritmikus hozamokká alakítjuk, akkor az egyes hozampárok közötti korreláció megváltozik. Embrechts és szerzőtársai (2002) a lineáris korrelációval kapcsolatos gyakori tévhitek elemzése során két eltérő modellre támaszkodva elvégezték két azonos peremeloszlással rendelkező valószínűségi változó együttes bekövetkezésének szimulálását. Mindkét modellben azonos volt a változók közötti lineáris korreláció mértéke. A kapott eredményeket az *1. ábra* mutatja.



1. ábra. Két azonos peremeloszlással és megegyező korrelációs együtthatóval rendelkező eloszlás szimulációja. *Forrás:* Embrechts et al. (2002), 177. o.

A két modell által reprezentált függőségi struktúra szemmel láthatóan eltérő. Ha az így szimulált ponthalmaz két befektetésen elért veszteséget jelképez, akkor nyilvánvaló, hogy a második eset sokkal kedvezőtlenebbül érinti a befektetőt, hiszen ebben az esetben nagyobb a nagy veszteségek együttes bekövetkezésének esélye. A példa meggyőzően mutatja, hogy a lineáris korreláció félrevezető eredményeket adhat két véletlen változó közötti kapcsolat modellezésében.

A fenti problémára a kopula-módszertan kínál megoldást.

Az n-dimenziós kopula az n-dimenziós egységkockán értelmezett, n-változós $C : [0,1]^n \to [0,1]$ eloszlásfüggvény, amelynek mindegyik marginálisa egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon.

A fenti meghatározáshoz a következőképpen lehet eljutni: tekintsünk egy véletlen (valószínűségi) változókból álló n-dimenziós $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vektort. Tegyük fel, hogy a vizsgált n véletlen változó mindegyike folytonos, azaz az

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

egyváltozós eloszlásfüggvények folytonosak. A valószínűségi integrál-transzformáció alkalmazásával az eredeti véletlen változók mindegyike a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúvá válik, azaz

$$(U_1, U_2, \ldots, U_n) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \ldots, F_n(X_n)) \tag{11}$$

n-dimenziós vektor valamennyi komponense a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$-hez tartozó kopula nem más, mint az $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ együttes eloszlásfüggvénye:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \ldots, U_n \leq u_n)\,. \tag{12}$$

Az alkalmazások szempontjából nagy jelentősége van Sklar (1959) tételének:

Ha $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy n változós eloszlásfüggvény, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ marginálisokkal, akkor létezik olyan n-dimenziós C kopula, amelyre:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)) \,. \tag{13}$$

Amennyiben az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ marginálisok mindegyike folytonos, akkor a C kopula egyértelműen meghatározott. Megfordítva, ha C egy n-dimenziós kopula és $F_1, F_2, \ldots, F_n$ egyváltozós eloszlásfüggvények, akkor a tételben szereplő H egy n-változós eloszlásfüggvény $F_1, F_2, \ldots, F_n$ marginálisokkal.

Sklar fenti tétele lehetővé teszi a marginális eloszlások és a függőségi struktúra szétválasztását. Így a függőségi struktúra „feltérképezése" két, jól elkülöníthető lépést foglal magába:

1. A marginális eloszlások becslését, ami egyszerűbb feladat, mint az együttes eloszlás becslése;
2. A kívánt függőségi struktúra marginális eloszlásokra történő illesztését.

A kopula, mint a függőség általános „mértéke" nagyfokú rugalmasságot biztosít a modellezésben, mert az egyes kockázati tényezőkre akár eltérő marginális eloszlást is illeszthetünk. Sklar tételének felhasználásával tetszőleges eloszlás (amelynek marginálisai folytonosak) kopula függvénye előállítható az alábbi módon:

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \,, \tag{14}$$

ahol $F_i^{-1}(u_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ kifejezések a marginális eloszlásfüggvények inverz függvényeit jelölik. A fent definiált kopula sűrűségfüggvénye az alábbi módon értelmezhető:

$$c(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n} \,. \tag{15}$$

4 A kopulák alkalmazása a kockázat modellezésében

A továbbiakban – a kétdimenziós esetre szorítkozva – azt mutatjuk be, hogyan lehetséges egy portfólió ES-sel mért kockázatát becsülni. A portfólió hozameloszlása – az általunk meghatározott marginális hozamokra és a hozamok függőségét jellemző kopulára (Bouyé és szerzőtársai, 2000) támaszkodva – Monte Carlo szimulációval állítható elő.

A szimuláció lépései a következők:

1. Generálunk két, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót: v_1, v_2.

2. Legyen $u_1 = v_1$.

3. u_1 realizált értéke alapján szimuláljuk u_2 értékét a

$$C(u_2 \mid u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = v_2 \tag{16}$$

feltételes eloszlásra támaszkodva.

4. A (16) egyenletet megoldjuk u_2-re.

5. u_i $(i = 1, 2)$ segítségével generáljuk a kívánt marginálisok egy-egy értékét:

$$F^{-1}(u_i) = r_i \quad (i = 1, 2)\,. \tag{17}$$

6. A fentiek alapján egy szimulált portfólió hozam:

$$R = wr_1 + (1 - w)r_2\,. \tag{18}$$

7. Az 1-6. lépéseket m-szer ismételve m számú portfólióhozamhoz jutunk.

8. A kapott empirikus hozameloszlásból meghatározható ES (a kívánt α konfidenciaszinten).

A (18) összefüggésben szereplő w portfólió súly változtatásával az ES becslése tetszőleges portfólió-allokációra elvégezhető.

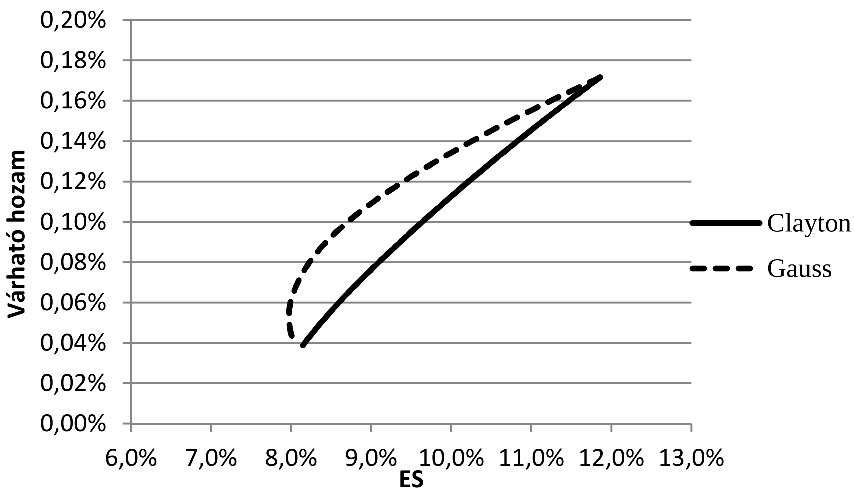
Az előzőekben leírt szimuláció valódi tőzsdei adatsorokon történő megvalósításának eredményét a *2. ábra* szemlélteti. Az elemzés elvégzéséhez a londoni tőzsdeindex (FTSE100) két, itt nem nevesített összetevőjének, 2008. január 3. és 2010. január 4. közötti, napi bontású árfolyam-idősorát vettük alapul. A két idősorból származtatott napi hozamok felhasználásával becsültük a két értékpapír várható hozamát, szórását és a hozamaik közötti korrelációt. Míg a hozamokra normális marginálisokat illesztettünk, addig a függőségi kapcsolatot kétféle módon modelleztük. Egyrészt Gauss-kopulával, ami jelen esetben annak felel meg, hogy a hozamok közötti kapcsolat erősségét a lineáris korrelációs együtthatóval mérjük. Másrészt a normális marginálisokra Clayton-kopulát ültettünk. Ez a tapasztalatok szerint különösen hasznosnak bizonyul befektetési portfóliók esetében, amikor a hozamok viszonylag erős függőséget mutatnak a negatív széleken, azaz a nagy veszteségek tartományában (Breymann és szerzőtársai, 2003).

A Clayton-kopula eloszlásfüggvénye:

$$C_\theta(u_1, u_2) = \max(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0)^{-1/\theta}\,, \tag{19}$$

ahol $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ a kopula paramétere.[5]

[5] θ az adatokból könnyen becsülhető.



2. ábra. Két értékpapírból álló portfóliók kockázat–várható hozam profilja két eltérő függőségi struktúra esetén. *Forrás:* Bugár-Uzsoki (2013), 48. o.

A 2. ábráról leolvasható, hogy minden olyan esetben alábecsüljük a kockázatot, amikor az egyes portfólióelemek közötti kapcsolat modellezésénél – a nagy veszteségek együttes bekövetkezését hangsúlyozó Clayton-kopula helyett – a lineáris korrelációs együtthatóra támaszkodunk. A függőségi kapcsolat eltérő modellezése 0,1%-os várható hozamszint mellett – napi szinten – például közel egy 1 százalékpontos növekedést okozott az ES becsült értékében.

A kopulák megjelenése és tulajdonságaik kutatása nagyban hozzájárult a véletlen változók függőségének eredményes modellezéséhez. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy hatékony felhasználásukhoz fontos követelmény alkalmazhatóságuk verifikálása.

A kétdimenziós kopulák több dimenzióra történő lehetséges kiterjesztését képviselik a Vine-kopulák. Jelentőségük abban keresendő, hogy ezek lehetővé teszik a többváltozós függőségi kapcsolatok pár-kopulákkal – azaz magasabb dimenziós kopulák alkalmazása helyett kétdimenziós függőségi struktúrákkal – történő hierarchikus modellezését (Aas et al., 2006).

5 Összegzés

A tanulmányban a befektetési kockázat mérésében a modern portfólió elmélet kialakulásával kezdődő fejlődés fontosabb állomásait tekintettük át. Külön-külön tértünk ki a megfelelő kockázati mérték megválasztásával és a portfólió elemek hozama közötti kapcsolatot kifejező függőségi mérték modellezésével kapcsolatos megoldási javaslatokra.

Gyakorlati szempontból nagy jelentőségű az a döntés, amellyel a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság (BCBS) a várható többletveszteséget (ES) – a belső modellben alkalmazandó kockázati mértékként – 2016 januárjában beemelte a szabályozásba. Némiképp rontja a képet, hogy habár a kereskedési könyvben szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók után képzendő szabályozói tőkekövetelmény megállapításánál az ES használatát írják elő, a belső kockázatértékelő modell validitásának ellenőrzésére továbbra is a VaR-t kell alkalmazni.

Döntő jelentőségű tehát a jövőre nézve, hogy a Felügyelet megnyugtató módon ellenőrizni tudja a bankok által kifejlesztett belső kockázatmérési modellek hitelességét. Ez megkívánja az ES-re vonatkozó visszatesztelési eljárások fejlesztését és a lehetséges tesztek közül annak a kiválasztását, amely a fenti kívánalmat képes teljesíteni.

Véleményem szerint egy másik fontos kutatási irány a Vine-kopulák felhasználása a portfólió-elemek függőségi kapcsolatának modellezésében. Nagyméretű portfóliókra e módszertan alkalmazásának nehézségét az jelenti, hogy a többdimenziós függőségi struktúra pár-kopulákra történő felbontása nem egyértelmű és nagy a vizsgálandó lehetőségek száma.

Fontos megjegyezni, hogy a kopula-módszertan lehetőséget kínálhat eltérő kockázati tényezőknek – elsősorban piaci és hitelkockázatnak – kitett banki portfólió elemek függőségi kapcsolatának modellezésében is.

Irodalom

1. Aas, K. – Czado, C. – Frigessi, A. – Bakken H. (2006): Pair-copula constructions of multiple dependence, Discussion paper, LMU, Institut für Statistik, Sonderforschungsbereich 386, Paper 487.
2. Acerbi, C. B. – Székely, B. (2014): Backtesting Expected Shortfall. MSCI White paper, 1–37.
3. Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J. M. – Heath, D. (1999): Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, 203–228.
4. Basel Committee in Banking Supervision (BCBS, 2004): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. Bank for International Settlements, 1–251.
5. Basel Committee in Banking Supervision (BCBS, 2016): Minimum Capital Requirements for Market Risk, Bank for International Settlements, 1–88.
6. Baumol, W. J. (1963): An Expected Gain Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection, *Management Science*, Vol. 10, 174–182.
7. Bouyé, E. – Durrleman, V. – Nikeghbali, A. – Riboulet, G. – Roncalli, T. (2000): *Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications*, Groupe de Recherche Opérationelle, Crédit Lyonnais, Paris.
8. Breymann, W. – Dias A. – Embrechts P. (2003): Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance, *Quantitative Finance*, Vol. 3, 1–14.
9. Bugár, Gy. (2015): *Piaci- és hitelkockázat menedzsment*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
10. Bugár, Gy. – Uzsoki, M. (2013): Challenges and Achievements in Gauging Investment Risk, *Journal of Transnational Management,* Vol. 18 (1), 39–51.
11. Bugár, Gy. (1997): *Portfólió elemzés*, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs.

12. Carver, L. (2013): Mooted VaR substitute cannot be back-tested, says top quant, *Risk*, 8 March 2013.
13. Dowd, K. (2005): Copulas and Coherence – Portfolio Analysis in a Non-normal World, *Journal of Portfolio Management*, Fall 2005, 123–127.
14. Eftekhari, B. – Pedersen, C. S. – Satchell, S. E. (2000): On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from European markets, *European Journal of Finance*, Vol. 6, 18–38.
15. Embrechts, P. – Resnick S. I. – Samorodnitsky, G. (1999): Extrem Value Theory as a Risk Management Tool, *North American Actuarial Journal*, Vol. 3, No. 2, 30–41.
16. Embrechts, P. – McNeil, A. – Straumann, D. (2002): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: Dempster, M. A. H. (eds.) *Risk Management: Value at Risk and Beyond.* Cambridge. 176–223.
17. Embrechts, P. (2014): An Academic Response to Basel 3.5 - Risk Aggregation and Model Uncertainty. Conference on Extreme Events and Uncertainty in Insurance and Finance. Paris, 10 January (ppt slides).
18. Gneiting, T. (2011): Making and Evaluating Point Forecasts, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 106, 746–762.
19. Markowitz, H. M. (1952): Portfolio selection, *Journal of Finance*, Vol. 8, 77–91.
20. Markowitz, H. M. (1991): Foundations of portfolio theory (Nobel Prize Lecture), *Journal of Finance*, Vol. 46, 469–477.
21. Rockafellar, R. T. – Uryasev, S. (2000): Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*, Vol. 2, 21–41.
22. Sarykalin, S. – Serraino, G. – Uryasev, S. (2008): Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in *Risk Management and Optimization. Informs. Tutorials in Operations Research*, 270–294.
23. Sklar, A. (1959): Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, Vol. 8, 229–231.
24. Szegö, G. (2002): No more VaR (this is not a typo), *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26, 1247–1251.
25. Szegö, G. (2004): On the (Non)Acceptance of Innovations. in G. Szegő *Risk Measures for the 21st Century* (ed.), John Wiley & Sons Ltd., 1–9.
26. Szegö, G. (2005): Measures of Risk, *European Journal of Operational Research*, Vol. 63, 5–19.
27. Vörös, J. (1986): Portfolio analysis – An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *European Journal of Operational Research*, Vol. 23, 294–300.
28. Vörös, J. (1987): The explicit derivation of the efficient portfolio frontier in case of degeneracy and general singularity, *European Journal of Operational Research*, Vol. 32, 302–310.
29. Vörös, J. – Kriens, J. – Strijbosch, L. W. G. (1999): A Note on the Kinks at the Mean Variance Frontier, *European Journal of Operational Research*, Vol. 112, 236–239.
30. Yamai, Y. – Yoshiba, T. (2002): Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk – their Estimation Error, Decomposition, and Optimization. *Monetary and Economic Studies*, Vol. 20 (1), 87–121.

MILESTONES IN MODELLING INVESTMENT RISK

This paper reviews the most important milestones of the methodological development in modelling investment risk. This process requires the estimation of portfolio risk, and it has two critical points. The first one is the proper selection of risk measure and the second one is the correct modelling of dependency between different portfolio elements. After reviewing the most important features characterizing the development from variance to expected shortfall in measuring risk and from linear correlation to copula approach in modelling dependency, it will be shown how copula methodology can be used in estimating expected shortfall.

Keywords: portfolio optimization, risk measure, copula