DISZKRÉT DINAMIKUS OLIGOPOL JÁTÉKOK STABILITÁSÁRÓL[1]

SZIDAROVSZKY FERENC – MOLNÁR SÁNDOR
Arizonai Egyetem – Központi Bányászati Fejlesztési Intézet

Diszkrét időskála mellett vizsgálunk dinamikus oligopol játékokat. A játékok egyensúlypontjának globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg először, feltételezve, hogy a játékosok adaptívan becslik meg minden időszakban a többi játékos által együttesen termelt mennyiségeket. Speciális esetként a Cournot-féle becslés esetére kapunk eredményeket. Az alapmodellen kívül megvizsgáljuk azokat az eseteket is, amikor a játékosok csak korlátozottan változtathatják stratégiáikat, vagy a stratégia-változtatás költségekkel jár. Befejezésül egy speciális szekvenciális modellt tanulmányozunk, amikor egy-egy időszakban csak egy-egy játékos változtat (valamilyen sorrendben) stratégiáján.

1. Bevezetés

Diszkrét dinamikus oligopol játékok stabilitásával sok kutató foglalkozott az elmúlt évtizedekben. Theocharis (1959) klasszikus eredményének továbbfejlesztéseit foglalja össze Okuguchi (1976) könyve, amely részletes irodalmi összefoglalást és elemzést is tartalmaz. Ennek a ma már klasszikusnak nevezhető elméletnek továbbfejlesztését és többtermékes kiterjesztését adja meg Okuguchi és Szidarovszky (1990), amikor a többtermékes dinamikus oligopol játék stabilitására mutatnak be feltételeket. Részletesen vizsgálják a Cournot-féle, az adaptív, az extrapolatív, és a kombinált becslések esetét, viszont eredményeinknek hiányossága az, hogy a becslési paraméterekről általában felteszik, hogy a különböző játékosok esetére azonosak. Jelen tanulmányunkban ezt a hiányosságot kívánjuk részben megszüntetni, amikor az adaptív esetben a szimmetria feltételezése nélkül adunk szükséges és elégséges stabilitási feltételeket.

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta.

2. A matematikai modell

Tegyük fel, hogy N termelő (játékos) ugyanazt a terméket termeli és értékesíti egy közös piacon. Ha x_k jelöli a k-adik ($1 \leq k \leq N$) termelő által előállított termékmennyiséget (stratégiát), akkor feltesszük, hogy profitfüggvénye a

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k p(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - C_k(x_k) . \qquad (1)$$

alakban adható meg, ahol

$$p(s) = b - As \qquad (b, A > 0\,, \quad s = x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$$

az árfüggvény és

$$C_k(x_k) = c_k x_k + d_k \qquad (c_k, d_k > 0)$$

a k-adik termelő költségfüggvénye. Tegyük fel, hogy minden $t \geq 0$ időpontban ($t = 0, 1, 2, \ldots$) mindegyik termelő először megbecsüli a többiek által termelendő mennyiséget. Jelölje $s_k^E(t)$ a becslési értéket a k-adik termelő esetén. Ezután maximalizálja várható hasznát, amely a fenti feltételek mellett az

$$x_k\big(b - Ax_k - As_k^E(t)\big) - (c_k x_k + d_k)$$

alakban adható meg. Feltéve, hogy az optimális megoldás pozitív, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = -\frac{1}{2}s_k^E(t) + \frac{b - c_k}{2A} . \qquad (2)$$

Feltesszük, hogy az $s_k^E(t)$ becslések adaptívak, azaz

$$s_k^E(t) = s_k^E(t-1) + \alpha_k\Big[\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\Big] , \qquad (3)$$

ahol $0 < \alpha_k \leq 1$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). A (2) és (3) egyenlet alapján következő rendszeregyenletet nyerjük:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ s_1^E(t) \\ s_2^E(t) \\ \vdots \\ s_N^E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ -2\mathbf{B} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ \vdots \\ x_N(t-1) \\ s_1^E(t-1) \\ s_2^E(t-1) \\ \vdots \\ s_N^E(t-1) \end{pmatrix} + \alpha , \qquad (4)$$

ahol

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_N}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\Big(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_N - 1}{2}\Big).$$

α egy alkalmas konstans vektor.

3. Stabilitási feltételek

Ismeretes a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy ez a diszkrét rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha az együtthatómátrix összes sajátértéke az egységkörön belül van. A megfelelő feltételrendszer előállítása érdekében írjuk fel az együtthatómátrix sajátérték egyenletét:

$$-\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} u_l + \frac{\alpha_k - 1}{2} v_k = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\alpha_k \sum_{l\neq k} u_l + (1 - \alpha_k) v_k = \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{5}$$

Az első egyenlet kétszeresét a másodikhoz adva a baloldal eltűnik:

$$0 = \lambda(2u_k + v_k)\,.$$

Minthogy esetleges zérus sajátértékek nem befolyásolják a rendszer stabilitását, feltehetjük, hogy $v_k = -2u_k$ amelyet az első egyenletbe helyettesítve a

$$-\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} u_l + (1 - \alpha_k) u_k = \lambda u_k \tag{6}$$

relációt nyerjük. Vegyük észre, hogy az egyenletek azonosak az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1-\alpha_2 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & 1-\alpha_N \end{pmatrix}$$

mátrix sajátérték feladatával. E mátrix karakterisztikus egyenletét könnyen felírhatjuk a következő lemma felhasználásával:

Lemma. *Ha* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, *és* $\mathbf{I}$ *az* N*-dimenziós egységmátrix, akkor*

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{a}^T\mathbf{b}\ . \tag{7}$$

Bizonyítás. A lemmát teljes indukcióval igazoljuk. $N = 1$ esetén

$$\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T = 1 + a_1 b_1$$

így az állítás igaz. Tegyük fel az állítás igazságát $i < k$ esetére. Ekkor

$$D_k = \det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \det \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_k \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \dots & a_2 b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k b_1 & a_k b_2 & \dots & 1 + a_k b_k \end{pmatrix} .$$

Vonjuk le a $(k-1)$-dik sor a_k/a_{k-1}- szeresét a k-dik sorból, majd a $(k-2)$-dik sor a_{k-1}/a_{k-2}-szeresét a $(k-1)$-dik sorból, és így tovább, végül pedig az első sor a_2/a_1-szeresét a második sorból. Ekkor azonnal látjuk, hogy

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_{k-1} & a_1 b_k \\ -\frac{a_2}{a_1} & 1 & & & \\ & -\frac{a_3}{a_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\frac{a_k}{a_{k-1}} & 1 \end{pmatrix} , \tag{8}$$

amelyet utolsó oszlopa szerint kifejtve a

$$D_k = D_{k-1} \cdot 1 + (-1)^{k-1} a_1 b_k \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_k}{a_{k-1}} (-1)^{k-1} = D_{k-1} + a_k b_k$$

rekurzió adódik, amelyből a Lemma állítása azonnal következik. ∎

A Lemma alapján az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja a következőképpen állítható elő:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\Big(\mathrm{diag}\big(1 - \frac{\alpha_1}{2} - \lambda, \dots, 1 - \frac{\alpha_N}{2} - \lambda\big) + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} \\ \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} \end{pmatrix} (1, \dots, 1)\Big)$$

$$= \det\Big(\mathrm{diag}(1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda,\dots,1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda)\Big)\times$$

$$\times\det\left(\mathbf{I}+\mathrm{diag}(1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda,\dots,1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_1}{2}\\ \vdots\\ \frac{\alpha_N}{2}\end{pmatrix}(1,\dots,1)\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{N}(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)\left[1+(1,\dots,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_1}{2}\\ \vdots\\ -\frac{\alpha_N}{2}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{N}(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)\Big(1-\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{2(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)}\Big) . \tag{9}$$

Tegyük fel most, hogy az a_k együtthatókat úgy sorszámoztuk, hogy az $a_1 > a_2 > \dots > a_r$ értékek szerepeljenek rendre m_1, m_2, …, m_r multiplicitással. Ha $m_j = 1$, akkor az $1-\frac{\alpha_j}{2}-\lambda$ tényező kiesik, így $1-\frac{\alpha_j}{2}$ nem sajátérték. Ha $m_j > 1$, akkor $1-\frac{\alpha_j}{2}$ (m_j-1)-szeres sajátérték. A többi sajátérték pedig a

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j m_j}{2-\alpha_j-2\lambda}=1 \tag{10}$$

egyenlet megoldásaival azonos. Jelölje ezután $g(\lambda)$ az egyenlet baloldalát. Nyilvánvalóan

$$\lim_{\lambda\to-\infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = 0 ,$$

$$\lim_{\lambda\to 1-\frac{\alpha_j}{2}-0} g(\lambda)=\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{\lambda\to 1-\frac{\alpha_j}{2}+0} g(\lambda)=-\infty ,$$

így a (10) egyenletnek nincs komplex gyöke, pontosan r valós gyöke van, egy-egy a $(-\infty, 1-\frac{\alpha_1}{2})$, $(1-\frac{\alpha_1}{2}, 1-\frac{\alpha_2}{2})$, …, $(1-\frac{\alpha_{r-1}}{2}, 1-\frac{\alpha_r}{2})$ intervallumban. Az α_k együtthatókra tett feltételeink alapján

$$\frac{1}{2}\le 1-\frac{\alpha_j}{2}<1 ,$$

így $\mathbf{A}$ összes sajátértéke -1 és $+1$ közé esik akkor és csak akkor, ha $g(-1) < 1$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

1. Tétel. *A diszkrét dinamikus oligopol játék egyensúlypontja adaptív becslések mellett akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha*

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{4-\alpha_k}<1 . \tag{11}$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ speciális esetben *Cournot-féle* becslésről beszélünk. Ekkor a (11) egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha $N < 3$. Ezzel Theocharis (1959) híres eredményét általánosítottuk.

4. Korlátozott stratégia-változtatás esete

Ebben a paragrafusban az előbbiekben leírt modell olyan változatával foglalkozunk, amikor a t-dik időpontban az egyes játékosok nem profitmaximalizáló termelési programot választanak, hanem valamilyen értéket a megelőző és a profitmaximalizáló termelési érték között. Jelölje most $x_k^*(t)$ a (2) egyenlettel megadott optimális termelési értéket. Ekkor tehát azt feltételezzük, hogy minden $t \geq 0$ és k játékos esetén

$$\begin{aligned} x_k(t) &= (1-\gamma_k)x_k(t-1) + \gamma_k x_k^*(t) \\ &= (1-\gamma_k)x_k(t-1) + \gamma_k\left[-\frac{1}{2}s_k^E(t) + \frac{b-c_k}{2A}\right] \quad (0 < \gamma_k \leq 1) \end{aligned} \tag{12}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a játékosok Cournot-féle becslést használnak, az általános eset ahhoz hasonlóan, de sokkal bonyolultabban tárgyalható. Ekkor

$$s_k^E(t) = \sum_{l \neq k} x_l(t-1)\,, \tag{13}$$

amelyet a (12) egyenlőségbe helyettesítve egy lineáris differenciaegyenletet nyerünk, amely együttható mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1 & -\frac{\gamma_1}{2} & \cdots & -\frac{\gamma_1}{2} \\ -\frac{\gamma_2}{2} & 1-\gamma_2 & \cdots & -\frac{\gamma_2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\gamma_N}{2} & -\frac{\gamma_N}{2} & \cdots & 1-\gamma_N \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ez a mátrix azonos az előző paragrafusban bemutatott **A** mátrixszal, ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ paramétereket a $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ együtthatókkal helyettesítjük. Így az 1. Tétel továbbra is igaz:

2. Tétel. *A (12) modell Cournot-féle becslések esetén globálisan aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{4-\gamma_k} < 1\,. \tag{14}$$

Megjegyezzük, hogy a $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_N = 1$ speciális esetben az összes játékos a profitoptimalizáló termékmennyiséget választja. Ekkor (14) akkor és csak akkor teljesül, ha $N < 3$. Így Theocharis (1959) eredményének egy újabb általánosítását kaptuk.

5. Stratégiaváltoztatás költségtényezővel

Ebben a paragrafusban az alapmodell olyan módosításával foglalkozunk, amikor az egyes időszakaszok alatti stratégiaváltoztatás költségekkel jár. Ezt a feltételezést úgy építjük be a modellbe, hogy a k-dik termelő várható profitja a t-dik időpontban most a

$$x_k\big(b - Ax_k - As_k^E(t)\big) - (c_k x_k + d_k) - K_k\big(x_k - x_k(t-1)\big)^2 \tag{15}$$

formulával számolható, ahol $K_k > 0$ adott konstans. Az utolsó tag jelenti a stratégiaváltoztatás költségét. Feltéve ismét, hogy a profitmaximalizáló termékmennyiség pozitív, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{2K_k x_k(t-1) - As_k^E(t) + b - c_k}{2A + 2K_k}\,. \tag{16}$$

Tegyük fel ismét az egyszerűség kedvéért, hogy a játékosok Cournot-féle becslést alkalmaznak. A (16) differenciaegyenlet ismét lineáris, és együtthatómátrixa a következő alakú:

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{K_1}{A+K_1} & -\dfrac{A}{2(A+K_1)} & \cdots & -\dfrac{A}{2(A+K_1)} \\ -\dfrac{A}{2(A+K_2)} & \dfrac{K_2}{A+K_2} & \cdots & -\dfrac{A}{2(A+K_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{A}{2(A+K_2)} & -\dfrac{A}{2(A+K_2)} & \cdots & \dfrac{K_2}{A+K_2} \end{pmatrix}.$$

Ha bevezetjük most a $\gamma_k = A/(A+K_k)$ jelölést, akkor ez a mátrix pontosan megegyezik az előző paragrafusok $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixával, így az 1. Tétel továbbra is érvényben marad:

3. Tétel. *A (16) modell Cournot-féle becslések esetén globálisan aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{A}{3A+4K} < 1\,. \tag{17}$$

Tekintsük ezután a speciális esetet, amikor $K_1 = K_2 = \ldots = K$. Ekkor az összes játékos azonos többletköltséggel rendelkezik azonos stratégiaváltoztatás mellett. A (17) egyenlőtlenség ekkor azt jelenti, hogy K elég nagy kell, hogy legyen:

$$K > \frac{N-3}{4} A \,. \tag{18}$$

Az N=2 speciális esetben a (17) egyenlőtlenség tetszőleges $K_k > 0$ együtthatók mellett fennáll, azaz duopol játékok esetén mindig globálisan aszimptotikusan stabilis a (16) rendszer egyensúlypontja.

6. Szekvenciális stabilitás

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor az egyes időpontokban mindig csak egyetlen játékos változtathat stratégiáján, feltételezve, hogy az teljes információval rendelkezik a többiek által korábban választott stratégiákról. Ily módon a (12) egyenlőség továbbra is érvényben marad azzal a változtatással, hogy a t időpontban egy t-től függő $k(t)$ játékos választ új stratégiát. Tehát $k \neq k(t)$ esetén $x_k(t) = x_k(t-1)$ és

$$\begin{aligned} x_{k(t)}(t) &= (1-\gamma_{k(t)})x_{k(t)}(t-1) + \gamma_{k(t)}\left(-\frac{1}{2}\sum_{l\neq k(t)} x_l(t-1) + \frac{b-c_k}{2A}\right) \\ &= x_{k(t)}(t-1) + \gamma_{k(t)}\left(-x_{k(t)}(t-1) - \frac{1}{2}\sum_{l\neq k(t)} x_l(t-1) + \frac{b-c_k}{2A}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Vegyük észre, hogy ez a folyamat megegyezik a közismert relaxációs módszerrel (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978), amikor azt a

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldására alkalmazzuk, ahol

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{b-c_1}{2A} \\ \frac{b-c_2}{2A} \\ \vdots \\ \frac{b-c_N}{2A} \end{pmatrix}.$$

A $\mathbf{H}$ mátrix szimmetrikus és pozitív definit, hiszen sajátértékei $\frac{1}{2}$ és $\frac{N+1}{2}$. Ily módon a relaxációs módszer konvergenciájáról szóló ismert eredményeket közvetlenül alkalmazhatjuk. Tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor mellett vezessük be az $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ jelölést és jelöljük $\mathbf{r}$ komponenseit az $r_1, \ldots, r_N$ szimbólummal. Tegyük fel, hogy a $k(t)$ játékost úgy választjuk ki tetszőleges $t \geq 0$ esetén, hogy fennálljon az

$$|r_{k(t)}(\mathbf{x}(t-1))| \geq \beta\, |r_k(\mathbf{x}(t-1))| \tag{20}$$

egyenlőtlenség tetszőleges k játékos mellett, ahol $\beta \in (0, 1]$ egy adott konstans. Ismeretes, hogy ez esetben a (19) folyamat a $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához konvergál (ld. például Faddeev és Faddeeva, 1963). Minthogy az egyenletrendszer megoldása egybeesik a statikus egyensúlyponttal (Nash-Cournot egyensúlypont), az egyensúly globális aszimptotikus stabilitása következik a (20) feltételből.

A (20) feltétel helyett most tegyük fel a következőt. Létezik olyan $M > 0$ pozitív állandó, hogy tetszőleges $t \geq 0$ mellett a $k(t+1)$, $k(t+2)$, ..., $k(t+M)$ sorozat tartalmazza az $1, 2, \ldots, N$ számok mindegyikét. Ekkor a (19) folyamat ismét konvergál a $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához. Ennek az eredménynek a bizonyítása is megtalálható Faddeev és Faddeeva fenti könyvében. Ez utóbbi feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $1, 2, \ldots, N$ indexeknek létezik fix ismétlési intervalluma.

7. Megjegyzések

Az adaptív becslések értelmezéséhez írjuk át a (3) rekurziót az

$$s_k^E(t) = \alpha_k \sum_{l \neq k} x_l(t-1) + (1-\alpha_k) s_k^E(t-1)$$

alakba, amelyből közvetlenül leolvasható, hogy $s_k^E(t)$ a közvetlenül megelőző időponthoz tartozó becslés és tényadat konvex lineáris kombinációja. A (3) egyenletből azt is látjuk, hogy $s_k^E(t)$ úgy adódik, hogy a megelőző becsléshez hozzáadjuk hibájának egy bizonyos részét. Ha a teljes hibát adjuk az előző becsléshez, akkor az $\alpha_1 = 1$ választással élünk, amely megfelel a Cournot-féle becslési módszernek.

A 4. és 5. paragrafusban a matematikai egyszerűség érdekében használtuk az egyszerűbb Cournot-féle becslést. A bonyolultabb általános adaptív eset hasonlóan tárgyalható, és az itt bemutatottakhoz hasonló stabilitási feltételek nyerhetők. Az 1. és 2. Tétel továbbra is érvényben marad, ha az α_k (ill. γ_k) értékét a $(0, 2)$ intervallumra kiterjesztjük, hiszen ilyenkor $-1 < 1 - \frac{\alpha_i}{2} <$

1 továbbra is. A (11) ill. (14) feltétel azt jelenti, hogy az α_k (ill. γ_k) paraméterek elegendően kicsik legyenek. A (17) feltétel pedig úgy is megfogalmazható, hogy ha a K_k együtthatók elegendően nagyok, akkor függetlenül a játékosok számától a globális aszimptotikus stabilitás mindig biztosítható. Adaptív becslések esetén az $\alpha_k > 1$ eset azt jelenti, hogy az előző becslési hibánál nagyobb értéket adunk az előző becsléshez, a (12) modellben pedig $\gamma_k > 1$ úgy magyarázható, hogy $x_k(t)$ az előző $x_k(t-1)$ stratégiából úgy származik, hogy a profitmaximalizáló termelési mennyiség irányába haladunk, és azt túl is lépjük.

A szekvenciális modell globális aszimptotikus stabilitása akkor is érvényben marad, ha a $\gamma_{k(t)}$ együtthatók időfüggőek. Ilyenkor fel kell még tennünk, hogy tetszőleges $t \geq 0$ esetén

$$\varepsilon < \gamma_{k(t)}(t) < 2 - \varepsilon \,,$$

ahol $\varepsilon > 0$ adott konstans. A (20) feltételben a $\beta = 1$ speciális eset azt jelent, hogy azt a játékost választjuk ki minden időpillanatban, amelynek megfelelő r_k komponens a legnagyobb abszolút értékű.

Modelljeinkben feltettük, hogy a termelők költségfüggvényei lineárisak. Kvadratikus költségek esete az itt bemutatottakhoz hasonlóan tárgyalható, hiszen a differenciáláskor lineárissá válik, és így a kapott differenciaegyenletek továbbra is lineárisak maradnak. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Megjegyezzük végül, hogy az itt bemutatott modellek könnyen kiterjeszthetők a többtermékes esetre. Ilyenkor a kapott differenciaegyenletek együtthatómátrixa is hasonló az előbbiekben bemutatottakhoz azzal a különbséggel, hogy az egyes mátrixelemeket kisebb méretű $M \times M$ típusú mátrixok helyettesítik, ahol M jelöli a figyelembe vett termékek számát. A blokkmátrixokat ugyanúgy kell kezelnünk, mint ahogy azt Okuguchi és Szidarovszky (1990) bemutatta.

Irodalom

1. OKUGUCHI, K. (1976) Expectations and Stability in Oligopoly Models. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
2. OKUGUCHI, K. és SZIDAROVSZKY F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi/Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. SZIDAROVSZKY, F. és A. T. BAHILL (1993) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
4. SZIDAROVSZKY, F. és S. YAKOWITZ (1978) Principles and Procedures of Numerical Analysis. Planem Press, New York/London.
5. THEOCHARIS, R. D. (1959) On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. Review of Econ. Studies, Vol. 27, pp. 133–134.

6. FADDEEV, D. K. és FADDEEVA, V. N. (1963) Computational Methods of Linear Algebra. Freeman Publ., San Francisco.

ON THE STABILITY OF DISCRETE-TIME DYNAMIC OLIGOPOLY GAMES

Dynamic oligopoly games are examined with discrete time scales. The authors described the global asymptotical stability of the equilibrium points of the games. Both the basic model and those cases are examined, when players may change their strategies only in a restricted way or when they have to reckon with the cost of change of strategies. Finally a special sequential model is examined when (in a certain sequence) in every period there is only one player changing his/her strategy.