MEGJEGYZÉSEK FORGÓ FERENC EGY PROBLÉMÁJÁHOZ[1]

GOLDNER GÁBOR[2] – VIZVÁRI BÉLA[3]
Babeş-Bólyai Egyetem, Kolozsvár – ELTE, Budapest

Forgó Ferenc tárgyalja az alábbi problémát [3]. Tekintsünk egy gazdasági egységet, amely n darab további részből áll, amelyek maguk is lehetnek gazdasági egységek vagy munkacsoportok vagy természetes személyek. Az utóbbiakat [3] kifejezésével élve tagoknak nevezzük. A probléma abban áll, hogy lehet-e a gazdasági egység jövedelmét úgy szétosztani a tagok között, vagyis a tagokat úgy ösztönözni, hogy ez az ösztönzés egyszerre legyen hatékony, azaz hatására az egység jövedelme a lehető legjobban növekedjék, és racionális, azaz az ösztönzés az összjövedelmet mind a jövedelem komponensei, mind az elvégzett munka szerint additív módon ossza szét úgy, hogy a ténylegesen jövedelmet termelő tagoktól ne vonjon el jövedelmet. Feltételezve, hogy a jövedelemfüggvény kvadratikus, [3] arra a következtetésre jut, hogy az ösztönzés elé állított fenti két követelmény egyidejűleg rendkívül ritkán teljesíthető. Véleményünk szerint ez a feltételezés a modell nem minden értelmezése esetén engedhető meg, és ezen esetekben a probléma matematikai hátterében bonyolultabb problémák fekszenek. Mindazonáltal alább részletezendő okoknál fogva a végkövetkeztetéssel magunk is egyetértünk.

1. A Forgó modell matematikai keretei

Az i tag munkájának intenzitását x_i jelöli. Az ezen munkaintenzitásokból alkotott x vektor az n-dimenziós egységkocka egy tetszőleges pontja, vagyis $x_i = 0$ esetén az i tag egy kiinduló szinten, míg $x_i = 1$ esetén maximális intenzitással dolgozik. Az egység jövedelme a munkaintenzitások függvényében $f(x)$, ahol f az egységkockát a valós számokba folytonosan differenciálható módon leképező függvény, melynek gradiensét a sorvektorként értelmezett $\nabla f(x)$ kifejezés jelöli.

---

[1]Beérkezett 1994. október 10.

[2]Goldner Gábor a kutatás ideje alatt a kolozsvári Soros Alapítvány által támogatott egyetemközi csereegyezmény keretében az ELTE-n volt vendégtanár, és egyben élvezte a "Pro Cultura" alapítvány támogatását is.

[3]Vizvári Béla a Rutgers Egyetem RUTCOR vendégtanára volt a dolgozat írása idején.

Tegyük fel, hogy a munkaintenzitások pillanatnyi vektora a. Annak feltétele [3] szerint, hogy a hatékony és racionális ösztönzés itt egybeessék, az

$$\frac{f(a)}{\nabla f(a)a}\nabla f(a) = \int_0^1 \nabla f(ta)\,dt \tag{1}$$

egyenlet teljesülése. Itt a balodal a maximális jövedelemnövekedés irányába mutató vektor, ami a hatékonyságot fejezi ki, míg a jobboldal [1] nyomán az említett kötelményeket kielégítő, vagyis racionális ösztönzés.

2. A szükséges feltétel új értelmezése

Ha az (1) egyenletet csak az a pontban követeljük meg, akkor mindössze annyi dönthető el, hogy a gazdasági egység történetének egy adott pillanatában, esetleg csak véletlenszerűen, a hatékonyság és a racionalitás követelménye egybeeshet-e. De keveset mond abból a szempontból, hogy ennek az egybeesésnek a megkövetelése, mint a gazdasági egység vezetésének munkamódszere, hosszabb távon fenntartható-e. Az utóbbi esetben ezért az (1) egyenletet nem mint egyetlen pontra vonatkozó egyenletet kell felfogni, hanem mint az egységkockát a valós számokba folytonosan leképező függvények osztályán értelmezett függvényegyenletet, amely kiválasztja azon jövedelemfüggvényeket, amelyek esetén az említett követelmény bármikor teljesíthető.

3. Egy függvényosztály

Ebben a szakaszban az a célunk, hogy megmutassuk, hogy az ú.n. Euler-féle homogén függvények kielégítik az (1) függvényegyenletet.

1. Definició: *Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmaz eleget tesz annak, hogy $\forall t > 0$ és $\forall x \in D$ esetén $tx \in D$. Legyen μ egy rögzített valós szám. Egy $g : D \to \mathbb{R}$ függvényt* μ-ed rendű homogén függvénynek *nevezünk a D halmazon, ha*

$$\forall t > 0 : \forall x \in D : \quad g(tx) = t^\mu g(x)\,. \tag{2}$$

A legegyszerűbb példa homogén függvényre a $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^\mu$ formula, ahol a_i $(i = 1, \ldots, n)$ valós szám. Általában $\mu+\nu$-ed rendű függvényt kapunk, ha a_i $(i = 1, \ldots, n)$ ν-ed rendű homogén függvénye az x vektorváltozónak.

1. Lemma: *Ha $g : D \to \mathbb{R}$ egy μ-ed rendű homogén függvény, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ egy megfelelő halmaz, és valamely $i \in \{1, \ldots, n\}$ index esetén a $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ parciális* *derivált létezik a D halmaz belsejében, akkor a $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ függvény egy $(\mu-1)$-ed rendű homogén függvény a D halmaz belsejében.*

Bizonyítás: Rögzítsünk tetszőlegesen egy $x^0 \in \mathrm{int}D$ vektort és egy $t_0 >$ 0 számot. Ekkor $t_0 x \in \mathrm{int}D$, és

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(t_0 x^0) = \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{g(t_0 x_1^0, ..., t_0 x_{i-1}^0, t_0 x_i, t_0 x_{i+1}^0, ..., t_0 x_n^0) - g(t_0 x^0)}{t_0 x_i - t_0 x_i^0} =$$

$$t_0^{\mu-1} \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{g(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ..., x_n^0) - g(x^0)}{x_i - x_i^0} = t_0^{\mu-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) \,. \blacksquare$$

Ismert a differenciálható homogén függvényekre az Euler-féle jellemzési tétel (v.ö. pl. [2], 361-362. o.)

2. Tétel: *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ olyan halmaz, amelyre minden $t > 0$ és $x \in D$ esetén $tx \in D$ teljesül. Legyen g a D halmazon differenciálható függvény. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy g μ-ed rendű homogén függvény legyen az, hogy minden $x \in D$ pontban teljesüljön a*

$$\mu g(x) = \nabla g(x) x$$

egyenlőség. $\blacksquare$

A következő tétel képezi matematikai szempontból dolgozatunk fő mondanivalóját. A tétel megad egy függvényosztályt, amire a kérdéses függvényegyenlet teljesül.

3. Tétel: *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy rögzített nyílt halmaz úgy, hogy minden $t > 0$ és $x \in D$ esetén $tx \in D$. Ha $\mu > 1$ egy rögzített valós szám és $g : D \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható, nem azonosan zérus, μ-ed rendű homogén függvény, akkor g kielégíti az (1) egyenletet minden $a \in D$ pontban.*

Bizonyítás: Az 1. Lemma szerint teljesül az

$$\int_0^1 \nabla g(ta) dt = \int_0^1 t^{\mu-1} \nabla g(a) dt = \frac{1}{\mu} \nabla g(a).$$

egyenlet. Így ha $\nabla g(a) a \neq 0$, akkor a 2. Tétel szerint

$$\frac{g(a)}{\nabla g(a) a} \nabla g(a) = \frac{1}{\mu} \nabla g(a) = \int_0^1 \nabla g(ta) dt.$$

Ha $\nabla g(a) a = 0$ és az a pont bármely környezetében létezik egy $x \in D$ pont, amelyre $\nabla g(x) x \neq 0$, akkor a differenciál folytonosságából elfogadhatjuk, hogy

$$\frac{g(a)}{\nabla g(a) a} \nabla g(a) = \lim_{x \to a, \nabla g(x) x \neq 0} \frac{g(x)}{\nabla g(x) x} \nabla g(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\mu} \nabla g(x) = \frac{1}{\mu} \nabla g(a),$$

ahol használtuk a 2. Tételt. Így teljesül az (1) egyenlet. Ha $\nabla g(a)a = 0$ és a-nak van olyan környezete, amelynek bármely $x \in D$ pontjában $\nabla g(x)x = 0$, akkor a 2. Tétel szerint g az azonosan zérus függvény, ami ellentmond a feltevésnek. ∎

Legyen D nyílt halmaz és $[0,1]^n \subset D$. Ha g homogén a D halmazon, akkor az egész D halmazon, és így a közgazdasági probléma által megkövetelt egységkockán is kielégíti a kérdéses egyenletet. Hasonló mondható akkor is, ha D zárt, de ekkor a $\nabla g(a)$ értékeket int$D$ halmaz elemeiből álló sorozatokhoz tartozó megfelelő határértékként értelmezzük.

A 3. Tétel nem intézi el teljesen a felvetett problémát, mert csak elegendő feltételt ad meg az (1) egyenlet teljesülésére. Mivel nem sikerült ellenpéldát találnunk a tétel megfordítására, ezért úgy érezzük, hogy igaz az alábbi állítás.

Sejtés: *Ha g legalább kétváltozós függvény, amely egy alkalmas, az egységkockát tartalmazó D kúpon mindenütt pozitív parciális deriváltakkal rendelkezik és kielégíti az (1) egyenletet, akkor valamely alkalmas μ mellett μ-ed rendű homogén függvény.*

4. A matematikai eredmények interpretációja

A fentiekben megmutattuk, hogy egy gazdasági egység jövedelme szétosztható az egység tagjai között hatékony és racionális módon a tagok munkájának bármely intenzítása mellett, ha az egység jövedelme, mint a tagok munkája intenzitásának függvénye egy μ-ed rendű ($\mu > 1$) homogén függvény. Ha az előző szakasz végén megfogalmazott sejtés igaz, akkor lényegében az ilyen szétosztás csak ebben az esetben lehet az egység belső mechanizmusának része. Mivel a homogén függvények a folytonosan differenciálható függvények osztályán belül csak egy kis részhalmazt képviselnek, ezért azt gondoljuk, hogy a jövedelem szétosztásának a jelen dolgozatban is vizsgált két követelménye, a hatékonyság és a racionalitás az esetek döntő többségében nem egyeztethető össze.

Irodalom

1. L. J. Billera, D. C. Heath, Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure, Mathematics of Operations Research, 7(1982),
2. G. Denkinger, Analízis, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
3. Forgó F., A hatékony és racionális elosztás (in-)konzisztenciája: egy axiomatikus megközelítés, Szigma, XXIII(1992), 1–2. sz., 1–6.