PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁSI MÁTRIXOK ELEMEINEK INTERAKTÍV MEGHATÁROZÁSA VERBÁLIS SKÁLA ESETÉN[1]

TEMESI JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

Több kutatási eredmény alátámasztja azt, hogy a többtényezős döntési problémák páros összehasonlítási mátrixokat alkalmazó módszereinél a mátrix elemeinek megadására szolgáló eljárás módja kihat a végeredményre, a preferenciák, súlyok, rangsorok meghatározására. Az eljárások lényeges tulajdonsága, hogy konzisztens, közel-konzisztens vagy inkonzisztens mátrixot adnak-e végeredményül. A kutatók és a gyakorlati szakemberek által használt döntéstámogató módszerek többféle megközelítést alkalmaznak. Két fontos kérdést vizsgálok meg. Egyrészt elemzem és értelmezem a szakirodalomban található korrekciós módszereket abból a szempontból, hogy azok milyen elvekre épülnek, és milyen technikákat alkalmaznak a mátrixok inkonzisztenciájának csökkentésére. Másrészt azt állítom, hogy a döntési problémák jelentős részénél az inkonzisztencia csökkentése nem történhet a döntéshozó pótlólagos információi nélkül. A javasolt interaktív módszer az egyéni (szubjektív jellegű) döntési problémák páros összehasonlítási mátrixelemeinek verbális skálán történő megadását támogatja. A döntéshozó bevonása a folyamatba és néhány speciális kiegészítő szabály alkalmazása biztosítja, hogy a folyamat végén közel-konzisztens vagy hibamentes mátrixot kapjunk, vagy kiderüljön, hogy a döntéshozó az adott probléma esetében nem tudja elérni ezt a célt.

Kulcsszavak: döntéstámogatás, többtényezős döntési módszerek, páros összehasonlítási mátrixok, mátrix kitöltési eljárások, inkonzisztencia

1 Páros összehasonlítási mátrixok

A páros összehasonlítási mátrixok felhasználása különböző modellkeretek között történik. E mátrixok egy közismert alkalmazása a *szavazás-elméletben* a Condorcet-paradoxon feloldására vonatkozik (Condorcet, 1785; Gehrlein, 2006). Legyen $K = 60$ szavazónk, akik a, b, és c jelöltek közül választanak. Mindegyik szavazó preferencia-profilja ismert. Összesen hatféle profil létezik, ebből a példabeli szavazók az alábbi eloszlásban részesednek (P a preferencia relációt jelöli, a két hiányzó profil részesedése 0):

$aPcPb$: 23 szavazó	$bPcPa$: 19 szavazó
$cPbPa$: 16 szavazó	$cPaPb$: 2 szavazó

A győztes meghatározása különféle egyszerű döntési szabályok segítségével történhet, az eltérő szabályok azonban eltérő eredményekre vezethetnek. Ha

[1]Beérkezett: 2017. január 20. E-mail: `jozsef.temesi@uni-corvinus.hu`.

például az egyszerű többségi elvet használjuk (mindenkinek egyetlen szavazata van), akkor a győztes az a jelölt, ha viszont többfordulós eljárásban az abszolút többséget kapott jelöltet választjuk ki, a győztes a b jelölt lesz. Condorcet azt javasolta, hogy a teljes preferencia-sorrendek ismeretében páronként versenyeztessük a jelölteket és az így kialakuló sorrend legyen a végleges. (Előre összegyűjtött profilok esetében a szavazások fizikai lebonyolítása sem szükséges.) Példánkban b legyőzi a-t, c is legyőzi a-t és végül b legyőzi c-t, vagyis a végső sorrend $c\,b\,a$, tehát c a nyertes. Ez a teljes információn alapuló módszer szimpatikusnak tetszhet, azonban nem minden esetben alkalmazható a győztes meghatározására. Ha a profilok az alábbiak:

$aPbPc$: 23 szavazó $\quad$ $bPcPa$: 17 szavazó $\quad$ $bPaPc$: 2 szavazó
$cPaPb$: 10 szavazó $\quad$ $cPbPa$: 2 szavazó

akkor azt látjuk, hogy a páros szavazásokban a legyőzi b-t, b legyőzi c-t, ám c legyőzi a-t. Mivel a jelöltek körbeverték egymást, ezért nem tudunk közöttük sorrendet megállapítani. A helyzet megoldásául Condorcet egy olyan páros összehasonlítási mátrixot javasol, ahol a mátrix a_{ij} eleme azt jelenti, hogy az i és j közötti szavazásban az i-edik jelöltre hányan adtak le szavazatot. Az így kialakított mátrix a_{ii} eleme az 1. táblázatban nem definiált, és $a_{ij} + a_{ji} = K$ (a szavazók száma).

	a	b	c	min
a	–	33	25	25
b	27	–	42	27
c	35	18	–	18

1. táblázat

A mátrixot felhasználva Condorcet a maximin elv alkalmazását javasolta: így a győztes a b jelölt lesz, mivel ő az, akinél a nyertes szavazatok minimuma (lásd az utolsó oszlopot) a legnagyobb.

Tegyük fel, hogy n játékos (csapat) egy *bajnokságban* vesz részt. Mindenki mérkőzik mindenkivel. A sportág lehet egyéni (pl. sakk), csapatsport (pl. labdarúgás vagy röplabda), ahol a döntetlen is lehetséges, illetve olyan sportág is, ahol döntetlen nem születhet (pl. tenisz). Az egymás elleni eredmények alapján megszerkeszthető egy páros összehasonlítási mátrix – ez azonban többféle módon is történhet. Ha döntetlen nem lehetséges, akkor a mátrix a_{ij} eleme lehet 1 (győzelem) és 0 (vereség). Az is lehetséges, hogy a mérkőzések eredményeiből generáljuk a mátrix elemeit: ha például a P_i és P_j közötti eredmény 4:2, akkor $a_{ij} = 4$ és $a_{ji} = 2$. De pontszámok is adhatók a győzelemért, döntetlenért, vereségért, ez pl. lehet rendre 3, 1 és 0. A páros összehasonlítás mátrixot ezután különböző elméleti megközelítések alapján kialakított modellekben használhatjuk fel a versenyzők közötti sorrend meghatározására. (Jegyezzük meg, hogy ezek a modellek nem feltétlenül követik egy adott sportág hagyományos számítási módszereit.)

A *többtényezős döntéshozatal* esetében n alternatívát k kritérium szerint vizsgálunk. Az egyik lehetőség az, hogy minden alternatívhoz preferencia értéket akarunk rendelni az egyes kritériumok szerint, majd ezek megfelelő aggregálásával kívánjuk az alternatívák rangsorát meghatározni. Az is lehetséges, hogy rendelkezésünkre áll egy adatmátrix, amelynek elemei már tartalmaznak összehasonlítható értékeket valamely kvantitatív vagy kvalitatív skálán, ám a döntés során a kritériumokat csoportokra bontjuk, s ezeken a csoportokon belül a kritériumok súlyára vagyunk kíváncsiak.

Különböző többtényezős döntési modellek léteznek az alternatívák végső sorrendjének meghatározására, s ezek eltérő szemléletet képviselnek. Többségük páros összehasonlítási mátrixokat használ, azonban a mátrix előállítása és a modellek filozófiája eltérő. Az a_{ij} elem például lehet 1 (P_i preferált P_j ellenében) vagy 0 (P_j preferált P_i ellenében). A mátrix elemeit generálhatjuk az összehasonlítás értékeinek különbségeiből is, de a hányadosok is lehetnek ezek az értékek. Amennyiben verbális skálát használunk, felmerül annak terjedelme, illetve a kvantitatív skálára transzformálásának problémája.

A fenti modellek arra mutatnak rá, hogy a páros összehasonlítási mátrixok alkalmazásakor pontosan definiálni kell a mátrix tulajdonságait, s hogy azok az eltérő modellkeretekben különbözhetnek egymástól. Természetesen előfordul, hogy egyes modellek ekvivalens formára hozhatók, például bizonyos bajnokságok többtényezős döntési modellként vizsgálhatók, vagy egyes többtényezős döntési modellek szavazási modellekké transzformálhatók. Általánosságban azonban nem ez a helyzet.

2 Páros összehasonlítási mátrixok az AHP modellben

A Saaty által kifejlesztett Analytic Hierarchy Process (AHP) (Saaty, 1980) rendkívül sikeresnek bizonyult az alkalmazásokban. A módszertan három egymásra épülő, egymást feltételező eleme (Brunelli, 2015): a kritériumok csoportokra bontása és hierarchiába foglalása; páros összehasonlítási mátrixok alkalmazása; a sajátvektor módszer használata a súlyok, preferenciák meghatározására.

Legyenek a többtényezős döntési probléma kritériumai $C_1, C_2, \ldots, C_k$, az alternatívák pedig $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Az alternatívákat minden kritérium szerint páronként összehasonlítjuk egymással. Az A_m páros összehasonlítási mátrix a_{ij} eleme ($i, j = 1, \ldots, n$) jelentse az i-edik és a j-edik alternatíva összehasonlításának eredményét az m-edik kritérium szerint ($m = 1, \ldots, k$). Amennyiben vizsgálataink céljára egyet kiemelünk ezen mátrixok közül, akkor az m index használatától eltekintünk.

Az A páros összehasonlítási mátrix tulajdonságai:

i. $a_{ii} = 1$, (homogenitás),

ii. $a_{ij} > 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$ (pozitivitás).

Esetünkben az A mátrix elemei a döntéshozó ítéleteit jelenítik meg arra a kérdésre, hogy *„Hányszor jobb (kedvezőbb, preferált) a P_i alternatíva a P_j alternatívához képest (egy adott kritérium szerint)?”* Egy fontos újabb tulajdonság tehát a döntéshozó véleményének bekérésekor, illetve egy adott adatmátrix elemeinek transzformálásakor, hogy az a_{ij} elemeket *hányados skálán* kell megadni. A hányados skála alkalmazása az A mátrix újabb tulajdonságaihoz vezet:

iii. $a_{ji} = 1/a_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n$ (reciprocitás) – a párok közül csak egyet hasonlítunk össze,

iv. $a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}, \quad i,j,k = 1,\ldots,n$ (szupertranzitivitás vagy kardinális tranzitivitás).

A mátrix alternatíva-hármasait (a továbbiakban *triádok*) külön is vizsgálhatjuk. Ha minden triád eleget tesz a iv) tulajdonságnak, akkor A *konzisztens*. Ha legalább egy triádnál létezik olyan eset, amikor $a_{ik} \neq a_{ij} \cdot a_{jk}$, akkor az A mátrix *inkonzisztens*.

Ha a triád elemeire teljesül az, hogy $a_{ij} > 1$, $a_{ik} < 1$ és $a_{jk} > 1$, vagy $a_{ij} < 1$, $a_{ik} > 1$ és $a_{jk} < 1$, akkor az adott triád *ellentmondásos* (Kwiesielewicz, van Uden, 2004), amennyiben a ,,jobb" kifejezést használtuk a mátrix elemeinek előállítása során. A kérdést preferencia-reláció megadásaként értelmezve a triád *nem (ordinálisan) tranzitív* vagy *intranzitív*. Kwiesielewicz és van Uden (2004) felsorolja az intranzitivitás mind a 6 esetét (a bemutatott kettő mellett mindazok, ahol egyenlőség van egy vagy két relációban).

Mostantól tárgyalásunkban a ,,páros összehasonlítási mátrix" kifejezést leszűkítjük arra az esetre, amikor az i)-iii) tulajdonság teljesül. Ez az értelmezés szorosan kötődik a többtényezős döntéshozatali modellhez, és a legtöbb, az előző fejezetben tárgyalt modellnél (bajnokságok, szavazások) nem biztosítható akkor sem, ha egyébként páros összehasonlítások történtek.

3 Konzisztencia

A konzisztencia vizsgálata központi jelentőségű a páros összehasonlítási mátrixok alkalmazása során. Ha az A mátrix konzisztens, akkor az alternatívák rangsora többféle módszerrel könnyen és egyértelműen megadható. Itt most ezekkel a módszerekkel és tulajdonságaikkal nem foglalkozunk, Choo és Wedley (2004) kitűnő áttekintést ad erről.

Valós döntési problémák megoldásakor a *döntéshozó* részt vesz az A mátrix elemeinek megadásában. A döntéshozó preferenciáinak kinyilvánítása a páros összehasonlítási kérdések megválaszolásával történik. Bár az is lehetséges, hogy az a_{ij} értéket egy adatmátrixból generáljuk, ám ekkor is szükség van arra, hogy az arányskálára konvertálásnál figyelembe vegyük a döntéshozótól származó információkat. A döntéshozó részvételének mikéntje és az általa megadott információk függnek attól, hogy a *döntési probléma* milyen típusú (Temesi, 2011).

Képes-e a döntéshozó konzisztens mátrixot megadni? A döntéselméleti szakemberek többsége egyetért abban, hogy a döntéshozó csak korlátozott és az összehasonlítandó párok számának növekedésével egyre csökkenő megbízhatóságú információt képes megadni: ha már hét vagy annál több alternatíva páronkénti összehasonlításáról van szó, a döntéshozó elbizonytalanodik a válaszaiban (Miller, 1956). Ennek a bizonytalanságnak a legbiztosabb jele az A mátrix inkonzisztenciája, vagyis az ordinális vagy kardinális tranzitivitás megsértése. Saaty és követőinek érvelése szerint az inkonzisztencia természetes jelenség, s ha a kikérdezés folyamatában valamilyen formában erőltetjük a teljes konzisztenciát, akkor ezzel eltéríthetjük a döntéshozót a valódi preferenciáitól, eltorzíthatjuk az alternatívák értékelését, sorrendjét.

Mivel azonban az A mátrix alapján történő becslések a tökéletes konzisztencia esetében adnak megfelelő megoldást, magától értetődőnek látszik, hogy minél közelebb van a döntéshozó a konzisztens esethez, annál jobb a végeredmény. Hogyan definiálható ez a *„közel-konzisztencia"*? Saaty válasza az, hogy a páros összehasonlítások során a válaszok kismértékű véletlen hibákat tartalmazhatnak, s az így kapott közel-konzisztens mátrix a valódi mátrix perturbált változata (Saaty, 2001). Igaz viszont az is, mondja Saaty, hogy egyéb problémák is akadhatnak a páros összehasonlítások megadása vagy rögzítése során, így például előfordulhat, hogy $1/a_{ij}$ kerül az a_{ij} elem helyére.

Az inkonzisztencia probléma kényelmes megoldása az lenne, ha mérni tudnánk az inkonzisztenciát és meg tudnánk adni egy *„elfogadhatósági küszöböt"*. Sajnos olyan mértéket és mérőszámot, amely a szokásos matematikai tulajdonságoknak megfelel és egyben jól értelmezhető is, egyelőre nem sikerült találni. A kutatók sokféle inkonzisztencia indexet javasolnak. Ezek egy része meghatározott becslési módszerekhez kötődik. Az indexek összefoglaló és értékelő áttekintésére többen vállalkoztak (Brunelli, Fedrizzi, 2015; Bozóki, Fülöp, Poesz, 2015). A küszöbértékek azonban – ha egyáltalán adnak meg ilyet a szerzők –, heurisztikus gondolatmeneteken és empirikus tapasztalatokon alapulnak. A leginkább elfogadott index Saaty nevéhez fűződik, az általa megadott 10%-os empirikus szabállyal.

Egy páros összehasonlítási mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha legnagyobb sajátértéke n. Az AHP ezt a tulajdonságot használja fel: $CR(n)$ a $(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$ konzisztenciaindex és az $RI(n)$ tényezők hányadosa, ahol az utóbbi nagyszámú véletlen páros összehasonlítási mátrix konzisztenciaindexeinek átlaga. A lassan már 40 éves gyakorlat során az AHP-felhasználók azt az empirikus szabályt követik, miszerint az elfogadható inkonzisztenciájú A mátrixnál $CR(n) < 0{,}1$.

Miközben az AHP alkalmazások száma hatalmas és egyre nő, a gyakorlati eseteknél a szerzők igyekeznek igazolni azt, hogy a szabály alkalmazása nem okoz problémát a preferenciák vagy a rangsor meghatározásánál. Ugyanakkor viszont egyes elméleti eredmények és példák azt sugallják (Murphy, 1993; Karapetrovic, Rosenbloom, 1999; Kwiesielewicz, van Uden, 2004; Gaul, Gastes, 2012) hogy az index felhasználását érdemes fenntartásokkal kezelni.

Döntéselméleti szempontból az egyik legfontosabb kérdés az ordinális és kardinális intranzitivitás kezelése. A legtöbb index – $CR(n)$ is idetartozik – nem vizsgálja az ordinális tranzitivitás megsértését. Ez azt jelenti, hogy ellentmondásos triádok maradhatnak a végeredményben még akkor is, ha a konzisztenciateszt zöld utat adott a mátrix további felhasználásának. A döntési problémák zöme az alternatívák teljes vagy részleges rangsorolását kívánja meg. A rendezésnek azonban feltétele a tranzitivitás. Ezért mondhatja Kwiesielewicz és van Uden (2004), hogy „... ha a páros összehasonlítási mátrix ellentmondásos, akkor nem lehetséges olyan sorrendet találni, amely kielégítené a döntéshozó által megadott értékeléseket". Ha az A mátrix gráf reprezentációját használjuk, akkor az ellentmondásos triádok köröket alkotnak, s ezeken belül nem tudunk rendezést megadni.

Míg az idézett vélemény teljes tagadást tartalmaz, a másik véglet az lenne, ha például a Saaty-index tesztjét minden további vizsgálat nélkül elfogadnánk. Az ebben a cikkben javasolt módszer nem használ inkonzisztencia indexet, folyamatos tranzitivitás vizsgálatot tartalmaz, és ha csak lehetséges, elkerüli az ordinálisan intranzitív mátrixok elfogadását.

4 Az inkonzisztencia kezelése: korrekciós módszerek

Induljunk ki abból a feltételezésből, hogy az induló mátrix meghatározása során nem ragaszkodunk a teljes konzisztenciához. Az inkonzisztens páros összehasonlítási mátrixok esetére a kutatók többféle stratégiát javasolnak egy megfelelő mátrix elérésére.

1. stratégia

a) A páros összehasonlítási mátrix elemeinek kinyilvánítása döntéstámogatás nélkül (az eljáráson belüli megkötések nélkül) történik.

b) Inkonzisztencia index alkalmazása.

c) Ha az inkonzisztencia értéke (az adott inkonzisztencia index szerint) magas, akkor a mátrixot elvetjük, egyébként elfogadjuk.

Az első lépésben tehát az adott keretek között (pl. adott skálán) változtatási javaslatok nélkül elfogadjuk a döntéshozó ítéleteit. A második lépés szolgál a nem megfelelő mátrixok kiküszöbölésére, s mint látjuk, amennyiben a harmadik lépés szigorú, akkor a mátrixot vagy a döntéshozót (pl. csoportos döntéseknél) kizárhatjuk a további folyamatból.

Gyakoribb ennél a szigorú szemléletnél az, hogy egy kevésbé inkonzisztens mátrix elérése céljából bizonyos elemek megváltoztatását javasoljuk a döntéshozónak. A továbbiakban a *korrigált mátrixot* A^* jelöli, ha legalább egy elem megváltozott az eredeti A mátrixhoz képest.

2. stratégia

a) és b): Ugyanaz, mint az 1. stratégiánál.

c) Korrigáljuk a mátrixot, míg elfogadható mértékű inkonzisztenciát kapunk (a toleranciaszint lehet akár 0 is).

A gyakorlati döntéshozatalban a korrekciós módszerek ismerete és megfelelő alkalmazása kulcsfontosságú. A legjobb korrekciós metódus kiválasztásához megfelelő hipotézissel kell rendelkeznünk az inkonzisztencia forrását illetően. Néhány lehetőség a következő:

– az A mátrix inkonzisztenciájának oka az, hogy a döntéshozó apró hibákat vétett a páros összehasonlítások során: ez a perturbációs típusú hiba a közel-konzisztens mátrixokra jellemző,
– az A mátrix inkonzisztenciájának oka az, hogy a döntéshozóval történt kommunikációban vagy az adatok rögzítése során egyetlen nagyobb hiba keletkezett: ilyen lehet például az, amikor egy elem helyett véletlenül a reciproka kerül rögzítésre,
– az A mátrix inkonzisztenciájának oka az, hogy a döntéshozó szisztematikusan alulbecsli a páros összehasonlítási értékeket: például egy verbális skálán kerüli és kisebb értékekkel helyettesíti a szélső értékeket.

Xu and Wei (1999) egy auto-adaptív módszert javasoltak, amelynek révén a korrigált mátrix $CR(n)$ értéke kisebb lesz, mint az eredeti mátrixé. Cao, Leung és Law (2008) az általuk lefektetett alapokon egy heurisztikus eljárást alakítottak ki, amelyik az eredeti inkonzisztens mátrixból automatikusan egy konzisztens mátrixot generál. A perturbációs módszerek mellett Saaty (1980, 2003) és Koczkodaj (1993) a páros összehasonlítás mátrix legkevésbé konzisztens elemének meghatározására dolgozott ki egymástól független inkonzisztencia definíción alapuló technikákat. Ezek tulajdonságait Bozóki és Rapcsák (2008) elemezte részletesen.

A korrekciós módszerekben a konzisztens mátrixhoz való közelség meghatározásának elvi hátterét leginkább a becslési technikák szolgáltatják (saját-érték módszer, legkisebb négyzetes technikák, geometriai átlag, stb.). Choo és Wedley (2004), majd Lin (2007) szimulációs kísérletekkel megvizsgálta a becslési módszereket abból a szempontból, hogy mi a hatása, ha sok kismértékű hiba és néhány nagyobb hiba fordul elő a páros összehasonlítási mátrixban. Ha egy adott módszer fokozottan érzékeny valamely típusú hibára, akkor ez fogódzót adhat a megfelelő korrekciós módszer meghatározásához.

Egyes korrekciós módszerek optimalizációs technikákat használnak a páros összehasonlítás mátrix elemeinek módosításához: Gonzalez-Pachón és Romero (2004) célprogramozást, Bozóki, Fülöp és Poesz (2011) nem-lineáris vegyes egészértékű módszert alkalmaz.

A 2. stratégia többnyire egy elfogadható, nem-zéró CR-típusú inkonzisztenciával rendelkező korrigált mátrixot eredményez. Ezeknek a megközelítéseknek két megkérdőjelezhető vonása is van. Az egyik probléma az intranzitív triádok jelenlétének lehetősége a végső A^* mátrixban. Egy másik hátránya a módszereknek, hogy egy olyan elfogadható mértékben inkonzisztens mátrixhoz vezethetnek, amelyiknek az elemei messze vannak a döntéshozó valódi preferenciáitól.

Érdemes megjegyezni, hogy az AHP alkalmazók eleve igyekeznek elkerülni ezeket a problémákat. Ehhez hatékony segítséget nyújt maga a hierarchia:

ha a tényezőket jól értelmezhető csoportokba soroljuk, elérhető, hogy egy-egy csoportba kevés számú összehasonlítandó elem tartozzon, s ekkor a döntéshozó könnyebben el tudja kerülni az ordinális intranzitivitást.

Kou, Ergu és Shang (2014) szerint a jelenleg alkalmazott korrekciós módszerek közül nagyon kevés képes arra, hogy egy modellen belül szimultán módon kezelje az ordinális és a kardinális tranzitivitást. Ha optimalizálási módszert alkalmazunk, akkor viszont elkerülhetetlen, hogy az eredeti értékek akár nagyobb mértékben is megváltozzanak. Ezért ők egy olyan modellt fejlesztettek ki, amelyik csak az eredeti A mátrix elemeit használja fel és független a prioritás vektort előállító módszertől, miközben a lehető legtöbb információt megőrzi az eredeti mátrixból.

Ishizaka és Lustin (2004) egy konzisztens mátrixot vagy egy ellenőrzött hibájú inkonzisztens mátrixot segít a döntéshozónak felépíteni a tranzitivitási és reciprocitási szabályok betartása mellett. Siraj, Mikhailov és Keane (2012, 2015) egy kétfázisú modellt fejlesztett ki. Az első fázisban kimutatják és kiküszöbölik az ordinális intranzitivitást. A második fázis a kardinális inkonzisztencia korrekciójára szolgál.

Mint látható, néhány korrekciós módszer képes arra – vagy legalábbis törekszik rá –, hogy konzisztens mátrixot adjon végeredményül. Az így kapott A^* mátrix azonban csak egy a „közeli" lehetséges konzisztens mátrixok közül, s a „közelség" maga nem egy döntéselméleti konszenzus által jóváhagyott vagy axiomatikus alapokon meghatározott mértékből származik. Különböző távolságfogalmak különböző eredményekre vezethetnek.

Egy másik problémája a korrekciós módszereknek, hogy bár állításuk szerint a lehető legtöbb információt őrzik meg az eredeti mátrixból, ezt nem tudják bizonyítani, mivel ez az állítás puhán definiált. Egyes esetekben úgy kell értenünk ezt a kijelentést, hogy minimális számú elemet kell megváltoztatni ahhoz, hogy konzisztens vagy elfogadható inkonzisztenciájú mátrixot kapjunk, más esetekben a változtatások nagyságrendje kontrollált.

S végül igaz-e, hogy a korrigált mátrix jobban kifejezi a döntéshozó valódi preferenciáit, mint az induló mátrix? Siraj, Mikhailov és Keane (2012) szimulációs kísérletei ezt az állítást nem támasztják alá. Más szerzők is kétségeiknek adnak hangot, figyelmeztetnek módszereik korlátaira. Kou és szerzőtársai, valamint Saaty javításait megnézve (a mátrixokat lásd más összefüggések vizsgálata kapcsán a *11. és 9. táblázatban)* azt láthatjuk majd, hogy Kou és szerzőtársai csak egyetlen elemet változtatnak meg 3-ról 1/2-re, ezáltal nagyon jó CR-indexet elérve. Realisztikus-e azonban az a változtatás, ahol a két elem preferencia-sorrendje is megfordul? Erre a kérdésre csak a döntéshozó tudhatja a választ. Gaul és Gastes (2012) meggyőző módon tárgyalja annak nehézségét, hogy a módosított mátrix elemeit a döntéshozó „valódi" mátrixának ismerete nélkül elfogadhassuk.

Bozóki , Fülöp és Poesz (2015) úgy fogalmaznak, hogy az általuk kifejlesztett nem-lineáris optimalizálási feladat megoldása ugyan azonosítja a módosítandó elemeket, ám a következtetések között azt írják, hogy „gyakorlati szempontból az elemek meghatározása nagyon hasznos lehet azokban a szituációkban, amikor tudjuk, hogy egy többé-kevésbé konzisztens döntéshozó figyelme ellankadt néhány elem megadásakor, vagy adatrögzítési hibát gyanítunk. Az általunk kidolgozott technika arra mutat rá, hogy ez a helyzet fordulhatott elő, ám az már a döntéshozó feladata, hogy ezt a módszertant felhasználva valóban módosítja-e a detektált elemeket?"

5 A páros összehasonlítási mátrix verifikálása: a döntéshozó szerepe

A fenti megjegyzések elvezetnek bennünket cikkünk alapvető kérdéséhez. A 2. stratégia a korrekció kezelését ex post módon oldja meg a döntéshozó bevonása nélkül, feltételezve, hogy a döntéshozó valamilyen okból nem elérhető. Létezhetnek ugyan olyan döntési feladatok, ahol ez a feltevés reális, azonban ennek a megközelítésnek minden esetben az a következménye, hogy a korrekció „automatikusan", a döntéshozó pótlólagos információi nélkül történik. Nem tudható, hogy a döntéshozó a végeredményt el tudja fogadni vagy sem. (Természetesen létezhetnek szélsőséges helyzetek, amikor a dolog egyértelmű, pl. ha triviális, hogy elírás történt, ám általánosságban többféle módosítás is érvényesíthető.)

Eljuthatunk addig a következtetésig (Temesi, 2007, 2011), miszerint az egyik lehetséges megoldás a verifikációs problémára az, ha *a kikérdezés teljes folyamatában* segítjük a döntéshozót abban, hogy a számára megfelelő mátrixot állítsa elő – anélkül azonban, hogy egy általa nem kívánt (ám konzisztens, vagy közel-konzisztens) mátrix felé terelnénk őt. Ez a „semleges" döntéstámogatás megvalósítható például úgy, hogy az eljárás során kimutatjuk az ordinális és/vagy kardinális inkonzisztencia megtörténtét, ám kerüljük a konkrét javaslatokat. Inkonzisztencia indexek használatára nincs szükség. Ez lesz a 3.1. stratégia.

3.1. Stratégia

A páros összehasonlítás mátrix elemeinek megadását *döntéstámogatás mellett* (döntéshozó szakember vagy számítógépes döntéstámogató modul segítségével) végzi a döntéshozó.

A másik lehetőség az, hogy a döntéshozó véleményét csak *az eljárás végén* kérjük ki. Amennyiben a döntéshozó egyetért a végeredménnyel, akkor az eljárás véget ért, ha nem, akkor többfelé elágazhat az eljárás. Módot adhatunk arra, hogy konzisztens mátrixot készítsen a döntéshozó valamelyik ismert korrekciós módszer javaslatait felhasználva, vagy egy számára megfelelő inkonzisztens mátrixhoz jusson el a 3.2. stratégia során.

3.2. Stratégia

a) A páros összehasonlítási mátrix elemeinek meghatározása döntéstámogatás nélkül.

b) A mátrix verifikálása.

6 A mátrix elemeinek előállítása verbális skálán

A korrekciós módszerek verifikációjának példájaként a továbbiakban tárgyalásunkat leszűkítjük azokra a döntési problémákra, amelyek szubjektív megítélésűek és nem kézzelfogható elemeket (intangible) is tartalmaznak. Tipikusan idetartoznak az egyéni fogyasztói döntések, ahol az alternatívák bármely preferencia sorrendje azonos valószínűséggel fordulhat elő, vagy másképpen fogalmazva senki nem tudja megmondani, hogy egy adott döntéshozó esetében valamelyik sorrend a többinél jobb/ésszerűbb/kedvezőbb lenne. Magától értetődő, hogy az ilyen típusú döntési problémák megoldásakor a döntéshozó jelenléte nem nélkülözhető, hiszen ő az egyetlen, aki ki tudja nyilvánítani valós preferenciáit, illetve módosítani tud értékítéletein. Ugyanakkor elfogadjuk azt, hogy a döntéshozó az egyes páros összehasonlítások során bizonytalan lehet a konkrét értékek megadásakor és véthet az ordinális vagy kardinális tranzitivitás ellen.

Hasonló feladatok megoldásakor Saaty verbális skálájának használata a legelfogadottabb. Ez a skála szóban megfogalmazott ítéletek kvantifikálására az 1-től 9-ig terjedő pozitív értékeket és azok reciprokait használja a következőképpen: ha az összehasonlító kérdésre adott válasz ,,egyenlő", akkor az arány 1:1, ha az egyik alternatíva ,,csekély mértékben jobb a másiknál", akkor 3:1, ha ,,jobb", akkor 5:1, ha ,,sokkal jobb", akkor 7:1 és ha ,,abszolút jobb", akkor 9:1. Ha a páros számokat is használjuk, azok jelentése például ,,kissé jobb" (2:1), ..., ,,erősen jobb" (8:1).

A skálaértékek igazolását Saaty (1980) írja le. Itt most nem foglalkozunk azokkal a kritikákkal, amelyek az AHP alkalmazását különböző nézőpontokból elvileg kifogásolják (lásd pl. Belton és Gear (1983), Murphy (1993), Bana e Costa és Vansnick (2008)). A kritikai megjegyzések közül egyetlen egyszerű tényre hívjuk fel a figyelmet, ami témánk szempontjából érdekes: ez a skála beépített inkonzisztenciája, amely minden végponttal rendelkező skálára igaz. Ha például $a_{12} = 3$ és $a_{23} = 5$, akkor $a_{13} = 9$ és nem 15, ahogyan ezt a teljes konzisztencia megkövetelné. Ez a tény a konzisztencia elemzést a verbális skálákon némileg bonyolultabbá teszi.

3.1. stratégia: az eljárás

A mátrix elemeinek megadása interaktív módon történik: döntéstámogató szakember van jelen vagy a döntéstámogató számítógépes rendszer generál párbeszédet. A lépések:

a) Az ordinális és kardinális konzisztencia folyamatos tesztelése.

b) Korrekciós javaslatok a döntéshozó számára.

c) A döntéshozó korrigál, amennyiben az szükséges.

d) Az eljárás befejeződik, ha minden elem előállt vagy a folytatás nem lehetséges.

Az első lépésben előszámoljuk a korrekcióban potenciálisan résztvevő triádokat. A döntéshozó megkapja az ordinális és kardinális tranzitivitási hibák listáját a korrekciós lehetőségekkel. A harmadik lépésben kötelezően korrigál, ha az ordinális tranzitivitás sérült. A kardinális tranzitivitás megsértésekor a javítási javaslat a verbális skálán a ,,legközelebbi szomszédok" tartományából történik (a részleteket a példában mutatjuk meg). A döntéshozó továbbmehet a folyamatban akkor is, ha kardinális intranzitivitás maradt a mátrixban.

1. példa

Négy alternatívánk van: a, b, c és d. Hat páros összehasonlítás szükséges. Az eljárásban négy triádot kell konzisztencia szempontjából tesztelni.

Az eljárás véletlen módon kiválasztott páros összehasonlításokkal kezdődik. Jelölje (a, b) az a és b közötti összehasonlítást. Ez az összehasonlítás két kérdésből áll: az első kérdés arra vonatkozik, hogy a két alternatíva közül melyiket találja a döntéshozó jobbnak (preferáltnak). Ha a válasz az, hogy egyformák, akkor az összehasonlítás eredménye 1 és nincs szükség a második kérdésre. Másodjára azt kérdezzük, hogy a jobbnak talált alternatíva a verbális skálán elhelyezve hányszor jobb a másiknál. Konzisztencia tesztet akkor végzünk, amikor először kapunk tesztelhető triádot.

Legyenek az első összehasonlítások a következők:

- b abszolút jobb, mint a: $(a, b) = 1/9$
- c csekély mértékben jobb, mint a: $(a, c) = 1/3$
- c kissé jobb, mint d: $(c, d) = 2$

Az eddigi mátrix elemek (a hiányzó elemeket x jelöli a *2. táblázatban*):

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	x	x
c	3	x	1	2
d	x	x	1/2	1

2. táblázat

Nincs tesztelhető triád. A következő összehasonlítás:

- b sokkal jobb, mint c: $(b, c) = 5$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	5	x
c	3	1/5	1	2
d	x	x	1/2	1

3. táblázat

Az $[a, b, c]$ triádot tudjuk tesztelni a *3. táblázat* mátrixából. Azt látjuk, hogy a triád ordinálisan tranzitív: $b \to c \to a$. Ellenőrizzük a kardinális konzisztenciát: $1/9 \cdot 5 = 5/9 \neq 1/3$.

A javításhoz használt *,,legközelebbi szomszéd" elv* (heurisztika) azt jelenti, hogy az adott értékkel szomszédos két-két skálaérték valamelyikét ajánljuk. Ezek esetünkben a legutoljára megadott $(b, c) = 5$ elemnél 3, 4, 6 és 7. Érdemes megjegyezni, hogy ha például a döntéshozó a $(b, c) = 3$ értéket választaná, akkor ezzel a triádot konzisztenssé tenné. A döntéshozó azonban úgy gondolja, hogy nem változtat eddigi ítéletein. A következő összehasonlítás:

- d kissé jobb, mint b: $(b, d) = 1/2$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	5	1/2
c	3	1/5	1	2
d	x	2	1/2	1

4. táblázat

A 4. táblázat $[b, c, d]$ triádja ordinálisan intranzitív, mert $b \to c$, $c \to d$ és $d \to b$. A döntéshozónak korrigálnia kell. Eddigi összehasonlításait áttekintve azt érzékeli, hogy (b, d) és (c, d) esetében a ,,kissé jobb" értékelések a bizonytalanságát tükrözték, ezért hajlandó arra, hogy ezeket az ítéleteit újragondolja. A b és d közül így most kissé a b alternatívát tartja jobbnak, míg a c és d közül a d alternatívát. Az új összehasonlítások az *5. táblázatból* láthatóan:

- b kissé jobb, mint d: $(b, d) = 2$
- d kissé jobb, mint c: $(c, d) = 1/2$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	x
b	9	1	5	2
c	3	1/5	1	1/2
d	x	1/2	2	1

5. táblázat

Ezzel a $[b, c, d]$ triád ordinális tranzitivitása megfelelővé vált. Jegyezzük meg, hogy abban az esetben, ha a döntéshozó nem lett volna hajlandó a javításokra, akkor a szigorú tranzitivitási szabály miatt az eljárás véget ért volna. A kardinális tranzitivitás ellenőrzése: $5 \cdot 1/2 = 5/2 \neq 2$. A döntéshozó nem lát okot a változtatásra. Az utolsó összehasonlítás:

- d sokkal jobb, mint a: $(a, d) = 1/7$

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	1/7
b	9	1	5	2
c	3	1/5	1	1/2
d	7	1/2	2	1

6. táblázat

Ellenőrizzük az $[a, c, d]$ triádot a *6. táblázatban*: $d \to c \to a$. Ellenőriznünk kell az $[a, b, d]$ triádot is: $b \to d \to a$. Mindkét triád ordinálisan tranzitív. A kardinális tranzitivitás ellenőrzése az $1/2 \cdot 1/3 = 1/6 \neq 1/7$ és $2 \cdot 1/9 = 2/9 \neq 1/7$ eredményekre vezet. A döntéshozó úgy dönt, hogy az $(a, d) = 1/5$ értékre cseréli az előző $1/7$ értéket (ez egy legközelebbi szomszéd). A *7. táblázatban* látható a végső mátrix:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/3	1/5
b	9	1	5	2
c	3	1/5	1	1/2
d	5	1/2	2	1

7. táblázat

Az alternatívák rangsora $b \to d \to c \to a$. (Megjegyzés: $CR = 0{,}8\%$, messze van a 10%-os küszöbtől.)

3.2. stratégia: az eljárás

A mátrix elemeinek meghatározása döntéstámogatás nélkül történik, de az eljárás végén a döntéshozó készen áll arra, hogy korrekciós döntéseket hozzon, amelyeket vagy egy döntéstámogató szakember, vagy egy döntéstámogató számítógépes rendszer generál.

a) Az ordinális intranzitivitás feltárása (bármely létező módszer alkalmazható).

b) A döntéshozó áttekinti az intranzitív triádokat és korrigál. A korrekció kötelező, ellenkező esetben az eljárás véget ér.

c) A kardinális inkonzisztenciák bemutatása és opcionális korrigálása a legközelebbi szomszéd elv alkalmazásával.

2. példa

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a döntéstámogatás nélkül kialakított mátrix egyetlen elem kivételével megegyezik az előző példa végeredményével. A különbség annyi, hogy egy adatbeviteli hiba miatt az (a, c) elem értéke nem $1/3$, hanem 3. Tegyük fel, hogy sem a döntéshozó, sem a döntéstámogató szakember nem tud a hibáról. Ekkor a *8. táblázatban* lévő mátrixot elemzik – ez lesz tehát a 3.2. stratégia mintapéldája.

	a	b	c	d
a	1	1/9	3	1/5
b	9	1	5	2
c	1/3	1/5	1	1/2
d	5	1/2	2	1

8. táblázat

Mind a négy triádot megvizsgálva azt találjuk, hogy az ordinális tranzitivitás rendben van, az alternatívák sorrendje $b \to d \to a \to c$. (Vegyük észre, hogy az adatbeviteli hiba miatt az a és c sorrendje az utolsó két pozícióban megfordult az előző példához képest.) Kardinális konzisztencia problémák azonban mind a négy triádnál vannak:

$[a,b,c] : 1/9 \cdot 5 = 5/9 \neq 3$ $\quad [a,b,d] : 1/9 \cdot 2 = 2/9 \neq 1/5$
$[a,c,d] : 3 \cdot 1/2 = 3/2 \neq 1/5$ $\quad [b,c,d] : 5 \cdot 1/2 = 5/2 \neq 2$

A legellentmondásosabb két triád az $[a,b,c]$ és az $[a,c,d]$. Mutassuk meg ezeket a döntéshozónak! A döntéshozó rájön, hogy valamiféle hiba történhetett, azonban a 8. táblázatban szereplő értékekre ránézve bizonytalan abban, hogy mit csináljon és *alkalmazza a javasolt heurisztikát*. A legközelebbi szomszéd elv alapján először az $(a,c) = 1$ majd az $(a,d) = 1/3$ javítást végzi (mivel az első javítás után, ami az $[a,b,c]$ triádot érinti, az $[a,c,d]$ triádot is újra ellenőrizni kell: $1 \cdot 1/2 = 1/2 \neq 1/5$ és az $1/5$ legközelebbi szomszédja $1/3$).

(a,d) része az $[a,b,d]$ triádnak. Itt is újra tesztelnünk kell, és azt találjuk, hogy $1/9 \cdot 2 = 2/9 \neq 1/3$. A döntéshozó úgy gondolja, hogy nincs ok a változtatásra. Az új értékekkel a korrigált mátrix a *9. táblázatban* látható:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1	1/3
b	9	1	5	2
c	1	1/5	1	1/2
d	3	1/2	2	1

9. táblázat

Az ordinális tranzitivitást ellenőrizve $b \to d \to c \approx a$. Az új rangsor döntetlent mutat az utolsó két helyen – ami reális. (Jegyezzük meg, hogy az induló mátrix $CR = 17\%$ értéke $CR = 1{,}7\%$-ra változott a korrekció után). Ha az eljárásban az $[a,c,d]$ triáddal kezdünk, akkor először ugyan itt is az $(a,c) = 1$ az első korrekció, ám a másik triád ellenőrzésekor a $(b,c) = 5$ érték $(b,c) = 7$-re változhat (mert $1/9 \cdot 5 = 5/9 \neq 1$ és az 5 egyik legközelebbi szomszédja 7. Az érintett $[b,c,d]$ triád ellenőrzésekor $7 \cdot 1/2 = 7/2 \neq 2$, ezt a döntéshozó elfogadja. Ebben az alesetben a 10. táblázat korrigált mátrixa:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1	1/5
b	9	1	7	2
c	1	1/7	1	1/2
d	5	1/2	2	1

10. táblázat

Az alternatívák rangsora most is $b \to d \to c \approx a$ ($CR = 2{,}8\%$). (Ebben az elírásos esetben az is lehetséges, hogy a döntéshozó az algoritmus alkalmazása nélkül rájön arra, hogy az $(a,c) = 1/3$ cserét csinálja meg, s ezáltal a 7. táblázat és az ahhoz tartozó sorrend lesz a végeredmény).

Összehasonlításul két, az eddigiekben már hivatkozott korrekciós eljárás eredményét adjuk meg ugyanerre a feladatra. Kou és szerzőtársai a 8. táblázat mátrixából kiindulva a *11. táblázat* mátrixát kapta, amely nagyon közel van (az (a, c) elem különbözik kissé) a 7. táblázat végeredményéhez:

	a	b	c	d
a	1	1/9	1/2	1/5
b	9	1	5	2
c	2	1/5	1	1/2
d	5	1/2	2	1

11. táblázat

Ha a Saaty javasolta módszerrel számolunk, akkor a korrigált mátrix megegyezik az eljárásunk szerint kapott 9. táblázattal.

3. példa

Siraj és szerzőtársai (2015) két irányból, új elnevezésekkel vizsgálja a tranzitivitás hiányát. Kongruencia mátrixa a kardinális tranzitivitás megsértésének detektálására alkalmas, disszonancia mátrixa pedig az ordinális tranzitivitás mérésére szolgál. Mindkét mátrix elemeit az indirekt összehasonlításokból számolja, a iv) összefüggés felhasználásával. Az idézett cikk példái a mátrixok használatát illusztrálják. Mondanivalónk szempontjából két példájukat emeljük ki, más-más tanulságokkal.

A 12. táblázatban látható mátrix Siraj és szerzőtársai (2015) cikkében ,,a konzisztencia holtpontjának" (consistency deadlock) bemutatásául szolgál, azaz mint írják ,,nem lehet egyértelmű javaslatot tenni a javításra, az bárhol lehetséges".

	a	b	c	d	e
a	1	2	2	2	2
b	1/2	1	2	2	2
c	1/2	1/2	1	2	2
d	1/2	1/2	1/2	1	2
e	1/2	1/2	1/2	1/2	1

12. táblázat

Érdemes azonban elgondolkodni ezen a példán a döntéshozó nézőpontjából. Tegyük fel, hogy a Saaty-féle skálát alkalmaztuk. Ha a döntéshozó először az (a, b), majd a (b, c), (c, d) és végül a (d, e) összehasonlításokat adta meg, akkor – az egymástól függetlennek tekintett páros összehasonlítások természete és a skálaértékek jelentése okán – ez azt mutatja, hogy az adott párok esetében ,,enyhén preferált" válaszok születtek. A további kérdések, pl. az (a, c) összehasonlítás 2 értéke arra utal, hogy eredetileg mindegyik alternatíva esetében az 1 és 2 érték között tétovázhatott a DH, azaz nagyon közel vannak egymáshoz az alternatívák. Így nem feltétlenül problematikus, hogy a döntéshozónál az 1-től történő kicsiny, de érzékelhető eltérések szorzata nem a 4-hez, hanem a 2-höz van nagyon közel. Itt tehát a skála okoz gondot, nem a döntéshozó gondolkozik rosszul. Ne feledjük, a döntéshozó kizárólag az $1, \ldots, 9$ számok verbálisra fordított nyelvét beszéli!

Igaz tehát, hogy a döntéshozónak nem tudunk tanácsot adni valamely elem(ek) megváltoztatására, ám lehet, hogy erre nincs is szükség. Az ordinális tranzitivitással nincs baj: a triádok vizsgálata szerint az $a \to b \to c \to d \to e$ sorrend és a (32, 24, 19, 14, 11) súlyok megfelelőek lehetnek. Tájékoztatásul: $CR = 4{,}3\%$.

A valós helyzetet azonban csak a döntéshozóval történő konzultáció tárhatja fel. Mivel algoritmusunk szerint a triádok nem adnak okot javításra, a kardinális inkonzisztencia tudomásul vétele mellett a DH dönthetett úgy, hogy a fenti értékek az ő szándékait tükrözik. De akár a 13. vagy a 14. táblázat értékeihez is eljuthat:

	a	b	c	d	e
a	1	2	4	8	9
b	1/2	1	2	4	8
c	1/4	1/2	1	2	4
d	1/8	1/4	1/2	1	2
e	1/9	1/8	1/4	1/2	1

13. táblázat

	a	b	c	d	e
a	1	2	2	2	2
b	1/2	1	1	1	1
c	1/2	1	1	1	1
d	1/2	1	1	1	1
e	1/2	1	1	1	1

14. táblázat

Vagyis az előző sorrend mellett a (49, 27, 13, 7, 4) súlyokig, illetve a (33, 17, 17, 17, 17) súlyok mellett a $b = c = d = e$ azonosan preferált és a enyhén jobb, mint b értékekhez. (A CR értékek rendre: 0,9% és 0%.) Hogyan kaphatjuk meg a 13. vagy a 14. táblázat elemeit? A 13. táblázatnál a DH úgy látta, hogy az első négy összehasonlításnál mégsem annyira közeliek az alternatívák, ezért a verbális skálát „tágabbra nyitva" adta meg az A^* mátrix elemeit, egyben összhangba is hozva azt a kardinális tranzitivitás pontos értékeivel. A 14. táblázatnál ellenkezőleg: az a és b alternatívákat kivéve, a többieket egymással azonosnak ítélte meg. Mindkét esetben javítások sorozatát végezte el, míg eljutott az általa valósnak vélt végeredményhez.

4. példa

Siraj és szerzőtársai egy másik jellemző példájában a *15. táblázat* mátrix elemei szerepelnek:

	a	b	c	d
a	1	3	2	6
b	1/3	1	6/5	2
c	1/2	5/6	1	3
d	1/6	1/2	1/3	1

15. táblázat

Minden más összehasonlítást ellenőrizve és a DH által elfogadva (ez annál is inkább egyszerű, mert az $[a, b, d]$ és $[a, c, d]$ triádok tökéletesen konzisztensek), figyelmünket fordítsuk a $(b, c) = 6/5$ értékre. A megfelelő triádból látható, hogy a $3 \cdot 6/5$ szorzat akkor lenne pontosan 2, ha $(b, c) = 2/3$. E példa trükkös része azonban az, hogy míg minden egyéb összehasonlítás a Saaty-skálán adott, ez az összehasonlítás viszont nem!

Ha a döntéshozatalnál a skálát rögzítjük, és az nem más, mint az $1, \ldots, 9$ és reciprokainak sorozata, akkor sem a $6/5$, sem a $2/3$ fel sem merülhet, csak az egész értékek. Feladatunkban a (b, c) értékeként az $1/2$, 1 és 2 jöhet szóba. Ha $(b, c) = 1/2$, akkor az $a \to b \to c \to d$ sorrend mellett az (50, 15, 27, 8) súlyokat kapjuk ($CR = 0{,}4\%$). Ha $(b, c) = 1$, akkor ugyanezen sorrend mellett az (50, 19, 23, 8) súlyvektorunk van ($CR = 0{,}8\%$). Végül a $(b, c) = 2$ értéke mellett a sorrend megváltozik: $a \to c \to b \to d$ és a súlyok rendre (50, 23, 19 és 8) ($CR = 5{,}7\%$). Melyik a „helyes" sorrend és súlyrendszer? Erre csak a DH tud válaszolni, ám algoritmusunk segít neki.

Ha ugyanis a (b, c) értéke 1 vagy $1/2$, akkor a $3 \cdot 1$, illetve a $3 \cdot 1/2$ szorzatok eredménye a kardinális tranzitivitás vizsgálatban a legközelebbi szomszédja a 2 értéknek. A $(b, c) = 2$ nem javasolt, mert $3 \cdot 2 = 6$ nem a legközelebbi szomszédja a 2-nek. Így tehát algoritmusunk alkalmazásával a DH az $a \to b \to c \to d$ sorrendek egyik változatához jut. (Megjegyzés: Siraj és szerzőtársai cikkében a példa azt illusztrálja, hogy az általuk javasolt eljárással automatikusan detektálható a $(b, c) = 6/5$ elem problematikus volta.)

7 A döntéshozó nem elérhető a mátrix elemeinek meghatározása után

Ha ez olyankor fordul elő, amikor a mátrix elemeit döntéstámogatás nélkül adta meg a döntéshozó, akkor a következő állításokat fogalmazhatjuk meg.

1. Állítás. *Ha az A mátrix konzisztens, akkor elfogadható.*

Megjegyzés. Elvileg előfordulhat, hogy a döntéshozó valós preferenciáit egy másik konzisztens mátrix írja le.

2. Állítás. *Ha a mátrix inkonzisztens, akkor speciális esetekben korrigálható:*

- *ha a mátrix egyetlen elem (és reciproka) megváltoztatásával konzisztenssé tehető,*
- *ha megmutatható, hogy a mátrix statisztikai hibát tartalmaz.*

Megjegyzés. A szakirodalomban kidolgozott, a 4. fejezetben hivatkozott korrekciós módszerek alkalmazhatók, az adott probléma jellegének és a korrekciós módszer feltételeinek függvényében.

3. Állítás. *Az egyéb esetekben a döntéshozótól kapható pótlólagos információk hiányában a korrekció nem igazolható.*

Megjegyzés. A szakirodalomban kidolgozott inkonzisztencia indexek szükség esetén felhasználhatóak arra, hogy segítségükkel a nem-korrigált mátrixokat elfogadjuk vagy elvessük.

Konklúziók

A páros összehasonlítási mátrixok fontos alkalmazása a többtényezős döntési problémák rangsorolási vagy súlyozási kérdéseinek megválaszolása. Az ehhez felhasznált becslési módszerek a döntéshozó által megadott mátrixból indulnak ki. Lényeges tehát, hogy ez a mátrix milyen tulajdonságokkal rendelkezik. A gyakorlati alkalmazásokban kiemelt szerepet kapott az arányskálán megadott összehasonlításokra épülő mátrix, ahol a konzisztens esettől való eltérés megbízhatósági kérdéseket vet fel.

A megoldás egyik iránya inkonzisztencia indexek kidolgozása és olyan korrekciós módszerek alkalmazása, amelyek ezen indexekkel mérve csökkentik az inkonzisztenciát. Elterjedtté váltak az automatikus korrekciós módszerek, amelyek bizonyos feltevések mentén a döntéshozó bevonása nélkül állítanak elő az eredetinél kisebb inkonzisztenciájú mátrixokat. Ezen cikk egyik fő mondanivalója az, hogy ezeknek a módszereknek az eredményei – hacsak nem sikerül axiomatikus alapokra helyezni a módszert – nem igazolhatók a döntéshozó nélkül. Bármilyen korrekciót hajtunk végre (akár a mátrix elemeinek meghatározása közben, akár az eljárás végeztével) az nem nélkülözheti a döntéshozó által adott pótlólagos információk figyelembe vételét.

Mivel általános esetben a verifikációs probléma nehezen kezelhető, ezért a tárgyalást leszűkítettük egy speciális esetre, a verbális skála alkalmazására. Itt jól bemutatható az ordinális és kardinális tranzitivitás kettősségéből adódó megközelítésbeli különbség és annak a döntéshozó általi feloldása. Lényeges, hogy egyes szakirodalmi módszerektől eltérően, ahol szintén kétfázisú korrekciós eljárások vannak, itt nem automatikus inkonzisztencia-csökkentő szabályok visznek a végső megoldás felé, hanem a döntéshozó mérlegelésén alapul a végeredmény – így biztosítva a validációt.

Továbbra is nyitott kérdés a verifikáció általános elmélete és módszertana. Úgy véljük, hasznos lenne, ha az alkalmazásokban igény lenne legalább a konkrét eset eredményeinek verifikálására. Az itt bemutatott eljárás illusztrációként szolgál. További munkánk során az alkalmazott heurisztika finomítható. Fontos lépés a számítógépes döntéstámogató módszerekbe történő moduláris beépítés, az interaktivitás növelése. Ebben az irányban sok lehetőséget látunk.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az OTKA K 111797 pályázat támogatta.

Irodalom

1. Bana e Costa, C. A., Vansnick, J-C. (2008): A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in AHP, *European Journal of Operational Research*, 187, 1422–1428.
2. Belton, V., Gear, T. (1983): On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies, *Omega*, 11(3), 228–230.
3. Bozóki S., Rapcsák T. (2008): On Saaty's and Koczkodaj's inconsistencies of pairwise comparison matrices, *Journal of global optimization*, 42(2), 157–175.
4. Bozóki, S., Fülöp, J. and Poesz, A. (2011): On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, 19(2), 157–175.
5. Bozóki, S., Fülöp, J. and Poesz, A. (2015): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, *Central European Journal of Operations Research*, (23)4, 849–866.
6. Brunelli M., Fedrizzi M. (2015): Axiomatic properties of inconsistency indices for pairwise comparisons, *Journal of the Operational Research Society*, 66(1), 1–15.
7. Brunelli, M. (2015): *Introduction to Analytic Hierarchy Process*, Springer
8. Cao D., Leung L. C. and Law, J. S. (2008): Modifying inconsistent comparison matrix in analytic hierarchy process: A heuristic approach, *Decision Support Systems*, 44(4), 944–953.
9. Choo, E. U., Wedley, W. C. (2004): A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices, *Computers and Operations Research*, 31, 893–908.
10. Condorcet, M. (1785): *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Dé-cisions Rendues á la Pluralité des Voix*, Paris
11. Ergu, D., Kou, G., Peng, Y. and Shi, Y. (2011): A Simple Method to Improve the Consistency Ratio of the Pairwise Comparison Matrix in ANP, *European Journal of Operational Research*, 213(1), 246–259.
12. Gaul, W., Gastes, D. (2012): A note on consistency improvements of AHP paired comparison data, *Advances in Data Analysis and Classification*, 6, 289–302
13. Gehrlein, W. V. (2006): *Condorcet's Paradox*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
14. González-Pachón, J., Romero, C. (2004): A method for dealing with inconsistencies in pairwise comparisons. *European Journal of Operational Research*, 158, 351–361.
15. Ishizaka, A., Lustin, M. (2004): An expert module to improve the consistency of AHP matrices, *Intl. Trans. in Op. Res.*, 11, 97–105.
16. Karapetrovic, S., Rosenbloom, E. S. (1999): A quality control approach to consistency paradoxes in AHP, *European Journal of Operational Research*, 119(3), 704–718.
17. Kéri, G. (2011): On qualitatively consistent, transitive and contradictory judgment matrices emerging from multiattribute decision procedures, *Central European Journal of Operations Research*, 19, 215–224.
18. Koczkodaj W. W. (1993): A new definition of consistency of pairwise comparisons, *Math. Comput. Modelling*, 8, 79–84.

19. Kou, G., Ergu, D. and Shang, J. (2014): Enhancing Data Consistency in Decision Matrix: Adapting Hadamard Model to Mitigate Judgment Contradiction, *European Journal of Operational Research*, 236(1), 261–271.
20. Kwiesielewicz, M, van Uden, E. (2004): Inconsistent judgments in pairwise comparison method in the AHP, *Computers and Operations Research*, 31, 713–719.
21. Lin, C. (2007): A revised framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices, *European Journal of Operational Research*, 176(2), 1145–1150.
22. Miller, G. A. (1956): The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information, *The Psychological Review*, 63, 81–97.
23. Murphy, C. K. (1993): Limits on the Analytic Hierarchy Process from its inconsistency index, *European Journal of Operational Research*, 65, 138–139.
24. Saaty, T. (1977): A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 234–281.
25. Saaty, T. L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*, New York, McGraw-Hill
26. Saaty, T. L. (2003): Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. *European Journal of Operational Research*, 145(1), 85–91.
27. Siraj, S., Mikhailov, L. and Keane, J. (2012): A heuristic method to rectify intransitive judgments in pairwise comparison matrices, *European Journal of Operational Research*, 216, 420–428.
28. Siraj, S., Mikhailov, L. and Keane, J. (2015): Contribution of individual judgments toward inconsistency in pairwise comparisons, *European Journal of Operational Research*, 242 (2015), 557–567.
29. Temesi, J. (2006): Consistency of the decision-maker in pairwise comparisons, *International Journal of Management and Decision Making*, 7(2/3), 267–274.
30. Temesi, J. (2011): Pairwise comparison matrices and the error-free property of the decision-maker, *Central European Journal of Operations Research*, 19(2), 239–249.
31. Xu Z. S., Wei C. P. (1999): A consistency improving method in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 116(2), 443–449.

INTERACTIVE PROCEDURE TO DETERMINE THE ELEMENTS OF A PAIRWISE-COMPARISON MATRIX

Pairwise comparison matrices are frequently used in the methodology of multi-attribute decision making. Elicitation of the elements of the matrix can be done in several ways, and the elicitation method has an impact on the final result (determination of preferences, weights, rankings). The applied decision methods work with consistent or near-consistent matrices. This paper aims at investigating two questions. In the first part of the paper correction methods are interpreted and analysed from the viewpoints of their philosophy and techniques to decrease the degree of inconsistency. The second part proposes an interactive method for individual decision-making problems with verbal scale to illustrate that improving

consistency is not possible without additional information from the decision maker. The involvement of the decision maker and some special rules can ensure that the process either provides a near-consistent and error-free pairwise comparison matrix or demonstrates the inability of the decision maker to reach that goal.