

## ADAPTÍV ÉS EXTRAPOLATÍV BECSLÉSEK EGY SPECIÁLIS DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLBEN<sup>1</sup>

SZIDAROVSZKY FERENC ÉS MOLNÁR SÁNDOR  
*Arizonai Egyetem – Központi Bányászati Fejlesztési Intézet*

Dolgozatunkban egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellt vizsgálunk. Feltesszük, hogy minden időpontban egyensúlyban van a kereslet és a kínálat. A termelők először megbecsülik a várható árat, majd az így adódó várható hasznukat optimalizálják. A rendszer globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg statikus, adaptív és extrapolatív becslések mellett.

### 1. Bevezetés

Korábbi dolgozatunkban (Szidarovszky és Molnár, 1994) egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellt vizsgáltunk, amelyben a rendszer dinamizmusát Arrow egy modelljéhez (1960) hasonló diszkrét egyenlet vezérelte, amely hiány esetén árnövekedést, többlettermelés esetén pedig árcsökkenést eredményezett. A piacot annak keresleti függvényével jellemeztük, a termelőket pedig azok költségfüggvényeivel. Minden  $t \geq 0$  időpontban feltettük, hogy az összes termelő először valamilyen módon megbecsüli a várható árat, és a becslés alapján adódó várható profitját maximalizálja. A Szidarovszky és Yen (1994) dolgozatban ezt a modellt úgy módosítják, hogy minden időpontban feltételezik a kereslet és kínálat egyensúlyát, és a rendszer dinamizmusát a dinamikus előrejelzések vezérlik.

Ebben a dolgozatunkban a Szidarovszky és Yen (1994) által bevezetett modellt vizsgáljuk meg, és a rendszer globális aszimptotikus stabilitásával foglalkozunk adaptív és extrapolatív becslések mellett.

### 2. A matematikai modell

A Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozathoz hasonlóan egy olyan piacot vizsgálunk, amelyben  $N$  termelő ugyanazt a terméket termeli. Legyen  $x_k(t)$

<sup>1</sup>A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. október 10.

a  $k$ -dik termelő termelési mennyisége a  $t$  időpontban ( $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $t = 0, 1, 2, \dots$ ). Feltesszük, hogy költségfüggvénye kvadratikus:

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k,$$

ahol az összes együtttható pozitív. Minthogy

$$B_k = \frac{1}{2} C_k''(x_k), \quad b_k = C_k'(0) \quad \text{és} \quad c_k = C_k(0),$$

egyedül az első, a konvexitást biztosító feltétel jelent csak megszorítást. Tegyük azt is fel, hogy minden időpontban az összes termelő először megbecsüli a piaci árat. Jelölje  $p_k^E(t)$  a  $k$ -dik termelő becslését, és ezután az összes termelő maximalizálja várható hasznát. Vagyis  $x_k(t)$  az

$$x_k(t) = \arg \max_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E(t) - (B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k) \right\} \quad (1)$$

szabállyal adódik. Feltesszük, hogy a profitmaximalizáló  $x_k$  érték pozitív, ellenkező esetben ugyanis a termelő kilép a piacról, így aszimptotikus vizsgálatok szempontjából nem kell többé számolnunk vele. Egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}. \quad (2)$$

Feltesszük, hogy a piac keresleti függvénye lineáris:  $d(t) = Dp(t) + d$ , ahol  $D < 0$  és  $d > 0$ . Az első feltétel az árban való csökkenést jelenti,  $d > 0$  pedig szükséges ahhoz, hogy pozitív kereslet egyáltalán lehetséges legyen. Minden időszakban feltesszük a kereslet és kínálat egyensúlyát:

$$Dp(t) + d = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k},$$

azaz

$$p(t) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k D} - \frac{d}{D}. \quad (3)$$

Minthogy a  $p_k^E(t)$  becslések a megelőző árak és becslések függvényei, ezzel az egyenlettel egy diszkrét dinamikus rendszert definiálunk, amelynek struktúrája és stabilitási tulajdonságai alapvetően a  $p_k^E(t)$  becslésektől függenek.

### 3. Adaptív és statikus becslések

Ebben a paragrafusban feltesszük, hogy az összes termelő *adaptív* becslést alkalmaz:

$$p_k^E(t) = \alpha_k p(t-1) + (1 - \alpha_k) p_k^E(t-1), \quad (4)$$

ahol  $0 < \alpha_k \leq 1$ . Ezeknek a becsléseknek az értelmezése és tulajdonságai megtalálhatók a Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozatban. Megjegyezzük, hogy az  $\alpha_k = 1$  speciális esetben a (4) becslést *statikusnak* mondjuk. A (3) és (4) egyenletek összevonásával egy elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszert nyerünk a  $p(t)$ ,  $p_1^E(t), \dots, p_N^E(t)$  változókra, amelynek együttható-mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} & \frac{1-\alpha_1}{2B_1 D} & \dots & \frac{1-\alpha_N}{2B_N D} \\ \alpha_1 & 1-\alpha_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_N & & & 1-\alpha_N \end{pmatrix}.$$

Tudjuk a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei az egységkör belsejében legyenek.  $\mathbf{A}$  mátrix sajátérték-egyenlete a következő alakú:

$$\left( \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} \right) u + \sum_{k=1}^N \frac{1-\alpha_k}{2B_k D} v_k = \lambda u \quad (5)$$

$$\alpha_k u + (1-\alpha_k)v_k = \lambda v_k \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

A második egyenletből közvetlenül leolvasható, hogy

$$v_k = \frac{\alpha_k}{\lambda - (1-\alpha_k)} u. \quad (6)$$

Itt feltesszük, hogy  $\lambda \neq 1 - \alpha_k$ . Ellenkező esetben  $\lambda = 1 - \alpha_k$ , így feltételeink alapján  $0 \leq \lambda < 1$ , amely nem befolyásolja a rendszer stabilitását. A (6) egyenlőséget az (5) első egyenletébe helyettesítve  $u \neq 0$  alapján azonnal adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} + \sum_{k=1}^N \frac{(1-\alpha_k)\alpha_k}{2B_k D(\lambda - (1-\alpha_k))} = \lambda. \quad (7)$$

Az egyenlet gyökeinek vizsgálata érdekében tegyük fel, hogy az  $\alpha_k$  értékek között  $r$  különböző van, és jelölje  $G_l$  azon termelők halmazát, amelyek az  $\alpha_k = a_l$  becslési együtthatót választják. Itt  $a_1 > a_2 > \dots > a_r$  jelöli a különböző  $\alpha_k$  értékeket. Ekkor a (7) egyenlet a

$$\sum_{l=1}^r \left( \frac{1}{2D} \sum_{i \in G_l} \frac{1}{B_i} \right) a_l + \sum_{l=1}^r \left( \frac{1}{2D} \sum_{i \in G_l} \frac{1}{B_i} \right) \frac{(1-a_l)a_l}{\lambda - (1-a_l)} = \lambda$$

alakba is átírható, amely ekvivalens a

$$\sum_{i=1}^r \frac{(1-a_i)a_i\beta_i}{\lambda - (1-a_i)} = 2D\lambda - \sum_{i=1}^r \beta_i a_i \quad (8)$$

egyenlettel, ahol

$$\beta_i = \sum_{i \in G_i} \frac{1}{B_i}.$$

Ha  $a_l = 1$  valamilyen  $l$  mellett, akkor a (8) baloldalán eggyel kevesebb tag található, és a jobboldal struktúrája változatlan marad. Így feltesszük, hogy  $a_l \neq 1$  ( $l = 1, 2, \dots, r$ ), az elmondottak az  $a_l = 1$  speciális esetre is érvényesek maradnak. Jelölje  $g(\lambda)$  a (8) egyenlet baloldalát. Vegyük észre először, hogy az egyenlet ekvivalens egy  $(r+1)$ -edfokú polinom gyökeinek megkeresésével, így összesen  $(r+1)$  valós vagy komplex gyök létezik. Könnyen látható, hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-a_i+0} g(\lambda) = \infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1-a_i-0} g(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} g(\lambda) = 0,$$

és az összes folytonossági pontban  $g$  lokálisan szigorúan csökkenő. A függvényt az 1. ábra mutatja, ahol az egyenlet jobboldalán szereplő lineáris függvényt is bemutatjuk. Az egyenletnek egy-egy gyöke van az  $(1-a_1, 1-a_2)$ ,  $(1-a_2, 1-a_3)$ ,  $\dots$ ,  $(1-a_{r-1}, 1-a_r)$  intervallumok belsejében, valamint  $\lambda = 0$  is megoldás. Ez összesen  $r$  valós gyököt ad. Minthogy az összes (valós és komplex) gyökök száma  $r+1$ , és komplex gyökök konjugáltjaikkal együtt szerepelnek, az  $(r+1)$ -dik gyök is valós. Könnyű látni, hogy a  $g$  függvény konkáv  $\lambda < 1-a_1$  esetén, így a jobboldalt reprezentáló egyenes vagy érinti a görbét  $\lambda = 0$  esetén (ekkor ez kétszeres gyök), vagy metszi azt még egy helyen. Így az összes gyök  $-1$  és  $+1$  közé esik akkor és csak akkor, amikor

$$g(-1) < -2D - \sum_{i=1}^r \beta_i a_i.$$

Egyszerű számolással látható, hogy ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$D < - \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{(4-2\alpha_k)B_k} \quad (9)$$

feltétellel. Feltételeink mellett a jobboldal negatív, így a (9) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a keresletfüggvény  $D$  meredeksége elegendően nagy kell, hogy legyen abszolút értékben.

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor  $\alpha_k = 1$  mindegyik termelő esetén. Ekkor a (9) feltétel a következőképpen módosul:

$$D < - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2B_k} . \quad (10)$$

#### 4. Extrapolatív becslések

Feltesszük most, hogy az összes termelő *extrapolatív* becslést választ:

$$p_k^E(t) = \alpha_k p(t-1) + (1 - \alpha_k) p(t-2) , \quad (11)$$

ahol  $\alpha_k > 0$ . Ezt az egyenlőséget a (3)-ba helyettesítve a

$$p(t) = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} \right) p(t-1) + \left( \sum_{k=1}^N \frac{1 - \alpha_k}{2B_k D} \right) p(t-2) - \left( \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{2B_k D} + \frac{d}{D} \right) \quad (12)$$

rendszer egyenletet nyerjük, amelynek karakterisztikus polinomja:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \left( \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} \right) \lambda - \left( \sum_{k=1}^N \frac{1 - \alpha_k}{2B_k D} \right) .$$

A Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozat 1. Lemmája alapján a sajátértékek akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha

$$- \sum_{k=1}^N \frac{1 - \alpha_k}{2B_k D} < 1$$

és

$$- \sum_{k=1}^N \frac{1 - \alpha_k}{2B_k D} > \max \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} - 1 ; - \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{2B_k D} - 1 \right\} .$$

Mint hogy  $D < 0$ , ezek az egyenlőtlenségek a következőképpen foglathatók össze:

$$D < \min \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k - 1}{2B_k} ; \sum_{k=1}^N \frac{1 - 2\alpha_k}{2B_k} \right\} . \quad (13)$$

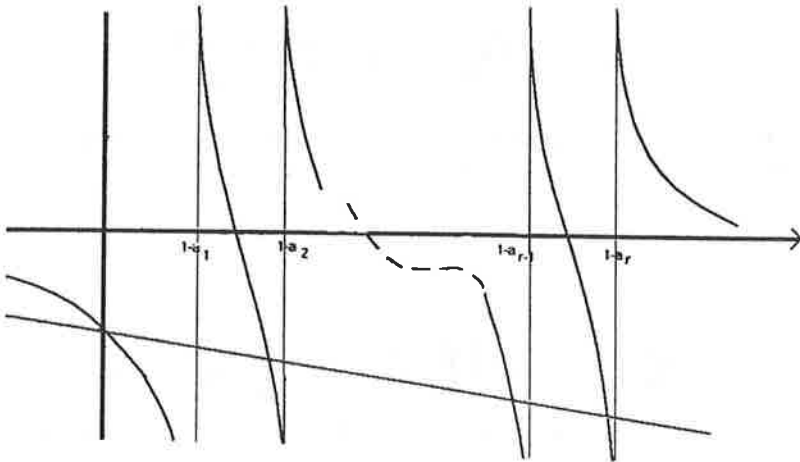
Ez a feltétel – hasonlóan az adaptív esetre – azt jelenti, hogy  $|D|$  elegendően nagy kell, hogy legyen. Megjegyezzük, hogy az  $\alpha_k = 1$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ )

speciális esetben az extrapolatív becslések statikussá redukálódnak. Ekkor a (13) feltétel nyilvánvalóan a (10) egyenlőtlenségé egyszerűsödik.

## 5. Következtetések

Dolgozatunkban a Szidarovszky és Molnár (1994) modell módosításával foglalkoztunk. Részletesen megvizsgáltuk a rendszer globális aszimptotikus stabilitását statikus, adaptív és extrapolatív becslések esetén. Stabilitási feltételként rendre a (10), (9) és (13) egyenlőtlenség adódott. Ha az összes többi paraméter rögzített, akkor e feltételek azt jelentik, hogy  $|D|$  értéke elég nagy kell, hogy legyen. Ha a rendszer globálisan aszimptotikusan stabilis, akkor  $|D|$  értékét növelve az továbbra is aszimptotikusan stabilis marad. Hasonlóan a  $B_k$  értékek növelése esetén sem változik meg a rendszer globális aszimptotikus stabilitása.

Az itt bemutatott modell és a stabilitási feltételek többtermékes piacok esetére is átvihetők. Az általános modell ugyanúgy tárgyalható, mint a többtermékes oligopol modellek (ld. Okuguchi és Szidarovszky, 1990).



1. ábra. A  $g$  függvény grafikonja

**Irodalom**

1. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról (Publikálásra leadva, SZIGMA).
2. Arrow K. J. (1960) Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et al. (eds.) *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford University Press, Stanford, CA.
3. Szidarovszky, F. és J. Yen (1994) Adaptive and Cournot Expectations in a Special Consumer-Producer Market (Publikálásra leadva, *Pure Math. and Appl.*)
4. Szidarovszky, F. és A. T. Bahill (1992) *Linear Systems Theory*. CRC Press, Boca Raton/London.
5. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

**ADAPTIVE AND EXTRAPOLATIVE ESTIMATIONS IN A SPECIAL  
DISCRETE DYNAMIC PRODUCER-CONSUMER MODEL**

In our paper a special discrete dynamic producer-consumer model is examined under the assumption that at each time period the demand and supply are balanced. We examined the global and asymptotical stability of the system.

