Szigma, XXVI. (1995) 1–2.

VARIANCIAFELBONTÁS: ELŐFELTEVÉSEK ÉS KÖVETKEZTETÉSEK[1]

HAJDU OTTÓ – HUNYADI LÁSZLÓ
BKE Statisztikai Tanszék

A varianciafelbontás a statisztika elméletének egyik legáltalánosabb, legtöbb területen alkalmazható összefüggését, nevezetesen a heterogén sokaságok varianciájának az ún. külső és a belső variancia összegére való bontását eredményezi. A varianciafelbontás tulajdonságait tankönyvek, szakkönyvek és tanulmányok sora (pl. [1,2,3,4,5,6,7]) vizsgálja, néhány fontos sokasági összefüggésre Hunyadi [4] cikke hívta fel a figyelmet. Jelen tanulmány a varianciafelbontás során előálló külső, belső és teljes eltérésnégyzetösszegek *mintavételi ingadozásában* rejlő, a mintavételi következtetések alapjául szolgáló törvényszerűségek, alkalmazási előfeltevések áttekinthető rendszerbe foglalását tűzi ki céljául.

Valahányszor egy ismeretlen sokaság jellegzetességeinek a vizsgálata áll érdeklődésünk homlokterében, és a teljes sokaság megfigyelése vagy lehetetlen, vagy fölösleges, következtetéseink során kénytelenek vagyunk egy mintavétel eredményeire hagyatkozni. Praktikus megközelítésből tehát értelmetlennek tűnik sokasági és mintabeli jellemzők egymás mellett való szerepeltetése, hiszen ismert sokaság mellett szükségtelen a mintavétel, ismeretlen sokaság esetén pedig csak mintaadatok állnak rendelkezésünkre. A következtetéseink minőségét azonban az alkalmazott mintavételi mód, továbbá a mintabeli információ feldolgozásának a módja alapvetően befolyásolja. Ha ismerjük e tényezők hatásmechanizmusát, s közben a sokaságról tökéletes információval rendelkezünk, akkor szembeállítva következtetéseinket és a valóságot, megítélhetővé válik, hogy milyen hatékonyan használtuk fel a mintavétel eredményeit. A valóságot természetesen nem ismerjük, viszont föltételezhetjük több, vagy kevesebb jellegzetességének az ismeretét, s ezek birtokában megadhatjuk magának a mintavételnek, illetve a mintabeli információk feldolgozásának azon módját, amely mellett következtetéseink várhatóan a legmegbízhatóbban fogják közelíteni az ismeretlen sokasági jellemzőket.

A fenti gondolatmenetet csoportosított (rétegzett) sokaságra, s így csoportosított mintára alkalmazva arra kívánunk rámutatni, hogy milyen mintavételi tervet kell készíteni, illetve milyen statisztikákat célszerű számolni a rétegzett sokaság minél megbízhatóbb jellemzése érdekében akkor, ha a sokaságról

[1] Beérkezett 1994. november 3.

több, vagy kevesebb ismeretünk van. A sokaságról alkotott ismereteink ún. előfeltevések formájában kerülnek megfogalmazásra. Mint általában a mintavételi következtetések, a varianciafelbontáson alapulók is kétirányúak, becslési, valamint hipotézisvizsgálati célúak lehetnek. Míg becslési feladatok esetén minden, a sokaságról alkotott előfeltevésünket egy minél jobb becslés érdekében mozgósítjuk, addig a hipotézisvizsgálat során maga a hipotézis is előfeltevéseink egyike, amely mellé más feltevések is társulhatnak.

Lévén a vizsgálandó sokaság *rétegzett*, teljeskörű leírása a szóbanforgó jelenség (változó) csoporton belüli jellemzőinek, és a csoportok egymáshoz való arányának ismeretét igényli. A sokaság megadása során e kérdés a vizsgált változó csoporton belüli eloszlásainak összehasonlítására irányul. Alapvető kérdés az, hogy a változó normális eloszlású-e vagy sem, a csoporton belüli varianciák egyenlőek-e vagy sem, továbbá, hogy a várható értékek különböznek-e, vagy sem. A tanulmány a varianciafelbontás mintavételi várható értékeinek általános formulákba öntése alapján néhány alapvető, széleskörűen használt modellnek a fenti kritériumokra, továbbá a mintaelemszám elosztására, és a becslő-, illetve tesztfüggvény megválasztására való érzékenységét vizsgálja.

Ennek érdekében elsőként a rétegzett sokaság ismeretét feltételező *általános* modellt definiáljuk, majd meghatározzuk a mintából számított eltérésnégyzetösszegek várható értékét ezen általános modell keretei között. Ezt követően megmutatjuk, hogy az egyenlő rétegvarianciákra és egyenlő rétegátlagokra, továbbá a mintaelemszám elosztására vonatkozó feltételek különkülön, vagy egyidejű figyelembevétele miként eredményezi az általános modell szűkülését, a különféle eltérésnégyzetösszegek várható értékei hogyan egyszerűsödnek, nyernek statisztikai tartalmat azáltal, hogy az általános modellt fokozatosan speciális modellekké redukáljuk. Végül azt tárgyaljuk, hogy a mintavételi várható értékek fokozatos egyszerűsödése hogyan szolgálja néhány közismert, a varianciafelbontás elvén alapuló becslési, illetve hipotézisvizsgálati eljárás működését, gyakorlati alkalmazhatóságát. A gyakorlati vonatkozásokat illetően figyelmünket – messze a teljesség igénye nélkül – az arányos rétegzésből végrehajtott becslések, illetve az egyszempontú, klasszikus varianciaanalízis elméletére koncentráljuk.

Modellfeltevések

Az alábbiakban egy *normális eloszlású, rétegzett* sokaságot leíró általános modellt adunk meg, amely modellt a következő jelölésrendszer foglal egységbe. Tekintsük a sokaságot, mely $j = 1, \ldots, m$ számú rétegre tagolódik. Az egyes rétegekre, illetve a sokaságra vonatkozóan az 1. táblázatban foglalt jellemzők ismeretét feltételezzük:

1. táblázat: A sokaság leírása

Jellemző	Rétegek			Alap-
	1	j	m	sokaság
Változó	Y_1	Y_j	Y_m	Y
Általános egyed	Y_{i1}	Y_{ij}	Y_{im}	Y_i
Rétegarány	P_1	P_j	P_m	1
Várható érték	μ_1	μ_j	μ_m	μ
Variancia	σ_1^2	σ_j^2	σ_m^2	σ^2
Réteghatás	$\tau_1 = \mu_1 - \mu$	$\tau_j = \mu_j - \mu$	$\tau_m = \mu_m - \mu$	0

A táblázattal kapcsolatban megjegyzendő, hogy a rétegarányokat kifejező P_j értékek végtelen sokaság esetén a j-edik rétegbe kerülés valószínűségét jelentik, bár ezek a valószínűségek nem szükségképpen ismertek. A j-edik réteg varianciája definíció szerint[2]

$$\sigma_j^2 = E\big((Y_j - \mu_j)^2\big) , \tag{1}$$

a teljes sokaságé pedig

$$\sigma^2 = E\big((Y - \mu)^2\big) . \tag{2}$$

Az alábbiakban sorra vesszük a csoportosított sokaságra vonatkozó, a csoportok és a teljes sokaság viszonyát leíró mindazon összefüggéseket, amelyek ismerete a tanulmány mondanivalója szempontjából elengedhetetlen.

Rögzítsük a *centrális tendenciát*[3] kifejező, rétegen belüli várható értékeket rendre az

$$E(Y_j) = \mu_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

szinteken. Jelölje a rétegen belüli várható értékek súlyozott számtani átlagát

$$\overline{\mu}(v) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu_j \tag{4}$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} v_j = 1 \tag{5}$$

általános súlyrendszer felhasználásával. Ekkor a sokaságra értelmezett

$$\mu = \overline{\mu}(P) \tag{6}$$

[2] Az Y véletlen változó várható értékét a továbbiakban $E(Y)$ jelöli.

[3] Centrális tendencia alatt azt értjük, hogy egy sokaság egyedeinek túlnyomó többsége egy rögzitett számhoz közeli értékkel bir, akörül, és ahhoz közel ingadozik.

középérték is rögzített. Ebből következően a réteghatások tényleges rétegarányokkal súlyozott átlaga

$$\overline{\tau}(P) = 0 , \tag{7}$$

valamely feltételezett rétegarányokkal súlyozott átlaga azonban a konkrét súlyrendszer függvénye:

$$\overline{\tau}(v) = ?$$

Ebből következően a rétegátlagok súlyozott számtani átlaga csak akkor egyenlő a sokaság átlagával, ha súlyként az egzakt P_j rétegarányok állnak rendelkezésre, egyébként az egyenlőség nem áll fenn:[4]

$$\overline{\mu}(v) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu_j = \sum_{j=1}^{m} v_j(\mu + \tau_j) = \mu + \overline{\tau}(v) \neq \mu . \tag{8}$$

A rétegek szóródását a *külső szórásnégyzettel* jellemezzük. A külső varianciát a réteghatásoknak a rétegarányokkal súlyozott szórásnégyzete állítja elő. Mivel modellünk szerint a réteghatásoknak a rétegarányokkal súlyozott számtani átlaga zérus, ezért a külső szórásnégyzet egyben a réteghatásoknak a rétegarányokkal súlyozott négyzetes átlaga négyzetével is megegyezik:

$$\sigma_\tau^2(P) = \sum_{j=1}^{m} P_j \big(\tau_j - \overline{\tau}(P)\big)^2 = \sum_{j=1}^{m} P_j \tau_j^2 = \overline{\tau}_q^2(P) = \sigma_K^2 . \tag{9}$$

A külső szórásnégyzet természetesen csak abban az esetben zérus, ha valamennyi rétegátlag (rétegen belüli várható érték) egyenlő egymással, s így a sokaság átlagával (várható értékével). Ekkor valamennyi réteghatás zérus:

$$\sigma_K^2 = 0 \qquad \text{ha} \qquad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m = \mu , \tag{10}$$

vagyis

$$\sigma_K^2 = 0 \qquad \text{ha} \qquad \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = 0 . \tag{11}$$

A rétegek belső szóródását összefoglalóan az átlagos rétegen belüli szórásnégyzettel jellemezzük, amely két esetben egyezik meg a *belső szórásnégyzettel.* Egyrészt akkor, ha súlyként a rétegarányok rendelkezésünkre állnak:

$$\overline{\sigma}^2(P) = \sigma_B^2 , \tag{12}$$

[4] A rétegarányok ismerete nem irreális feltevés, még végtelen (megszámolhatóan végtelen) sokaság esetén sem. Gondoljunk pl. a budapesti napi mozibevételek sokaságára, melyet két rétegre, a hétközi és a hétvégi napi bevételekre bonthatunk. Itt a rétegarányok 5/7 és 2/7, a rétegátlagok jelentése pedig a napi átlagos hétközi és hétvégi bevétel.

másrészt akkor, ha valamennyi rétegen belül a szórásnégyzet megegyezik. Ekkor ugyanis a súlyoknak nincs befolyásuk az átlagos értékre:

$$\overline{\sigma}^2(v) = \sigma_B^2 \qquad \text{ha} \qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma_e^2 \,. \tag{13}$$

A varianciafelbontás ismert eredményeképpen pedig a teljes variancia a külső és a belső variancia összege:

$$\sigma^2 = \sigma_K^2 + \sigma_B^2 \,. \tag{14}$$

Mintavételi várható értékek

A rétegzett sokaságra vonatkozó következtetésünket – legyen annak célja akár valamely jellemző becslése, akár valamely hipotézis vizsgálata – a mintabeli eltérésnégyzetösszeg dekompozíciójára, s a komponensek várható értékeire alapozzuk. Ezért az alábbiakban elsőként a külső, belső és teljes eltérésnégyzetösszegek várható értékeinek általános formuláit adjuk meg, amelyek a vizsgált feltevések mellett leegyszerűsödnek, ezáltal érdemi, a tanulmány központi mondanivalóját jelentő következtetések levonását teszik lehetővé.

Vegyünk rétegenként *függetlenül,* rendre $n_1, \ldots, n_m$ elemű, rétegen belül független és azonos eloszlású (FAE) mintákat, amelyekre

$$\sum_{j=1}^{m} n_j = n, \qquad \text{és} \qquad w_j = n_j / n \,. \tag{15}$$

A mintaelemszám rétegek közötti w_j megoszlását *mintaelosztásnak* nevezzük, s ez feltevésünk szerint nincs mintavételi ingadozásnak kitéve. Ekkor a mintabeli csoportátlagok rendre

$$\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m \,, \tag{16}$$

az n elemű (teljes) minta átlaga

$$\overline{y}(w) = \overline{y} \,, \tag{17}$$

a mintabeli korrigált szórásnégyzetek pedig rendre

$$s_j^2 = \sum_{j=1}^{n_j} (y_{ij} - \overline{y}_j)^2 / (n_j - 1) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{18}$$

alakúak lesznek. Tekintsük ezután a mintabeli teljes eltérésnégyzetösszeg külső és belső összetevőkre bontását:

$$SS = SS_K + SS_B \tag{19}$$

ahol

$$SS = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \overline{y})^2 , \tag{20}$$

$$SS_K = \sum_{j=1}^{m} n_j(\overline{y}_j - \overline{y})^2 , \tag{21}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \overline{y}_j)^2 . \tag{22}$$

A mintavétel következtében mind a teljes, mind a belső, mind a külső eltérésnégyzetösszeg mintavételi ingadozásnak van kitéve. Az egyes eltérésnégyzetösszegek mintavételi várható értékét az alábbi általános formulák[5] szolgáltatják:

$$E(SS) = (n-1)\overline{\sigma}^2(w) + \sum_{j=1}^{m} n_j\big(\tau_j - \overline{\tau}(w)\big)^2 = (n-1)\overline{\sigma}^2(w) + n\sigma_\tau^2(w) \tag{23}$$

$$E(SS_B) = E(\sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)s_j^2) = \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)\sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{m} n_j(\sigma_j^2 - \sigma_j^2/n_j) \tag{24}$$

$$E(SS_K) = \sum_{j=1}^{m}(1 - w_j)\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j\big(\tau_j - \overline{\tau}(w)\big)^2 = \sum_{j=1}^{m}(1 - w_j)\sigma_j^2 + n\sigma_\tau^2(w) . \tag{25}$$

Látható, hogy a fenti várható értékek az alábbi tényezők függvényei:

1. mintanagyság,
2. mintaelosztás,
3. rétegvarianciák,
4. átlagos rétegvariancia,
5. réteghatások varianciája.

Vegyük észre, hogy mind az átlagos rétegvariancia, mind a réteghatások varianciája súlyozottan értendő, ahol súlyrendszerként a (w) mintaelosztás szerepel. Nevezetes esetekben e várható értékek egyszerűbb alakot öltenek. E nevezetes esetek a következők:

[5] A várható értékek alábbi formuláinak a levezetését az Olvasó az I. Függelék (F.1)-(F.8) azonosságai alapján ellenőrizheti.

Homoszkedaszticitás: valamennyi rétegvariancia egyenlő egymással, s így rétegarányoktól függetlenül a közös variancia egyben a belső varianciát is jelenti:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma_e^2 = \sigma_B^2 \ .$$

Korrelálatlanság:[6] valamennyi rétegátlag egyenlő egymással, s így a sokaság átlagával, amiből következően valamennyi réteghatás, s ezért a külső variancia is zérus:

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = 0 = \sigma_K^2 \ .$$

Arányosság: a teljes n mintaelemszám rétegek közötti szétosztása a tényleges rétegarányoknak megfelelően történik:

$$w_j = P_j, \qquad \text{vagyis} \qquad \overline{\tau}(w) = 0 \ .$$

Ha a fenti három tulajdonság külön-külön, vagy valamilyen kombinációban egyidejűleg teljesül, akkor a (23), (24) és (25) eltérésnégyzetek várható értékei a következők szerint alakulnak:

Arányosság esetén:

$$E(SS) = (n-1)\sigma_B^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j\tau_j^2 = (n-1)\sigma_B^2 + n\overline{\tau}_q^2(P) = (n-1)\sigma_B^2 + n\sigma_K^2 \quad (26)$$

$$E(SS_B) = \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)\sigma_j^2 = n\overline{\sigma}^2(P) - \sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2 = n\sigma_B^2 - \sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2 \quad (27)$$

$$E(SS_K) = \sum_{j=1}^{m}(1 - P_j)\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j\tau_j^2 = \sum_{j=1}^{m}(1 - P_j)\sigma_j^2 + n\overline{\tau}_q^2(P) = \sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2 - \sigma_B^2 + n\sigma_K^2 \ . \quad (28)$$

Korrelálatlanság esetén:

$$E(SS) = (n-1)\overline{\sigma}^2(w) \quad (29)$$

$$E(SS_B) = n\overline{\sigma}^2(w) - \sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2 \quad (30)$$

---

[6] A tanulmányban korrelálatlanság alatt azt értjük, hogy a rétegátlagok egyenlők egymással, vagyis a csoportképző (rétegképző) változó nincs sztochasztikus kapcsolatban a vizsgált Y mennyiségi változóval. Megjegyzendő, hogy nominális skálán mért rétegképző ismérv esetén a sztochasztikus kapcsolatnak ezt a típusát a magyar statisztikai terminológia nem korrelációnak, hanem vegyes kapcsolatnak nevezi.

$$E(SS_K) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 - \overline{\sigma}^2(w) \,. \tag{31}$$

Homoszkedaszticitás esetén:

$$E(SS) = (n-1)\sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2(w) \tag{32}$$

$$E(SS_B) = (n-m)\sigma_e^2 \tag{33}$$

$$E(SS_K) = (m-1)\sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2(w) \,. \tag{34}$$

Arányosság és homoszkedaszticitás esetén:

$$E(SS) = (n-1)\sigma_e^2 + n\overline{\tau}_q^2(P) = (n-1)\sigma_e^2 + n\sigma_K^2 \tag{35}$$

$$E(SS_B) = (n-m)\sigma_e^2 \tag{36}$$

$$E(SS_K) = (m-1)\sigma_e^2 + n\overline{\tau}_q^2(P) = (m-1)\sigma_e^2 + n\sigma_K^2 \,. \tag{37}$$

Arányosság és korrelálatlanság esetén:

$$E(SS) = (n-1)\sigma_B^2 \tag{38}$$

$$E(SS_B) = n\sigma_B^2 - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \tag{39}$$

$$E(SS_K) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 - \sigma_B^2 \,. \tag{40}$$

Korrelálatlanság és homoszkedaszticitás esetén:

$$E(SS) = (n-1)\sigma_e^2, \quad E(SS_B) = (n-m)\sigma_e^2, \quad E(SS_K) = (m-1)\sigma_e^2 \,. \tag{41}$$

A fenti várható értékeket azért kell ismernünk, mert segítségükkel tudjuk megválaszolni azt a kérdést, hogy a sokaság milyen jellegzetességei mellett mely statisztika becsüli torzítatlanul a sokaság külső, belső, illetve teljes varianciáját. A továbbiakban sorra vesszük mindazon statisztikák torzítatlansági[7] tulajdonságait, amelyek számítását a mintabeli eltérés-négyzetösszeg dekompozíciója teszi lehetővé, majd megmutatjuk, hogy ezek a tulajdonságok mit jelentenek néhány fontos gyakorlati alkalmazás szemszögéből.

[7]Egy becslőfüggvény torzitatlan, ha mintavételi várható értéke megegyezik a becsülni kívánt sokasági jellemzővel.

Torzítatlansági következmények

A teljes eltérésnégyzetösszeg tulajdonságai

A rétegenkénti független mintavétel alkalmazását feltéve, általában SS semmilyen transzformációja nem alkalmas a sokaság valamely varianciájának torzítatlan becslésére. Még az $SS/(n-1)$ statisztika[8] sem, mivel (23) alapján

$$E\Big(\frac{SS}{n-1}\Big) = \overline{\sigma}^2(w) + \frac{n}{n-1}\sigma_\tau^2(w) \neq \sigma^2 \,. \tag{42}$$

Speciálisan azonban, arányos rétegzés és korrelálatlanság egyidejű teljesülése esetén az $SS/(n-1)$ statisztika (38) szerint alkalmas a belső, s egyben a teljes variancia torzítatlan becslésére:

$$E\Big(\frac{SS}{n-1}\Big) = \sigma_B^2 = \sigma^2 \,. \tag{43}$$

Ebből is látható, hogy korrelálatlanság esetén értelmetlen a rétegek megkülönböztetése.

A belső eltérésnégyzetösszeg tulajdonságai

1. A teljes mintaelemszámmal való osztás útján nyert SS_B/n statisztika általában nem alkalmas a σ_B^2 belső variancia torzítatlan becslésére, mivel (24) figyelembevételével:

$$E\Big(\frac{SS_B}{n}\Big) = \sum_{j=1}^m w_j\sigma_j^2 - \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j^2}{n} = \overline{\sigma}^2(w) - \sum_{j=1}^m \frac{w_j\sigma_j^2}{n_j} \neq \sigma_B^2 \,. \tag{44}$$

Arányos rétegzés, vagy homoszkedaszticitás esetén azonban $\overline{\sigma}^2(w) = \sigma_B^2$, tehát a lefelé torzítás mértéke meghatározható:

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j\sigma_j^2}{n_j} \,, \tag{45}$$

amely arányosság esetén[9]

$$\sum_{j=1}^m P_j\sigma_{\overline{y}_j}^2 \,, \tag{46}$$

---

[8] Az $SS/(n-1)$ statisztika az n elemű minta egyszerű véletlen módon való kiválasztása mellett nyújtana torzítatlan becslést σ^2-re.

[9] $\sigma_{\overline{y}_j}^2$ a j-edik réteg mintaátlagának mintavételi varianciáját jelöli.

homoszkedaszticitás esetén pedig

$$\frac{m}{n}\sigma_e^2 \tag{47}$$

lesz.

2. Általánosságban az $SS_B/(n-m)$ statisztika sem becsli torzítatlanul a belső varianciát, hiszen (24) alapján:

$$E\Big(\frac{SS_B}{n-m}\Big) = E\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{(n_j-1)s_j^2}{n-m}\Big) = \sum_{j=1}^{m}\frac{(n_j-1)\sigma_j^2}{n-m} \neq \sigma_B^2\,. \tag{48}$$

Homoszkedaszticitás teljesülésekor azonban torzítatlan statisztika, mivel (33)-at tekintve:

$$E\Big(\frac{SS_B}{n-m}\Big) = \sigma_e^2 = \sigma_B^2\,. \tag{49}$$

A külső eltérésnégyzetösszeg vizsgálata

A homoszkedaszticitás és a korrelálatlanság együttes teljesülésekor az $SS_K/(m-1)$ statisztika a közös variancia, s így egyben a belső és a teljes variancia torzítatlan becslésére alkalmas, (41) alapján ugyanis:

$$E\Big(\frac{SS_K}{m-1}\Big) = \sigma_e^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2\,. \tag{50}$$

Ha azonban csupán a homoszkedaszticitás érvényesülését feltételezzük, akkor (34) szerint:

$$E\Big(\frac{SS_K}{m-1}\Big) = \sigma_e^2 + \frac{n}{m-1}\sigma_\tau^2(w)\,. \tag{51}$$

Az (50) és (51) várható értékek viszonylatában a

$$\sigma_e^2 \leq \sigma_e^2 + \frac{n}{m-1}\sigma_\tau^2(w) \tag{52}$$

reláció mindig teljesül, viszont w megválasztásának a függvényében $\sigma_\tau^2(w)$ is változik.

Alkalmazások

A belső variancia becslése

Mivel (49) alapján az $SS_B/(n-m)$ statisztika várható értéke csak homoszkedaszticitás esetén egyezik meg a belső varianciával, ezért valahányszor a *belső variancia torzítatlan becslése* a célunk és a homoszkedaszticitás teljesülését semmi nem támasztja alá, akkor a belső variancia becslésére másik becslőfüggvényt kell keresnünk. Tekintsük az

$$\bar{s}^2(w) = \sum_{j=1}^{m} w_j s_j^2$$

statisztikát, amelynek várható értéke minden esetben

$$E\big(\bar{s}^2(w)\big) = \bar{\sigma}^2(w) .$$

Mivel $\bar{\sigma}^2(w) = \sigma_B^2$ mind arányos rétegzés, mind homoszkedaszticitás esetén teljesül, ezért $\bar{s}^2(w)$ mindkét esetben a belső variancia torzítatlan becslését nyújtja. A belső variancia nem homoszkedasztikus körülmények közötti torzítatlan becslésének igénye tipikusan a *klasszikus rétegzett mintavételen alapuló becslések* készítésekor merül fel.

Ezzel szemben az

$$s_p^2 = \frac{SS_B}{n-m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j-1)s_j^2}{n-m}$$

formulával definiált ún. „pooled" mintabeli variancia

$$E(s_p^2) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_j-1)\sigma_j^2}{n-m}$$

várható értéke *általában* nem egyezik meg a belső varianciával, ezért s_p^2 kizárólag homoszkedaszticitás esetén lesz a közös σ_e^2, s így a belső variancia torzítatlan becslőfüggvénye. Ezek a feltételek pedig tipikusan a varianciaanalízisnek, és kétmintás esetének, a kétmintás "pooled" t-tesztnek az alkalmazási feltételei.

Ugyanakkor belátható,[10] hogy a mintabeli korrigált s_j^2 varianciákat más és más v_j súlyrendszerekkel átlagolva, $\bar{s}^2(v)$ minimumát az s_p^2 pooled variancia szolgáltatja.

Becslés független részmintákból

Független részmintákból való becslés esetén az n elemű teljes mintát véletlenszerűen és függetlenül m számú egyenlő részre, mondhatni rétegre bontjuk úgy, hogy

$$n_j = n_e \qquad \text{és} \qquad n = mn_e$$

[10] Speciális esetre lásd a II. Függelék azonosságait.

teljesüljön. A rétegenkénti egyenlő mintaelemszám alkalmazását a

$$P_j = \frac{1}{m}$$

feltevés elfogadásának megfelelő arányos rétegzés indokolja, míg a rétegek független és véletlen kialakítása – a rétegképzés és a vizsgált jelenség korrelálatlan voltának biztosításával – a külső variancia zérus értékének a feltételezését teszi reálissá.

Feltételezve tehát a homoszkedasztikus korrelálatlanság és az arányosság együttes teljesülését, a sokaság μ várható értékének torzítatlan becslőfüggvénye független részminták esetén

$$\overline{y}_{FRM} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{y}_j}{m},$$

amelynek elméleti varianciája

$$\mathrm{Var}(\overline{y}_{FRM}) = \frac{\sigma_e^2}{n}.$$

Ebből következően viszont látható, hogy független részminták alkalmazása mellett az átlagbecslés varianciájának becslésére használt

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}(\overline{y}_j - \overline{y}_{FRM})^2}{m(m-1)}$$

statisztika torzítatlanul becsli az elméleti varianciát, mivel homoszkedasztikus korrelálatlanság esetén (41) szerint

$$E\left(\frac{SS_K}{n(m-1)}\right) = \frac{\sigma_e^2}{n} = E\left(\frac{n_e \sum_{j=1}^{m}(\overline{y}_j - \overline{y}_{FRM})^2}{n_e m(m-1)}\right) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}(\overline{y}_j - \overline{y}_{FRM})^2}{m(m-1)}\right).$$

A varianciaanalízis teszt[11] ereje

A varianciaanalízis teszt statisztikájának egyik működési alapelve azon közismert tétel, miszerint a szabadságfokkal osztott (korrigált) külső eltérésnégyzetösszeg várható értéke homoszkedaszticitás esetén nem kisebb, mint a korrigált belső eltérésnégyzetösszeg várható értéke, az egyenlőség pedig csak a

[11] A varianciaanalízis nullhipotézise szerint $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots \tau_m$, amely tesztelésének – normális eloszlású csoportok esetében – a homoszkedaszticitás teljesülése alkalmazási előfeltétele.

homoszkedasztikus korrelálatlanság esetén áll fenn, mikor a kérdéses várható értékek éppen a közös σ_e^2 varianciával egyenlők:

$$E\Big(\frac{SS_K}{m-1} \mid \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_m^2, \tau_1 = \ldots = \tau_m\Big) = \sigma_e^2 = E\Big(\frac{SS_B}{n-m}\Big) \leq$$
$$E\Big(\frac{SS_K}{m-1} \mid \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_m^2\Big) = \sigma_e^2 + \frac{n}{m-1}\sigma_\tau^2(w)\,.$$

Minél nagyobb tehát a réteghatások szóródása, s így annak $\sigma_\tau^2(w)$ mértéke, annál magasabb a korrigált külső eltérésnégyzetösszeg várható értéke a varianciaanalízis alternatív hipotézisének helyessége esetén, vagyis annál nagyobb e próba szelektivitása, azaz a próba ereje. Mivel azonban a w mintaelosztás megfelelő megválasztásával $\sigma_\tau^2(w)$ befolyásolható, így a varianciaanalízis ereje növelhető, de csökkenthető is. Ugyanakkor viszont a τ_j réteghatások a gyakorlati számítások esetén eredendően ismeretlenek, tehát nem tudjuk megmondani egzaktan azt a w súlyrendszert, amely $\sigma_\tau^2(w)$-t a sokasági réteghatások mellett maximálja. E maximálás során tehát w nevezetes eseteit tudjuk csak kezelni. A réteghatások varianciájának

$$\sigma_\tau^2(w) = \overline{\tau}_q^2(w) - \overline{\tau}^2(w)$$

formuláját tekintve, ilyen feltevés lehet a mintaelosztás tekintetében az *arányosság* esete. Ekkor ugyanis a réteghatások $\overline{\tau}(P)$ átlagának zérus az értéke, s ezért a varianciaanalízis teszt erejének viszonylagos nagysága ez esetben a

$$\sigma_\tau^2(w) \leq \overline{\tau}_q^2(P)$$

reláció teljesülésének, vagy nem teljesülésének a kérdése, amely a

$$\overline{\tau}_q^2(w) - \overline{\tau}_q^2(P) \leq \overline{\tau}^2(w) \tag{54}$$

formában is írható. Amennyiben tehát (54) fennáll, úgy a varianciaanalízis ereje *arányosság* esetén nagyobb, mint nem arányos mintaelosztás mellett.[12] A varianciaanalízis erejét a "pooled" variancia minimum tulajdonságának a szempontjából vizsgálva továbbá az is látható, hogy mivel s_p^2 a varianciaanalízis F próbafüggvényének a nevezőjében szerepel,[13] ezért a *pooled* variancia használata is az ANOVA erejének a növelését szolgálja.

[12] Az (54) alatti reláció pl. abban az esetben biztosan teljesül, ha a réteghatásoknak a mintaelosztással súlyozott négyzetes átlaga kisebb, mint a rétegarányokkal súlyozott, hiszen ez esetben (54) baloldala negatív, jobboldala viszont mindig pozitív.

[13] $F = \big(SS_K/(m-1)\big)/\big(SS_B/(n-m)\big)$.

A mintaelemszám elosztásának kérdése

Számos statisztikaelméleti irodalom (pl. [1, 5]) a varianciaanalízis modellfeltevéseinek a tárgyalásakor a

$$\overline{\tau}(w) = \sum_{j=1}^{m} w_j \mu_j - \mu = 0$$

feltétel rögzítéséből indul ki. Mivel azonban modellünk szerint a réteghatások előre rögzítettek, és $\overline{\mu}(P) = \mu$, ezért $\overline{\tau}(w) = 0$ előre történő rögzítése csak az alábbi esetekben indokolt:

- egyrészt, ha valamennyi réteghatás zérus;
- másrészt, különböző réteghatások melletti arányosan rétegzett mintavétel mellett;
- harmadrészt, ha egy végtelen sokaság rétegarányai nem ismertek, de azokat egyenlőnek feltételezve, rétegenként azonos elemszámú mintákat veszünk.

Összefoglalás, következtetések

A tanulmányban a heterogén sokaságokat jellemző általános modellt vizsgáltuk. Általános volt a modell abból a szempontból, hogy feltételeit olyan tágra szabtuk, hogy abba mind a varianciaanalízis, mind a rétegzett mintavétel, mind a részmintás becslések belefértek, ugyanakkor szűk volt a modell abban az értelemben, hogy csak egyetlen ismérv (változó) szerint csoportosítottuk a sokaságot.

Módszerünk az volt, hogy a mintából számított négyzetösszegek várható értékét tekintettük, és bemutattuk azok egyszerűsödési lehetőségét háromféle feltétel mellett.

Főbb következtetéseink az alábbiak voltak:

a) kimutattuk, hogy arányosan rétegzett mintavétel esetén a mintasúlyokkal átlagolt korrigált mintavariancia ad torzítatlan becslést a belső varianciára;

b) megmutattuk, hogy megfelelő feltételek mellett a pooled variancia torzítatlan, és minimális varianciájú becslést ad a közös (belső) varianciára;

c) beláttuk, hogy a szokásos feltételek mellett a független részminták módszere az átlagbecslés varianciájára torzítatlan becslőfüggvényt ad;

d) megvilágítottuk, hogy a varianciaanalízisnél szokásos $\overline{\tau}(w) = 0$ feltevés valójában az egyenlő sokasági rétegarányok melletti arányos mintavétel hallgatólagos feltételezésével azonos, végül

e) kimutattuk, hogy a mintaelosztás változtatásával a varianciaanalízis F-tesztjének szelektivitása (és ereje) növelhető, és általános esetben ez azt jelenti, hogy az egyenletes mintaelosztásból való következtetés javítja a teszt erejét.

Függelék

I. A mintabeli eltérésnégyzetösszegek mintavételi várható értékének a meghatározásához szükséges azonosságok

Irjuk fel a mintabeli teljes, belső és külső eltérésnégyzetösszegeket az alábbi formákban, kihasználva a tényt, hogy az eltérésnégyzetösszeg a mintaelemek konstanssal való eltolására invariáns.

A teljes eltérésnégyzetösszeg, valamennyi mintaelemnek ugyanazon μ konstanssal való eltolása (csökkentése) nyomán:

$$SS = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \overline{y})^2 =$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \mu)^2 - n(\overline{y} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left((y_{ij} - \mu_j) + (\mu_j - \mu)\right)^2 - n(\overline{y} - \mu)^2 =$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \mu_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j(\mu_j - \mu)^2 + 2\sum_{j=1}^{m}(\mu_j - \mu)\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \mu_j) - n(\overline{y} - \mu)^2 \tag{F.1}$$

A belső eltérésnégyzetösszeg, a mintaelemeknek csoporton belüli, rendre μ_j $(j = 1, \ldots, m)$ konstanssal való csökkentése után:

$$SS_B = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \overline{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \mu_j)^2 - n_j(\overline{y}_j - \mu_j)^2\Big) =$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \mu_j)^2 - \sum_{j=1}^{m} n_j(\overline{y}_j - \mu_j)^2. \tag{F.2}$$

Végül a külső eltérésnégyzetösszeg egyszerű kivonással:

$$SS_K = \sum_{j=1}^{m} n_j(\overline{y}_j - \mu_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j(\mu_j - \mu)^2 + \\ 2\sum_{j=1}^{m}(\mu_j - \mu)\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \mu_j) - n(\overline{y} - \mu)^2 \tag{F.3}$$

Tekintsük továbbá a következő nevezetes várható értékeket:

$$E_j(y_{ij} - \mu_j) = 0 , \tag{F.4}$$

$$E\big((\overline{y}_j - \mu_j)^2\big) = \mathrm{Var}(\overline{y}_j) = \frac{\sigma_j^2}{n_j} , \tag{F.5}$$

$$E(\overline{y}) = E(\sum_{j=1}^{m} w_j \overline{y}_j) = \sum_{j=1}^{m} w_j \mu_j . \tag{F.6}$$

Az (F.4), (F.5) és (F.6) azonosságok felhasználásával

$$E\Big[\big(\overline{y} - E(\overline{y})\big)^2\Big] = \\ \mathrm{Var}(\overline{y}) = \sum_{j=1}^{m} w_j^2 \mathrm{Var}(\overline{y}_j) = \sum_{j=1}^{m} \frac{w_j^2\sigma_j^2}{n_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} w_j \sigma_j^2 = \frac{\overline{\sigma}^2(w)}{n} , \tag{F.7}$$

majd (F.7) figyelembevételével

$$E\big((\overline{y} - \mu)^2\big) = E\big((\overline{y} - E(\overline{y}) + E(\overline{y}) - \mu)^2\big) = \mathrm{Var}(\overline{y}) + (E(\overline{y}) - \mu)^2 = \\ \frac{\overline{\sigma}^2(w)}{n} + \Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j\mu_j}{n} - \mu\Big)^2 = \frac{\overline{\sigma}^2(w)}{n} + \frac{\big(\sum_{j=1}^{m} n_j\tau_j\big)^2}{n^2} = \frac{\overline{\sigma}^2(w)}{n} + \overline{\tau}^2(w) \tag{F.8}$$

A fenti várható értékeknek az (F.1), (F.2), (F.3) formulákba helyettesítésével nyerjük a (23), (24) és (25) alatti általános várható érték képleteket.

II. A mintabeli „pooled" variancia minimum tulajdonsága

Általában belátható, hogy ha $\hat{\theta}_1$ és $\hat{\theta}_2$ torzítatlan és független becslőfüggvények θ-ra, akkor

a) $\alpha\hat{\theta}_1 + (1-\alpha)\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_3$ is torzítatlan, és

b) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)$ akkor lesz minimális, ha

$$\alpha = \frac{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)}{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) + \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)} , \tag{F.9}$$

ami belátható, ha felírjuk a

$$\mathrm{Var}\,(\hat\theta_3) = \alpha^2 \mathrm{Var}\,(\hat\theta_1) + (1-\alpha)^2 \mathrm{Var}\,(\hat\theta_2)$$

egyenletet, és megkeressük a minimumát α függvényében.

Speciálisan két, normális eloszlású réteg, és rétegenkénti független mintavétel esetén legyen $\theta = \sigma_e^2$, $\hat\theta_1 = s_1^2$, $\hat\theta_2 = s_2^2$. Ekkor mindkét becslőfüggvény torzítatlan, varianciájuk pedig

$$\mathrm{Var}\,(s_1^2) = \frac{2\sigma_e^4}{n_1 - 1}$$

és

$$\mathrm{Var}\,(s_2^2) = \frac{2\sigma_e^4}{n_2 - 1}\,.$$

Az (F.9) eredmény figyelembevételével esetünkben

$$\alpha = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\,,$$

amely felhasználásával az

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

"pooled" variancia valóban torzítatlan és minimális varianciájú. Ez az eredmény kettőnél több rétegre is azonnal általánosítható.

Irodalom

1. Canavos, C. G.: Applied Probability and Statistical Methods. Little Brown and Co., Boston, 1984.
2. Dunn, O. J.–Clark, V. A.: Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression. (2nd Edition). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987. item Greene, W. H.: Econometric Analysis (2nd Edition). McMillan P. Co., New York, 1993.
3. Hunyadi L.: A varianciafelbontásról. Statisztikai Szemle, (70), 1992. 1037–1047. old.
4. Hunyadi L.–Vita L.: Statisztika 1. AULA Kiadó, Budapest, 1991.
5. Hunyadi L.–Mundruczó Gy.–Vita L.: Statisztika II. Aula Kiadó, Budapest, 1992.
6. Meszéna Gy.–Ziermann M.: Valószínűségelmélet és matematikai statisztika. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1981.

VARIANCE DECOMPOSITION: ASSUMPTIONS AND CONCLUSIONS

In the paper a general model of the variance decomposition of heterogeneous populations is investigated. The aim of the study is to show how the commonly used, classical statistical procedures can be derived from the general model by introducing different assumptions and restrictions. The detailed analysis of the expectations of the sums of squares under different restrictions revealed the common root of the given methods (ANOVA, two sample t test, estimation from stratified samples, estimation by means of the independent subsamples), helped us to understand them better. Besides, the paper promotes the correct and efficient applications of the above mentioned methods.

A TŐKEPIACI ÁRFOLYAMOK MODELLJÉNEK ALKALMAZHATÓSÁGA MAGYAR ÉRTÉKPAPÍRPIACON[1]

RAPPAI GÁBOR
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

A hatvanas években kidolgozott tőkepiaci árfolyamok elmélete alapján képzett modell (CAPM) az értékpapírok kockázatosságának mérését szolgálja. A felhasználók a végeredményt jelentő β-együtthatót általában a közönséges legkisebb négyzetek módszerével határozzák meg, és gyakran kapnak az elmélettel nem konzisztens eredményeket. Ebben a tanulmányban az elmélet bemutatása után meghatározzuk a β-együtthatót 3-3 magyar, illetve amerikai részvényárfolyamra. A paraméterbecslés verifikációja a magyar eredmények elvetéséhez vezet, melynek okaként részint a tőkepiac „tökéletlenségét", részint a hozamidősorok varianciájának nemstacionaritását jelölhetjük meg. A variancia-stabilizáló Box-Cox transzformáció után lehetővé válik elméletileg helyes paraméter, valamint egyensúlyi piaci hozamsáv meghatározása.

Bevezetés

A tőkepiaci árfolyamok elmélete alapján képzett modell (CAPM) a hatvanas évek első felében jelent meg a szakirodalomban.[2] Az elmélet alapvető célja a különféle értékpapírok egymáshoz, illetve egy piaci átlaghoz viszonyított kockázatosságának meghatározása. A modell alkalmazható valamennyi befektetési típusra, tehát a részvényekre és a kötvényekre is. Az általános megfogalmazás mellett ugyanakkor kidolgoztak egy speciálisan a kötvények esetében használható verziót is, ennek bemutatásától ebben a tanulmányban eltekintünk.

A gyakorlatban használt modellek esetében a felhasználók következtetéseiket lineáris regressziószámítás eredményei alapján vonják le. Az elmélet kidolgozói nem vizsgálták, hogy *módszertani szempontból* indokolt-e a klasszikus legkisebb négyzetek módszerével nyert paraméterek értelmezése, illetve

[1]A tanulmány a Gazdaságmodellezési Társaság III. Szakértői Konferenciáján (Dobogókő, 1994. október 4-6.) elhangzott előadás szerkesztett változata. Beérkezett 1994. december 8.

[2]Lásd Sharpe [1963] és Lintner [1965]

hogy teljesülnek-e a paraméterbecslés szükséges feltételei. A magyarországi értékpapírpiacra vonatkozó elemzések jó része a CAPM alapján „megmagyarázhatatlan" eredményeket kap, az értékpapírelemzők gyakran jelentik ki, hogy a hazai tőkepiac fejletlenségéből következően az elmélet nálunk nem alkalmazható. Ebben a tanulmányban az elmélettel nem konzisztens eredmények keletkezésének módszertani okairól, illetve a modell egy alternatív felhasználási lehetőségéről lesz szó.

Az általános modell

A CAPM az értékpapír-árfolyamoknak egy egyensúlyi modellje, vagyis a kereslet és kínálat azonos szintje mellett értelmezhető.[3] A tőkepiac felépítését a következő táblázat szemlélteti:

	Befektető						
Érték-papír	1.	2.	...	h	...	H	$\sum_{h=1}^{H}$
1.	ω_{11}	ω_{12}	...	ω_{1h}	...	ω_{1H}	θ_1
2.	ω_{21}	ω_{22}	...	ω_{2h}	...	ω_{2H}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
i	ω_{i1}	ω_{i2}	...	ω_{ih}	...	ω_{iH}	θ_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
N	ω_{N1}	ω_{N2}	...	ω_{Nh}	...	ω_{NH}	θ_N
$N+1$	$\pm\omega_{N+1,1}$	$\pm\omega_{N+1,2}$	...	$\pm\omega_{N+1,h}$	...	$\pm\omega_{N+1,H}$	0
$\sum_{i=1}^{N+1}$	φ_1	φ_2	...	φ_h	...	φ_H	1

A fentiek értelmében a piacon H befektető van jelen, akik N kockázatos befektetés és 1 kockázatmentes hozadéki rátát biztosító, hitelviszonyt megtestesítő értékpapír közül választhatnak. Ezen utóbbi befektetés pozitív, illetve negatív egyenleggel szerepelhet a befektetők portfoliójában, annak függvényében, hogy papír-kibocsátók, vagy -vásárlók. A piaci viszonyokat jellemző tipikus elem ω_{ih} megmutatja, hogy a h-adik befektető az i-edik értékpapírból megszerzett állományával mekkora részesedéssel bír a teljes piac befektetéseiből. Értelemszerűen $\pm\omega_{N+1,h}$ mutatja a h-adik befektető kockázatmentes befektetésének részesedését a piac egészéhez viszonyítva. Az i-edik sorösszeg (θ_i) az i-edik papír részesedése a befektetések közül. Az oszlopösszegek megmutatják az egyes befektetők összes befektetésének

[3]Mivel a szabályozott tőkepiacok (tipikusan pl. a tőzsde) meglehetősen atomizáltak, ezért az egyensúly feltételezése nem indokolatlan.

arányát a befektetések összegén belül. Értelemszerűen a kockázatmentes hitelnyújtások összege ($\sum_{h=1}^{H} \omega_{N+1,h}$) egyenlő 0-val.[4]

Tekintsük ezek után a h-adik befektető haszonfüggvényét:[5]

$$u_h = u(\overline{r}_{ph}, \sigma^2_{ph}) \tag{1}$$

ahol

- a h-adik befektető portfoliójának várt hozama

$$\overline{r}_{ph} = \frac{1}{\phi_h} \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_{ih} \overline{r}_i + \omega_{N+1,h} r_f \right)$$

- az i-edik értékpapír várt hozama $\overline{r}_i$
- a kockázatmentes hozam r_f
- a h-adik befektető portfolióhozam-varianciája

$$\sigma^2_{ph} = \frac{1}{\phi^2_h} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_{ih} \omega_{jh} \sigma_{ij} \right)$$

- az i-edik és j-edik befektetés hozamai közötti kovariancia σ_{ij}.

A racionálisan gondolkodó h-adik befektető célja a haszonfüggvény maximálása. A maximum elsőrendű feltételei (λ_h a h-adik befektető haszonfüggvényére vonatkozó Langrange-multiplikátor, az első feltétel a kockázatos portfolióra ($i = 1, 2, \ldots, N$), a második feltétel a kockázatmentes papírra vonatkozik):

$$\frac{\partial u_h}{\partial \overline{r}_{ph}} \frac{\partial \overline{r}_{ph}}{\partial \omega_{ih}} + \frac{\partial u_h}{\partial \sigma^2_{ph}} \frac{\partial \sigma^2_{ph}}{\partial \omega_{ih}} + \lambda_h \frac{1}{\phi_h} =$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial \overline{r}_{ph}} \frac{1}{\phi_h} \overline{r}_i + \frac{\partial u_h}{\partial \sigma^2_{ph}} \left(2 \frac{1}{\phi^2_h} \sum_{j=1}^{N} \omega_{jh} \sigma_{ij} \right) + \lambda_h \frac{1}{\phi_h} = 0$$

és

$$\frac{\partial u_h}{\partial \overline{r}_{ph}} \frac{\partial \overline{r}_{ph}}{\partial \omega_{N+1,h}} + \frac{\partial u_h}{\partial \sigma^2_{ph}} \frac{\partial \sigma^2_{ph}}{\partial \omega_{N+1,h}} - \lambda_h \frac{1}{\phi_h} = \frac{\partial u_h}{\partial \overline{r}_{ph}} \frac{-1}{\phi_h} r_f - \lambda_h \frac{1}{\phi_h} = 0$$

---

[4] Egy zárt piacon ugyanis a hitelfelvevők csak annyi hitelt tudnak felvenni, mint amennyit a hitelnyújtók kínálnak.

[5] Feltételezzük, hogy a haszonfüggvény additív, a befektető elsődleges célja a hozam maximalizálása valamilyen kockázati szint mellett.

Összeadva a két feltételt eliminálhatjuk a Langrange-multiplikátort:

$$\frac{\partial u_h}{\partial \bar{r}_{ph}}(\bar{r}_i - r_f) + \frac{\partial u_h}{\partial \sigma^2_{ph}}\left(2\frac{1}{\phi_h^2}\sum_{j=1}^{N}\omega_{jh}\sigma_{ij}\right) = 0 \,.$$

A fenti egyenlet az egyensúlyt megtestesítő feltétel, ebből adódóan érvényesnek kell lennie valamennyi befektetőre és valamennyi befektetésre. Ha ez fennáll, akkor felírhatjuk az összefüggést bármely két befektetés közötti kapcsolatra is. Vegyük az i-edik és a k-adik értékpapírt:

$$\frac{\frac{\partial u_h}{\partial \bar{r}_{ph}}(\bar{r}_i - r_f)}{\frac{\partial u_h}{\partial \bar{r}_{ph}}(\bar{r}_k - r_f)} = \frac{-\frac{\partial u_h}{\partial \sigma^2_{ph}}\left(2\frac{1}{\phi^2}\sum_{j=1}^{N}\omega_{jh}\sigma_{ij}\right)}{-\frac{\partial u_h}{\partial \sigma^2_{ph}}\left(2\frac{1}{\phi^2}\sum_{j=1}^{N}\omega_{jh}\sigma_{kj}\right)}$$

ami az alábbi formára egyszerűsíthető:

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sum_{j=1}^{N}\omega_{jh}\sigma_{ij}} = \frac{\bar{r}_k - r_f}{\sum_{j=1}^{N}\omega_{jh}\sigma_{kj}}$$

Ismeretes, hogy

$$\sum_{h=1}^{H}\omega_{jh} = \theta_j \,,$$

mindezt felhasználva, és az előző egyenletbe helyettesítve, megkapjuk a valamennyi befektetésre érvényes közös rátát:

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sum_{j=1}^{N}\theta_j\sigma_{ij}} = \frac{\bar{r}_k - r_f}{\sum_{j=1}^{N}\theta_j\sigma_{kj}} = \gamma \,. \tag{2}$$

Bővítsük a fenti törteket θ_k-val, és összegezzünk valamennyi befektetésre:

$$\frac{\sum_{k=1}^{N}(\bar{r}_k\theta_k - r_f\theta_k)}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_k\theta_j\sigma_{kj}} = \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m^2} = \gamma \,, \tag{2a}$$

ahol

- $\bar{r}_m$ a piac egészére érvényes várt hozam (a „piaci portfolió" várt hozama),
- σ_m^2 a piac egészén érvényes várt hozam varianciája.

A (2) és (2a) egyenletet egymásba helyettesítve kapjuk a CAPM általánosan ismert formáját:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m}\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} , \tag{3}$$

vagy

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_m - r_f)\beta_i , \tag{4}$$

ahol

- $\sigma_{im} = \sum_{j=1}^{N} \theta_j \sigma_{ij}$ a piaci hozam és az i-edik befektetés hozamának kovarianciája
- $\beta_i = \sigma_{im}/\sigma_m^2$ az i-edik befektetés ún. β együtthatója.

(4)-ben felírt összefüggés az alábbi módon interpretálható: az i-edik papír várt hozama megegyezik a kockázatmentes kamatláb és a kockázati prémium összegével.

Ezen utóbbi tényezőnek szintén két összetevője van:

- egyrészt az értékpapírpiacon várt átlaghozam (részvények várt átlaghozama) és kockázatmentes kamatláb különbsége (ez minden részvény esetében állandó);
- másrészt az egyedi értékpapír átlagtól eltérő kockázatosságáért járó „jutalom".

A kockázatmentes hozamot általában a reálkamatláb, az inflációs várakozás és a likviditási prémium függvényében változó értéknek szokták definiálni. A kockázati prémium első tényezője az egyedi értékpapírok tekintetében konstans. Mindebből következik, hogy az i-edik és a j-edik értékpapír várt hozamának különbsége kockázatosságuk különbségéből ered, a kockázatosság proxyjaként használható a β-együttható.

A h-adik befektető portfoliójának együttes β-koefficiensét az egyes értékpapírokhoz tartozó béták súlyozott összegeként határozhatjuk meg:

$$\beta_{hp} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \beta_i . \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy a piac egészére számított β-együttható értéke 1. Rendezzük át a CAPM (4)-ben bemutatott formáját!

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_m - r_f) \tag{6}$$

Az „extra-hozamokra”, vagyis a kockázatmentes hozamot meghaladó várt hozamokra vezessük be a következő jelöléseket!

$$\begin{aligned} y_i &= \overline{r}_i - r_f \, , \\ x_m &= \overline{r}_m - r_f \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Amennyiben rendelkezünk különböző időpontokból származó empirikus megfigyelésekkel a kockázatmentes hozam, az egyedi értékpapír, illetve a piaci portfolió hozamára vonatkozóan, akkor (6) és (7) alapján már képezhető olyan formula, mely alkalmas β regressziós egyenleten keresztüli becslésére:

$$y_{it} = \beta_i x_{mt} \, . \tag{8}$$

β értelmezése a fentiek alapján kézefekvő: a piaci portfolió hozamának 1 százalékpontos változása átlagosan β_i százalékpontos változást eredményez az i-edik értékpapír hozamában, a kockázatmentes hozam állandóságát feltételezve. A paraméter előjele és abszolút értéke egyaránt lényeges információkat hordoz:

- amennyiben β-koefficiens előjele pozitív, akkor a konkrét értékpapír hozama a piaci portfolió hozamával azonos irányba mozog (a befektetés konjunktúrában jó), amennyiben az előjel negatív, akkor az egyedi értékpapír és a piaci portfolió hozama ellentés irányba változik (a papír dekonjunktúrában jó befektetés);

- *agresszív*nek nevezzük a portfoliót, ha a β-együttható abszolút értéke 1 felett van (a papír az átlagnál kockázatosabb), illetve *deffenzív*nek, ha a koefficiens értéke kisebb, mint 1.

Az értékpapírpiaci elemzők véleménye szerint a piacra vonatkozó feltételek teljesülése esetén, a CAPM segítségével meghatározott β-értékek 0.5 és 1.5 között vannak.

Végezetül ejtsünk néhány szót az ún. α-együtthatóról! α a tényleges, illetve a CAPM által definiált várt hozam különbségét méri:

$$\alpha_i = r_i - \overline{r}_i = r_i - r_f - (\overline{r}_m - r_f)\beta_i$$

Ha az értékpapír korrektül értékelt, akkor $\alpha_i = 0$. Ha az értékpapír alulértékelt (túlkeresletes) $\alpha_i > 0$, vagyis a tényleges hozama magasabb, mint a várt (a vártnál magasabb áron adható el). Ha $\alpha_i < 0$, akkor az értékpapír túlértékelt, azaz a várt árfolyamon nem adható el.

A tőkepiaci árfolyamok modelljének tesztje

A CAPM általánosan bevett empirikus tesztje a következő idősoros adatbázison alapuló regressziós becslést használja:

$$r_{it} - r_{ft} = a + b\beta_i + \epsilon_{it} \ .$$

Amennyiben a CAPM feltevései korrektek, úgy a regressziós modell az alábbiak szerint alakul:

1. A regressziós konstans (a) értéke 0.
2. A regressziós együttható (b) értéke ($r_{mt} - r_{ft}$)
3. β_i mellett egyetlen további magyarázó változó sem áll szignifikáns kapcsolatban az eredményváltozóval (az egymásba ágyazott modellek közötti választás esetében meg szokták vizsgálni az átlagos osztaléknagyság, az ágazati hovatartozás, a cégek növekedési adatai, a P/E-nagyság hatását).

Végezetül megemlítendő, hogy az empirikus vizsgálatok általában nem igazolják teljesen a CAPM fennállását. A gyakorlatban a fenti regressziós egyenlet interceptje általában pozitív; a regressziós együttható kisebb a vártnál; valamint léteznek további szignifikáns magyarázó változók.

A CAPM szemléltetése empirikus adatokon

Az alábbiakban a CAPM-ben tárgyalt összefüggéseket szemléltetjük a New York-i Értéktőzsde (New Yorker Stock Exchange, NYSE), valamint a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) részvényeinek napi záróárfolyamai alapján. Elemzésünk adatbázisát 3 amerikai és 3 magyar részvény árfolyama, a piaci portfoliót reprezentáló tőzsdeindexek, valamint az amerikai értékpapírpiac vonatkozásában a kockázatmentes hozamot megtestesítő 90 napos kincstárjegy hozama, a magyar részvénypiacon a DAIWA-MKB Kincstárjegy Hozamindex (DWIX) értékei alkotják.

Az adatbázisban szereplő részvények, illetve tőzsdeindexek:

- NYSE (1991. január 3. – 1991. december 17., 244 megfigyelés)[6]
- – Coca Cola Company (COCA)
- – Eastmen Kodak Company (KODAK)

[6] Az adatbázis a MetaStock 3.1 tőzsdei elemző szoftver adattárából származik.

- McDonald's Corporation (MCDON)
- Dow-Jones Industrial Average (DJIA)

• BÉT (1993. január 6. – 1994. augusztus 31., 411 megfigyelés)[7]

- Fotex Első Amerikai-Magyar Fotószolgáltatási Rt. (FOTEX)
- Idegenforgalmi, Beszerzési, Utazási és Szállítási Rt. (IBUSZ)
- Pick Szeged Rt. (PICK)
- Budapesti (ideiglenes) Értéktőzsdeindex (BETI)

Az elemzés előtt meg kell határoznunk a részvények (értékpapírok) hozamát. Vizsgálatunkban az értékpapírok hozamát az alábbi módon számoltuk:

$$r_{it} = \frac{P_{it} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} \times 365$$

ahol P_{it} az i-edik értékpapír záróárfolyama a t-edik napon.

Látható, hogy a hozamokat valamennyi esetben éves szinten határoztuk meg, élve azzal az értékpapírkereskedelemben bevett konvencióval, hogy éven belül lineáris kamatozást kell feltételezni.

A részvények árfolyamára, illetve hozamára vonatkozó leíró statisztikai mutatókat tartalmazzák a következő táblák:

1. tábla: A részvények záróárfolyamainak alapstatisztikái

Részvény	Záróárfolyam ($ vagy Ft)			
(névérték)	Minimális	Maximális	Átlag	Szórás
COCA (0.5 $)	43.00	74.75	58.26	7.00
KODAK (2.5 $)	37.75	49.50	42.88	2.30
MCDON (1 $)	26.75	37.25	33.09	2.19
FOTEX (100 Ft)	238.00	557.00	382.18	101.21
IBUSZ (1000 Ft)	900.00	4600.00	1598.37	801.07
PICK (1000 Ft)	1200.00	8105.00	3489.55	2293.83

[7] Az adatbázis a FORNAX Monitorból származik.

2. tábla: A részvények hozamainak alapstatisztikái

Részvény	Hozam (%)			
	Minimális	Maximális	Átlag	Szórás
COCA	-19.351	23.384	0.795	5.403
KODAK	-22.234	21.940	0.195	6.389
MCDON	-15.368	23.657	0.406	6.012
FOTEX	-25.550	228.125	0.752	14.476
IBUSZ	-253.472	906.970	4.948	84.842
PICK	-31.523	321.524	3.401	23.868

A fenti alapadatokat vizsgálva szembeötlő, hogy a magyar részvényárfolyamok relatív szórása lényegesen magasabb, ugyanígy – nagyságrenddel – magasabbak a magyar részvényhozamok szóródási mutatói. Meg kell említeni, hogy a Budapesti Értéktőzsdén, annak ellenére, hogy vizsgálatunkba az adásvétel tárgyát leggyakrabban képező részvényeket igyekeztünk választani, az elemzésbe vont részvényekre nem kötöttek minden megfigyelt napon üzletet. Azokon a tőzsdenapokon, amikor a vizsgált részvényekkel tranzakció nem történt, a záróárfolyamot az előző napi záróárfolyammal azonosnak tekintettük, ennek következménye, hogy a magyar részvény-hozam idősorok viszonylag sok helyen tartalmaznak 0 értéket.

A CAPM-ben rejlő összefüggések felhasználói a kockázat-meghatározást célzó egyenletet általában a közönséges legkisebb négyzetek módszerével becsülik. Az LNM-vel nyert eredményeket mutatja a 3. tábla:[8]

3. tábla: A modellbecslések eredményei $\overline{r}_i - r_f = \beta_i(\overline{r}_m - r_f)$

Részvény	β-mutató	t-érték	R^2	DW
COCA	1.218	15.735	0.517	1.813
KODAK	1.075	9.927	0.302	2.151
MCDON	1.083	10.465	0.332	1.923
FOTEX	0.127	0.732	0.001	2.038
IBUSZ	2.276	1.229	0.007	2.242
PICK	0.373	1.861	0.008	1.875

A modellbecslések eredményeit vizsgálva az alábbi megállapításokat tehetjük:

[8] A táblák fejrovatában alkalmazott jelölések a szokásosak: t-érték a paraméter és standard hibájának a hányadosa; R^2 a determinációs együttható; DW a Durbin-Watson-féle d-statisztika értéke.

- az amerikai részvényárfolyamokra vonatkozó β-együtthatók értéke a modell szerint meghatározott sávban található; valamennyi szignifikánsan különbözik 0-tól, ugyanakkor a magyar részvényárfolyamokhoz tartozó β-koefficiensek „megmagyarázhatatlan" értékeket vesznek fel, nem mindig szignifikánsak;
- NYSE részvényeivel becsült modellek szignikánsak, a modellek magyarázó ereje 30–50% között mozog, a magyarországi árfolyammodellek magyarázó ereje gyakorlatilag 0;
- valamennyi modellre vonatkozó Durbin-Watson mutatók kielégítőek.

A fentiekből következően a magyar részvénypiacon az elmélet megalapozatlannak látszik. A következő részben ennek okát kutatom.

A modell feltételrendszerének vizsgálata

A Budapesti Értéktőzsde árfolyamaira, illetve a részvények hozamára vonatkozó becsléseink sem a modellek illeszkedését tekintve, sem a paraméterértékek tekintetében nem bizonyultak megfelelőnek. Ennek oka lehet egyrészt az elmélet feltételeinek nem teljesülése, másrészt a módszertani kiinduló feltevések érvénytelensége. Esetünkben valószínűleg mindkettő fennáll. Elméleti oldalról vizsgálva a kérdést valószínűsíthetően:

- nem tekinthető a BÉT tökéletes tőkepiacnak (valószínűsíthető, hogy a kereslet és kínálat nincs dinamikus egyensúlyban; a jelenlevő befektetők száma sem tekinthető végtelennek);
- a piaci portfoliót reprezentáló (ideiglenes) tőzsdeindex vélelmezhetően nem hatékony proxy, összeállítása nem korrekt;
- az egyedi részvények kereskedésében beálló hosszú szünetek, illetve az ebből adódó hosszú időintervallumokban megjelenő alacsony hozamok torzítják a tényleges összefüggéseket.

Ugyanakkor módszertani szempontból is találhatunk magyarázatot a fenti eredményekre. Vizsgáljuk meg a CAPM által becsült β-együttható (paraméter) stabilitását. A paraméterstabilitás tesztelésére az ismert Chow-próbát alkalmazhatjuk. A próba lényege, hogy becsüljük az alábbi regressziós modelleket:

$$r_{it} = \beta_1 r_{mt} + \epsilon_t \qquad t \in T_1, \quad \text{ahol a hozam negatív}$$

$$r_{it} = \beta_2 r_{mt} + \epsilon_t \qquad t \in T_2, \quad \text{ahol a hozam pozitív}$$

és teszteljük a

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$$

hipotézisrendszert. Legyen az első modellből származó reziduális négyzetösszeg RSS1, a modell szabadságfoka NDF1; a második modell reziduális négyzetösszege RSS2, szabadságfoka NDF2; a mintaidőszak szétválasztása nélkül becsült modell eltérésnégyzetösszege RSS, szabadságfoka NDF. Amennyiben a nullhipotézis igaz (a paraméter értéke állandó), úgy az

$$F = \frac{(RSS - RSS1 - RSS2)/3}{(RSS1 + RSS2)/(NDF1 + NDF2)}$$

valószínűségi változó $(1; NDF1{+}NDF2)$ szabadságfokpárú F-eloszlást követ, azaz alkalmas a nullhipotézis tesztelésére. A vizsgált részvényárfolyamokra vonatkozó Chow-teszt eredményeit tartalamazza a következő tábla:

4. tábla: A Chow-teszt eredményei

Részvény (NYSE)	β	β_1	β_2	F	p-érték
COCA	1.218	0.995	1.379	2.485	0.064
KODAK	1.075	0.931	1.203	1.488	0.431
MCDON	1.083	0.994	1.152	1.145	0.677
FOTEX	0.127	0.191	0.093	13.020	0.000
IBUSZ	2.276	2.365	2.234	3.732	0.015
PICK	0.373	-0.178	0.731	1.082	0.432

A paraméterstabilitási teszt eredményei alapján látható, hogy az amerikai részvények esetében mindig el kell fogadni a nullhipotézist, ugyanakkor a BÉT-en jegyzett részvények esetében a paraméter stabilitására vonatkozó nullhipotézis csak a PICK részvény esetén elfogadható. (Ebben az esetben viszont elgondolkodtató, hogy a paraméter a különböző mintaidőszakokban előjelet vált, ennek magyarázata lehet, hogy az egyik minta – árfolyamcsökkenés – viszonylag kis elemszámú.)

Mi okozhatja a paraméter instabilitását? A kérdésre a választ a hozamidősorok természetének vizsgálata adja. Lehetséges ugyanis, hogy a piaci portfolió hozama és az egyedi részvény hozama csak látszatkapcsolatban van egymással (a két idősor nem kointegrált). Ennek ellentmondani látszik, hogy valamennyi modell kielégítő Durbin-Watson értékkel rendelkezik.

Vizsgáljuk meg a hozam-idősorok integráltságát! A hozamok várható érték stacionaritását a Dickey-Fuller féle τ-próbával vizsgáltuk.[9] Az eredmények (kritikus érték 1%-os szignifikancia-szinten -2.58):

5. tábla: Dickey-Fuller τ-próba eredményei

Részvény (NYSE)	τ	Részvény (BÉT)	τ
COCA	-16.858	FOTEX	-21.163
KODAK	-16.549	IBUSZ	-20.214
MCDON	-14.856	PICK	-19.437

Láthatjuk, hogy a hozamidősorok mindegyike (az amerikai és a magyar részvénypiacon egyaránt) várható értékében stacionárius. Ebből adódóan a kointegráció hiányára vonatkozó feltevés tesztelése értelmetlen.

Meglepő eredménnyel jár ugyanakkor a hozamok variancia-stacionaritásának tesztelése. Az erre vonatkozó Goldfeld-Quandt-próba eredményeit tartalmazza a 6. tábla (az F-eloszlás szabadságfokpárja az amerikai árfolyamok esetében 110;110, a magyar részvényeknél 200;200):

6. tábla: A Goldfeld-Quandt próba eredményei

Részvény (NYSE)	F	p-érték	Részvény (BÉT)	F	p-érték
COCA	1.34	0.06	FOTEX	7.06	0.00
KODAK	1.07	0.36	IBUSZ	217.85	0.00
MCDON	1.19	0.18	PICK	3.86	0.00

Látható, hogy az amerikai részvények közül valamennyi hozam varianciastacionernek bizonyult. Ugyanakkor a Budapesti Értéktőzsde részvényei esetében a nullhipotézist el kell vetni. Mindez megmagyarázza korábbi eredményeinket: a variancia instabilitása vezet a paraméter (β-együttható) instabilitásához, azaz a kockázat-meghatározó modell eredményeinek megkérdőjelezéséhez. A részvények hozamánál észlelhető nemstacionárius variancia ismét a piac tökéletességére vonatkozó kiinduló felvetés elvetését jelenti.

A CAPM egy alternatív felhasználási lehetősége

Amennyiben egy idősor varianciájában nem stacioner, úgy sztochasztikus idősor-modellekkel (Box-Jenkins-modellek) úgy vizsgálhatjuk, ha előbb valamilyen variancia-stabilizáló transzformációval kiküszöböljük a nemstacionaritást.

[9] Az egységgyök létére vonatkozó hipotézis tesztelésére szolgáló eljárásokat részletesen lásd pl. HUNYADI [1994] cikkében.

A leggyakrabban alkalmazott stabilizáló transzformáció a Box-Cox-transzformáció. Helyettesítsük a modellezni kívánt idősor értékét a következő transzformált értékkel:

$$r_t' = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(r_t^\lambda - 1), & \text{ha } \lambda \neq 0\,; \\ \ln r_t, & \text{ha } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

λ alkalmas megválasztása iterációs úton történhet.

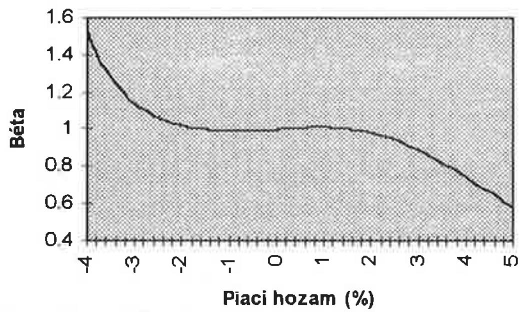
Látható, hogy a változó (részvény-hozam) helyébe a Box-Cox-transzformáltját helyettesítve egy paramétereiben nemlineáris modellhez jutunk, vagyis ha meg kívánjuk tartani a becsült β-együttható eredeti értelmezését, akkor az együttható értéke a piaci hozam függvényében változik.

Ennek alapján kézenfekvően adódik a modell egy alternatív felhasználási lehetősége: kiindulva abból, hogy amennyiben az elmélet érvényes, úgy β abszolút értékének 0.5 és 1.5 között kell lenni, meghatározható a piaci portfolió hozamának egy olyan sávja, amelyikben a CAPM érvényes, vagyis amelyben feltételezhető az értékpapírpiac egyensúlyi volta. Ez más szavakkal annyit jelent, hogy amennyiben a piaci portfolió hozama (empirikus elemzésekben a tőzsdeindex változása) egy előre meghatározható sávon kívül esik, úgy a piaci mechanizmusok nem érvényesülnek tökéletesen. Vegyük észre, hogy az empirikus modellezés esetén ez a hozamsáv (változási ütem) részvényenként (értékpapíronként) eltérő lehet, ám ha a transzformációban szereplő λ paraméter abszolút értéke az elméletben elvárt értékhatárok között marad,[10] akkor a sávok jelentős mértékű átfedéseket tartalmaznak.

Például a FOTEX részvényei esetén, a varianciastabilizáló transzformáció után a következő modellhez jutunk:

$$\lambda = -0.5 \qquad \frac{r_{FOTEX}^\lambda - 1}{\lambda} = 0.016 r_{BETI} + \epsilon\,.$$

A β-együttható változását szemlélteti a következő ábra:



[10] Az elméletileg várt λ-értékek tekintetében a szakirodalom nem egységes, MILLS [1990] $-1 < \lambda < 1$ intervallumot javasol.

Láthatjuk, hogy az elméletileg elvárt β-értékek a piaci portfolió hozamának −4% és +5% közötti változása esetén keletkeznek.

A Budapesti Értéktőzsde mindhárom részvényhozamának transzformációja után becsült modellek alapján meghatározott piaci portfolió hozamsávok, melyekben az értékpapírpiac „tökéletes"-nek fogható fel:

7. tábla: BÉTI hozamsávok „egyensúlyi" piacon

Részvény	$r_m - r_f$ (%) Minimális	Maximális
FOTEX	-3.97	5.07
IBUSZ	-4.12	6.21
PICK	-5.23	6.14

Látható, hogy az intervallumok nagyjából fedik egymást, az értékpapírpiac egyensúlyinak tekinthető, ha a piaci portfolió hozama kockázatmentes hozam -5% és kockázatmentes hozam +6% között található. Ez annyit jelent, hogy a Budapesti Értéktőzsdeindex és a DWIX átlagos szintjét[11] feltételezve, ha a tőzsdeindex napi változása kívül esik a 0.66–1.01 pont intervallumon, akkor a piaci szereplők irracionálisan viselkednek.

Vélelemezhetően a piac „tökéletességére" vonatkozó kritérium napi adatbázis alapján történő meghatározása – a folyamatok várható érték jellegéből adódóan – nem alkalmazható a gyakorlatban. Éves szinten mindez azt jelentené, hogy racionálisan működő magyar értékpapírpiac esetén a tőzsdeindex évente legalább 240, legfeljebb 370 ponttal emelkedik. (Vegyük észre, hogy a tőzsdeindexnek – egyensúlyi piacon – feltétlenül emelkednie kell, ezt a feltételt egyébként az amerikai, illetve nyugat-európai tőzsdéken használt indexek teljesítik.)

Összegzés

A CAPM használhatóságára vonatkozó megállapításokat a következőkben foglalhatjuk össze:

- a CAPM *elméletileg helyes* modell, ám *rendkívül érzékeny* nemcsak a kiinduló módszertani feltevések, hanem a mikroökonómiai (piacra vonatkozó) feltevések teljesülésére is;
- amennyiben a paraméter (β-együttható) értéke az elméletileg várt intervallumon kívülre esik, ez a *feltevések nem teljesülésének* jó proxyja;

[11] A vizsgált időszakban az átlagos BÉTI 1175 pont, az átlagos DWIX 25.5%.

- ha a β-együttható instabil, ez a részvényhozam varianciájának nemstacionárius voltára vezethető vissza, alkalmazandó valamilyen varianciastabilizáló transzformáció; az így nyert paraméterek meghatározzák azt a *portfolió-hozam intervallumot*, melyben a *CAPM a kockázat kielégítő proxyját képes becsülni.*

Irodalom

1. Blake, D. [1990]: Financial Market Analysis. McGraw-Hill Book Company, London, 1990.
2. Elton, E. J. - Gruber, M. J. [1987]: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley and Sons, New York, 1987.
3. Hunyadi László [1994]: Egységgyökök és tesztjeik. Szigma, 1994/3. 135–164.
4. Lintner, J. [1965]: The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. Review of Economics and Statistics, 1965/February, 13–37.
5. Malkiel, B. G. [1992]: Bolyongás a Wall Streeten. Nemzetközi Bankárképző Központ, Budapest, 1992.
6. Martin Hajdu György (szerk.) [1991]: Tőzsdei kézikönyv. KJK, Budapest, 1991.
7. Mills, T. C. [1990]: Time Series Techniques for Economists. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
8. Sharpe, W. F. [1963]: A Simplified Model for Portfolio Analysis. Management Science, 1963/January, 277–293.
9. Száz János [1991]: Hitel, pénz, tőke. KJK, Budapest 1991.

ON THE APPLICATION OF THE CAPITAL ASSET PRICING MODEL ON THE HUNGARIAN STOCK MARKET

The capital asset pricing model (CAPM) developed in 1960's is used for the measurement of the risk of securities. The β-coefficient as an endresult is usually estimated with the method of ordinary least squares (OLS), and often gives results inconsistent with the theory. In this study after having the theory introduced the β-coefficient is estimated for 3-3 American and Hungarian share prices. The verification of the parameter estimation leads to the denying of the Hungarian results that can be partially explained by the disequilibrium of the capital market and partially by the nonstationarity of the variance of the returns. The introduction of the Box-Cox transformation providing variance-stabilization results in the determination of the adequate theoretical parameter and the determination of the equilibrium market return range.

ON THE EXPECTED OUTPUT ANALYSIS OF TWO-STAGE TRANSFER-LINE PRODUCTION SYSTEMS SUBJECT TO INSPECTIONS AND REWORK[1]

M. N. GOPOLAN – S. KANNAN
Indian Institute of Technology, Bombay

This paper deals with the transient analysis of two-stage transfer-line production systems subject to an initial storage of unlimited capacity and inter-stage, end-stage inspections. It provides an integrated framework to consider manufacturing, inspection and rework activities simultaneously. Rework of a defective item produced by a machine is done on the same machine itself. Explicit expressions for some of the system characteristics have been obtained using the state-space method and regeneration point technique. All the random variables involved in the analysis are assumed to be arbitrarily distributed (i.e., general).

Introduction

Consider the following problem in a two-stage transfer-line production system. Products coming out of machine I are inspected at an inspection point before it is being transferred to machine II for further processing. While the good ones are transferred to machine II, the products that are not confirming to specifications are further classified as products that are reworkable and otherwise. In the latter case the product is scrapped. A similar strategy is adopted for the products coming out of machine II.

The main reason to study productive systems is that every enterprise, private or public, manufacturing or service, involves a productive system. There is an operation function in all enterprises. In manufacturing, the productive system is of great importance within the enterprise as a whole. In many service organizations, the produtive system and the product offered are so completely bound up together that they are indistinguishable. While the 'production line' plays an important role in our life, very little research on the interactions between the stages in a line is reported [1].

The focus of analysis of this paper is discrete part manufacturing systems, where each item processed is distinct. Such systems are normal in mechanical,

[1]Beérkezett 1994. szeptember 12.

electrical and electronics industries making products such as cars, refrigerators, electric generators, or computers. The analysis of production systems, though not given importance to the extent it deserves, is one of the oldest problems in industrial engineering [2].

Variation in the production rate of the stations may be due to external causes such as power supply failures, material shortages, strikes, or perhaps the way incoming orders arrive and production plans are prepared [3].

The efficiency of a transfer line with no inventory banks can be substantially less than that of the efficiency of the individual stages. Inventory banks provide a means of improving the line efficiency so that it becomes closer to the efficiency of the worst stage, that is, the stage with the lowest throughput if it were operated on its own.

Systems without internal storages are frequently encountered in industry. In that case, since there is no buffer in between machines, the behaviour of each machine is highly dependent on one another due to the effect of blocking. Two types of behaviour are encountered in such lines: synchronous behaviour and asynchronous behaviour. In the case of asynchronous behaviour, parts can move independently of each other, whereas in the case of synchronous behaviour, transfer of parts from one machine to the next one occur simultaneously. This may be the case, for instance, when a rigid parts transfer system is used. It should however be noticed that in the case of two-machine transfer lines, it is easy to show that the production rate obtained using asynchronous transfer is greater than that corresponding to a synchronous transfer.

Thus, the production rate of a transfer line with synchronous behaviour provides a lower bound on the production rate of the same line with asynchronous behaviour.

The basic causes of problems in production lines are different production rates, variability of the service times due to randomness, and station breakdowns. Losses in line efficiency are evidenced in periods where a station is blocked or starved. A station is blocked if the service of the item in this station is completed and service in the next station is still going on so that it is not possible for the item to enter the next station. In this case, the station remains idle until the service in the next station is completed. A station is starved if there are no items either in the buffer or in service.

The analysis of the two-stage systems provides useful hints to describe generalised (i.e., n-stage) systems and such an analysis is getting a great deal of attention over the last few years. This is because of the reason that any multistage system can be analysed by formulating the system as a two-stage system [4].

Several authors [5,. . .,16] have analysed production systems to find various measures of system performance. But, in all their works, inspection has not been taken into account or rejected items were scrapped. But, this may not be feasible always. This is particularly so when the cost of an item is high. In fact, as it has been pointed out by Gupta and Chakraborty [17], rework is becoming inevitable in many production systems. Not much work has been reported on rework. Some authors have suggested the rework of rejected items, but their analysis is confined to deterministic models [18]. Others have considered only Markovian approach. Also, most of the work in the literature are mainly concentrated on the analysis of steady-state behaviour of the system which may not be useful in reality, as most of the systems will breakdown or collapse before reaching steady-state. Some authors [19,20,21] have analysed the transient behaviour of the system without taking into account the concept of rework, and the models are too specific as they deal with Markovian distributions only.

The present paper deals with the transient analysis of a family of two-stage production systems (since, the processing times at both the stages including rework are assumed to be arbitrarily distributed) subject to an initial buffer of unlimited capacity, inter-stage, end-stage inspections. The processing time of each type of rework is governed by a different distribution. The analysis is carried out by modelling the production system as a queueing system.

Production system under study is modelled using regeneration point technique. For details of this approach, we refer for Uematsu et al [22], Birolini [23]. Integral equations have been written for various state probabilities by identifying the system at suitable regeneration epochs [24]. These equations, which are of convolution type, have been solved by successive approximation [25] .

The following system characteristics have been obtained under the assumption that the distributions of all the random variables involved in the analysis are arbitrary.

1. Expected number of jobs completed by machine I in $[0, t]$.

2. Expected number of jobs completed by machine II in $[0, t]$.

3. Expected number of visits of the system to blocked state in $[0, t]$.

4. Expected number of reworked jobs completed by machine I in $[0, t]$.

5. Expected number of reworked jobs completed by machine II in $[0, t]$.

6. Expected number of visits of the system to rework state (i.e., to a state in which either machine I or machine II is busy with rework) in $[0, t]$.

The presentation of contents of this paper is organised as follows. Section 2 gives a list of assumptions we made, section 3 gives notations used, while sections 4 and 5 deal with system modelling and evaluation of system characteristics respectively. Numerical illustrations are given for some particular cases in section 6. Section 7 is devoted to conclusion.

2. Assumptions

1. Initial buffer is of unlimited capacity and hence machine I is never starved.
2. Transfer of units from the initial buffer to machine I and from machine I to machine II are instantaneous.
3. Inspections at both the inter-stage and end-stage are of instantaneous type.
4. Whenever a product is to be reworked, then the respective machine will immediately start reworking the defective product.
5. Processing times at both the stages are independent, random and arbitrarily distributed (including processing times of rework).
6. Products from machine I will be inspected ony when machine II is free. (This is to avoid indefinite blocking.)
7. Stage II (i.e., machine II) is never blocked.
8. Reworked jobs are always perfect.
9. Machine I/II is perfect (i.e., reliable).
10. Setup is instantaneous.

3. Notations

pdf	:	probability density function
cdf	:	cumulative distribution fucntion
sf	:	survivor function
$f1(\cdot)/f2(\cdot)$	:	pdf of processing time of machine I/machine II
$F1(\cdot)/F2(\cdot)$	:	cdf of processing time of machine I/II
$\overline{F}1(\cdot)/\overline{F}2(\cdot)$	:	sf of processing time of machine I/II
$g_1(\cdot)/g_2(\cdot)$	:	pdf of processing time of rework in machine I/II
$G_1(\cdot)/G_2(\cdot)$	:	cdf of processing time of rework in machine I/II
$\overline{G}_1(\cdot)/\overline{G}_2(\cdot)$	:	sf of processing time of rework in machine I/II
p_{g1}/p_{g2}	:	probability of a job completed by machine I/II is good
p_{r1}/p_{r2}	:	probability of a job completed by machine I/II is not good but reworkable
p_{s1}/p_{s2}	:	probability of a job completed by machine I/II is neither good nor reworkable and hence a scrap.
$*$	:	convolution: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$

4. System modelling

The system under consideration is modelled by identifying the state of the system at any instant t. The possible states of the system are given in *Table 1*. *Figure 1* represents the schematic diagram of the production system. All the one-step transitions are searched between states 1 and 6 and are depicted in *Figure 2*.

Table 1: State space

State	Machine I	Machine II
1	Busy	Free
2	Busy with rework	Free
3	Busy	Busy
4	Busy	Busy with rework
5	Blocked	Busy
6	Blocked	Busy with rework

5. Evaluation of system characteristics

In this Section, expressions for the various measures of system characteristics have been obtained.

5.1 Expected number of jobs completed by machine I in $[0, t]$

The expression for the expected number of jobs completed by machine I in $[0, t]$ is obtained as follows.

Let $M_1^I(t)$ denote the expected number of jobs completed by machine I in $(0, t]$, given that the system was in state 1 at time $t = 0$.

Starting with state 1, the next regenerative transition is to state 3 (i.e., the product from machine I is good) or, to state 2 (i.e., the product from machine I is not good but reworkable), or to state 1 itself (i.e., the product from machine I is neither good nor reworkable), with probabilities p_{g1}, p_{r1} and p_{s1} respectively; i.e.,

$$M_1^I(t) = f_1(t) * \left[p_{g1} M_3^I(t) + p_{r1} M_2^I(t) + p_{s1}^I M_1^I(t)\right] + F_1(t) \,. \tag{1}$$

Following a similar logic, one can obtain the remaining equations.

$$M_2^I(t) = g_1(t) * \left[M_3^I(t)\right] + G_1(t) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
M_3^I(t) = \quad & \left[f_1(t)F_2(t) + f_2(t)F_1(t)\right] * \left[p_{g1}(p_{g2} + p_{s2}) M_3^I(t)\right. \\
& \left. + p_{r1}(p_{g2} + p_{s2}) M_2^I(t) + p_{s1}(p_{g2} + p_{s2}) M_1^I(t)\right] \\
& + p_{r2}\left[F_1(t) f_2(t)\right] * M_6^I(t) \\
& + p_{r2} \int_0^t \left[\int_0^u f_2(u_1) g_2(u - u_1) \int_{u_1}^u f_1(v)\, dv\, du_1 \right. \\
& \left. + f_1(u) \int_0^u f_2(u_1) G_2(u - u_1) du_1 \right] \\
& \qquad \left[p_{g1} M_3^I(t-u) + p_{s1} M_1^I(t-u) + p_{r1} M_2^I(t-u)\right] du \\
& + (p_{g2} + p_{s2}) \int_0^t \left[f_1(u)F_2(u) + f_2(u)F_1(u)\right] du \\
& + p_{r2} \int_0^t \left[\int_0^u f_2(u_1) G_2(u - u_1) \int_{u_1}^u f_1(v) dv du_1 \right. \\
& \left. + f_1(u) \int_0^u f_2(u_1) G_2(u - u_1) du_1 \right] du + p_{r2} \int_0^t f_2(u) F_1(u) du
\end{aligned} \tag{3}$$

$$M_6^I(t) = g_2(t) * \left[p_{g1} M_3^I(t) + p_{r1} M_2^I(t) + p_{s1} M_1^I(t)\right] \,. \tag{4}$$

The above set of integral equations can be arranged in matrix form (refer to

Jones [25]) as follows:

$$\mathbf{G}(t) - \int_0^t \mathbf{W}(u)\mathbf{G}(t-u)du = \mathbf{L}(t)$$

where $\mathbf{W}$ is a square matrix of order n ($n =$ the number of equations) consisting of the coefficients of M_i^I's, $\mathbf{G}$ and $\mathbf{L}$ are column matrices of order $n \times 1$ consisting of M_i^I's and terms independent of M_i^I's respectively.

The above set of integral equations, being of convolution type, can be solved by the method suggested by Jones [25].

5.2 Expected number of jobs completed by machine II in $[0, t]$

Let $M_1^{II}(t)$ denote the expected number of jobs completed by machine II in $[0, t]$, given that the system was in state 1 at time $t = 0$.

The set of equations corresponding to this case can be obtained using the logic similar to the one given in the previous Subsection.

The matrices $\mathbf{G}$ and $\mathbf{W}$ will remain the same, with terms M_i^I's being replaced by M_i^{II}'s, whereas the $\mathbf{L}$ matrix will be of the form

$$\mathbf{L} = [L_1, L_2, L_3, L_4]^T$$

where

$$L_1 = L_2 = 0\ ,$$

$$L_3 = (p_{g2} + p_{s2}) \int_0^t [f_1(u)F_2(u) + f_2(u)F_1(u)]du +$$

$$p_{r2} \int_0^t \left[\int_0^u f_2(u_1)g_2(u-u_1) \int_{u_1}^u f_1(v)dvdu_1 + \right.$$

$$\left. f_1(u) \int_0^u f_2(u_1)G_2(u-u_1)du_1 \right] du +$$

$$p_{r2} \int_0^t f_2(u)F_1(u)du\ ,$$

$$L_4 = G_2(t)\ .$$

5.3 Expected number of visits of the system to blocked state in $[0, t]$

Let $M_1^{BL}(t)$ denote the expected number of visits of the system to blocked state in $[0, t]$, given that the system was in state 1 at time $t = 0$.

The L_i elements of $\mathbf{L}$ matrix, corresponding to this case, are

$$L_1 = L_2 = 0 \, ,$$

$$L_3 = \int_0^t f_2(u)F_1(u)du +$$

$$p_{r2} \int_0^t \left[\int_0^u f_2(u_1)g_2(u-u_1) \int_{u_1}^u f_1(v)dvdu_1 \right] du \, ,$$

$$L_4 = 0$$

5.4 Expected number of reworked jobs completed by machine I in [0, t]

Let $M_1^{R1}(t)$ denote the expected number of jobs completed by machine I in $[0,t]$, given that the system was in state 1 at time $t=0$. The L_i elements of $\mathbf{L}$ matrix, corresponding to this case, are:

$$L_1 = 0 \, , \qquad L_2 = G_1(t) \, , \qquad L_3 = L_4 = 0 \, .$$

5.5 Expected number of reworked jobs completed by machine II in [0, t]

Let $M_1^{R2}(t)$ denote the expected number of reworked jobs completed by machine II in $[0,t]$, given that the system was in state 1 at time $t=0$. The L_i elements of $\mathbf{L}$ matrix, corresponding to this case, are

$$L_1 = L_2 = 0 \, ,$$

$$L_3 = p_{r2} \int_0^t \left[\int_0^u f_2(u_1)g_2(u-u_1) \int_{u_1}^u f_1(v)dvdu_1 + \right.$$

$$\left. f_1(u) \int_0^u f_2(u_1)G_2(u-u_1)du_1 \right] du]; \, ,$$

$$L_4 = G_2(t) \, .$$

5.6 Expected number of visits of the system to rework state in [0, t]

Let $M_1^{RS}(t)$ denote the expected number of visits of the system to rework state in $[0,t]$, given that the system was in state 1 at time $t=0$. The L_i elements of $\mathbf{L}$ matrix, corresponding to this case, are

$$L_1 = p_{r1}F_1(t) \, , \qquad L_2 = 0 \, ,$$

$$L_3 = p_{r2} \int_0^t [f_2(u)F_1(u)]\,du +$$

$$p_{r1}(p_{g2} + p_{s2}) \int_0^t [f_1(u)F_2(u) + f_2(u)F_1(u)]\,du +$$

$$p_{r1}p_{r2} \int_0^t \left[\int_0^u f_2(u_1)g_2(u - u_1) \int_{u_1}^u f_1(v)dv du_1 + \right.$$

$$\left. f_1(u) \int_0^u f_2(u_1)G_2(u - u_1)du_1 \right] du \,,$$

$$L_4 = p_{r1}[G_2(t)] \,.$$

6. Numerical illustrations

Programs have been devised to obtain the numerical values. The numerical values for the expected number of jobs completed by machine I; machine II, reworked jobs completed by machine I in the interval $[0, t]$ are given in Tables 2 and 4. The numerical values for the expected number of reworked jobs completed by machine II, expected number of visits of the system to blocked state, rework state in $[0, t]$ are given in Tables 3 and 5 for some selected values of parameters where

$$f_1(t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) \,, \qquad f_2(t) = \lambda_2^2 t \exp(-\lambda_2 t) \,,$$

$$g_1(t) = \lambda_3 t^{\lambda_3 - 1} \exp(-t^{\lambda_3}) \,, \qquad g_2(t) = \lambda_4 \exp(-\lambda_4 t) \,.$$

Sensitivity of the numerical values with respect to changes in parameters are obvious from the Tables.

7. Conclusion

In this paper, the concept of rework is incorporated in the probabilistic analysis of two-stage transfer-line production systems with an initial storage of unlimited capacity. A stochastic model of a two-stage production system subject to an initial buffer of unlimited capacity, inter-stage and end-stage inspections and rework is developed by modelling the production system as a queueing system. Analytical expressions for some of the measures of system performance such as expected number of jobs completed by machines I/II, expected number of reworked jobs completed by machines I, II and expected number of visits of the system to some states of interest in a given interval of time have been obtained. A numerical approximation method is used to solve the system of integral equations. Such a transient state analysis provides an insight to the various characteristics of functioning of the system and is useful when it is desired to monitor the system over a finite horizon of time.

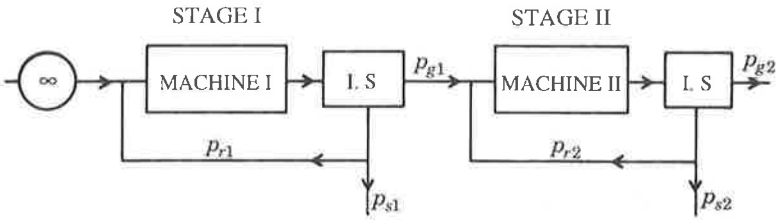
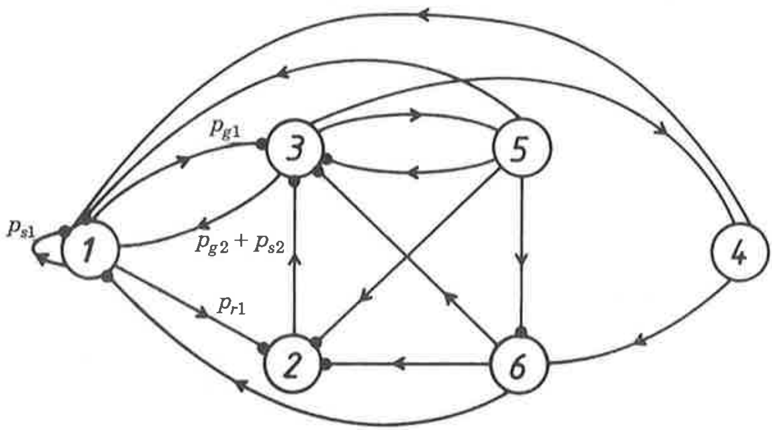


Figure 1. Schematic diagram of the production system



—●— indicates that the transition is regenerative

Figure 2. One-step transition diagram

Table 2: Effect of processing rate of M/c I on the expected output
$\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$

λ_1	t	Jobs by M/c I	Jobs by M/c II	Reworked jobs by M/c I
1	0.5	0.40542	0.03212	0.00345
	1.0	0.70618	0.15423	0.02054
	1.5	0.99099	0.36556	0.04848
	2.0	1.27554	0.63885	0.07965
	2.5	1.55947	0.95048	0.11085
2	0.5	0.66295	0.07175	0.00621
	1.0	1.04283	0.30715	0.03415
	1.5	1.38993	0.64977	0.07562
	2.0	1.72968	1.03976	0.11819
	2.5	2.06346	1.44813	0.15855
3	0.5	0.82858	0.10836	0.00844
	1.0	1.22511	0.41930	0.04339
	1.5	1.60278	0.82466	0.09131
	2.0	1.97717	1.25941	0.13750
	2.5	2.34574	1.70134	0.17992

Table 3: Effect of processing rate of M/c I on the expected output
$\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$

λ_1	t	Reworked jobs by M/c II	Blocked state	Rework state
1	0.5	0.02059	0.02566	0.05643
	1.0	0.06351	0.11048	0.11443
	1.5	0.11840	0.24871	0.17480
	2.0	0.18249	0.42093	0.23885
	2.5	0.25354	0.61200	0.30603
2	0.5	0.04160	0.05526	0.09879
	1.0	0.11321	0.23429	0.18263
	1.5	0.19350	0.49965	0.26059
	2.0	0.28109	0.80295	0.33797
	2.5	0.37406	1.11987	0.41574
3	0.5	0.05745	0.08256	0.12767
	1.0	0.13729	0.33317	0.21521
	1.5	0.21917	0.67152	0.29105
	2.0	0.30694	1.03534	0.36547
	2.5	0.39937	1.40320	0.44007

Table 4: Effect of processing rate of M/c II on the expected output
$\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$

λ_2	t	Jobs by M/c I	Jobs by M/c II	Reworked jobs by M/c I
3	0.5	0.38091	0.03110	0.00347
	1.0	0.65387	0.17502	0.02106
	1.5	0.91949	0.41770	0.05100
	2.0	1.18480	0.72149	0.08583
	2.5	1.44860	1.06176	0.12160
4	0.5	0.36317	0.03759	0.00349
	1.0	0.61912	0.20530	0.02153
	1.5	0.87006	0.47132	0.05296
	2.0	1.11986	0.79540	0.09011
	2.5	1.36807	1.15423	0.12850
5	0.5	0.34700	0.04471	0.00350
	1.0	0.58800	0.22953	0.02193
	1.5	0.82501	0.50923	0.05442
	2.0	1.06095	0.84463	0.09308
	2.5	1.29555	1.21380	0.13304

Table 5: Effect of processing rate of M/c II on the expected output
$\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$

λ_2	t	Reworked jobs by M/c II	Blocked state	Rework state
3	0.5	0.01058	0.02103	0.04194
	1.0	0.03744	0.10823	0.07433
	1.5	0.07745	0.24418	0.10954
	2.0	0.12801	0.40405	0.14959
	2.5	0.18614	0.57514	0.19371
4	0.5	0.00836	0.02339	0.03489
	1.0	0.03269	0.11586	0.05668
	1.5	0.07114	0.24673	0.08272
	2.0	0.12041	0.39315	0.11452
	2.5	0.17708	0.54642	0.15094
5	0.5	0.00764	0.02633	0.02944
	1.0	0.03171	0.11976	0.04459
	1.5	0.07032	0.24170	0.06549
	2.0	0.11963	0.37409	0.09282
	2.5	0.17606	0.51125	0.12508

References

1. J. A. Buzacott and J. G. Shanthikumar (1993), Stochastic models of manufacturing systems, Prentice Hall, New Jersey.
2. E. Koneigsberg (1959), Production lines and internal storages – a review, Management Science, 5, pp. 410–433.
3. J. A. Buzacott and L. E. Hanifin (1978), Models of automatic transfer-lines with inventory banks – a review and comparison, AIIE Transactions, 10, pp. 197–207.
4. M. B. M. De Koster and J. Wigngaard (1987), On the equivalence of multistage production lines and two-stage lines, IIE Transactions, 19, pp. 351–354.
5. J. G. Shanthikumar (1980), On the production capacity of automatic transfer lines with unlimited buffer space, AIIE Transactions, 12, pp. 273–274.
6. C. Commault and Y. Dallery (1990), Production rate of transfer lines without buffer storage, IIE Transations, 22, pp. 315-329.
7. J. G. Shanthikumar and C. C. Tien (1983), An algorithmic solution to two-stage transfer lines with possible scrapping of units, Management Science, 29, pp. 1069–1086.
8. J. A. Hatcher (1969), The effect of internal storage on the production rate of a series of stages having exponential service fime, AIIE Transactions, I, pp. 150–156.
9. T. Altiok (1982), Approximate analysis of exponential tandem queue with blocking, European Journal of Operational Research, 11, pp. 390–398.
10. H. S. Lau (1986), The production rate of a two-stage system with stochastic processing times, International Journal of Production Research, 24, pp. 401–412.
11. A. G. De Kok (1990), Computationally efficient approximations for balanced flow-lines with finite intermediate buffers, International Journal of Production Research, 28, pp. 401-419.
12. Nori Prakasa Rao (1975), On the mean production rate of a two-stage production system of the tandem type, International Journal of Production Research, 13, pp. 207–218.
13. B. Avi-Itzhak (1965), A sequence of service stations with arbitrary input and regular service times, Management Science, 11, pp. 565–571.
14. B. Avi-Itzhak and M. Yadin, (1965), A sequence of two machines with no intermediate queue, Management Science, 11, pp. 553–564.
15. Eginhard J. Muth (1973), The production rate of a series of work stations with variable service times, International Journal of Production Research, 11, pp. 155–170.
16. U. C. Gupta and O. P. Sharma (1983), On the transient behaviour of a model for queues in series with finite capacity, International Journal of Production Research, 21, pp. 869–880.

17. T. Gupta and S. Chakraborty (1984), Looping in a multi-stage production system, International Journal of Production Research, 22, pp. 869–880.
18. G. K. Tayi and D. P. Ballou (1988), An integrated production-inventory model with reprocessing and inspection, International Journal of Production Research, 26, pp. 1299–1315.
19. Marcel F. Neuts (1981), Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach, The John Hopkins University Press, Baltimore.
20. N. U. Prabhu (1966-67), Transient behaviour of a tandem queue, Management Science, 12, pp. 631–639.
21. A. Kumar (1992), On the average idle time and average queue length estimates in an M/M/1 queue, Operations Research Letters, 12, pp. 153–158.
22. K. Uematsu, T. Nishida and M. Kowada (1984), Some applications of semi-regenerative process to two unit warm standby system, Microelectronics and Reliability, 24, pp. 965–978.
23. A. Birolini(1985), On the use of stochastic processes in modelling reliability problems, Lecture Notes in Economics and Mathematics Systems, Springer-Verlag, 1985.
24. E. Cinlar (1975), Markov renewal theory: A Survey, Management Science, 21, pp. 727–752.
25. J. G. Jones (1961), On the numerical solution of convolution integral equations and systems of such equations, Mathematics of Computation, 15, pp. 131–142.

DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLEK IRÁNYÍTHATÓSÁGA[1]

MOLNÁR SÁNDOR ÉS SZIDAROVSZKY FERENC
Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem

Két termelői-fogyasztói modell ártrajektóriájának irányításával foglalkozunk. Az alapmodell esetén kimutatjuk, hogy mindig található nemnegatív irányítás, ha a célul kitűzött ársorozat nem nagyon csökkenő. A módosított modell pedig tetszőleges ársorozatra irányítható.

1. Bevezetés

Egy korábbi dolgozatunkban megvizsgáltuk diszkrét dinamikus oligopol modellek irányíthatóságát (Molnár és Szidarovszky, 1994a). Kimutattuk, hogy a Cournot-féle becslések mellett a termelési vektor akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha csak két, nem azonos marginális költségfüggvénnyel rendelkező termelő alkotja a termelési oldalt. Adaptív becslések mellett pedig megadtuk az irányíthatóság szükséges és elégséges feltételét. Dinamikus oligopol modellek olyan kiterjesztésével foglalkoztunk a Molnár és Szidarovszky (1994b,c) dolgozatokban, amikor a termelők minden egyes időszakban továbbra is maximalizálják hasznukat, viszont az ár a keresleti-kínálati viszonytól függően változik. A modellek globális aszimptotikus stabilitását vizsgáltuk meg, és szükséges és elégséges stabilitási feltételeket adtunk. Jelen dolgozatunkban ugyanezeknek a rendszereknek az irányíthatóságával foglalkozunk. Szükséges és elégséges feltételeket adunk a teljes ártrajektória irányíthatóságára.

2. Az alapmodell irányíthatósága

Ebben a paragrafusban a Molnár és Szidarovszky (1994b) által bevezetett dinamikus modellel foglalkozunk. Feltesszük ismét, hogy N a termelők száma,

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k$$

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. november 17.

(mindhárom együttható pozitív) a k-dik termelő költségfüggvénye, valamint $d = Dp + d$ ($D < 0$, $d > 0$) a piac keresleti függvénye. Feltételeztük azt is, hogy minden egyes $t \geq 0$ időpontban az összes termelő először megbecsüli a várható árat, majd a várható hasznát maximalizálja, és a profitmaximalizáló termékmennyiséget választja termelési programjának a t-dik időpontban ($t = 0, 1, 2, \dots$). Az árdinamizmust a keresleti-kínálati viszony vezérli, azaz az ár növekszik, ha a kereslet meghaladja a kínálatot, csökken, ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, és változatlan marad a kereslet és kínálat egyenlősége esetén. Feltesszük továbbá, hogy a kontroll csak a keresleti függvényre vonatkozik. Hogyha az ár és/vagy a költségfüggvények irányítása is folyik, akkor a profitmaximalizáló feltételből közvetlenül leolvasható, hogy ebben csak az irányítási változók hányadosa játszik szerepet. Így az egyik mindig 1-nek választható. Ha $p_k^E(t)$ jelöli a k-dik termelő árelőrejelzését a t-dik időpontra, akkor a Szidarovszky és Molnár (1994b) modell alapján

$$p(t+1) = p(t) + K\left((Dp(t) + d)u(t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}\right), \tag{1}$$

ahol $u(t) > 0$ jelöli az irányítást.

Tegyük fel először, hogy minden termelő ismeri a pontos árat. Ebben a *teljes információs* esetben

$$p_k^E(t) = p(t),$$

így az (1) modell átírható a következő alakra:

$$K\big(Dp(t) + d\big)u(t) = p(t+1) - p(t) + K\sum_{k=1}^{N} \frac{p(t) - b_k}{2B_k}. \tag{2}$$

Jelölje ezután $p^*(t)$ ($t \geq 0$) az előírt ártrajektóriát, és tegyük fel, hogy a kezdeti $t = 0$ időpontra $p(0) = p^*(0)$. Tegyük fel továbbá, hogy

(A) $$Dp^*(t) + d > 0 \qquad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor pozitív irányítás a (2) egyenlet alapján akkor és csak akkor létezik, ha

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{p^*(t) - b_k}{2B_k}. \tag{3}$$

Tegyük most fel, hogy

(B) $$p^*(t) > b_k \qquad (k = 1, 2, \dots, N \quad \text{és} \quad t = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor a (3) egyenlőtlenség úgy értelmezhető, hogy a $\{p^*(t)\}$ sorozat nem lehet nagyon csökkenő.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők ***statikus*** becsléseket alkalmaznak. Ekkor

$$p_k^E(t) = p(t-1) ,$$

és a (2) egyenlet a következőképpen módosul:

$$K\big(Dp(t)+d\big)u(t) = p(t+1) - p(t) + K\sum_{k=1}^{N} \frac{p(t-1)-b_k}{2B_k} , \tag{4}$$

így pozitív irányítás akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{p^*(t-1)-b_k}{2B_k} . \tag{5}$$

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor az összes termelő ***adaptív*** becslést alkalmaz:

$$p_k^E(t) = \alpha_k(t)p(t-1) + \big(1-\alpha_k(t)\big)p_k^E(t-1) , \tag{6}$$

ahol $0 \le \alpha_k(t) \le 1$ tetszőleges $k = 1, 2, \ldots, N$ és $t = 0, 1, 2, \ldots$ esetén. Egyszerű számolással láthatjuk, hogy ebben az esetben az (5) feltétel alakja:

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k(t)p^*(t-1) + \big(1-\alpha_k(t)\big)p_k^E(t-1) - b_k}{2B_k} . \tag{7}$$

Ez a feltétel közvetlenül csak akkor alkalmazható, ha az $\{\alpha_k(t)\}$ sorozatok előre adottak. A továbbiakban olyan feltételt vezetünk be, amely biztosítja, hogy tetszőleges $0 \le \alpha_k(t) \le 1$ együtthatók mellett létezzék pozitív irányítás. Tegyük fel az előzőeken kívül, hogy

(C) $$p_k^E(0) > b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) .$$

Vegyük észre először, hogy a (B) feltétel és a (6) rekurzió alapján $p_k^E(t) > b_k$ tetszőleges k és $t \ge 1$ mellett is. Vezessük be ezután a következő jelöléseket:

$$p_k(0) = p_k^E(0) ,$$

és $t \ge 1$ esetén

$$p_k(t) = \min\{\, p_k^E(0); p^*(0); p^*(1); \ldots; p^*(t-1)\,\} .$$

Nyilvánvaló, hogy a (7) egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden k, t és tetszőleges $\alpha_k(t) \in [0,1]$ együtthatók mellett, ha

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{p_k(t-1) - b_k}{2B_k} . \tag{8}$$

Tegyük fel ezután, hogy az összes termelő *extrapolatív* becsléseket választ. Vagyis $k = 1, 2, \ldots, N$ és $t \geq 2$ esetén

$$p_k^E(t) = \alpha_k(t)p(t-1) + \bigl(1 - \alpha_k(t)\bigr)p(t-2) , \tag{9}$$

ahol az $\alpha_k(t)$ együtthatók valamennyien pozitívak. Könnyen látható, hogy ebben az esetben a (7) feltétel a következőképpen módosul:

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k(t)p^*(t-1) + \bigl(1 - \alpha_k(t)\bigr)p^*(t-2) - b_k}{2B_k} , \tag{10}$$

feltéve, hogy $p(0) = p^*(0)$ és $p(1) = p^*(1)$. Hasonlóan az adaptív esethez, ez az egyenlőtlenség csak akkor alkalmazható, ha az $\{\alpha_k(t)\}$ sorozatok előre adottak. Ellenkező esetben olyan feltételeket kell találnunk, amelyek tetszőleges együttható sorozatok esetén biztosítják pozitív irányítás változók létezését. Tegyük most fel, hogy az (A) feltételen kívül

$$\text{(D)} \quad 0 < a_k(t) \leq \alpha_k(t) \leq A_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N \quad \text{és} \quad t \geq 2) , \tag{11}$$

ahol $\{a_k(t)\}$ és $\{A_k(t)\}$ ismert sorozatok. Vezessük be a következő jelölést:

$$Q_k(t) =$$

$$\min\{a_k(t)p^*(t-1) + \bigl(1 - a_k(t)\bigr)p^*(t-2); A_k(t)p^*(t-1) + \bigl(1 - A_k(t)\bigr)p^*(t-2)\} ,$$

ekkor (10) akkor és csak akkor teljesül tetszőleges (11)-nek eleget tevő $\alpha_k(t)$ együtthatók mellett, ha minden $t \geq 1$ esetén

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k(t) - b_k}{2B_k} . \tag{12}$$

3. A módosított modell irányíthatósága

A Szidarovszky és Molnár (1994c) dolgozatban az alapmodell olyan módosításával foglalkoztunk, amikor minden egyes időpontban megköveteltük a kereslet és kínálat egyensúlyát, és a rendszer dinamizmusát az ár-előrejelzések adták. Ismét feltéve, hogy az irányítás csak a keresletfüggvényt befolyásolja, a modell a következőképpen írható fel:

$$\big(Dp(t)+d\big)u(t)=\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^E(t)-b_k}{2B_k}\,. \tag{13}$$

Az (A) és (B) feltétel fennállásakor a *teljes információs* esetben és *statikus* becslések mellett is $p_k^E(t)>b_k$, így a (13) egyenletet pontosan egy pozitív $u(t)$ érték elégíti ki, így mindig van pozitív kontroll. Ha ezeken felül a (C) feltétel is teljesül, akkor *adaptív* becsléseknél is az előző esethez hasonlóan $p_k^E(t)>b_k$ tetszőleges k és t mellett, így pozitív irányítás akkor is mindig található. Tekintsük végül az *extrapolatív* becslések esetét. Ha (B) feltételeken kívül $A_k(t)\le 1$ tetszőleges k és t esetén, akkor $Q_k(t)>b_k$.

Így tetszőleges $\{\alpha_k(t)\}$ sorozatok mellett (13) jobb oldala pozitív, így pozitív irányítás mindig található. Ha valamilyen $t\ge 2$ mellett valamelyik termelő olyan $p_k^E(t)$ árbecslést kap, amelynek megfelelő profit-maximalizáló termelésmennyiség nem pozitív, akkor az csak zérus lehet. Ekkor (13) jobb oldalán a megfelelő tagot 0-val kell helyettesítenünk. Ha legalább egy termelőnél a profit-maximalizáló termékmennyiség pozitív, akkor is pozitív a (13) jobb oldala, így pozitív irányítás ismét létezik. Ha pedig az összes termelő optimális termelési programja zérus, akkor $u(t)=0$ a megfelelő irányítás.

4. Megjegyzések

A költségfüggvényekre tett feltételek a következőképpen értelmezhetők. A $B_k>0$ feltétel a költségfüggvény szigorú konvexitását követeli meg. Minthogy $b_k=C_k'(0)$ és $c_k=C_k(0)$, az első feltétel a költségek $x_k=0$ helyen való szigorú növekedését írja elő, a második pedig feltételezi a termelési mennyiségektől függetlenül létező költségeket is. A keresleti függvényben $D<0$ feltételezi, hogy a keresleti függvény az árban szigorúan csökken, $d>0$ pedig szükséges ahhoz, hogy pozitív kereslet egyáltalán fellépjen. (A) feltétel szerint a $p^*(t)$ árak mellett a piaci kereslet mindig pozitív. A (B) feltétel szerint az adott ársorozat mellett az összes termelő profit-maximalizáló termelési programja is pozitív, amint ezt a Szidarovszky és Molnár (1994b) dolgozatban fel is tettük. A (C) feltétel azt jelenti, hogy a $t=0$ időpontban az összes termelő olyan árbecslést választ, amely mellett a kezdeti profit-maximalizáló termelési programjuk pozitív. Adaptív becslések esetén általában felteszik, hogy az $\alpha_k(t)$ együtthatók pozitívak. Dolgozatunkban megengedjük az $\alpha_k(t)=0$ esetet is, amely annak felel meg, ha a k-dik termelő a t időpontban ismét az előző árbecslését használja. A $\{p_k(t)\}$ mennyiségek definiciójából közvetlenül leolvasható, hogy $p_k(t-1)$ a k-dik termelő lehető legalacsonyabb árbecslése a t-dik időpontra vonatkozóan. Extrapolatív becslések esetén ehhez hasonlóan a $Q_k(t)$ mennyiség is felfogható úgy, mint a lehetséges minimális előrejelzés, amelyet a k-dik termelő a t időpontban kaphat várható árról. Megjegyezzük, hogy az összes feltételi (3), (5), (7), (8), (10) és (12) egyenlőtlenségek nem kívánják meg, hogy a $\{p^*(t)\}$ sorozat növekedő legyen, csupán azt jelentik, hogy a $p^*(t+1)-p^*(t)$ árváltozások alulról korlátosak legyenek, ahol az alsó korlát a (B) és (C) feltételek alapján mindig negatív a teljes információs esetben a statikus és adaptív becslések mellett. Megjegyezzük továbbá, hogy $\alpha_k(t) \leq 1$ (vagy $A_k(t) \leq 1$, $t \geq 0$) mellett extrapolatív becslések esetén is negatív az alsó korlát. Ha $\alpha_k(t) > 1$, akkor elképzelhető, hogy valamilyen időpontban az egyes termelők profit-maximalizáló termelési mennyisége nem adódik pozitívnak. Ilyenkor zérus az optimális termelési mennyiség, így (10) és (12) jobb oldalának második tagja zérus, ha az összes termelő esetén zérus a profit-maximalizáló termelési program, és pozitív, ha legalább egy termelő optimális termelési mennyisége pozitív.

Megjegyezzük végül, hogy a módosított modell esetén az (A), (B) és (C) feltételek mellett mindig van pozitív irányítás, ha a termelők teljes információval rendelkeznek az árral kapcsolatban, vagy statikus, vagy adaptív becsléseket alkalmaznak. Extrapolációs becslések esetén is mindig van nemnegatív irányítás.

A modellek és az irányítás a többtermékes esetre minden további nehézség nélkül kiterjeszthető. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasókra bízzuk.

Irodalom

1. Molnár S. és Szidarovszky F. (1994a) A dinamikus oligopol probléma irányíthatóságáról. Szigma, 1994/3. 95–102.
2. Molnár S. és Szidarovszky F. (1994b) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról. Szigma, 1994/4. 207–219.
3. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994c) Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben. Szigma, 1994/4. 221–227.

ON THE CONTROLLABILITY OF THE DINAMIC PRODUCER-CONSUMER MODEL

In this paper we examine the control of price trajectories of two production-consumption models. We prove that in case of the base model there exists a non-negative control if the target price series is not decreasing very much. The modified model is controllable for arbitrary price series.

A HELYETTESÍTÉS ÉS KOMPLEMENTARITÁS ÉRTELMEZÉSI PROBLÉMÁI A KÖZGAZDASÁGI ELMÉLETBEN I.[1]

BARANCSUK JÁNOS
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

A javak helyettesítő és kiegészítő kapcsolatának szokásos definíciója a kereslet keresztrugalmasságának előjelén alapul. A cikk első része azt vizsgálja, hogy ez a megközelítés nem homotetikus vásárlói preferenciákat – luxus- illetve létszükségleti motívumok jelenlétét – feltételezve miért nem nyújt kielégítő információt a javak fogyasztási kapcsolatára, és bemutat egy általánosított mutatót a torzítás kiküszöbölésére.

Bevezetés

A címben jelzett kérdéskör még a mikroökonómia eléggé absztrakt, s gyakran öncélúnak tűnő világán belül is némileg *l'art pour l'art* jellegűnek, s mint ilyen, ***akadémikus*** viták gerjesztőjeként hat. A javak közti kapcsolat milyensége ugyanis *látszólag* „józan paraszti ésszel" is belátható, szükségtelenné téve a tudományos(kodó) mérési technikák igénybevételét.

A helyzet azonban valójában nem ilyen egyszerű. Amint *Hoch Róbert* írja: „a helyettesíthetőség mértéke nemcsak a javak *természetétől* függ, hanem a jövedelem színvonalától is. Két jószág között más lehet a helyettesíthetőség mértéke alacsony és megint más magas jövedelemszínvonalon."[2] Vagy: „a komplementer javak között esetenként helyettesítési viszony is fennáll. [...] Megfordítva: a helyettesek egymás kiegészítői is. [...] Ismét csak nagymértékben függ a jövedelemszínvonaltól [...], hogy két rokon jószág között a kiegészítő kapcsolat vagy a helyettesítő kapcsolat erősebb-e. . ."[3] stb.

Témánk fontosságára utal az is, hogy a helyettesítés és komplementaritás problémája több, nem ritkán *gyakorlati* szempontból érdekes szálon keresztül kapcsolódik a modern polgári elmélet további területeihez. Ezt annak ellenére állíthatjuk, hogy az említett szálak logikai szekvenciájában a *„közös tő"* szerepét egy mélyen elvont (bár elmélettörténetileg a „szíklevélhez hasonlóan

[1]Beérkezett 1994. október 28.
[2][14] 163. old. (Kiemelés tőlem – B.J.)
[3]U.o.

elsorvadó") teória: a (szubjektív) értékelmélet tölti be. Az innen kiinduló „elméleti hajtások" egyike a *gazdasági beszámítás* teóriájának közvetítésével a ma is releváns, *neoklasszikus jövedelemelosztási* magyarázatok felé mutat, míg a másik az *ár- és keresletelmélet* illetve *-elemzés* területére visz. Az itt kidolgozott, helyettesítő javakra vonatkozó *keresztárösszefüggések* jelennek meg azután a *piaci formák* modern elméletének *Triffin-féle* változatában is.[4]

Dolgozatunk *I. része* a helyettesítés és komplementaritás két legelterjedtebb megnyilvánulási módjának bemutatásával foglalkozik, nagy figyelmet szentelve annak, hogy az ezeknek megfelelő kritériumrendszerek mennyiben képesek a javak *tényleges* kapcsolatát megragadni, illetve kifejezni. A *II. rész* vizsgálódásai a kétféle megközelítés eredményeinek összevetésére irányulnak, megkísérelve az esetleges *eltérések* logikai vetületeinek – nem utolsósorban kritikai szemléletű – feltárását is.

A helyettesítés és komplementaritás megközelítése a hasznosság kardinális felfogása alapján

A *kardinalista* megközelítés kidolgozása *I. Fisher, Edgeworth, Johnson, Pareto, Sluckij,* illetve *H. Schultz* nevéhez fűződik,[5] de ez a felfogás lelhető fel még *Dominedo*nál, továbbá az *osztrák* iskola tagjainak publikációiban, például *Böhm-Bawerknél* is.[6]

Amint *Hicks* írja: „Edgeworth és Pareto a következőképpen definiálta a komplementer és a versenyző *(helyettesítő – B.J.)* javakat [...]: A fogyasztó költségvetésében Y komplementer kapcsolatban áll X-szel, ha X kínálatának növekedése (Y állandó) növeli Y határhasznát; Y pedig versenyző kapcsolatban áll X-szel (más szavakkal: helyettesítője X-nek), ha X kínálatának növekedése (Y állandó) csökkenti Y határhasznát. E definíció alapján magától értetődőnek látszik, hogy a komplementer, illetve a versenyző kapcsolat megfordítható: ha Y komplementer kapcsolatban áll X-szel, akkor X is ilyen kapcsolatban áll Y-nal; ha Y helyettesíti X-et, X is helyettesíti Y-t."[7]

A fentebb megfogalmazott kategorizálási elv adekvát megjelenítője a *határhaszon keresztváltozós függvénye.* Ez valamely jószágfajta határhasznának alakulását szemlélteti, ha mennyisége konstans, de egy másik termékből elfo-

[4] Lásd R. Triffin: Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory. Harvard University Press, Cambridge, 1940. 102–105. old.

[5] [7] 64–67.old., [6] 117. old., [16] 483–513. old., [25] 268. old., [29] 1–26. old. [28] 468–512. old.

[6] [5] 30–48, 765–807. old., [3], [4]. Lásd még [10] 56. old. és [21] 222. old. Hicks és Allen korai publikációiban ugyancsak találkozhatunk ezzel a megközelitéssel: [11] 52–76. old. [1] 486–506. old. Későbbi munkáikat a kardinalizmus kritikája és elutasítása jellemzi.

[7] [13] 83. old. V. ö.: [8] 162. old., [23] 106. old., [10] 110. old.

gyasztott volumen változó. X és Y javak esetén az X határhasznára vonatkozó keresztváltozós függvény matematikailag az

$$U = f(X, Y) \tag{1}$$

általánosított hasznossági függvény X szerinti deriváltjának értékeit tartalmazza, tetszőleges rögzített X_0 és változó Y nagyságok mellett. Képletszerűen:

$$MU_x = g(Y|X_0)\ , \tag{2}$$

ahol MU_x hagyományosan az X termékfajta határhasznát jelöli.

A kardinalizmus szerint egy termékfajta határhasznának (MU_x) mértéke alapvetően az illető jószágra irányuló vágy, szükséglet intenzitásától, vagy más irányból megközelítve: a termékből rendelkezésre álló készlet relatív nagyságától, a tulajdonképpeni szűkösségtől függ. Ennek megfelelően, ha X és Y *kiegészítő,* komplementer viszonyban áll egymással, vagyis egy bizonyos, összetett szükséglet különböző komponenseit elégítik ki, akkor fogyasztásuk valamilyen (szélsőesetben merev) arányok szerint bizonyul előnyösnek. Y mennyiségének növekedése tehát automatikusan megnöveli az X fogyasztására irányuló vágyat (másképpen kifejezve: az X relatív szűkössége megnő), s ez maga után vonja MU_x növekedését is. Ezt a jelenséget tapasztaljuk pl. az

$$U = X^a Y^b \qquad (a, b > 0) \tag{3}$$

Cobb-Douglas-típusú hasznossági függvények esetén, melyekből

$$MU_x = aY^b X_0^{a-1} \tag{4}$$

szigorúan monoton *növekvő* keresztváltozós derivált származtatható.

Ugyanígy, ha a javak *helyettesítőek* (másként kifejezve: versenyzőek, vagy kompetitívek), ez azt jelenti, hogy mindegyikük többé-kevésbé ugyanazon szükséglet kielégítésére alkalmas. Az Y-ból rendelkezésre álló készlet növekedése mérsékli tehát az illető szükséglet kielégítésének X-re háruló terhét, ami egyenértékű az X-re irányuló vágy, s így MU_x mérséklődésével. Ez figyelhető meg az

$$U = (\ln X + \ln Y)^{1/2} \tag{5}$$

hasznossági függvény vizsgálata során, melyből

$$MU_x = \frac{1}{2X(\ln X_0 + \ln Y)^{1/2}}$$

szigorúan monoton *csökkenő* keresztváltozós funkció következik.

A javak *függetlensége* esetén az általuk kielégített szükségletek függetlenségéről van szó. Ekkor a határhaszon keresztváltozós funkciójának képe egy vízszintes, jelezve, hogy a jószágfajták határhaszna csakis saját mennyiségük változására reagál. A független javakra jellemző általános hasznossági függvény additív, pl.:

$$U = 2X^{1/2} + 2Y^{1/2}\,, \tag{7}$$

amiből

$$MU_x = \frac{1}{X_0^{1/2}} \tag{8}$$

formula származik.

A valóságban azonban – mint Hoch Róberttől már idéztük – csak ritkán ilyen „vegytiszta" a javak kapcsolata. Sokkal inkább valószínűbb, hogy a keresztváltozós görbe pozitív és negatív meredekségű szakaszainak szekvenciája figyelhető meg a fogyasztó jövedelmi szintjének elmozdulását érzékeltetve.

A javak közötti fogyasztási kapcsolat milyensége a határhaszon keresztváltozós függvényének *deriváltja* révén is megállapítható. Pozitív meredekségű, vagyis növekvő függvény esetén ugyanis a derivált szintén nagyobb nullánál, ami komplementaritásra utal. Ugyanígy a negativitás helyettesítő, a zérus pedig független javak jelenlétét jelzi. Könnyen belátható, hogy a keresztváltozós függvény első, illetve a hasznossági függvény második keresztderiváltja[8] ekvivalens, s mivel a keresztderivált értékére nézve közömbös a differenciálás sorrendje, ebből az is következik, hogy a javak fogyasztási kapcsolata – miként erre *Hicks*[9] utal Pareto és Edgeworth definíciója kapcsán – *szimmetrikus.*

Amint *Heller Farkas* írja: „Más megoldást kerestek H. Hotelling,[10] J. R. Hicks és R. D. G. Allen[11] annak a meghatározására, hogy a komplementaritás, vagy a helyettesíthetőség mennyiben forog fenn az egyes javak között."[12] És ez érthető, mert az előzőekben bemutatott kritériumrendszer – bármennyire is logikusnak tűnjön – komoly problémával terhes, ha a fogyasztói javakra kívánjuk alkalmazni. Amint Hicks vélekedik: „Az Edgeworth-Pareto-féle definíció [...] a hasznosság mérhetetlenségének paretói elvével is ellentétes. Ha a hasznosság nem mennyiség, hanem csupán egy index a fogyasztó preferenciaskáláján, akkor a komplementer jószágokra adott definíciójának sincs világosan értelmezhető jelentése. A komplementer és a versenyző javak közötti különbségtétel a hasznosságnak attól a tetszés szerinti mértékétől függően változik, amelyet éppen kiválasztottunk."[13]

---

[8] [23] 108. old.
[9] [13] 83. és 85. old.
[10] [15] 577-616. old.
[11] Economica. New Series I. köt. 52–56. old., 196–219. old.
[12] [8] 162. old.
[13] [13] 84. old. V. ö.: [23] 109–110. old. és [21] 314. old.

A javak fogyasztási kapcsolatának újabb megközelítése a hasznosság ordinális megközelítése alapján

A javak kiegészítő, helyettesítő vagy független viszonyának megállapítására a hasznosság kardinális értelmezésének helyére lépő ordinális megközelítés gondolatmenete szerint tehát nem alkalmazhatjuk a határhaszon keresztváltozós függvényét. Az ilyen jellegű kapcsolatok jellemzésére a szakirodalomban napjainkra meghonosodott módszer a *kereslet keresztárrugalmasságának* elemzésére épül.[14]

E logika szerint Y jószágfajta kiegészíti X-et, ha Y keresletének keresztárrugalmassága (ε_y^{px}) kisebb, mint nulla, helyettesíti, ha nullánál nagyobb, illetve Y jószágfajta független X-től, ha a keresztárrugalmasság éppen zérus.

Ez a kategorizálás azon a gondolatmeneten alapul, hogy ha az X jószágfajta ára, p_x például csökken, és ennek következtében az illető termék keresett mennyisége növekszik, akkor abban az esetben, ha az Y komplementere az X-nek, szükségszerűen megnő ez utóbbira irányuló szükséglet intenzitása, s ezáltal vásárolt mennyisége is. A p_x és Y ellentétes mozgása miatt tehát a keresztrugalmassági mutató értéke negatív.

Mutatis mutandis, ugyanezen okoskodás alapján lehet megérteni a helyettesítés és függetlenség esetét.[15]

Mivel a keresztárrugalmasság matematikai értelemben a kereslet keresztváltozós függvényének elaszticitása, az illető funkció geometriai származtatásának alapja pedig a közömbösségi térkép, ezért igaz, hogy a helyettesítési/kiegészítő relációk most tárgyalt tesztelési eljárásának eredményei *kizárólag* az indifferencia-görbék rendszerének „topográfiai" paramétereitől függenek[16] – szemben Pareto „csoportképző ismérvekre" adott értelmezésével. Ő ugyanis „mihelyt definícióját a közömbösségi görbék fogalmaiban próbálta értelmezni, nehézségekbe ütközött, [hiszen] lehetetlen megadni a közömbösségi görbék görbületének azt a fokát, amely megfelelne a komplementer és a helyettesítő javak különbözőségének..."[17]

A határhaszon keresztváltozós függvénye, illetve a kereslet keresztárrugalmassága nem mindig azonos eredményt szolgáltat a termékek viszonyát illetően, bár a kétfajta elv segítségével képzett csoportok nagyban fedik egymást.

---

[14] Lásd pl. [2] 400–401. old., [9] 57–58. old., [17] 144. old., [18] 100. old., [26] 135. old., [27] 592. old., [31] 145–146. old., [32] 159. old., [14] 162–163. old.

[15] A. Marshallnak a kapcsolt keresletre és összetett kínálatra vonatkozó gondolatai ugyanezen logikai elemeket tartalmazzák. Lásd: in [23] 61–62. old. V. ö. még: [9] 57–58. old.

[16] Ez azt is jelenti, hogy egy fiktív, kardinális hasznossági függvény monoton transzformációi érintetlenül hagyják a jószágfajták kapcsolatára megállapított besorolást.

[17] [13] 83–84. old. (Beszúrás tőlem – B.J.)

Tekintsük például az

$$U = \left[C - \frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right]^{1/2}, \qquad (C \to \infty\,,\ \text{konstans}) \tag{9}$$

hasznossági függvényt, amely az *első* elv szerint a javak *kiegészítő,* míg a *második* szerint *helyettesítő* jellegére utal. Ugyanakkor a (3) alakú Cobb-Douglas-típusú függvény vizsgálata során a határhasznok keresztreagálásából kiegészítő, míg a keresztrugalmasságokból független viszonyra következtethetünk.

Míg a határhaszon keresztváltozós függvénye alapján a javak kapcsolatát a szimmetria jellemezte (vagyis ha pl. az X kiegészítette Y-t, akkor ez utóbbi is kiegészítette X-t), addig a keresztárrugalmasság esetén nem kizárt az *aszszimmetria* lehetősége. Pl. előfordulhat, hogy ε_y^{px} értéke negatív, ami az Y kiegészítő jellegére utal, ugyanakkor azonban ε_x^{py} pozitív értéket ad, ami viszont az X jószág helyettesítő státuszát jelzi.[18] A mikroökonómia irodalmának vonatkozó fejezetei ezt a jelenséget az illető termékfajta karakterisztikáinak (azaz tulajdonságainak) sajátos viszonyára vezetik vissza, amikor is – az előbbi értékeket alapul véve – Y tulajdonságainak, funkcióinak halmaza bővebb, mint X-é, vagyis X karakterisztikahalmaza részhalmazát képezi Y-énak. Pl. a vajaskenyér (Y) kiegészítő jószágnak minősül a vaj nélküli kenyérhez (X) képest, hiszen valamivel cizelláltabb szükségletek kielégítésére képes, ez utóbbi ugyanakkor – az éhség csillapítása, mint alapfunkció tekintetében – csak helyettesíteni képes az előbbit.

A keresztárrugalmasságok asszimmetriájának logikai elemei

Soron következő gondolatmeneteink nagyban támaszkodnak a kereslet rugalmassági azonosságaira. Először ezeket mutatjuk be.[19]

Legyen X és Y jószágfajta ára p_x és p_y, a fogyasztó nomináljövedelme I, a két termékből keresett mennyiség pedig X és Y. A jószágfajták költségvetési részesedése s_x és s_y, ahol pl.

$$s_x = \frac{Xp_x}{I}\,. \tag{10}$$

A kereslet jövedelemrugalmasságainak jelölése rendre: ε_x^I és ε_y^I. Ekkor:

[18] Ahogy Hicks írja: „Ha X árának csökkenése növeli az Y iránti keresletet, akkor ebből nem következik szükségszerűen, hogy Y árának csökkenése is növeli az X iránti keresletet." [13] 90. old. lábj. Lásd még pl. [31] 146. old., [17] 144. old., [18] 100. old., [14] 162–164. old.

[19] A rugalmassági azonosságok levezetése megtalálható pl. [17] 144–147. old., és [31] 151–154. old.

I. (költségvetési) azonosság.

$$s_x\varepsilon_x^I + s_y\varepsilon_y^I \equiv 1\,, \tag{11}$$

vagyis a két rugalmassági érték költségvetési részesedésekkel súlyozott átlaga egységnyi.

II. (költségvetési) azonosság. A költségvetési részesedésre az előbb adott meghatározást használva igaz, hogy

$$s_x\varepsilon_x^{px} + s_y\varepsilon_y^{px} \equiv -s_x\,, \tag{12}$$

ahol ε_x^{px} az X jószágfajta keresletének sajátárrugalmassága, ε_y^{px} pedig az Y keresletének keresztárrugalmassága.

E formula természetesen Y termék saját- és X keresztárrugalmasságával, valamint Y költségvetési részesedésével – mutatis mutandis – ugyancsak felírható.

III. („interferencia"-) azonosság. Ha p_x, p_y illetve I azonos irányban és azonos százalékban változik, akkor teljesül, hogy

$$\varepsilon_x^{px} + \varepsilon_x^{py} + \varepsilon_x^I \equiv 0\,. \tag{13}$$

Az előző azonossághoz hasonlóan ez is felírható az Y jószágfajta keresleti rugalmasságaival.

Érdemi fejtegetéseinkre rátérve, a III. számú, „interferencia"-azonosság egyszerű átalakításával nyerjük, hogy:

$$\varepsilon_x^{py} \equiv -\varepsilon_x^{px} - \varepsilon_x^I\,, \tag{13a}$$

illetve

$$\varepsilon_y^{px} \equiv -\varepsilon_y^{py} - \varepsilon_y^I\,, \tag{13b}$$

Az I. rugalmassági azonosság alapján ugyanakkor észrevehető, hogy mivel az ε_x^I, illetve ε_y^I súlyozott számtani átlaga egységnyi, ezért valamelyik jószág jövedelemrugalmasságának átlag fölé való emelkedése szükségszerűen a másik rugalmassági érték átlag alá való süllyedésével jár együtt. Másként megfogalmazva: kéttermékes modellben az egyik jószág *luxusjellege* törvényszerűen a másik *létszükségleti* jellegét vonja maga után. A fenti, átalakított „interferencia"-azonosságra vonatkoztatva viszont ez azt jelenti, hogy X luxusjószágként való viselkedése, vagyis ε_x^I relatíve magas szintje az ε_x^{py} mutató értékére csökkentőleg hat, ami egyúttal növeli az X jószág kiegészítőként való megjelenésének lehetőségét. Az Y jószágnál kibontakozó hatások természetesen fordítottak, a jövedelemrugalmassági mutató relatíve alacsony szintje a helyettesítő jelleg megjelenését segíti elő. (Hangsúlyoznunk kell, hogy ezek az effektusok nem vezetnek biztosan ellentétes előjelű keresztárrugalmasságok kialakulásához, ez a jelenség az illető hatások viszonylagos gyengesége esetén virtuális marad.)

Úgy tűnik tehát, hogy a javak asszimmetrikus fogyasztási kapcsolatáért a preferenciák homotetikus[20] jellegének sérülése, vagyis a luxus-, illetve létszükségleti motívumok megjelenése a felelős. Ezt a megállapítást támasztja alá az a tétel, mely szerint *ha a fogyasztó preferenciái homotetikusak, akkor kéttermékes modellben mindkét jószágfajta keresletének keresztárrugalmassága azonos előjelű, tehát kapcsolatuk szimmetrikus.*

Bizonyítás. Induljunk ki ismét a fenti, átalakított „interferencia"-azonosságokból, és egyúttal tételezzük fel, hogy

$$\varepsilon_x^I = \varepsilon_y^I = 1\ , \tag{14}$$

tehát a preferenciák homotetikusak. Belátható, hogy ha

$$|\varepsilon_x^{px}| > 1\ ,$$

akkor ebből

$$\varepsilon_x^{py} > 0$$

következik, ami X jószág helyettesítő jellegére utal. Fejezzük most ki a (12) azonosságból ε_y^{px}-t:

$$\varepsilon_y^{px} \equiv -(1+\varepsilon_x^{px})\frac{s_x}{s_y} \tag{12a}$$

Mivel pedig

$$|\varepsilon_x^{px}| > 1\ ,$$

ebből következően

$$\varepsilon_y^{px} > 0\ ,$$

vagyis Y jószág is helyettesítő. Ugyanígy bizonyítható, hogy ha $|\varepsilon_x^{px}|$ értékét nullának, vagy egynél kisebbnek választjuk, X és Y viszonya továbbra is szimmetrikus marad, a kapcsolat jellege azonban független, vagy kiegészítő lesz. ■

A most igazolt összefüggés ikertételeként teljesül, hogy *ha egy kéttermékes modellben X és Y jószág keresletének keresztárrugalmassága ellentétes előjelű, akkor a negatív előjel mindig luxus, a pozitív pedig mindig létszükségleti terméket takar.*

---

[20] Homotetikus preferenciákról beszélünk, ha a jövedelemszint változása mennyiségileg igen, szerkezetileg azonban nem érinti a javak keresletét. Lásd erről pl. [31] 137–138. old., illetve [32] 103. old.

Bizonyítás. Tételezzük most fel, hogy

$$\varepsilon_y^{px} > 0, \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_x^{py} < 0\,.$$

Fejezzük ki ezután a (12) egyenletből ε_x^{px}-t:

$$\varepsilon_x^{px} \equiv -(1 + \frac{s_y}{s_x}\varepsilon_y^{px})\,. \tag{12b}$$

Az Y jószág keresletének keresztárrugalmasságára vonatkozó kiinduló feltevésünkből következik, hogy ekkor

$$|\varepsilon_x^{px}| > 1\,.$$

Mivel az átalakított „interferencia"-azonosság alapján

$$-\varepsilon_x^{px} - \varepsilon_x^{py} \equiv \varepsilon_x^{I}\,, \tag{13c}$$

az X sajátárrugalmasságára kapott érték behelyettesítésével adódik, hogy

$$\varepsilon_x^{I} > 1\,,$$

s ezért

$$\varepsilon_y^{I} < 1\,,$$

vagyis X jószág luxus-, Y pedig létszükségleti cikk. ■

A keresztárrugalmassági mutató torzításai nem-homotetikus preferenciák esetén

Előző fejtegetéseink arra engednek következtetni, hogy valamely jószág kiegészítő tulajdonsága luxusjellegének, helyettesítő tulajdonsága pedig létszükségleti jellegének következménye (is) lehet, asszimmetrikus viszony esetén pedig a keresztárrugalmassági értékek előjele javarészt e tényezőkre vezethető vissza.

Valóban igaz-e, hogy egy kéttermékes modellben a negatív keresztárrugalmassággal jellemezhető luxuscikk mindig kiegészíti, a pozitív keresztárrugalmassággal jellemezhető létszükségleti cikk pedig mindig helyettesíti a másikat? Vagyis igaz-e, hogy egy luxuscikk karakterisztikahalmazának a vele párhuzamosan fogyasztott létszükségleti cikk használati, élvezeti tulajdonságai *mindig* részhalmazát képezik?

Intuitív alapon is belátható, hogy nem. A modellünkben szereplő két termékfajtát ugyanis egymástól már első pillantásra teljesen függetlennek bizonyuló luxus-, illetve létszükségleti cikk is képviselheti (pl. a legmodernebb

CD-lemezek és a kenyér), amikor is a két karakterisztikahalmaz metszete üres halmazt alkot. Valóságos kiegészítő, illetve helyettesítő viszonyról tehát szó sincs. Összegezve: a luxusjelleg oka lehet a negatív, a létszükségleti pedig a pozitív keresztárrugalmasságnak, ezen előjelekből azonban korántsem következik az illető javak kiegészítő/helyettesítő kapcsolata.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ha a luxus-, illetve létszükségleti kategóriákba sorolható javak karakterisztikáira mégiscsak a halmaz–részhalmaz viszony jellemző, akkor – triviális módon – a luxustermék játssza a kiegészítő, a létszükségleti pedig a helyettesítő szerepét. Ekkor ugyanis éppen a luxustulajdonságok lesznek azok, amik mintegy kiegészítik a kommersz jószág élvezeti adottságait.

Igazolható viszont az is, hogy ha két jószág tulajdonságainak összefüggése a halmaz–részhalmaz relációval írható le, ez nem szükségszerűen jár együtt a luxus-, illetve létszükségleti motívumok megjelenésével. Ezzel gyakorlatilag azt állítjuk, hogy létezik ilyen konstellációt megjelenítő, homotetikus preferenciákat tükröző hasznossági függvény.

Állításunk igazolására tételezzük fel, hogy adott

$$U^0 = f(Z, X) \tag{15}$$

homotetikus hasznossági függvény, ahol Z és X kölcsönösen kiegészítik egymást, vagyis

$$\varepsilon_x^{pz} < 0 \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_z^{px} < 0\,.$$

(Legyen pl. Z a vaj, X pedig a kenyér.) Definiáljuk most Y jószágfajtát, ami Z és X meghatározott arány szerinti együttese. Igazolható, hogy ha a fenti U^0 hasznossági függvényünk rendelkezett a homotetikus tulajdonsággal, akkor az

$$U^1 = g(Y, X) \tag{16}$$

függvényünk is homotetikus marad,[21] vagyis teljesül ugyan, hogy Y jószág karakterisztikahalmaza magában foglalja X tulajdonságainak összességét, de az Y luxus-, illetve X létszükségleti jellegére utaló kritériumok megjelenése nélkül. Ebben az esetben a keresztárrugalmassági mutatók természetesen *szimmetrikus* kapcsolatot jeleznek, aminek jellegét az határozza meg, hogy az Y termékfajta felépítésében milyen arányban részesedik Z és X. (Ha például az Y nagyrészt Z-ből – vajból – és elenyésző mértékben X-ből – kenyérből – áll, akkor Y és X között minden bizonnyal kiegészítő viszonyt

[21] Belátható ugyanis, hogy az U^1 függvény ugyanazon Z és X mennyiségekhez ugyanakkora hasznosságértéket (indexszámot) rendel, mint U^0, azzal a különbséggel, hogy U^1 értelmezési tartományából hiányoznak azok a jószágkombinációk, melyekben az X termék kisebb arányban van jelen, mint amilyen arányban az Y jószágfajta felépítésében részt vesz.

regisztrálhatunk, míg az X jószágfajta Y-on belüli dominanciája helyettesítő kapcsolathoz vezet.)

Felvethető, hogy a most tárgyalt esetben észlelt, szimmetrikus viszonyt jelző keresztárrugalmasságok félrevezetőek lehetnek, mivel Y – többlettulajdonságai révén – mégis kiegészíti az X-et, ez utóbbi pedig helyettesíti Y-t. Álláspontunk szerint azonban a szimmetrikus reláció elfogadása korántsem logikátlan. Ha ugyanis – példánknál maradva – csak relatíve kevés vaj kerül a kenyérre, akkor az így nyert vajaskenyér nem annyira kiegészítője, hanem legfeljebb kiegészítő tulajdonsággal rendelkező helyettesítője a natúr kenyérnek. Ugyanígy: a centiméter vastag vajréteg alatt roskadozó kenyérszelet sem elsősorban helyettesítője, hanem inkább helyettesítő tulajdonsággal rendelkező kiegészítője a vaj nélküli kenyérnek.[22]

Következtetéseink szerint a javak kiegészítő vagy helyettesítő jellege (mint ok, vagy következmény) nem kapcsolható azok luxus- vagy létszükségleti kategóriákba való tartozásához, tehát a jövedelemrugalmassági értékek átlag körüli ingadozásának (vagyis a luxus- és létszükségleti motívumoknak) a keresztárrugalmasság előjelére gyakorolt hatása nem valóságos, hanem csak *pszeudo*-kiegészítő, vagy -helyettesítő tulajdonságra utal. Természetes ezért az a törekvés, hogy a keresztárrugalmassági mutató által hordozott torzító hatást kiszűrjük, vagy ha ez nehezen megoldható, egy másik, az említett torzítástól mentes indikátort keressünk.

Mivel az előbbiekben tárgyalt problémák a preferenciák homotetikus jellegének sérülésével függnek össze, ezért logikus, hogy a jószágok valóságos fogyasztási kapcsolatának tesztelése során ilyen preferenciák meglétét kell szimulálnunk. Elvi lehetőségként kínálkozik pl. az a módszer, amelynek segítségével megállapíthatnánk, hogy milyen lenne a keresztárrugalmasság mértéke illetve előjele, ha a preferenciákat homotetikussá igazítanánk, vagyis ha a jövedelmi hatás fogyasztási struktúrát befolyásoló szerepétől eltekintenénk. E megoldás közvetlen alkalmazása azonban kissé nehézkes. Célszerűbb tehát, ha egy eredményét tekintve analóg, kezelhetőség szempontjából azonban előnyösebb eljárást alkalmazunk.

Kitérő. Az árváltozás fogyasztási struktúrára gyakorolt hatásai

Egy kéttermékes modellben az egyik termékfajta (pl. X) árának megváltozása általános esetben elmozdulást idéz elő saját, de a másik jószág (Y) keresett mennyiségében is. Ezeket az elmozdulásokat a teljes ár-, illetve teljes

[22] Lásd még pl. [17] 144. old. és [18] 100. old. V.ö.: [18] 4.3. alfejezet, illetve [19], [20], [24] és [30].

keresztárhatással azonosíthatjuk, és két másik effektus, a helyettesítési és jövedelmi (kereszt-) hatás eredőjeként határozhatjuk meg.[23] E vizsgálatok analógiájára lehetőségünk van annak elemzésére, hogy egy jószágfajta árváltozására, illetve az ennek során kibontakozó helyettesítési és jövedelmi hatásra visszavezethetően milyen módosulások következnek be a fogyasztási struktúrában, vagyis a tulajdonképpeni X/Y arányban. Ha eredményeinket százalékos formában fejezzük ki, nyerjük a *helyettesítés rugalmasságát*[24], illetve ennek komponenseit.

A helyettesítés rugalmassága azt mutatja meg, hogy ha X és Y termékfajta árának aránya: p_x/p_y 1%-kal módosul, akkor ennek következtében hány %-kal változik a fogyasztás struktúráját kifejező X/Y arány. Bár esetünkben eredetileg csak X jószág ára mozdult el, belátható, hogy p_x/p_y százalékos változása – p_y állandósága esetén – p_x százalékos eltolódásával egyenlő. A mutató képletszerűen:

$$\delta = \frac{d(X:Y)}{X:Y} : \frac{d(p_x:p_y)}{p_x:p_y}, \tag{17}$$

amikor is $d(p_x : p_y) \to 0$. Mivel az ár(arány) elmozdulásával általában ellentétes irányú a keresleti struktúra változása, ezért a mutató értéke nullánál kisebb. Konvencionálisan azonban a rugalmassági mérőszám abszolút értékével dolgozunk.

Témánk szempontjából szükségesnek tartjuk a helyettesítés rugalmasságának árnyalt értelmezésmódjait bevezetni. Ennek megfelelően, ha a képletben szereplő $d(X : Y)$ differencia a *teljes* árhatás által kiváltott fogyasztási arányváltozást takarja, akkor a rugalmasság *nyers* mutatószámát (δ_R), ha pedig a *helyettesítési* hatásra visszavezethető módosulást, akkor a mutatószám *tiszta* változatát (δ_C) nyerjük. Könnyen belátható, hogy a két rugalmassági érték különbsége a keresleti arány *jövedelmi* hatásra visszavezethető változásával kapcsolatos, és arra utal, hogy az ár módosulásával járó jövedelmi konzekvenciák hogyan vettek részt a végső fogyasztási struktúra kialakításában. Ezt a többé-kevésbé reziduális faktort δ_M-mel jelöljük, és a továbbiakban *Maslow-féle tényezőnek*[25] nevezzük.

Felírható tehát, hogy:

$$\delta_R = \delta_C + \delta_M \tag{18}$$

[23] A továbbiakban ez utóbbi két effektust Hicks kompenzációs módszerére támaszkodva értelmezzük. Lásd [12] 62–82. old. A témáról lásd még [18] 71–74.old., [31] 15.4 alfejezet.

[24] Lásd még pl. [23] 90–91, 139–142, 266, 271–275. old., [8] 163–167. old., valamint [13] 134. old.

[25] A szükségleti/fogyasztási struktúra az egyén jövedelmi szintjének függvényében változik. E jelenség két kiváló kutatója *E. Engel* múlt századi porosz statisztikus, illetve az amerikai *A. H. Maslow*, aki e témát századunk első felében az emberi motiváció elméletében dolgozza ki. (Lásd pl. *Psychological Review*, 50. k., 1943. 370–396. old.) A fent bevezetett tényező ez utóbbi gondolkodó nevét őrzi.

Ha fogyasztónk preferenciái homotetikus jellegűek, akkor a jövedelmi hatás nincs befolyással a keresleti arányok alakulására. Ekkor a Maslow-féle tényező értéke zérus, a rugalmassági mutatószám nagysága kizárólag a helyettesítési hatás függvénye lesz,

$$\delta_R = \delta_C \tag{19}$$

egyenlőség teljesül. Ha viszont igaz, hogy X jószágfajta létszükségleti, Y pedig luxuscikk, akkor a fogyasztási arányok módosításában a jövedelmi hatás is részt vesz olymódon, hogy az $X : Y$ arányban a helyettesítési hatás által kiváltott elmozdulást Y javára korrigálja, mérsékelve δ_C értékét. Ennek megfelelően δ_M negatív előjelű.

X luxus-, illetve Y létszükségleti jellege esetén a hatás természetesen fordított, a Maslow-féle tényező értéke hozzáadódik a rugalmassági mutatószám tiszta változatához.

A keresztárrugalmasság és a helyettesítés rugalmassága közti kapcsolat

Kiindulásként tételezzük fel, hogy p_x – ceteris paribus – csökken. Ekkor, ha az Y keresletének keresztárrugalmassága – ε_y^{px} – zérus, belátható, hogy a jószágfajták költségvetési részesedése változatlan marad. Ha ugyanis az Y terméknek nemcsak az ára, de a kereslete sem módosul, akkor a vásárlását finanszírozó fogyasztói kiadás is konstans; adott nomináljövedelem mellett pedig ez azt jelenti, hogy a változó árú X jószágra fordított összeg nagysága sem mozdul el.

Igazolható, hogy a fentebb vázolt esetben a helyettesítés rugalmasságának (abszolút) értéke éppen egységnyi. A helyettesítés elaszticitása ugyanis, mint láttuk, azt mutatja meg, hogy ha a p_x, (s ennek következtében a $p_x : p_y$ arány) 1%-kal változik (esetünkben csökken), akkor hány %-kal módosul (jelen esetben nő) az $X : Y$ hányados értéke; e két arányszám szorzata pedig:

$$\frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{I_x}{I_y} = \frac{I_x : I}{I_y : I} = \frac{s_x}{s_y} \tag{20}$$

a jószágfajták költségvetési részesedésének arányát adja. Ha pedig a szorzótényezők közül a második ($X : Y$) ugyanolyan ütemben nő, mint amilyenben az első ($p_x : p_y$) csökkent – tehát $\delta = 1$ –, akkor az árarányokban bekövetkező változás nincs kihatással a fogyasztó jövedelmének termékfajták közötti megoszlására. (A most bemutatott összefüggés a rugalmassági mutató nyers és tiszta változatára egyaránt érvényes, míg azonban a *nyers* mutatószám egy konstans *nominál*jövedelem, addig a *tiszta* egy bizonyos hasznossági szinthez

– közömbösségi görbéhez – kötődő konstans *reál*jövedelem – vagyis kompenzált nomináljövedelem – felhasználási arányainak változására utal.)

A fenti gondolatmenetek analógiájára belátható, hogy ha ε_y^{px} negatív, akkor a konstans nomináljövedelem mellett számított δ_R (abszolút) értéke egységnyinél kisebb, a keresztárrugalmasság pozitív nagysága esetén pedig egynél nagyobb lesz.

A jövedelmi hatás keresztárrugalmasságot torzító jellegének kiszűrése

Az előzőekben bemutattuk, hogy a keresztárrugalmasság, illetve a helyettesítés nyers rugalmasságának értéke között egy-egy értelmű megfeleltetés áll fenn. Emlékezzünk arra is, hogy a helyettesítés rugalmasságának nyers értéke a mutatószám tiszta nagyságának, illetve a Maslow-féle tényező összegeként definiálható, ahol ez utóbbi faktor éppen az általunk kiszűrendő effektus erősségét, tehát a jövedelmi hatásnak a fogyasztási arányok elmozdulásában való szerepvállalását méri. Mint tudjuk, homotetikus preferenciák esetén δ_M zérussal egyenlő.

A homotetikus preferenciák szimulálása már most azt jelenti, hogy a Maslow-féle tényező értékét figyelmen kívül hagyjuk (tulajdonképpen nullának vesszük), vagyis a helyettesítés tiszta rugalmasságának nagyságát úgy tekintjük, mintha megegyezne a nyers mutatószám szintjével. Az ilymódon értelmezett jelzőszám szolgálhatna alapul ahhoz, hogy az egy-egy értelmű megfeleltetés által leírt transzformáció révén következtessünk a keresztárrugalmasság szimulált mértékére. Erre azonban talán nincs is szükség, hiszen a helyettesítés tiszta rugalmassága közvetlenül és torzítatlanul informál a hasznosság ordinális értelmezését feltételezve a javak fogyasztási kapcsolatáról.

Vagyis, ha p_x csökken, és

- $\delta_C < 1$, akkor az X és Y kiegészíti egymást, ha
- $\delta_C = 1$, akkor függetlenek, illetve ha
- $\delta_C > 1$, akkor helyettesítik egymást.

A termékfajták viszonyát ez a mutatószám *szimmetrikusnak* tünteti fel, hiszen a kiszámítását megadó képlet (17) osztóként szereplő törtjének:

$$\frac{d(p_x : p_y)}{p_x : p_y} \tag{17a}$$

értéke akár a p_x, akár a p_y oldaláról kiinduló változás miatt mozdul el 1%-kal, ez a mutatószám szintjére nézve közömbösnek bizonyul.[26] Ez a tény azonban korábbi következtetéseinket támasztja alá. Nevezetesen: homotetikus preferenciák esetén a javak fogyasztási kapcsolatát a kölcsönösség jellemzi.

Irodalom

1. Allen, R. G. D.: Nachfragefunktionen für Güter mit korrelierten Nutzen Zeitschricht für Nationalökonomie V. 1934.
2. Baumol, W. J.: Közgazdaságtan és operációanalízis. KJK. 1968.
3. Böhm-Bawerk, E. von: Capital und Capitalzins II. Innsbruck, 1902.
4. Böhm-Bawerk, E. von: Positive Theorie des Kapitales. Innsbruck, 1912.
5. Dominedo: Considerazioni intorno alla teoria della domanda. LXXXIII. 1933.
6. Edgeworth, F. Y.: Collected Papers I. London, 1925.
7. Fisher, I.: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices. New Haven, 1925.
8. Heller, F.: A közgazdasági elmélet története. Gergely R. könyvkereskedése, 1943.
9. Heller, F.: Közgazdaságtan. I. kötet. KJK. 1988.
10. Heretik, S.: A modern polgári közgazdaságtan elméleti alapjai. Kossuth Kiadó, 1977.
11. Hicks, J. R.: A Reconsideration of the Theory of Value. Economica, 1934.
12. Hicks, J. R.: A Revision of Demand Theory. Oxford, 1956. (Reprinted in 1986. Oxford University Press)
13. Hicks, J. R.: Érték és tőke. KJK. 1978.
14. Hoch, R.: Fogyasztás és ár. KJK. 1972.
15. Hotelling, H.: Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply. Journal of Political Economic XL. 1932.
16. Johnson, W. E.: The Pure Theory of Utility Curves. Economic Journal XXIII. 1913.
17. Kopányi, M. (Szerk.): Mikroökonómia. Economix Kiadó 1989.

[26] A helyettesítés rugalmasságának tiszta változata ugyanis egy meghatározott közömbösségi görbe mentén gördülő költségvetési egyenest feltételez, melynek mozgása kizárólag az árarányok változásáról tudósít, függetlenül attól, hogy ez konkrétan mely termékfajta árváltozásának eredménye. Vegyük észre azonban, hogy a nyers rugalmasság számításánál az árarányok ugyanolyan mértékű és irányú elmozdulása esetén más és más közömbösségi görbén kötünk ki, attól függően, hogy mely jószág ára módosult – a mutató szimmetriája ezért nem biztosított. (V.ö. a keresztárrugalmassági értékek asszimmetriáját és a nyers rugalmassággal való kölcsönös megfelelését.) Bár előző érvelésünkben az egyik jószág árának csökkenését, és a másik emelkedését tételeztük fel, belátható, hogy következtetéseinket ez nem zavarja, hiszen a keresztárrugalmasság előjelére az árváltozás iránya nincs hatással. A szimmetria-asszimmetria kérdéséről lásd még [22] 172. old.

18. Kopányi, M. (Szerk.): Mikroökonómia. Műszaki - Aula Kiadó, 1993.
19. Lancaster, K.: A New Approach to Consumer Theory. Journal of Political Economy, 84. 1966.
20. Lancaster, K.: Modern Consumer Theory. Columbia University, New York, Edward Elgar 1991.
21. Lehmann, H.: Határhaszonelmélet. Kossuth Kiadó 1971.
22. Mátyás, A.: A modern polgári közgazdaságtan története. KJK, 1973.
23. Mátyás, A.: A modern közgazdaságtan története. Aula Kiadó, 1993.
24. Miles, L. D.: Értékelemzés. KJK, 1973.
25. Pareto, V.: Manuel d'économie politique. Paris, 1909.
26. Pearce, D. W. (Szerk.): A modern közgazdaságtan ismerettára. (Macmillan Dictionary of Modern Economics) KJK. 1993.
27. Samuelson, P. A. - Nordhaus, W. D.: Közgazdaságtan II. kötet. KJK, 1987.
28. Schultz, H.: Interrelations of Demand. Journal of Political Economy XLI. 1934.
29. Sluckij, E.: Sulla teoria del bilancio del consumatore. Giornale degli Economisti II. 1915.
30. Tomcsányi, P.: A fogyasztói értékítélet és a piacos termelés (akadémiai székfoglaló). Akadémiai Kiadó, 1993.
31. Varian, H. R.: Mikroökonómia középfokon. KJK. 1991.
32. Zalai, E.: Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba, KJK. 1989.

THE THEORETICAL PROBLEMS OF DEFINITION OF SUBSTITUTES AND COMPLEMENTS (PART ONE)

The modern economics defines the substitute or complementary relationship between çommodities usually by the positivity or the negativity of the cross elasticity of demand. This paper argues if the consumer preferences aren't homotetic, the cross elasticity gives only biased information about the relation of the commodities. The paper examines the possibility of eliminating this bias and suggests the application of another definition based on a new criterion of substitutes and complements.

RICHARD A. BREALEY – STEWART C. MYERS: *Modern Vállalati Pénzügyek I–II.* McGraw-Hill, New York – Nemzetközi Bankárképző Központ – Panem – Budapest, pp 993.

Nemrégiben került a szakkönyvesboltok polcaira az angol-amerikai szerzőpáros nagysikerű tankönyvének harmadik magyar kiadása, ami jól jelzi azt a hiánypótló szerepet, amit a pénzügyi közgazdaságtan hazai szakirodalmában e mű betölteni igyekszik.

A világon számos Corporate Finance, Principles of Corporate Finance és hasonló című könyv van forgalomban – kettő azonban különösen népszerű: a Brigham-Gapensky szerzőpáros könyvét a „diákok kedvencének" tartják, míg ez a könyv a "professzorok kedvence" rangot vívta ki magának. Érdemes tehát áttekinteni, hogy mire vállalkoztak a szerzők a tankönyv megírásával, mennyiben sikerült céljaikat elérni, s hogy miért válhatott e mű a hazai professzorok körében is az egyik kedvenc pénzügyi tankönyvvé.

A közelmúlt évtizedeiben a közgazdaságtan egyes ágaiban egy olyan trend bontakozott ki, amelynek során a közgazdasági elemzés módszertana egyre egységesebbé vált, erőteljesen támaszkodva a közgazdaságtanban lefektetett értékelméleti alapösszefüggésekre. Azok az ún. alkalmazott közgazdaságtani diszciplínák, amelyek korábban elsősorban empirikus érdeklődést tanúsítottak – gondoljunk például a munkagazdaságtanra, az emberi erőforrások közgazdaságtanára vagy a pénzügyi tudományokra –, ma már a közgazdaságtani értékelméletre alapozott egységes módszertan alapján folytatják vizsgálódásaikat. Így a korábban erősen leíró jellegű, az üzleti és pénzügyi élet egyes területeinek specialistáit felvonultató pénzügyi tudomány is erőteljes átalakuláson ment keresztül, amelynek eredménye, hogy kialakult az ún. „pénzügyi közgazdaságtan", amely nem csupán elnevezésében, hanem tartalmában és módszertanában is egy alkalmazott közgazdaságtani tudományág. A pénzügyi közgazdaságtan tárgyát a tőkepiacok működésének, a tőkepiaci eszközök kínálatának és árazásának kérdései képezik. A tudományterület módszertanának alappillére pedig, hogy az eszközök árazása során helyettesítő pénzügyi termékek árazását hívja segítségül, ahol az árazott eszköz és a helyettesítő eszköz árának összhangját a piaci arbitrázs állítja helyre. A pénzügyi közgazdaságtan vizsgálatának tárgyát erős leegyszerűsítéssel négy nagy, egymással összefüggő területre lehetne osztani: a pénzügyi piacok működésének és hatékonyságának elemzésére, a kockázat és a hozam (ár) összefüggés vizsgálatára, az opciós árelméletre és az ún. vállalati pénzügyi kérdésekre.

A *Modern Vállalati Pénzügyek* talán az első olyan magyar nyelven megjelent átfogó szakkönyv, amely a társaságok pénzügyi döntéseinek elemzését ebben a korszerű és egységes módszertani alapokon nyugvó pénzügyi közgazdaságtani keretben tárgyalja. A fentiekben felsorolt négy fő vizsgálati terület közül a szerzők céljainak és a könyv címének megfelelően a vállalati pénzügyek kerültek előtérbe. Ugyanakkor azonban – s talán ez emeli ki a könyvet a hasonló címmel és témával megjelent egyéb szakkönyvek sorából – nem ragadja ki a vállalati pénzügyek speciális kérdéseit a pénzügyi közgazdaságtan egészének összefüggéseiből, hanem azt igyekszik bizonyítani, hogy a vállalati pénzügyi döntések is illeszthetők az általános módszertani keretbe. Emellett a kötet számos olyan új tudományterületről is áttekintést ad az olvasó számára, amelyek eddig hiányoztak a vállalati pénzügyekkel foglalkozó tankönyvekből és szakkönyvekből. Ilyen például az ún. reálopciókra vonatkozó elméletek tárgyalása, ami a pénzügyi piacokon forgalmazott opciók árazását segítségül hívva próbál értékelni vállalaton belül meglevő, reáleszközökre vonatkozó lehetőségeket (opciókat).

A kétkötetes mű első részében a szerzők megmutatják, hogyan helyezhető el egy (részvény)társasági formában működő gazdasági vállakozás a tőkepiac egészében, milyen módon értelmezhető az érték fogalma a vállalati pénzügyi döntésekben és hogyan nyílik lehetőségünk a vállalati eszközök értékelésére a kockázat figyelembevétele nélkül.

A második részben kerül bevezetésre a kockázat fogalma, itt kaphat az olvasó egy rövid összefoglalást arról, hogy miképpen értelmezi és méri a kockázatot a pénzügyi közgazdaságtan, és hogyan vehető figyelembe a kockázat a pénzügyi és reáleszközök árazásában.

A harmadik rész a vállalatok pénzügyi eszközökkel történő finanszírozásának bemutatásán keresztül mutat rá a pénzügyi piacok hatékonyságának és a vállalati pénzügyek összefüggéseire, a piaci hatékonyság elméleti és gyakorlati jelentőségére.

A negyedik résztől kezdve tér rá a tankönyv a szűkebben vett vállalati pénzügyi problémakörök tárgyalására, természetesen kihasználva az előző részekben bevezetett alapösszefüggéseket. Ezekben a fejezetekben kerül sor a vállalati osztalékpolitika és a tőkeszerkezeti politika elemzésére, a vállalati pénzügyi tervezés és teljesítményértékelés áttekintésére.

A második kötetben (hetedik rész) vezetik be a szerzők a negyedik nagy pénzügyi közgazdasági ágat, az opciós árelméletet, és rámutatnak arra, hogy az árelmélet alkalmazásával miként válhatnak megalapozottabbá az eddig csupán intuitív alapon kezelt vállalati pénzügyi döntések.

A második kötet további részei emellett még számos olyan speciális vállalati pénzügyi témát tartalmaznak – például a nemzetközi vállalati pénzügyek, a vállalatfelvásárlások és fúziók gazdaságtana stb. – amelyek feldolgozására ebben az elméletileg is jól megalapozott kontextusban még csak szórványosan került sor a hazai irodalomban.

Aki tehát kedvet kapott, hogy a későbbiekben a pénzügyi közgazdaságtan valamely ágával, vagy azon belül is a vállalati pénzügyek egy-egy kérdésével tudományos igénnyel foglalkozzon, tekintse a Modern Vállalati Pénzügyeket egy olyan alapműnek, ami közérthető módon segít eligazodni a terület alapvető összefüggéseiben, ugyanakkor számos utalást és hivatkozást tartalmaz az egyes problémák szakértőinek tudományos munkáira, így segítheti az indulást egy-egy probléma elmélyültebb kutatásában. Külön szeretném felhívni a figyelmet a könyv legutolsó alfejezetének címére: „Amit nem tudunk: 10 megoldatlan probléma a pénzügyekben".

Farkas Ádám

KOMLÓSI SÁNDOR: *Bevezetés az egyensúlyi és optimalizáló modellek vizsgálatának matematikai módszereibe.* Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs, 1994. pp. 466.

A Janus Pannonius Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kara egy új képzési struktúrával és hozzá kapcsolódó tantárgyi reformmal igyekszik megfelelni azoknak az elvárásoknak és követelményeknek, melyeket a társadalmi-gazdasági változások a felsőfokú intézményektől megkövetelnek. Ezek a változások a matematika alaptárgyak oktatását is érintették.

Új tantárgyi programok kidolgozása vált szükségessé, ami azt eredményezte, hogy a korábbi tankönyvek és jegyzetek már nem feleltek meg maradéktalanul az oktatás céljainak. A korszerűsítési program keretében született új tankönyvek egyike a bemutatásra kerülő *Bevezetés az egyensúlyi és optimalizáló modellek vizsgálatának matematikai módszereibe* című könyv.

A szerző a bevezetőben olyan egyszerű közgazdasági problémákat vázol, amelyek leírásához, kezeléséhez vagy megoldásához nélkülözhetetlen a matematikai analízis és lineáris algebra eszközrendszere. Aláhúzva ezzel a korszerű matematikai ismeretek szükségességét közgazdasági problémák egzakt tárgyalásában.

A tankönyv lényegében két részre bontható. Az első hét fejezet a döntéselmélet alapproblémájának az optimalizáló modellek segítségével történő megoldásához szükséges matematikai analízisbeli fogalmak, tételek és eljárások leírását tartalmazza. A következő négy fejezet a lineáris algebra alapjaival, a lineáris terek és bázisaik segítségével megfogalmazható elemi bázistranszformációs eljárással és annak alkalmazásaival ismerteti meg az olvasót. Bár alaptárgyról van szó, a szerző ügyes kézzel épít be olyan részeket, melyek a megfelelő tudományágak legújabb eredményeit fémjelzik.

Az első fejezet a valós számhalmaz axiomatikus felépítését írja le, kiemelve a teljességi axióma szerepét. A valós számhalmaz szerkezetének feltérképezése ugyanis nélkülözhetetlen a függvények tulajdonságainak és a határátmenet-művelet fogalmának pontos megértéséhez. Az egyváltozós függvényeket tárgyaló fejezet lényegében összefoglalja és osztályozza a függvényekkel kapcsolatos középiskolai ismereteket, kiegészítve olyan, egyébként a középiskolai törzsanyagban homályban maradt fontos elméleti kérdés tisztázásával, mint például az exponenciális függvény értéke irracionális helyeken, vagy a szakaszonként szigorúan monoton függvények inverzei. A többváltozós függvényekről szóló fejezetben a k-dimenziós euklideszi terek lineáris és metrikus struktúrájának tárgyalása után két elemi szélsőérték-számítási módszer, a szintvonal módszer és az eliminációs módszer kerül ismertetésre.

A határátmenet-művelet a közös motívum a következő fejezetekben. A sorozatokra vonatkozó tételek általános alakban, vektorsorozatokra vannak kimondva, ha annak van értelme. Egyébként számsorozatokra. A függvények határértéke és folytonossága problematikájának leírása is a többváltozós függvényekre épül. A differenciálszámítás című fejezetben az egyváltozós függvények differenciálszámítása után a fogalom kiterjesztéseként a többváltozós függvények iránymenti és parciális differenciálhányadosa és deriváltja után a folytonosságot is biztosító Fréchet-féle általánosításig jutunk el. A korábbi fejezetek eredményeit használja ki a függvényvizsgálat analitikus módszereit leíró fejezet, melynek középpontjában az egyváltozós függvények lokális szélsőértéke létezése szükséges és elégséges feltételeinek különböző alakjai állnak.

A könyv második részében a lineáris algebra alapfogalmai és eljárásai között a mátrix-műveletek, kvadratikus formák, kvadratikus mátrixok sajátértékei, sajátvektorai és főtengelytranszformációja, kvadratikus mátrixok inverze és determinánsa szerepel. A vektorrendszerekkel kapcsolatos lineáris függetlenség és rang fogalom indukálja a vektorrendszer által generált altér bázisa és dimenziója fogalmának bevezetését, és azok összefüggéseinek tárgyalását.

A bázistranszformáció a központi fogalma a következő résznek, mely lehetőséget ad különböző vonatkoztatási rendszerek értelmezésére, és egy vektor adott vonatkoztatási rendszerbeli koordinátáinak kiszámítására. Az elemi bázistranszformáció egy sor alkalmazására látunk példát: függetlenség vizsgálat, kompatibilitás vizsgálat, vektorrendszer és mátrix rangjának meghatározása, lineáris egyenletrendszer megoldása, kvadratikus mátrix inverzének, determinánsának és inerciájának meghatározása. A nóvum, melyet a könyv kínál a hozzáértő számára, hogy a többváltozós függvények optimalitási kritériumai vizsgálata során elegendő egy adott szimmetrikus mátrix, a Hesse-mátrix sajátértékei előjelének az ismerete. Az ebben a kategóriában írt tankönyvek a Hesse-mátrix definitségi vizsgálatára a hagyományos, determinánsok kiszámításán alapuló eljárást ajánlják. Ez a könyv ehelyett a Hesse-mátrix inerciája segítségével történő vizsgálatot preferálja, mely az inercia kiszámítására szolgáló Cottle-algoritmus egyszerűsége miatt gyakorlati szempontból sokkal gyorsabb. A pivot algoritmus alkalmazásai között végül eljutunk a lineáris programozási feladat megoldására szolgáló szimplex algoritmusig.

A könyv utolsó, tizenkettedik fejezete a többváltozós függvények feltétel nélküli és egyenlőség-feltételes szélsőérték-problémájával foglalkozik, összekapcsolva a lineáris és analitikus rész tartalmát. Két példát látunk statisztikából vett függvényillesztési szélsőérték feladatra. Végül pedig eljutunk az egyenlőség-feltételes szélsőérték feladatok megoldásában alapvető szerepet játszó Lagrange-féle multiplikátor módszerhez.

A könyv egyetemi szintű közgazdász képzés céljából íródott. Tartalma és a feldolgozás módja alapján azonban szakmailag megalapozott módon ajánlhatjuk nem közgazdasági jellegű kurzusok számára is, mert az egyes fejezetek közgazdasági elkötelezettség nélkül tárgyalják az egyes témaköröket. Ugyanakkor ajánlható olyan kurzusok számára is, amelyek nem olyan széles matematikai apparátust igényelnek, mint amilyet a könyv átfog, mert az egyes fejezetekből az általánosított részek elhagyásával szűkebb alapkurzus anyaga is könnyen összeállítható.

Gyetván Ferenc