DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLEK IRÁNYÍTHATÓSÁGA[1]

MOLNÁR SÁNDOR ÉS SZIDAROVSZKY FERENC
Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem

Két termelői-fogyasztói modell ártrajektóriájának irányításával foglalkozunk. Az alapmodell esetén kimutatjuk, hogy mindig található nemnegatív irányítás, ha a célul kitűzött ársorozat nem nagyon csökkenő. A módosított modell pedig tetszőleges ársorozatra irányítható.

1. Bevezetés

Egy korábbi dolgozatunkban megvizsgáltuk diszkrét dinamikus oligopol modellek irányíthatóságát (Molnár és Szidarovszky, 1994a). Kimutattuk, hogy a Cournot-féle becslések mellett a termelési vektor akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha csak két, nem azonos marginális költségfüggvénnyel rendelkező termelő alkotja a termelési oldalt. Adaptív becslések mellett pedig megadtuk az irányíthatóság szükséges és elégséges feltételét. Dinamikus oligopol modellek olyan kiterjesztésével foglalkoztunk a Molnár és Szidarovszky (1994b,c) dolgozatokban, amikor a termelők minden egyes időszakban továbbra is maximalizálják hasznukat, viszont az ár a keresleti-kínálati viszonytól függően változik. A modellek globális aszimptotikus stabilitását vizsgáltuk meg, és szükséges és elégséges stabilitási feltételeket adtunk. Jelen dolgozatunkban ugyanezeknek a rendszereknek az irányíthatóságával foglalkozunk. Szükséges és elégséges feltételeket adunk a teljes ártrajektória irányíthatóságára.

2. Az alapmodell irányíthatósága

Ebben a paragrafusban a Molnár és Szidarovszky (1994b) által bevezetett dinamikus modellel foglalkozunk. Feltesszük ismét, hogy N a termelők száma,

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k$$

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. november 17.

(mindhárom együttható pozitív) a k-dik termelő költségfüggvénye, valamint $d = Dp + d$ ($D < 0$, $d > 0$) a piac keresleti függvénye. Feltételeztük azt is, hogy minden egyes $t \geq 0$ időpontban az összes termelő először megbecsüli a várható árat, majd a várható hasznát maximalizálja, és a profitmaximalizáló termékmennyiséget választja termelési programjának a t-dik időpontban ($t = 0, 1, 2, \ldots$). Az árdinamizmust a keresleti-kínálati viszony vezérli, azaz az ár növekszik, ha a kereslet meghaladja a kínálatot, csökken, ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, és változatlan marad a kereslet és kínálat egyenlősége esetén. Feltesszük továbbá, hogy a kontroll csak a keresleti függvényre vonatkozik. Hogyha az ár és/vagy a költségfüggvények irányítása is folyik, akkor a profitmaximalizáló feltételből közvetlenül leolvasható, hogy ebben csak az irányítási változók hányadosa játszik szerepet. Így az egyik mindig 1-nek választható. Ha $p_k^E(t)$ jelöli a k-dik termelő árelőrejelzését a t-dik időpontra, akkor a Szidarovszky és Molnár (1994b) modell alapján

$$p(t+1) = p(t) + K\left(\big(Dp(t) + d\big)u(t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k}\right), \tag{1}$$

ahol $u(t) > 0$ jelöli az irányítást.

Tegyük fel először, hogy minden termelő ismeri a pontos árat. Ebben a *teljes információs* esetben

$$p_k^E(t) = p(t)\ ,$$

így az (1) modell átírható a következő alakra:

$$K\big(Dp(t) + d\big)u(t) = p(t+1) - p(t) + K\sum_{k=1}^{N} \frac{p(t) - b_k}{2B_k}. \tag{2}$$

Jelölje ezután $p^*(t)$ ($t \geq 0$) az előírt ártrajektóriát, és tegyük fel, hogy a kezdeti $t = 0$ időpontra $p(0) = p^*(0)$. Tegyük fel továbbá, hogy

(A) $$Dp^*(t) + d > 0 \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)\ .$$

Ekkor pozitív irányítás a (2) egyenlet alapján akkor és csak akkor létezik, ha

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{p^*(t) - b_k}{2B_k}\ . \tag{3}$$

Tegyük most fel, hogy

(B) $$p^*(t) > b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N \quad \text{és} \quad t = 0, 1, 2, \ldots)\ .$$

Ekkor a (3) egyenlőtlenség úgy értelmezhető, hogy a $\{p^*(t)\}$ sorozat nem lehet nagyon csökkenő.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők *statikus* becsléseket alkalmaznak. Ekkor

$$p_k^E(t) = p(t-1)\,,$$

és a (2) egyenlet a következőképpen módosul:

$$K\big(Dp(t)+d\big)u(t) = p(t+1) - p(t) + K\sum_{k=1}^{N}\frac{p(t-1)-b_k}{2B_k}\,, \tag{4}$$

így pozitív irányítás akkor és csak akkor lehetséges, ha

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N}\frac{p^*(t-1)-b_k}{2B_k}\,. \tag{5}$$

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor az összes termelő *adaptív* becslést alkalmaz:

$$p_k^E(t) = \alpha_k(t)p(t-1) + \big(1-\alpha_k(t)\big)p_k^E(t-1)\,, \tag{6}$$

ahol $0 \le \alpha_k(t) \le 1$ tetszőleges $k = 1,2,\ldots,N$ és $t = 0,1,2,\ldots$ esetén. Egyszerű számolással láthatjuk, hogy ebben az esetben az (5) feltétel alakja:

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k(t)p^*(t-1) + \big(1-\alpha_k(t)\big)p_k^E(t-1) - b_k}{2B_k}\,. \tag{7}$$

Ez a feltétel közvetlenül csak akkor alkalmazható, ha az $\{\alpha_k(t)\}$ sorozatok előre adottak. A továbbiakban olyan feltételt vezetünk be, amely biztosítja, hogy tetszőleges $0 \le \alpha_k(t) \le 1$ együtthatók mellett létezzék pozitív irányítás. Tegyük fel az előzőeken kívül, hogy

(C) $$p_k^E(0) > b_k \qquad (k = 1,2,\ldots,N)\,.$$

Vegyük észre először, hogy a (B) feltétel és a (6) rekurzió alapján $p_k^E(t) > b_k$ tetszőleges k és $t \ge 1$ mellett is. Vezessük be ezután a következő jelöléseket:

$$p_k(0) = p_k^E(0)\,,$$

és $t \ge 1$ esetén

$$p_k(t) = \min\{\, p_k^E(0); p^*(0); p^*(1); \ldots; p^*(t-1)\,\}\,.$$

Nyilvánvaló, hogy a (7) egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden k, t és tetszőleges $\alpha_k(t) \in [0,1]$ együtthatók mellett, ha

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{p_k(t-1) - b_k}{2B_k} \,. \tag{8}$$

Tegyük fel ezután, hogy az összes termelő *extrapolatív* becsléseket választ. Vagyis $k = 1, 2, \ldots, N$ és $t \geq 2$ esetén

$$p_k^E(t) = \alpha_k(t)p(t-1) + \bigl(1 - \alpha_k(t)\bigr)p(t-2) \,, \tag{9}$$

ahol az $\alpha_k(t)$ együtthatók valamennyien pozitívak. Könnyen látható, hogy ebben az esetben a (7) feltétel a következőképpen módosul:

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k(t)p^*(t-1) + \bigl(1 - \alpha_k(t)\bigr)p^*(t-2) - b_k}{2B_k} \,, \tag{10}$$

feltéve, hogy $p(0) = p^*(0)$ és $p(1) = p^*(1)$. Hasonlóan az adaptív esethez, ez az egyenlőtlenség csak akkor alkalmazható, ha az $\{\alpha_k(t)\}$ sorozatok előre adottak. Ellenkező esetben olyan feltételeket kell találnunk, amelyek tetszőleges együttható sorozatok esetén biztosítják pozitív irányítás változók létezését. Tegyük most fel, hogy az (A) feltételen kívül

$$\text{(D)} \quad 0 < a_k(t) \leq \alpha_k(t) \leq A_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N \quad \text{és} \quad t \geq 2) \,, \tag{11}$$

ahol $\{a_k(t)\}$ és $\{A_k(t)\}$ ismert sorozatok. Vezessük be a következő jelölést:

$$Q_k(t) =$$

$$\min\{a_k(t)p^*(t-1) + \bigl(1 - a_k(t)\bigr)p^*(t-2); A_k(t)p^*(t-1) + \bigl(1 - A_k(t)\bigr)p^*(t-2)\} \,,$$

ekkor (10) akkor és csak akkor teljesül tetszőleges (11)-nek eleget tevő $\alpha_k(t)$ együtthatók mellett, ha minden $t \geq 1$ esetén

$$p^*(t+1) > p^*(t) - K\sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k(t) - b_k}{2B_k} \,. \tag{12}$$

3. A módosított modell irányíthatósága

A Szidarovszky és Molnár (1994c) dolgozatban az alapmodell olyan módosításával foglalkoztunk, amikor minden egyes időpontban megköveteltük a kereslet és kínálat egyensúlyát, és a rendszer dinamizmusát az ár-előrejelzések adták. Ismét feltéve, hogy az irányítás csak a keresletfüggvényt befolyásolja, a modell a következőképpen írható fel:

$$\big(Dp(t)+d\big)u(t)=\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^E(t)-b_k}{2B_k}\,. \tag{13}$$

Az (A) és (B) feltétel fennállásakor a *teljes információs* esetben és *statikus* becslések mellett is $p_k^E(t)>b_k$, így a (13) egyenletet pontosan egy pozitív $u(t)$ érték elégíti ki, így mindig van pozitív kontroll. Ha ezeken felül a (C) feltétel is teljesül, akkor *adaptív* becsléseknél is az előző esethez hasonlóan $p_k^E(t)>b_k$ tetszőleges k és t mellett, így pozitív irányítás akkor is mindig található. Tekintsük végül az *extrapolatív* becslések esetét. Ha (B) feltételeken kívül $A_k(t)\leq 1$ tetszőleges k és t esetén, akkor $Q_k(t)>b_k$.

Így tetszőleges $\{\alpha_k(t)\}$ sorozatok mellett (13) jobb oldala pozitív, így pozitív irányítás mindig található. Ha valamilyen $t\geq 2$ mellett valamelyik termelő olyan $p_k^E(t)$ árbecslést kap, amelynek megfelelő profit-maximalizáló termelésmennyiség nem pozitív, akkor az csak zérus lehet. Ekkor (13) jobb oldalán a megfelelő tagot 0-val kell helyettesítenünk. Ha legalább egy termelőnél a profit-maximalizáló termékmennyiség pozitív, akkor is pozitív a (13) jobb oldala, így pozitív irányítás ismét létezik. Ha pedig az összes termelő optimális termelési programja zérus, akkor $u(t)=0$ a megfelelő irányítás.

4. Megjegyzések

A költségfüggvényekre tett feltételek a következőképpen értelmezhetők. A $B_k>0$ feltétel a költségfüggvény szigorú konvexitását követeli meg.Minthogy $b_k=C_k'(0)$ és $c_k=C_k(0)$, az első feltétel a költségek $x_k=0$ helyen való szigorú növekedését írja elő, a második pedig feltételezi a termelési mennyiségektől függetlenül létező költségeket is. A keresleti függvényben $D<0$ feltételezi, hogy a keresleti függvény az árban szigorúan csökken, $d>0$ pedig szükséges ahhoz, hogy pozitív kereslet egyáltalán fellépjen. (A) feltétel szerint a $p^*(t)$ árak mellett a piaci kereslet mindig pozitív. A (B) feltétel szerint az adott ársorozat mellett az összes termelő profit-maximalizáló termelési programja is pozitív, amint ezt a Szidarovszky és Molnár (1994b) dolgozatban fel is tettük. A (C) feltétel azt jelenti, hogy a $t=0$ időpontban az összes termelő olyan árbecslést választ, amely mellett a kezdeti profit-maximalizáló termelési programjuk pozitív. Adaptív becslések esetén általában felteszik, hogy az $\alpha_k(t)$ együtthatók pozitívak. Dolgozatunkban megengedjük az $\alpha_k(t)=0$ esetet is, amely annak felel meg, ha a k-dik termelő a t időpontban ismét az előző árbecslését használja. A $\{p_k(t)\}$ mennyiségek definiciójából közvetlenül leolvasható, hogy $p_k(t-1)$ a k-dik termelő lehető legalacsonyabb árbecslése a t-dik időpontra vonatkozóan. Extrapolatív becslések esetén ehhez hasonlóan a $Q_k(t)$ mennyiség is felfogható úgy, mint a lehetséges minimális előrejelzés, amelyet a k-dik termelő a t időpontban kaphat várható árról. Megjegyezzük, hogy az összes feltételi (3), (5), (7), (8), (10) és (12) egyenlőtlenségek nem kívánják meg, hogy a $\{p^*(t)\}$ sorozat növekedő legyen, csupán azt jelentik, hogy a $p^*(t+1)-p^*(t)$ árváltozások alulról korlátosak legyenek, ahol az alsó korlát a (B) és (C) feltételek alapján mindig negatív a teljes információs esetben a statikus és adaptív becslések mellett. Megjegyezzük továbbá, hogy $\alpha_k(t) \leq 1$ (vagy $A_k(t) \leq 1$, $t \geq 0$) mellett extrapolatív becslések esetén is negatív az alsó korlát. Ha $\alpha_k(t) > 1$, akkor elképzelhető, hogy valamilyen időpontban az egyes termelők profit-maximalizáló termelési mennyisége nem adódik pozitívnak. Ilyenkor zérus az optimális termelési mennyiség, így (10) és (12) jobb oldalának második tagja zérus, ha az összes termelő esetén zérus a profit-maximalizáló termelési program, és pozitív, ha legalább egy termelő optimális termelési mennyisége pozitív.

Megjegyezzük végül, hogy a módosított modell esetén az (A), (B) és (C) feltételek mellett mindig van pozitív irányítás, ha a termelők teljes információval rendelkeznek az árral kapcsolatban, vagy statikus, vagy adaptív becsléseket alkalmaznak. Extrapolációs becslések esetén is mindig van nemnegatív irányítás.

A modellek és az irányítás a többtermékes esetre minden további nehézség nélkül kiterjeszthető. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasókra bízzuk.

Irodalom

1. Molnár S. és Szidarovszky F. (1994a) A dinamikus oligopol probléma irányíthatóságáról. Szigma, 1994/3. 95–102.
2. Molnár S. és Szidarovszky F. (1994b) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról. Szigma, 1994/4. 207–219.
3. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994c) Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben. Szigma, 1994/4. 221–227.

ON THE CONTROLLABILITY OF THE DINAMIC PRODUCER-CONSUMER MODEL

In this paper we examine the control of price trajectories of two production-consumption models. We prove that in case of the base model there exists a nonnegative control if the target price series is not decreasing very much. The modified model is controllable for arbitrary price series.