Szigma, XXVI. (1995) 3–4.

IDŐSOROK FAKTORANALÍZISE

ZIERMANN MARGIT – MICHALETZKY GYÖRGY
BKE Matematikai és Számítástechnikai Intézet
ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Jelen cikk a Magyar Operációkutatási Társaság 1994. évi rendes Közgyűlésén elhangzott előadásnak írásos változata. Az előadás első részét Ziermann Margit, a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem egyetemi tanára, a Társaság első elnöke tartotta. Előadásának szövege megmaradt számítógépen, így annak hű másolatát közöljük most.[1] A második részben Michaletzky György folytatta a Ziermann Margit által kifejtett gondolatokat.

I. rész (Ziermann Margit)

Előadásunk két kutatói kollektíva időben és gondolataiban is egymásra épülő, személyeiben is összefonódó munkásságának, közös gondolkodásának eredményeiről, problémáiról, a kutatás jelen stádiumáról kíván képet adni. Tesszük ezt abban a reményben is, hogy – megismerkedve e témakörrel – talán mások is kedvet kapnak a felvetett problémák továbbgondolására.

Közgazdasági idősorokkal kapcsolatos közös kutatásaink 1968-ban kezdődtek el, s nagy intenzitással folytatódtak a hetvenes években, amikor is az első team három tagja (Bánkövi György, Veliczky József és Ziermann Margit) az Országos Tervhivatalban, illetve közülük ketten annak Számítástechnikai Központjában dolgoztak. Ekkoriban installálták a Tervhivatal első modern nagyteljesítményű elektronikus számítógépét, mely csábító lehetőségeket kínált a kor színvonalán álló operációkutatási (például nagyméretű matematikai programozási) és más, például idősoros modellek kipróbálására, kezdve a különféle típusú függvények illesztésén, egészen az ún. Box-Jenkins modellek verifikálásáig. Ebben az évtizedben a nemzetközi ökonometriai szakirodalomban, az Econometric Society európai és más konferenciáin a Box-Jenkins modellek vezették a preferált modellezési technikák listáját, bár ezek ekkor még elsősorban skalár és nem vektor értékű idősorokkal foglalkoztak.

A 70-es évek elején a hagyományos népgazdasági tervezés lényegében statikus, és valóságképünk e tervezői felfogással ellentétes volt. Azoknak a

[1] Az előadás közlését azért is nagyon fontosnak tartjuk, mert ezután nem sokkal Ziermann Margit eltávozott közülünk, így valószínűleg ez volt az utolsó előadása *(A szerk.)*.

közgazdasági iskoláknak a nézeteivel azonosultunk, amelyek az országok gazdaságát dinamikus sztochasztikus rendszernek tekintették, s ezért a gazdasági idősorok tudományosan is megalapozott vizsgálatát fontosnak, a gazdasági folyamatok prognosztizálása egyik nélkülözhetetlen eszközének ismerték el. Akkor is és most is fontos kérdés, hogy e követelményeknek milyen mértékében tud a matematikai modellezés eleget tenni.

Élve a számítástechnikai lehetőségekkel, a tervezésben fontos szerepet játszó közgazdasági makrokategóriák empirikus idősoraira az ún. lépésenkénti (stepwise) regressziószámítási programok felhasználásával ökonometriai modellek felépítésébe fogtunk, felborzolva ezzel az ökonometriai modellezők, egyébként ekkor még idehaza meglehetősen szűk körének a lelki világát. Az ökonometriai modellek egyik igen egyszerű típusa a következő alakban írható fel:

$$y_i(t) = g_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j(t) \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; m < n,$$

ahol $g_i(t)$ időfüggvények (esetleg állandók), $y_i(t)$, $1 \leq i \leq m$ esetén az ún. endogén változók, míg $m < i \leq n$ esetén az ún. exogén változók, c_{ij} becsült, illetve megadott paraméterek.

A fenti regressziós egyenletek bal oldalán álló változókat magyarázott változóknak, míg a jobb oldalán állókat magyarázó változóknak is szokás mondani. Az ismeretlen paramétereket a változók $t = 1, 2, \ldots, T$ időpontokban megfigyelt értékei alapján regressziószámítással becsüljük. Előfordulhat, hogy a magyarázó változók között ún. késleltetett változók is szerepelnek, amikor is az $y(t)$ változó késleltetettjének, mégpedig k-adrendű késleltetettjének az $y(t-k)$ változót nevezzük ($k = 1, 2, \ldots, L$; L a maximális késleltetés). Ekkor – az ökonometria szokásos szóhasználatával élve – ún. elosztott késleltetéses (disztributív lag) modellről beszélünk.

Az ökonometriai modellek egyenleteinek a felállításában a gazdasági folyamatok összefüggéseire vonatkozó közgazdasági ismeretek, feltételezések, a fejlődés további menetére vonatkozó elképzelések játszanak szerepet, bár a statisztikai becslések elméleti tulajdonságai, a becslések elfogadhatósági kritériumai miatt ezeken az elképzeléseken gyakran változtatni kell. Éppen ez az a pont, ami miatt úgy gondoltuk, hogy a magyarázó változók kiválasztásában statisztikai döntési kritériumokat is alkalmazunk, más szóval a regressziószámítást nem csupán az ismeretlen paraméterek, hanem a magyarázó változók kijelölésére is felhasználhatjuk, a stepwise algoritmusok segítségével. Vitákra éppen az adott okot, hogy ily módon gyakran nem a közgazdasági várakozásnak megfelelő magyarázó változók kerültek be az egyes egyenletekbe. Mentségünkre szolgáljon, hogy világszerte tapasztalható volt az új utak és módszerek keresése az ökonometriában. Utalunk itt például A. G. Ivakhnenko heurisztikus, ún. önszerveződéses (self-organizing) módszerére, amelyet a műszaki kibernetikában és a biológiában kívántak elsősorban alkalmazni, de amelynek ökonometriai modellépítésre történő felhasználásával japán és amerikai kutatók egyaránt kísérleteztek.

Érdekességként jegyezzük meg, hogy az ökonometriai modellezés a 30-as évek elején, Haavelmo, majd Tinbergen munkásságával veszi kezdetét, később mindketten Nobel-díjat is kaptak. Az első, igen egyszerű, alig néhány regressziós egyenletet tartalmazó, de az asztali számológépeken fáradságos munkával számszerűsíthető modelleket egyre bonyolultabb felépítésű, és mind nagyobb méretű modellek követték, elsősorban a számítástechnika és a számítástudomány rohamos fejlődésének köszönhetően.

Visszatérve saját modellkísérleteinkre, a stepwise algoritmust a magyarázó változók késleltetettjei körére is kiterjesztettük. Részben e vizsgálatok tapasztalatai, részben pedig az idősorok előrebecslésekor fellépő különféle problémák arra késztettek minket, hogy ún. teljesen rekurzív ökonometriai modelleket is számszerűsítsünk. E modellek regressziós egyenleteinek a jobb oldalán csak időfüggvények és a magyarázó változók késleltetettjei szerepelhettek csupán. Az ilyen típusú egyenletekkel az előrebecslés technikai szempontból igen egyszerűvé válik, de különféle szimulációs vizsgálatok is végezhetőek velük.

Sajnos állandóan visszatérő problémaként jelentkezett közgazdasági idősoraink viszonylagos rövidsége, ami a korrekt módon alkalmazható idősoros modellek körét jelentősen szűkítette. A Box-Jenkins modellek egy idősoros változatai is legalább 50 tagú idősorra tartottak igényt. Ezért, de más, közgazdasági elméleti megfontolások miatt is az ún. modellredukciós és információsűrítő, a vizsgált jelenségeknek a lehető legkisebb információs veszteséggel járó, lehető legjobb leírására törekvő modellillesztési és becslési eljárásokra koncentráltunk. Ilyen tulajdonságokkal rendelkeznek többek között a faktormodellek, és a faktoranalízis gyűjtőnéven ismert becslési eljárások.

Bizonyára többek előtt is ismeretes, hogy a faktoranalízis eredete Hotelling (1933) [8] nevéhez, s pszichológiai jelenségekkel kapcsolatban megfogalmazott mérhető ismérvek független megfigyeléseiből származó minták, statisztikai felmérések kiértékelésének problémájához fűződik. Filozófiai hátterében az a feltételezés áll, hogy a lelki jelenségeket formáló s egymással minden bizonnyal kölcsönhatásban is álló valódi tényezők száma jóval nagyobb lehet azoknál, mint amelyeket megfogalmazni, netán mérni is módunkban áll. Joggal gondolhatunk viszont egyrészt arra, hogy a mérhető, az ún. manifeszt változók több-kevesebb mértékben mégiscsak tükrözik a nem megfigyelhető, az ún. látens változókat is. Másrészt, hogy e látens változók között olyanok is lehetnek, melyek a manifeszt változók mindegyikében, esetleg többségükben jelentős szerepet játszanak. A faktormodellezési eljárások (s ezek irodalma ma már óriási) célja éppen e látens változók, faktorok meghatározása, becslése úgy, hogy általuk a manifeszt változók valamilyen matematikai kritérium értelmében vett „lehető legjobb" becslését kapjuk.

Könnyű belátni, hogy a gazdaságot valamely komplex objektumnak tekintve, hasonló szituációval állunk szemben. Érthető tehát, hogy a gazdaság fejlődésével, közgazdasági jelenségek modellezésével foglalkozó kutatók egy része is osztotta a fentiekben kifejtett modellezési nézeteket és a faktoranalízis eszköztárához nyúlt. Jánossy Ferenc (1963, 1967) [9] vizsgálatai is, melyek mérőszámának – a naturális mutatók sokaságát figyelembe vevő – szellemes, heurisztikus eljárásokat dolgozott ki, szintén a többváltozós vizsgálatok fontosságát támasztották alá.

A gazdasági fejlődés tényezőinek idősor vektoraira hazánkban Rimler Judit (1970) [12], Meszéna György és Simon Béláné (1973) [11] valamint más kutatók is számszerűsítettek faktormodelleket. E vizsgálatok mindegyike tanulságosnak bizonyult. Érdemük, hogy az ekkortájt még kétségtelenül túlsúlyos determinisztikus közgazdasági gondolkodást a sztochasztikus felfogással gazdagították, egyúttal a közgazdasági jelenségségek soktényezős statisztikai vizsgálatának lehetőségeire és fontosságára irányítva a figyelmet.

A faktoranalízist azonban mégsem elsősorban idősorokra dolgozták ki, hanem független megfigyelésekre. Az idősor vektor konzekutív időpontokban megfigyelt értékei nemcsak a komponesek egyidejű, de saját és egymás korábbi értékeitől is függhetnek. Építve e késleltetett kapcsolatokra, természetszerűleg vetődött fel az a gondolat, hogy az empirikus idősorok alapján látens mozgásformák, azaz a manifeszt változók és a látens változók, valamint a látens változók közötti feltételezhető sztochasztikus kapcsolatokat is becsüljük. Szándékaink szerint tehát a klasszikus faktormodellezés alapgondolatait az idősor empirikus struktúráját is figyelembe véve kívántuk a dinamikus elemzés talajára átültetni. Az erre a koncepcióra épülő faktoranalízist neveztük el dinamikus faktoranalízisnek.

Ahogyan a faktoranalízisen belül is többféle koncepció és ennek megfelelően többféle eljárás ismeretes, a dinamikus faktoranalízist sem egyetlen jól körülhatárolt feladatként, hanem sokféle elgondolásra, feltételezésre épülő s ezért szerteágazó feladatkörként kell elképzelnünk. Ily módon mindazokat a módszereket, amelyek az idősor vektorok és mátrixok dinamikus tulajdonságai vizsgálatában az idősorelemzési eljárásokat valamilyen módon ötvözik a faktoranalízis információsűrítő, modellredukcióra vezető eljárásaival, valójában dinamikus faktoranalízisnek nevezhetjük.

Velünk egyidejűleg s tőlünk függetlenül mások is és más utakon járva, ugyancsak foglalkoztak ezzel a témával, sőt érdekes és véletlen egybeesésként, egyikőjük, Geweke (1977) [7] szintén dinamikus faktoranalízisnek nevezte el az általa kidolgozott módszert.

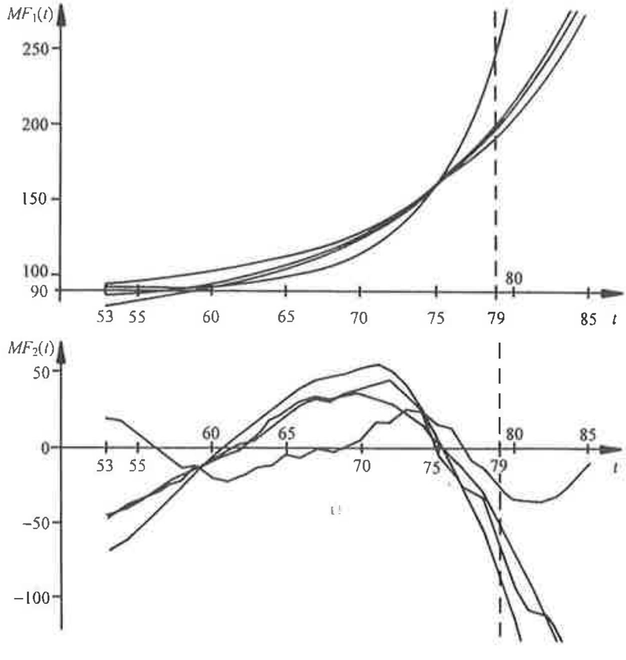
Elsőként az ún. dinamikus főkomponens modell matematikai megfogalmazására (1974), majd kidolgozására (1975) [2] került sor. Itt az eredetileg adott változóknak azokat az, egymásra ortogonális lineáris kombinációit, mesterséges változóit kerestük, melyek mindegyikének idősora a legkisebb négyzetek elve értelmében autoregresszív sémával a lehető legjobban becsülhető. Az e követelményeket kielégítő mesterséges változókat neveztük dinamikus főkomponenseknek, a meghatározásukra szolgáló matematikai algoritmust és annak számítógépi adaptációját dinamikus főkomponens analízisnek. Gondolataink, mint az később kiderült, bizonyos elvi rokonságot mutattak Box és Tiao (1977) [6], az idősor vektorok kanonikus transzformációjával foglalkozó munkájával. Ha a dinamikus főkomponens modellből az autoregresszív becsléssel kapcsolatos követelmény rendszert elhagyjuk, akkor a konvencionális faktoranalízis egy speciális, ismert főkomponens modelljét kapjuk.

Saját munkánkban a továbblépést a dinamikus faktoranalízis feladatának megfogalmazása és kidolgozása jelentette (1977) [3]. A dinamikus főkomponensekkel szemben megfogalmazott követelményeken kívül a keresett mesterséges változóknak azt az újabb, egyébként a hagyományos faktorokkal szemben is fennálló követelményrendszert is ki kellett elégíteniök, hogy az eredeti változók mindegyikének a legkisebb négyzetek elve szerinti lehető legjobb becslését is adják. Mielőtt a feladat matematikai megfogalmazására rátérnénk, hisz eddig csupán az elvek kimondásáról volt szó, röviden a fejlesztésekről és az alkalmazásokról is beszélnék. Dinamikus faktormodelleket sokféle empirikus idősor vektorra, elsősorban a magyar és más nemzetgazdaságok közgazdasági idősoraira, folyó- és változatlan áras idősorokra számszerűsítettünk. Rajtunk kívül e munkában egész kis csapat vett részt, munkatársaink: Berde Éva, Ernyes Éva, Getherné Simon Erzébet, Postáné Vellay Györgyi, Turny Miklósné [5]. A faktorok meghatározására készült programjaink (elsősorban Bánkövi Györgynek és Veliczky Józsefnek köszönhetően) a vezérlőparaméterek segítségével egyszerűen és rugalmasan működtek; néhány ponton a modellező döntéseiben bizonyos szabadsággal rendelkezett. Numerikus tapasztalataink igen kedvezőek voltak. A faktorok meghatározására felírt optimalizációs feladatot, melyről később még szó lesz, iterációs eljárással oldjuk meg, s gyorsan kapunk olyan eredményeket, melyeket tovább javítani már nem érdemes. Ezek azonban tapasztalati, numerikus eredmények, s ha még oly kedvezőek is, az eljárás konvergenciáját elméletileg eleddig bizonyítani nem tudtuk.

A faktorkereső program PC-s változatával is rendelkezünk ma már, melyet néhány éve Bánkövi György dolgozott ki. E programban az input adatok és a modell méreteire vonatkozóan bizonyos korlátok léteznek, amelyek azonban végső soron alakíthatóak.

Elméleti fejlesztéseink közül kettőről teszünk említést, bár sajnos az ezekben rejlő lehetőségek kiaknázására eddig messze nem került sor. Egyikük a dinamikus faktormodellt szimulációs vizsgálatokra, másikuk kontroll változók bevezetésével a faktorok, illetve a változók kívánatos pályamódosítása elérhetőségének vizsgálatára tették alkalmassá. További fontos elméleti és numerikus fejlesztésnek tartjuk, hogy az 1980-as évek elején a dinamikus faktoranalízist idősor mátrixokra is kiterjesztettük. Mindezekre azonban jelen előadásunkban nem térünk ki, mint ahogyan konkrét modellvizsgálatainkra sem, noha ezek száma jelentős. Csak az illusztráció kedvéért, hogy a hallgatóság mégis valamelyes vizuális képpel bírjon a dinamikus faktorokról, bemutatom egy korábbi vizsgálatunk során meghatározott dinamikus faktorok ábráját.

Az alábbi két ábrán annak a vizsgálatnak az eredményét láthatjuk, melynek során négy ország adatainak 1953 és 1979 közötti idősorára illesztettünk dinamikus faktormodellt. Az első faktor leválasztása után a reziduális idősorból választottuk le a második faktor folyamatot. Az ábra a faktor folyamatok előre becsült értékeit is tartalmazza.



Az első két dinamikus faktorvektor országkomponensei (Belgium, Dánia, Írország, Hollandia).

Az utóbbi másfél évtizedben sok figyelemre méltó elgondolás és eredmény született szerte a világban a matematikai rendszerelmélet, a dinamikus rendszermodellezés, az irányításelmélet, s általában többdimenziós idősoros vizsgálatok terén. Az 1981–82-es években éppen azért kezdeményeztünk egy szeminárium-sorozatot közgazdasági modellezők, mérnökök és matematikusok részvételével, hogy ezekkel az eredményekkel megismerkedjünk. E szemináriumi tevékenységünknek adja mintegy összefoglalását az 1986-ban, a Műszaki Könyvkiadónál megjelent *Idősorok analízise* c. könyv, Tusnády Gábor és az előadó szerkesztésében [13]. Részben az itt elkezdett közös munka, részben pedig a dinamikus faktoranalízis néhány nyitott kérdése és az újabb idősoros eredmények átgondolásának szükségessége ismét összehozott egy, a korábbinál szélesebb körű kutatói team-et, melynek Tusnády Gábor a vezetője, s tagjai a korábbiban szereplőkön kívül Bolla Marianna, Gerencsér László, Marosi Judit, Michaletzky György és Vágó Zsuzsa. Ennek az együttesnek a dinamikus faktoranalízis témakörét érintő néhány eredményéről, problémáiról fog Michaletzky György rövid ismertetést adni, miért is ezennel át is adom neki a szót!

II. rész (Michaletzky György)

Ebben a részben a Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit által kifejlesztett dinamikus faktornalízis modell egyfajta lehetséges továbbfejlesztéséről lesz szó, mely lehetővé teszi, hogy egyszerre több faktorfolyamatot is meg lehessen határozni. Jelölje

$$y_i(t) \qquad i = 1, \ldots, n \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

a rendelkezésre álló adatok halmazát, melyet valamely stacionárius idősor egy realizációjának képzelünk el. Ezen adatokból kiindulva szeretnénk meghatározni az

$$F_j(t) \qquad j = 1, \ldots, M \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

faktorfolyamatokat. Az alábbi kritériumokat figyelembe véve akarunk választani a különböző lehetséges faktorfolyamatok között:

- a faktorok segítségével jól becsülhető y értéke,
- a faktorok meghatározhatóak az y ismeretében,
- a faktor folyamat jól predikálható.

Természetesen ezen elveknek többféle matematikai modell eleget tehet. Ezek közül mi az alábbit vizsgáltuk részletesebben:

$$F_j(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i(t) , \tag{1}$$

$$\hat{F}_j(t) = \sum_{k=1}^{L_j} c_{jk} F_j(t-k) + c_{j0} , \tag{2}$$

$$\hat{y}_i(t) = d_{0i} + \sum_{j=1}^{M} d_{ji} F_j(t) . \tag{3}$$

Tehát a faktorfolyamat pillanatnyi értékét a megfigyelt y folyamat pillanatnyi értékéből akarjuk meghatározni, és visszafelé, az y folyamat becsléséhez a faktorfolyamat pillanatnyi értékét használjuk fel. Emellett az i-edik faktorfolyamat előrejelzésében csak az i-edik folyamat múltbeli értékei vesznek részt.

A fenti egyenletekben szereplő paramétereket az

$$f_{\mathrm{df}} = \sum_{j=1}^{M} w_j^F \|F_j - \hat{F}_j\|^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^Y \|y_i - \hat{y}_i\|^2$$

funkcionál minimalizálásával választjuk meg. Mivel a funkcionál első tagjából a faktorfolyamatokra alkalmazott tetszőleges konstans szorzó kiemelhető, és ez nem befolyásolja a második tag értékét, ezért valamilyen külön peremfeltétel segítségével biztosítani kell, hogy a faktorfolyamatok ne lehessenek tetszőlegesen kicsinyek. Tegyük fel tehát, hogy

$$\langle F_j , F_l \rangle = \delta_{jl} .$$

Mielőtt a konkrét algoritmus vizsgálatára rátérnénk, nézzünk meg egy speciális példát, rámutatva arra, hogy olyan esetekben, amikor a *pillanatnyi* kovariancia struktúra semmiféle információt nem ad a faktorfolyamatok jelenlétére, az *idősor* viselkedéséből mégis kiolvashatóak a háttérfolyamatok.

Példa. Legyenek $z_1, \ldots, z_n$ független, stacionárius folyamatok, melyekre $D^2(z_i(t)) = 1$. Definiáljuk az y_i folyamatokat a következőképpen:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} z_j(t)$$

ahol az $U = [u_{ij}]$ mátrixra teljesül, hogy $UU^T = I$. Vegyük észre, hogy ekkor

$$\mathrm{cov}\big(y(t)\big) = I .$$

Keressük a faktorokat

$$F_j(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i(t) \ , \qquad j = 1, \ldots, M$$

alakban. A faktorokra vonatkozó ortogonalitási feltétel azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_M$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak, ahol $\mathbf{b}_j = [b_{1j}, \ldots, b_{nj}]^T$. Ekkor a minimalizálandó funkcionál

$$\sum_{j=1}^{M} D^2(F_j(t)|F_j(s), s < t) \longrightarrow \min$$

a feltételes szórásnégyzetek összege. Jelölje a z háttérfolyamat feltételes kovariancia mátrixát Δ :

$$\operatorname{cov}\big(z(t)|z(s), s < t\big) = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \ .$$

Tegyük fel, hogy $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \ldots \leq \delta_n$. Megmutatható, hogy a következő tétel igaz:

Tétel.

$$\sum_{j=1}^{M} D^2\big(F_j(t)|F_j(s), s < t\big) \geq \sum_{i=1}^{M} \delta_i \ ,$$

tehát a z folyamat első M koordinátája adja a legjobb M faktort.

Megjegyzés. A fenti tétel tetszőleges $y(t) = Az(t)$ esetén is igaz, feltéve, hogy $\ker(A) = 0$.

Megjegyzés. Az

$$y(t) = Uz(t) + e(t)$$

általánosabb modellben, ha $UU^T = I$ és $e(t)$ független sorozat, melyre

$$\operatorname{cov}\big(e(t)\big) = \sigma^2 I \ ,$$

fennáll, hogy

$$\sum_{j=1}^{M} D^2\big(F_j(t)|F_j(s), s < t\big) \geq \frac{1}{1+\sigma^2} \sum_{i=1}^{M} \delta_i' \ ,$$

ahol $\delta_1' \leq \delta_2' \leq \ldots \leq \delta_n'$ a $\operatorname{cov}\big(z(t)|y(s),\ s < t\big)$ feltételes kovariancia mátrix sajátértékei.

1. Az f_{df} funkcionál szerkezete

Vegyük észre, hogy az y becslését meghatározó regressziós felület paraméterei, és a faktorok előrejelzésében lévő konstans tag rögzített $b_{ij}, i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, M$ és $c_{jk}, j = 1, \ldots, L_j;\ j = 1, \ldots, M$ mellett könnyen számolhatóak, hiszen egyszerű lineáris regressziós probléma megoldásai. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{Y} \quad \text{az } y \text{ tapasztalati kovarianciamátrixa}$$

$$\mathbf{c}_j^T = \left[1, -c_{j1}, \ldots, -c_{jL_j}\right] .$$

A faktorfolyamatokra kirótt peremfeltétel ekkor röviden így írható:

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{Y} \mathbf{b}_l = \delta_{jl} ,$$

vagy másképpen, az

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{Y}^{1/2} \mathbf{b}_j$$

vektorok ortonormáltak. Ekkor tehát a fukcionál rögzített $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M$ mellett $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ szerint kvadratikus, és rögzített $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ mellett $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M$ szerint kvadratikus. Pontosabban fogalmazva az $y_i(t)$ mérési eredményekből felépíthető egy

$$A_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

négyes tenzor, hogy a feladat

$$f_{\mathrm{df}} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi_\alpha \zeta_\beta A_{\alpha\beta,\gamma\delta} \xi_\gamma \zeta_\delta \longrightarrow \min$$

alakban írható, ahol

$$\xi^T = \left[\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_M^T\right] ,$$

$$\zeta^T = \left[\mathbf{c}_1^T, \ldots, \mathbf{c}_M^T\right] .$$

A peremfeltételek szerint

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M \quad \text{ortonormált rendszer} ,$$

$$\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M \quad \text{első koordinátája adott } (= 1) .$$

Ez a feladat tehát $\mathbf{c}$-ben regressziós jellegű, míg $\mathbf{x}$-ben sajátvektor jellegű. Természetes tehát, hogy cikk-cakk algoritmus segítségével határozzuk meg a funkcionál minimumát. A regressziós lépés elvégzése nem jelent különösebb nehézséget, ugyanakkor a criss-cross algoritmus másik lépése önmagában is érdekes szélsőérték meghatározási feladatra vezet.

2. Kvadratikus alakok összegének maximalizálása

Egyszerű számolás után kapjuk, hogy rögzített $\mathbf{c}_1^T, \ldots, \mathbf{c}_M^T$ mellett az

$$f_{\mathrm{df}} \longrightarrow \min$$

feladat átírható

$$f_{\mathrm{kvad}} = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{x}_j^T A_j \mathbf{x}_j \longrightarrow \max$$

alakba, ahol $A_j > 0$ az adatokból és a rögzített $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M$ értékekből számolt mátrixok, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ n-dimenziós ortonormált vektorrendszer. Ez speciális esetben visszaadja a jólismert sajátvektor-sajátérték feladatot. Bár ennek megoldása közismert, röviden felidézzük annak okáért, mert már ekkor is láthatjuk, hogy globálisan konvergáló algoritmus megszerkesztése nem lehet egyszerű probléma.

- Ha $M = 1$, akkor az $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \longrightarrow \max$ feladatot kapjuk, mely a maximális sajátértékhez tartozó sajátvektort definiáló szélsőérték feladat. Jólismert, hogy ez egyértelmű, ha $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

- Ha $A_1 = \cdots = A_M = A$, akkor

  $$\max f_{\mathrm{kvad}} = \operatorname{tr} X^T AX \ ,$$

  ahol $X = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M]$. Ekkor a szélsőértéket meghatározó vektorrendszer generálja a A mátrix első M sajátértékéhez tartozó sajátvektorok által kifeszített alteret. Az *altér* egyértelmű, ha $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} \geq \cdots$. Speciálisan $M = n$ esetén *bármely* ortonormált bázis esetén $\max f_{\mathrm{kvad}} = \operatorname{tr} A$.

- Létezik az $A_1, \ldots, A_M$ mátrixoknak közös sajátvektorrendszere. Feltehetjük, hogy ekkor ezek diagonális mátrixok. Ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok a közös sajátvektorok közül kerülnek ki, akkor a funkcionál stacionárius pontját definiálják. Ezért természetes kérdés, hogy vajon a funkcionál globális maximumhelyét meg lehet-e találni ilyen alakú vektorrendszer formájában.

  Tegyük fel tehát, hogy $A_i = \operatorname{diag}(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i)$, $i = 1, \ldots, M$. Ekkor

  $$f_{\mathrm{kvad}} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j^i x_{ij}^2 \ ,$$

és $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ ortonormált vektorrendszer. Ha csak a

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij}^2 \leq 1\,, \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1$$

feltételeket tartjuk meg, akkor az x_{ij}^2 változókban lineáris programozási feladatot kapunk, annak is egy speciális formáját, a szállítási feladatot. Jól ismert, hogy ez felveszi maximumát ún. *permutáció* mátrixon. (Azaz $x_{ij}^2 = 0$ vagy 1, és minden j-re pontosan egy i mellett 1 az érték, különböző j-k mellett különböző i-kre.) Ebből elemenként négyzetgyököt vonva ortogonális mátrixot kapunk, tehát létezik

$$X = \Phi D$$

alakú megoldás, ahol Φ permutáció mátrix, D pedig az oszlopvektorok irányítását adja meg. $D = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots \pm 1)$. Azaz létezik olyan megoldás, mely a *közös sajátvektorok közül* kerül ki.

Látjuk, hogy alkalmas mátrixok esetén a funkcionál globális maximumhelye nem egyértelmű, sőt még csak nem is izolált pontokból áll.

Algoritmus

A Lagrange-multiplikátor módszer alkalmazásával könnyen megkaphatjuk, hogy a stacionárius pont feltétele, hogy az

$$[A_1\mathbf{x}_1, \ldots, A_M\mathbf{x}_M] = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M]\, S$$

egyenlet teljesüljön, ahol S szimmetrikus mátrix. Speciálisan az $A_i\mathbf{x}_i$ vektorok benne vannak az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok által kifeszített altérben. Globális maximumhely esetén $S \geq 0$. Másképpen

$$A(X) = XS, \quad X^T X = I_M\,, \quad S \geq 0\,,$$

(ahol $A(X) = [A_1\mathbf{x}_1, \ldots, A_M\mathbf{x}_M]$). Ez nem más, mint az $A(X)$ mátrix polár felbontása.

Ennek alapján legyen az algoritmus egy lépése a következő:

adott $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok esetén a következő $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_M$ vektorrendszert az $A(X)$ mátrix polár felbontásából definiáljuk, tehát

$$A(X) = ZS, \quad Z^T Z = I, \quad S \geq 0\,.$$

Megjegyzés Ez a lépés ekvivalens a következő feladat megoldásával: Adott $A_1\mathbf{x}_1, \ldots, A_M\mathbf{x}_M$ vektorok esetén keresendő olyan $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_M$ ortonormált vektorrendszer, melyre

$$\sum_{i=1}^{M} ||A_i\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i||^2 \longrightarrow \min ,$$

vagy másképpen

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i \mathbf{x}_i \longrightarrow \max .$$

Ez az észrevétel rögtön felveti a következő kérdést. Bevezetve az

$$f_{\text{bilin}} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i \mathbf{x}_i$$

funkcionált, az algoritmus egy lépése voltaképpen ezen bilineáris funkcionál cikk-cakk algoritmussal történő maximalizálását jelenti. Így f_{bilin} nyilvánvalóan nő az algoritmus során. De vajon egybeesik-e a kvadratikus funkcionál szélsőértéke a bilineárisével? Hogyan viszonyulnak egymáshoz az egyes funkcionálok szélsőértékhelyei, stacionárius pontjai?

Az első kérdésre rögtön választ ad a következő magától értődő egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{M} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_i)^T A_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i \mathbf{z}_i + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x}_i^T A_i \mathbf{x}_i - 2\sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

Így a globális maximumhelyek egybeesnek. Megmutatható, hogy $M < n$ esetén a *lokális maximumhelyek* is azonosak.

Hogyan viselkedik az algoritmus a korábban vizsgált speciális esetben? Ha $A_1 = \cdots = A_M = A$, akkor ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok az A sajátvektorai, akkor $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i$, tehát ezek az algoritmus fixpontját alkotják. Sőt, könnyen megmutatható, hogy ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok A-invariáns alteret generálnak, akkor is helyben maradnak az algoritmus során. Tehát ezek f_{kvad} stacionárius pontjai. Azonban csak akkor kapunk lokális maximumhelyet, ha az M legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor alterét feszítik ki. Azaz, ekkor egyben globális maximumhelyet definiálnak.

Az általános esetben könnyen látható, hogy az algoritmus során az f_{kvad} funkcionál értéke is nő. Sőt az $X_1, X_2, \ldots$ mátrixok egyre közelebb kerülnek egymáshoz, így az algoritmus torlódási pontjai egyben *stacionárius* pontok, és a torlódási pontok halmaza *összefüggő* halmaz.

Befejezésül megjegyezzük, hogy az előadás óta eltelt idő alatt részletesebben elemeztük az algoritmus és a funkcionál szerkezetét, és többek között sikerült megmutatni, hogy ha az algoritmus során adódó pontok globális maximumhely „közelébe" kerülnek, akkor az algoritmus konvergens lesz, és természetesen globális maximumhelyhez tart. Az algoritmus azonban nem lesz feltétlenül globálisan konvergens, hiszen láttuk, hogy létezhetnek olyan kiinduló értékek, melyek az algoritmus fixpontjai és amelyek nem globális maximumhelyek. A funkcionál minden stacionárius pontja egyben az algoritmus fixpontja is.

Irodalom

1. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, Népgazdasági összefüggések dinamikus előrebecslésének kérdései, *Közgazdasági Szemle,* Vol. 11, 1973:1269-1286.
2. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, *Idősorvektorok dinamikus főkomponenseinek meghatározása,* Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja Kiadványa, Budapest, 1975.
3. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, Dynamic models for prediction of the development of national economies, *2-nd IFAC/IFORS Conference of Dynamic Modelling and Control of National Economies, Vienna 1977* in: Janssen, J. M. L. – Pau, L. F. – Straszak, A (eds.) *Models and Decision Making in National Economies,* North-Holland, Amsterdam, 1979:257-267.
4. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, Estimating and forecasting dynamic economic relations on the basis of multiple time series, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,* Vol. 63, 1983:398-399.
5. Bánkövi György – Berde Éva – Ernyes Éva – Getherné Simon Erzsébet – Postáné Vellay Györgyi – Turny Miklósné – Veliczky József – Ziermann Margit, *Nemzeti makrofolyamatok empirikus mozgásformáinak statisztikus vizsgálata,* Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet Közlemények, 2. sz.
6. G. E. P. Box and G. C. Tiao, A canonical analysis of multiple time series, *Biometrika,* Vol. 64, 1977:355–405.
7. J. F. Geweke, The dynamic factor analysis of econometric time series models, in: D. J. Aigner and A. S. Goldberger (eds) *Latent variables in socio–economic models,* 1977. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
8. H. Hotelling, Analysis of a complex of statistical variables into principal components, *J. Educ. Psych.,* Vol. 24, 1933:417–441, 498–520.
9. Jánossy Ferenc, *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszerei,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1963, 324 old.

10. Rimler Judit, *Fejlődéselemzés ökonometriai módszerekkel,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976, 375 old.

11. Meszéna György – Simon Béláné, *A gazdasági fejlődés tényezőinek vizsgálata faktoranalízis alkalmazásával,* Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet Közlemények, Budapest, 1973, 93 oldal.

12. Rimler Judit, Kísérlet a faktoranalízis alkalmazására a gazdasági fejlődés vizsgálatában, *Közgazdasági szemle,* Vol. 7-8, 1970:913–920

13. Tusnády Gábor – Ziermann Margit (szerk), *Idősorok analízise,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986, 341 oldal.

THE FACTOR ANALYSIS OF TIME SERIES

The present paper is the written form of a lecture presented in 1994 at the Annual Meeting of the Hungarian Operational Research Society by late first President of the Society, Margit Ziermann and her coworker. In the first part of the lecture M. Ziermann gave an overview of the history of econometric models applied in Hungary with the main emphasis on the dynamic factor analysis model introduced by Gy. Bánkövi, J. Veliczky and M. Ziermann. Although at that time – 1974 – the application of stochastic and at the same time dynamic models in econometrics did not belong to the main streamline of the mathematical models of econometrics in Hungary, the dynamic factor analysis model cannot be considered as an isolated attempt, neither in Hungary nor in the international literature. The second part of the lecture contained the latest developments in the analysis of the model. To determine the factor processes three criteria were applied. (i) the factors are linear functions of the observed process y, (ii) the observed process can be estimated using the factor processes, (iii) the prediction error for the individual factor processes is small. The estimation of the parameters is determined by minimizing a functional containing the estimation error [(i)] and the prediction error [(iii)]. An example was presented where the covariance matrix of a process y was the unit matrix, so every "static" model fails to recover the hidden structure, but a functional based on the "dynamic" properties reaches its global minimum at the true model. Numerically, the minimization problem was handled by a criss-cross algorithm, alternating two steps – a regression step –, and another one having its own interest – minimizing the sum of heterogeneous quadratic forms. For this latter problem a locally convergent algorithm with strictly increasing values of the functional was analysed.

FOLYTONOS DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLEK STABILITÁSÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR ÉS SZIDAROVSZKY FERENC
BKE Matematikai és Számítástechnikai Intézet – Arizonai Egyetem

Dolgozatunkban folytonos időskálájú termelői-fogyasztói rendszerek globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg. Feltesszük, hogy az árdinamizmus megegyezik Arrow (1960) modelljével, viszont a piaci kínálat profitmaximalizáló termelők együttes termeléseként áll elő. Kimutatjuk, hogy Cournot-féle becslések mellett a rendszer mindig globális aszimptotikusan stabilis, viszont adaptív és extrapolatív becslések mellett a becslési M_k paramétereknek elegendően nagyoknak kell lenniük ahhoz, hogy ezt a típusú stabilitást garantálni tudjuk.

1. Bevezetés

Korábbi dolgozatainkban (Szidarovszky és Molnár, 1994a,b) két speciális termelői-fogyasztói modellt és azok stabilitását vizsgáltuk meg különféle tanulási sémák (statikus, adaptív és extrapolatív) mellett. Az időskálát mindkét esetben diszkrétnek tételeztük fel. Jelen dolgozatunkban e modelleknek a folytonos időskála esetére való kiterjesztésével foglalkozunk. Modellünk jól kapcsolja össze Arrow (1960) dinamikus piaci modelljét a dinamikus oligopol játékok elméletével (Okuguchi és Szidarovszky, 1990). Három sémát vizsgálunk meg részletesen: Cournot, adaptív és extrapolatív előrejelzési modelleket. Mindhárom esetben az adódó dinamikus rendszer globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elégséges feltételeket.

2. A matematikai modell

Hasonlóan a diszkrét esethez jelölje ismét N a termelők számát, akik ugyanazt a fajta terméket állítják elő és azt egy közös piacon együtt értékesítik. Jelölje $x_k(t)$ a k-dik ($k = 1, 2, \ldots, N$) termelő által előállított mennyiséget, és tegyük

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1995. január 11.

fel, hogy az összes termelő költségfüggvénye kvadratikus:

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k \qquad (k = 1, 2, \dots, N) \tag{1}$$

ahol az együtthatók valamennyien pozitívak. Ha p jelöli a szóbanforgó termék árát, akkor tegyük fel, hogy a piaci keresletfüggvény

$$K(p) = Dp + d \tag{2}$$

alakú, ahol $D < 0$ és $d > 0$. Feltesszük, hogy minden egyes $t \geq 0$ időpillanatban az összes termelő ($k = 1, 2, \dots, N$ esetén) és a piac is ($k = 0$ esetén) először megbecsüli a várható árat. Jelölje $p_k^E(t)$ a becsült árat. Az összes termelő ezután meghatározza a profit-maximalizáló termelési programját:

$$x_k^*(t) = \operatorname{argmax}_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E(t) - (B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k) \right\} . \tag{3}$$

Pozitív megoldást feltételezve egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k^*(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} .$$

Dinamikus modellünkben (hasonlóan Okuguchi és Szidarovszky, [1990] modelljéhez) feltesszük, hogy az összes termelő a profit-maximalizáló és jelenlegi termelési mennyiség különbségének arányában változtatja meg termelési programját. Ez a feltétel matematikailag az

$$\dot{x}_k(t) = K_k \left(\frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} - x_k(t) \right) \tag{4}$$

differenciálegyenlettel írható le. A piac várható igényét a $Dp_0^E(t) + d$ kifejezés adja meg. Az ármozgásról feltesszük, hogy az a várható hiány (vagy többlettermelés) függvénye:

$$\dot{p}(t) = K \left(Dp_0^E(t) + d - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) \right) , \tag{5}$$

ahol K_k ($k = 1, 2, \dots, N$) és K pozitív állandók. A (4) és (5) egyenlet egy folytonos dinamikus rendszert definiál, amely tulajdonságai nagymértékben függenek a $p_k^E(t)$ becslések dinamikájától és megválasztásától.

Dolgozatunkban három konkrét esetet vizsgálunk meg:

(i) *Cournot-típusú* becslések esetén feltesszük, hogy

$$p_k^E(t) = p(t) , \tag{6}$$

vagyis a k-dik termelő ($k \geq 1$) vagy a piac ($k = 0$) pontosan ismeri az árat.

(ii) *Adaptív* becslések esetén

$$\dot{p}_k^E(t) = M_k\big(p(t) - p_k^E(t)\big) , \tag{7}$$

ahol $M_k \geq 0$.

(iii) *Extrapolatív* becslésről akkor beszélünk, amikor

$$p_k^E(t) = p(t) + M_k \dot{p}(t) , \tag{8}$$

ahol M_k adott állandó.

A további paragrafusokban ezzel a három esettel foglalkozunk részletesen.

3. Cournot-féle becslések

Amennyiben az összes termelő és a piac is Cournot-féle becslést alkalmaz, a (4), (5) és (6) egyenletek összekapcsolásával az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ és p változókra egy olyan lineáris differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} -K_1 & & & \dfrac{K_1}{2B_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -K_N & \dfrac{K_N}{2B_N} \\ -K & \ldots & -K & KD \end{pmatrix}$$

Tudjuk a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a rendszer akkor és csak akkor globális aszimptotikusan stabilis, ha $\mathbf{A}_C$ sajátértékeinek valós része negatív. A mátrix sajátérték-egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} -K_k u_k + \frac{K_k}{2B_k} v &= \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ -K \sum_{k=1}^{N} u_k + KDv &= \lambda v . \end{aligned} \tag{9}$$

Az első egyenletből

$$u_k = \frac{K_k v}{2B_k(\lambda + K_k)} , \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

ahol feltételezzük, hogy $\lambda \neq -K_k$. Ellenkező esetben a $\lambda = -K_k$ sajátérték nem befolyásolja a rendszer stabilitási tulajdonságait. Ha ezt az összefüggést a (9) második egyenletébe helyettesítjük, akkor $v \neq 0$ következtében egy egyszerű egyenlet adódik λ-ra:

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k}{2B_k(\lambda + K_k)} = -KD + \lambda . \tag{10}$$

Tegyük fel, hogy egy $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex (vagy $\beta = 0$ esetén valós) szám gyöke a (10) egyenletnek. Ekkor egyszerű számolással látható, hogy

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k(\alpha + K_k - i\beta)}{2B_k\left((\alpha + K_k)^2 + \beta^2\right)} = -KD + \alpha + i\beta .$$

Tegyük most fel, hogy $\alpha \geq 0$. Ekkor a bal oldal valós része negatív, $D < 0$ következtében pedig a jobb oldalé pozitív. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\alpha < 0$. Tehát tetszőleges paraméterválasztás mellett a rendszer globális aszimptotikusan stabilis.

4. Adaptív becslések

Tegyük most fel, hogy az összes termelő és a piac is adaptív becslést alkalmaz. Ekkor a (4), (5) és (7) egyenletek összekapcsolásával ismét egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek együtthatómátrixa most

$$\mathbf{A}_A = \begin{pmatrix}
-K_1 & & & & & \frac{K_1}{2B_1} & & \\
& \ddots & & & & & \ddots & \\
& & -K_N & & & & & \frac{K_N}{2B_N} \\
-K & \cdots & -K & 0 & KD & & & \\
& & & M_0 & -M_0 & & & \\
& & & M_1 & & -M_1 & & \\
& & & \vdots & & & \ddots & \\
& & & M_N & & & & -M_N
\end{pmatrix}$$

alakú. A mátrix sajátérték-egyenlete:

$$
\begin{aligned}
-K_k u_k + \frac{K_k}{2B_k} v_k &= \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\
-K \sum_{k=1}^{N} u_k + K D v_0 &= \lambda v \\
M_0 v - M_0 v_0 &= \lambda v_0 \\
M_k v - M_k v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \, .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Az utolsó két egyenletből

$$
v_k = \frac{M_k}{\lambda + M_k} v \, , \tag{12}
$$

ahol ismét feltesszük, hogy $\lambda \neq -M_k$. Az első egyenletből

$$
u_k = \frac{K_k}{2B_k(\lambda + K_k)} \qquad v_k = \frac{K_k M_k}{2B_k(\lambda + K_k)(\lambda + M_k)} v \, ,
$$

amelyet és a (12) relációt $k = 0$ esetére a (11) második egyenletébe helyettesítve egyetlen egyenletet nyerünk λ-ra:

$$
-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k M_k}{2B_k(\lambda + K_k)(\lambda + M_k)} + \frac{K D M_0}{\lambda + M_0} = \lambda \, . \tag{13}
$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $K_k = K^*$ és $M_k = M^*$ minden k mellett. Ekkor a (13) egyenlet is leegyszerűsödik:

$$
\frac{-K K^* M^*}{2(\lambda + K^*)(\lambda + M^*)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} + \frac{K D M^*}{\lambda + M^*} = \lambda \, ,
$$

amely egyszerű számolással a következőre redukálódik:

$$
\lambda^3 + \lambda^2(K^* + M^*) + \lambda(K^* M^* - K D M^*) + K K^* M^* \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - D \right) = 0 \, .
$$

A közismert Hurwitz-féle kritérium (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992) alapján a gyökök valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$
(K^* + M^*)(K^* M^* - K D M^*) - K K^* M^* \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - D \right) > 0 \, ,
$$

minthogy a harmadfokú polinom összes együtthatója pozitív. Megjegyezzük, hogy e feltétel átírható az ekvivalens

$$M^* > \frac{KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - K^{*2}}{K^* - KD} \tag{14}$$

alakba.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők továbbra is adaptív becslést alkalmaznak, viszont a piac pontosan ismeri az árat. Ekkor az $\mathbf{A}_A$ mátrix a következőképpen módosul:

$$\mathbf{A}_A^* = \begin{pmatrix} -K_1 & & & & \frac{K_1}{2B_1} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -K_N & & & & \frac{K_N}{2B_N} \\ -K & \cdots & -K & KD & & & \\ & & & M_1 & -M_1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & M_N & & & -M_N \end{pmatrix}$$

A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a $K_k = K^*$ és $M_k = M^*$ speciális esetben a sajátértékek a

$$\lambda^3 + \lambda^2(K^* + M^* - KD) + \lambda(K^*M^* + KK^*D - KDM^*) + KK^*M^* \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - D \right) = 0$$

egyenlet gyökei. A Hurwitz-féle kritérium szerint a sajátértékek valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$M^{*2}(K^* - KD) + M^* \left(K^{*2} - 2KK^*D^* + K^*D^2 - KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} \right) - KK^*D(K^* - KD) > 0\,.$$

Könnyen kimutatható, hogy a bal oldal két valós gyökkel rendelkezik, az egyik pozitív és a másik negatív. Ha M_+ jelöli a pozitív gyököt, akkor a rendszer akkor és csak akkor globális aszimptotikusan stabilis, ha

$$M > M_+\,. \tag{15}$$

5. Extrapolatív becslések

Tegyük fel először, hogy az összes termelő és a fogyasztók is extrapolatív becslést választanak. A (4), (5) és (8) egyenlőségek összekapcsolásával olyan lineáris differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A}_E = \begin{pmatrix} 1 & & & -\frac{K_1 M_1}{2B_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\frac{K_N M_N}{2B_N} \\ & & & 1 - KDM_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -K_1 & & & \frac{K_1}{2B_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -K_N & \frac{K_N}{2B_N} \\ -K & \dots & -K & KD \end{pmatrix}$$

alakú. A mátrix sajátérték-egyenlete a következő:

$$\begin{aligned} -K_k u_k + \frac{K_k}{2B_k} v &= \lambda\Big(u_k - \frac{K_k M_k}{2B_k} v\Big) \qquad (k = 1, 2, \dots, N) \\ -K \sum_{k=1}^{N} u_k + KDv &= \lambda(1 - KDM_0)v \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Az első egyenletből

$$u_k = \frac{K_k(1 + \lambda M_k)}{2B_k(\lambda + K_k)} v \,,$$

ahol feltettük, hogy $\lambda \neq -K_k$. Ezt a relációt (16) második egyenletébe helyettesítve egy egyszerű egyenlet adódik λ-ra:

$$-K \sum_{k=1}^{N} = \frac{K_k(1 + \lambda M_k)}{2B_k(K_k + \lambda)} + KD = \lambda(1 - KDM_0) \,. \tag{17}$$

Tekintsük ismét a speciális esetet, amikor $K_k = K^*$ és $M_k = M^*$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Ekkor a (17) egyenlet a

$$\frac{-KK^*(1 + \lambda M^*)}{2(K^* + \lambda)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} + KD - \lambda(1 - KDM_0) = 0$$

egyenlőségre redukálódik, amely ekvivalens a

$$\lambda^2(1 - KDM_0) + \lambda \left(\frac{KK^* M^*}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - KD + K^*(1 - KDM_0) \right) + \\ KK^* \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - D \right) = 0$$

legfeljebb másodfokú egyenlettel. Három alesetet különböztetünk most meg:

(i) Ha $1 - KDM_0 = 0$, akkor az egyenlet lineárissá változik. Az egyenlet egyetlen gyöke valós, amely akkor és csak akkor negatív, ha

$$M^* > \frac{2D}{K^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} . \tag{19}$$

(ii) Ha $1 - KDM_0 > 0$, akkor a gyökök valós része akkor és csak akkor negatív, ha a lineáris tag együtthatója pozitív. Ez a feltétel ekvivalens az

$$M^* > \frac{2KD - 2K^*(1 - KDM_0)}{KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} \tag{19}$$

egyenlőtlenséggel.

(iii) Ha $1 - KDM_0 < 0$, akkor a rendszer semmiképpen sem lehet globális aszimptotikusan stabilis, hiszen a konstans tag mindig pozitív.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők továbbra is extrapolatív becsléseket alkalmaznak, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor $M_0 = 0$, így a (ii) aleset feltétele teljesül, és a (19) egyenlőtlenség tovább egyszerűsödik:

$$M^* > \frac{2KD - 2K^*}{KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} \tag{20}$$

Tekintsük ismét a (17) egyenletet általánosan, de feltételezve most, hogy $1 - KDM_0 \geq 0$ és $M_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$. Kimutatjuk, hogy az összes gyök valós része negatív. Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$ az egyenlet egyik gyöke, ekkor (17) alapján

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k(1 + \alpha M_k + i\beta M_k)(\alpha + K_k - i\beta)}{2B_k\big((\alpha + K_k)^2 + \beta^2\big)} + KD = (\alpha + i\beta)(1 - KDM_0) ,$$

és összehasonlítva a valós részeket a következő adódik:

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k\big((1 + \alpha M_k)(\alpha + K_k) + \beta^2 M_k\big)}{2B_k\big((\alpha + K_k)^2 + \beta^2\big)} + KD = \alpha(1 - KDM_0) .$$

Ha $\alpha \geq 0$, akkor a jobb oldal nemnegatív, a bal oldal pedig szigorúan negatív. Így $\alpha < 0$ lehetséges csak, amely bizonyítja a rendszer globális aszimptotikus stabilitását. Az imént elmondottak természetesen az $M_0 = 0$ esetre is vonatkoznak (amikor a fogyasztók ismerik a pontos árat).

6. Megjegyzések

Az (1) költségfüggvény esetén $c_k = C_k(0)$, $b_k = C_k'(0)$, és $B_k = C''(x_k)/2$. A $c_k > 0$ egyenlőtlenség állandó költségeket feltételez, a $b_k > 0$ feltétel a költségfüggvény kezdeti növekedését jelenti, és a $B_k > 0$ feltétel a költségfüggvény konvexitását köti ki. A (2) keresleti függvényben $D < 0$ az árban való csökkentést jelenti, $d > 0$ pedig szükséges ahhoz, hogy $p \geq 0$ esetén pozitív piaci kereslet adódjon. Feltettük, hogy (3) megoldása pozitív. Ellenkező esetben ugyanis az adott termelőnek az az érdeke, hogy kilépjen a piacról, így a továbbiakban nem kell vele többé számolnunk. Így aszimptotikus vizsgálatokban az ilyen termelőktől eleve eltekinthetünk. Az (5) összefüggés úgy magyarázható, hogy várható hiány esetén az ár növekszik, várható többlettermelés esetén csökken, egyensúly esetén pedig változatlan marad. A (7) adaptív becslést úgy értelmezhetjük, hogy az állandóan a becslési hiba arányában változik. Az $M_k = \infty$ esetben adaptív becslések Cournot-típusúra redukálódnak. Extrapolatív becslések esetén nem tettük fel, hogy M_k pozitív. Ha $M_k < 0$, akkor a becslés bizonyos késleltetéssel történik, ha $M_k > 0$, akkor valóban extrapolációról van szó az érintő mentén, ha pedig $M_k = 0$, akkor a becslés ismét Cournot-típusúvá egyszerűsödik.

Stabilitási vizsgálatainkban feltettük, hogy az összes termelő és a piac is azonos típusú becsléseket alkalmaznak. Ha ettől az egyszerűsítő feltételtől eltekintünk, akkor a modellek matematikailag bonyolultabbá válnak, de továbbra is lineárisak maradnak, így azok stabilitása a korábbiakhoz hasonlóan vizsgálható.

Érdekes, hogy a rendszer Cournot-féle becslések esetén mindig aszimptotikusan globális stabilis. Ha az összes termelő és a fogyasztók is adaptív becslést választanak, akkor a stabilitásnak (14) alapján az a feltétele, hogy M^* elég nagy értékű legyen a többi paraméter rögzítése mellett. Jegyezzük meg, hogy hasonló feltétel adódik, amikor a fogyasztók pontosan ismerik az árat, de az összes termelő továbbra is adaptív becslést alkalmaz. Következésképpen $M^* = \infty$ eleget tesz a stabilitási feltételeknek, ismét bizonyítva, hogy Cournot becslések esetén a rendszer mindig globálisan aszimptotikusan stabilis. Ez az eredmény egyébként pontosan megfelel a dinamikus oligopol játékok esetén bizonyított korábbi eredményeknek. (Lásd Okuguchi és Szidarovszky, 1990).

Vegyük észre, hogy a (18), (19) és (20) egyenlőtlenségek jobb oldalai valamennyien negatívak, így $M_k = 0$ kielégíti ezeket a feltételeket. Ezzel a Cournot becslések melletti stabilitási eredményt kaptuk ismét vissza.

Többtermékes oligopol játékokhoz hasonlóan terjeszthetők ki a dolgozatban bemutatott modellek a többtermékes esetre. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Irodalom

1. Molnár S. és Szidarovszky F. (1994a) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról. Szigma XXV. 3. (1994), 207–220.
2. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994b) Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben. Szigma XXV. 3. (1994), 221–228.
3. Arrow, K. J. (1960) Price Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et al. (eds) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, Stanford, CA.
4. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi-Product Frims. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
5. Szidarovszky F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.

ON THE STABILITY OF CONTINUOUS PRODUCER-CONSUMER MODELS

In this paper the global asymptotical stability of continuous producer-consumer systems is examined. The price dynamic is the same as in Arrow's (1960) model, but the market is different. Cournot, adaptive and extrapolative expectations are discussed, and the corresponding stability conditions are interpreted and compared.

A HELYETTESÍTÉS ÉS KOMPLEMENTARITÁS ÉRTELMEZÉSI PROBLÉMÁI A KÖZGAZDASÁGI ELMÉLETBEN II.[1]

BARANCSUK JÁNOS
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

Tanulmányunk I. részében bemutattuk, hogy a jószágok helyettesítő/komplementer viszonyának tesztelése során a jövedelmi hatás által közvetített torzítások kiszűrhetők, ha a fogyasztói preferenciákat homotetikussá „igazítjuk". A dolgozat második felében még egy olyan effektus ismertetésére vállalkozunk, ami ilyen típusú preferenciák mellett is deformálhatja vizsgálatunk eredményeit.

A kardinális és ordinális megközelítés eredményeinek inkongruenciájáról

A probléma tüneteire már utaltunk: ugyanazon hasznossági függvényből kiindulva eltérő kapcsolatot jelezhet X és Y között a határhaszon keresztváltozós függvényére, illetve a kereslet keresztárrugalmasságára épülő gondolatmenet. Felvetésünk bizonyos szempontból elvi jellegűnek tűnik. Ha ugyanis a hasznosság mérésével kapcsolatban kizárólag az „agnosztikus" ordinális álláspontot fogadjuk el, nyilván kétféle megközelítésmódról sem lehet szó, s így eredményeik között sem lehet különbség.

Bár jelen tanulmány nem tekinti feladatának a hasznosság kardinális és ordinális felfogása körül kialakult klasszikus – de talán még nem teljesen lefutott – vita[2] parazsát sem pro, sem kontra érvekkel felszítani, szükségesnek tartjuk meghallgatni Hicksnek egy idevágó véleményét: "A hasznosság kvantitatív fogalma nem elengedhetetlen a piaci jelenségek magyarázatához. Ezért Occam borotvájának elve alapján helyesebb, ha nem használjuk ezt a feltevést. [...] Az ilyen entitások irrelevánsak a szóban forgó problémákkal kapcsolatban..."[3]

Dilemmánk most a következő. Amennyiben a hasznosság kvantitatív fogalma valóban irreleváns, tehát nélkülözhető entitást jelent témánk szem-

---

[1]Beérkezett 1994. október 28.

[2]Lásd pl. [1, 2, 3, 7] művekben az ordinalizmus kizárólagosságával szemben megfogalmazott véleményeket.

[3][4] 60. old.

pontjából, akkor a keresztárrugalmasság, illetve a határhaszon keresztváltozós függvényére támaszkodva a javak fogyasztási kapcsolatára vonatkozóan *azonos* információkat kell(ene) nyernünk. (Megjegyezzük: a homotetikus preferenciák esetleges sérüléséből fakadó torzítások kiszűrését a továbbiakban megoldottnak tételezzük fel, vagyis e probléma vetületeivel már nem foglalkozunk.)

A tesztelési eljárások eredményeinek inkongruenciája azonban arra utal, mintha a nevezetes borotva ezúttal az elméletnek nem csak a redundáns elemeit távolította volna el.

Az illető eltérés okára vonatkozó egyik – éppen Hickstől származó – magyarázatot egy másik logikai kontextusban már idéztük.[4] Ennek lényege: egy kardinális hasznossági függvény monoton transzformációi megváltoztathatják a termékek komplementer/helyettesítő jellegére vonatkozó, a határhasznok keresztreagálása révén nyert besorolást, inkongruenciát előidézve az említett transzformációra érzéketlen másik csoportosítási eljárás eredményeivel. A következőkben e jelenség részletes értelmezését kívánjuk elvégezni.

Didaktikai szempontokból célszerűnek tűnik, ha kiindulásként *additív* és *homotetikus* hasznossági függvények melletti eseteket vizsgálunk. Legyenek ezek:

$$U = C - \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} \qquad (C \to \infty, \text{konstans})\ , \tag{21}$$

és

$$U = 2X^{\frac{1}{2}} + 2Y^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

funkciók, melyek jellegéből következően a határhasznok keresztreagálása X és Y független viszonyára utal. Ha viszont a keresztárrugalmasságok mértékét tekintjük döntőnek, akkor a javak kiegészítő (21), illetve helyettesítő (7) kapcsolatát regisztrálhatjuk.

Ahhoz, hogy a kétféle megközelítés eredményeinek inkongruenciáját megmagyarázzuk, heurisztikai fogásként az összehasonlítás módszeréhez folyamodunk. Ennek során a fenti funkciókat egy olyan hasznossági függvénnyel vetjük össze, amelyre vonatkozóan a különböző tesztelési eljárások következtetései megegyeznek, majd megvizsgáljuk, hogy a függvények között feltárt kontraszt mely elemei állnak kauzális kapcsolatban problémánk megoldásával.

Az összevetés alapjául szolgáló hasznossági összefüggés:

$$U = C + \ln X + \ln Y \qquad (C \to \infty, \text{konstans})\ , \tag{22}$$

amely minden szempontból a javak függetlenségét jelzi.

[4] Lásd e tanulmány 4. old. 4. lábj. által jelölt passzust: [4] 84. old.

Az inkongruencia oka additív hasznossági függvények esetén

Hipotézisünk szerint a megmagyarázni kívánt inkongruencia oka a javak határhaszon-funkcióinak elaszticitásával hozható kapcsolatba. Közelebbről: ha az illető rugalmasság abszolút értéke – $|\varepsilon_{MU}|$ – éppen egységnyi, akkor a különböző logikára támaszkodó tesztelések egymással adekvát eredményt adnak, ha viszont $|\varepsilon_{MU}|$ egynél nagyobb, akkor az egyébként additív hasznossági függvény változóit a keresztárrugalmasság kiegészítőknek tünteti fel. Mutatis mutandis, egynél kisebb $|\varepsilon_{MU}|$ értékből – a határhasznok keresztreagálása alapján függetlennek tűnő javak – helyettesítő jellege következik.

Hipotézisünk igazolása során induljunk ki a Gossen II. törvényében megfogalmazott jól ismert

$$\frac{X^n}{p_X} = \frac{Y^n}{p_Y} = \mathcal{L} \quad (= MU_M) \tag{23}$$

egyenlőségből, ami az

$$I = X \cdot p_X + Y \cdot p_Y \tag{24}$$

egyenlőséggel kiegészítve a fogyasztói egyensúlyt jelentő optimális keresleti struktúra elsőrendű feltételét fogalmazza meg. (I a fogyasztó nomináljövedelmét, p_X, p_Y az X és Y termékfajták egységárát, $\mathcal{L}$ pedig a „pénz", vagy jövedelem határhasznát mérő ún. Lagrange-szorzót jelöli.)

A két jószág határhaszna (MU_X és MU_Y) ebben az ábrázolásban célszerűen X^n illetve Y^n alakban jelenik meg, amikor is észrevehető, hogy a határhasznok elaszticitása (ε_{MU}) nem más, mint a hatványkitevőben szereplő n. Ez a rugalmassági érték Gossen I. törvényének megfelelően negatív szám.

A (23) és (24) formula által alkotott egyenletrendszer megoldásaként X-re és Y-ra kapjuk, hogy:

$$X = \frac{I}{p_X + p_X \left(\dfrac{p_Y}{p_X}\right)^{\frac{n+1}{n}}}, \tag{25}$$

illetve:

$$Y = \frac{I}{p_Y + p_Y \left(\dfrac{p_X}{p_Y}\right)^{\frac{n+1}{n}}}. \tag{26}$$

Ha most az X termék árváltozásából indulunk ki, akkor belátható, hogy (21) függvény alapján ha

$$|n| > 1\,,$$

akkor igaz, hogy p_X és Y mozgása ellentétes, Y keresletének keresztárrugalmassága tehát a kiegészítő javakra jellemző negatív szám. A (23)-ból következően ez esetben a $\mathcal{L}$ mozgása az X árával megegyező irányú.

Ugyanígy, ha a (7) függvénynek megfelelően

$$|n| < 1 ,$$

akkor az említett keresztárrugalmasság a helyettesítő javakra utaló pozitív értéket vesz fel, a $\mathcal{L}$ pedig az X árával ellentétes irányban mozdul el. Mutatis mutandis, ha a (22)-ből kiindulva

$$|n| = 1 ,$$

akkor az illető keresztárrugalmasság értéke zérus, p_X változása sem Y, sem $\mathcal{L}$ nagyságát nem érinti.

Az inkongruenciát előidéző jelenség egy másik értelmezéséhez vezessük most be az árcsökkenés révén felszabaduló jövedelem (I^F) fogalmát, amit az illető termék árváltozás előtt keresett mennyiségének (X^0) és az árváltozás negatív előjellel figyelembe vett mértékének ($-\delta p_X$) szorzataként definiálunk:[5]

$$I^F = -\delta p_X \cdot X^0 . \tag{27}$$

(Áremelkedés esetén a felszabaduló jövedelem természetesen nullánál kisebb értéket ad.)

Induljunk ki ismét az X termék árának változásából (csökkenéséből). Az ármozgás természetszerűleg felborítja a fogyasztói egyensúlyt jelző (23) egyenlőséget, amikor is a felszabaduló jövedelem éppen az egyensúly visszaállítását szolgáló keresleti átrendeződés fedezeteként szolgál.

Igazolható ekkor, hogy az MU_X (abszolút) egységnyi rugalmassága esetén az X termék új árakon számított keresletváltozása ($\delta X \cdot p_{X^1}$) a felszabaduló jövedelemmel egyenlő, míg az egységnyinél nagyobb (kisebb) rugalmassága mellett a felszabaduló jövedelemnél kisebb (nagyobb) összeget szív fel.

Tekintsük először a

$$\delta X \cdot p_{X^1} = -\delta p_X \cdot X^0 \quad (= I^F) \tag{28}$$

(ahol $p_{X^1} =$ az X jószág árváltozás utáni ára) egyenlőséget, amelyből ekvivalens átalakítások révén nyerjük, hogy:

$$X^1 \cdot p_{X^1} = X^0 \cdot p_{X^0} \tag{29}$$

[5]E nagyság ellentétes előjellel – más vonatkozásban – a jövedelem Sluckij-féle kompenzációs változásával egyenlő. Lásd még pl. [9] 315. és 183. old.

(ahol X^1 az illető jószágfajta árváltozás után keresett mennyisége, p_{X^0}pedig az árváltozás előtti – eredeti – ára).

A kapott (31) összefüggés a kereslet egységnyi sajátárrugalmassága esetén teljesül[6], amit a (12a) vagy (12b) azonosságokra támaszkodva az Y termék keresletének zérus keresztárrugalmasságával, ez utóbbit pedig az $|\varepsilon_{MU}|$ egységnyi értékével kapcsolhatunk össze.

Ugyanígy, ha a p_X csökkenését feltételezve,

$$\delta X \cdot p_{X^1} < -\delta p_X \cdot X^0 \quad (= I^F) \tag{28a}$$

tehát

$$X^1 \cdot p_{X^1} < X^0 \cdot p_{X^0} \tag{29a}$$

teljesül, akkor ez az X keresletének egységnyinél kisebb saját-, illetve az Y keresletének negatív keresztárrugalmasságára utal, amikor is $|\varepsilon_{MU}|$ egynél nagyobb.

Ez utóbbi esetben lényeges, hogy az egyensúlyt visszaállító folyamat során az árváltozás által nem érintett jószág (Y) kereslete is aktív szerephez jut. Az illető keresleti modell feltételezései szerint ugyanis a fogyasztó a teljes jövedelmét feléli, ezért a felszabaduló jövedelem felszívásának „feladata" megoszlik a két jószágfajta között. Az említett jövedelmi rész elnyelésében való szerepvállalás miatt ekkor tehát az Y termék keresett mennyisége végső soron nő, határhaszna pedig ennek megfelelően csökken.

Ugyanezen gondolatmenet – mutatis mutandis – a (28a) és (29a) egyenlőtlenségekhez képest fordított relációk esetén is alkalmazható. Ekkor azonban a felszabaduló jövedelem „elégtelen" szintje miatt annak kiegészítésére lesz szükség az átrendeződési folyamat során, amikor is a végső egyensúly Y jószág keresett mennyiségének csökkenésével és határhasznának (tulajdonképpen a mérlegelt határhasznok) emelkedésével jellemezhető.

Látható, hogy a fogyasztói optimum újrarendeződése során a változatlan árú termék (Y) jövedelmi szegmense egyfajta *puffer-szerepet* játszik: hol elnyeli, hol kipótolja a felszabaduló jövedelem és az X jószág keresletváltozása által érintett jövedelem differenciáját. Az inkongruens esetekben tehát az Y jószág keresletében beállt változásnak semmi köze nincs az X termék irányában megnyilvánuló kiegészítő vagy helyettesítő viszonyhoz, hanem ez az elmozdulás az ún. *puffer-hatás* eredménye.[7]

---

[6] Lásd pl. [9] 342–346. old.

[7] További érdekes következtetések levonására adna alkalmat, ha az egész témakört a Don Patinkin-féle reálegyenleg-hatás szemszögéből is áttekintenénk. Lásd: Don Patinkin: Money, Interest and Prices. Evanstone – NewYork, 1956. 21. old., illetve [6] 233–235. old.

A puffer-hatás kiszűrésének lehetőségei

Az említett – jól észrevehetően dezinformáló jellegű – puffer-hatás kiszűrésének elméleti lehetőségét jelenti, ha a hasznossági függvény változói között egy ún. *puffer-jószág* is szerepel. Ez egy konstans árú, és saját mennyiségének függvényében is állandó (vagy megközelítőleg állandó) határhasznú termék, amely mintegy „átvállalja" az illető effektus levezetését, biztosítva, hogy az árváltozás által nem érintett többi jószág kereslete kizárólag a határhasznok keresztreagálásának megfelelően módosuljon. Erre azért képes, mert a felszabaduló jövedelem „túlcsordulása", de „ritkasága" esetén is e jószág keresletének változtatása bizonyul a fogyasztó számára legelőnyösebbnek. Mennyiségének növelését nem követi határhasznának csökkenése (ezért a jövedelem jó allokációs célpontja), fogyasztásának mérséklődésekor pedig határhaszna nem nő (tehát a jövedelem e területről való kivonása okoz legkevesebb haszonveszteséget).[8]

Hicks könyvében az előző okfejtéseinket igazolni látszó megállapításokat olvashatunk. Ezek szerint „az Edgeworth-Pareto-féle definíció csak akkor alkalmazható értelmesen, ha feltételezzük, hogy a pénz határhaszna konstans...", amikor is a pénz puffer-jószágként való viselkedése miatt „a definícióból közvetlenül adódik, hogy X árának csökkenése – megnövelve az X iránti keresletet – szükségképpen növeli Y határhasznát, ha X és Y jószágok komplementerek, s ezáltal növeli az Y iránti keresletet is. Hasonlóan X árának esése csökkenti az Y iránti keresletet, ha X és Y helyettesítő javak."[9]

Mint tudjuk, a „pénz" határhasznának konstans szinten való megállapítása elmélettörténetileg Marshall nevéhez fűződik, és a jeles közgazdász azon törekvését szolgálta, hogy a jövedelmi hatás zavaró jelenlététől megszabaduljon a keresleti függvény levezetése során.[10]

E megoldás elméletileg tiszta változata, amikor az illető határhaszon matematikai szempontból is állandó,[11] Marshall azonban – modellje „élethűségét" is szem előtt tartva – közelítő eljárást alkalmazott.[12] Eszerint egy

[8] Apuffer-jószág kereslete – éppen sajátos „missziója" miatt – általában nem kongruens módon reagál más termék árváltozására. A kivételt az jelenti, amikor az árában módosult cikk határhaszonfüggvénye hiperbolikus.

[9] In: [4] 83–84. old.

[10] A marshalli „pénzt" a mikroökonómiában napjainkra elterjedt hagyomány szerint nem valódi pénzként fogjuk fel. Ahogy Hicks írja: az árváltozás által elkerült „többi fogyasztási cikket – amíg az áraikról feltételezhetjük, hogy változatlanok maradnak – a 'pénz' [...] fogalmába vonjuk össze." Lásd [4] 73–74. old. Lásd még Variannak az összetett jószágra adott meghatározását: [9] 50. old.

[11] Vegyük észre, hogy az ilyen puffer-jószágot tartalmazó hasznossági függvény tulajdonképpen nem más, mint egy kvázilineáris funkció.

[12] A pénz (jövedelem) határhasznának állandóságával kapcsolatos interpretációk – mint a későbbiekben még tapasztaljuk – korántsem egységesek. Lásd még [8] és [2] publikációk

árkorrekcióra reagáló keresleti átrendeződést követően a „pénz" határhaszna akkor sem változik számottevően, ha az árváltozás által érintett jószágra a fogyasztói jövedelemnek csak igen kis hányadát költik. A Principles szerzője szerint a jövedelmi hatás e feltétel mellett is elhanyagolható lesz.

Hicks ugyanezt a gondolatmenetet támasztja alá, amikor így ír: „Ha a jövedelemnek csak kis hányadát költik X-re, akkor a jövedelmi hatás általában kicsi lesz: elhanyagolható hatást gyakorol X keresletére, és jelentéktelen hatást gyakorol minden más áru keresletére is."[13] Figyeljük meg: Hicks „minden más áru" keresletére vonatkozó utalása a *kereszt*-jövedelmi hatásra céloz.

A rugalmassági azonosságok egy, már az előzőekben is elemzett változata alapján belátható, hogy Marshall "közelítő" verziója szintén alkalmas a pufferhatás erejének kiiktatására:

$$\varepsilon_M^{p_X} \equiv \frac{s_X}{s_M}(1 + \varepsilon_X^{p_X}) \qquad (12a*)$$

(ahol az M index ezúttal az X-en kívüli „többi áru", vagyis a „pénz" jelölésére szolgál).

Eszerint ugyanis, ha – ceteris paribus – az X jószág költségvetési hányadának (s_X) mértéke csökken (s_M pedig vice versa nő), akkor árának (p_X) eltolódására egyre kevésbé fog reagálni a "többi termék" kereslete. Ez azzal magyarázható, hogy az s_X csökkenésével egyrészt magának a pufferhatást generáló jövedelemnek a mennyisége is mérséklődik, másrészt pedig az ilymódon egyre gyengülő effektus is egy potenciáját mindinkább felemésztő, fokozatosan növekvő terméktömegen (M) terül szét. Ez utóbbi jószágok határhaszna tehát – mivel mennyiségük csak elhanyagolható mértékben változik – megközelítőleg állandó marad, biztosítva ezáltal a különböző javak fogyasztási kapcsolatát tesztelő eljárások eredményei között a kongruenciát.

A puffer-termék szerepét – mint láttuk – mind az „elméletileg tiszta", mind pedig a „közelítő" megoldás logikája szerint olyan jószág(halmaz) játszhatja el, melynek határhaszna gyakorlatilag rugalmatlanul viselkedik az illető hatás elnyelése során. Míg azonban a „klasszikus" puffer-termék – lévén, hogy határhaszna valódi konstans – e feladatot keresletének szignifikáns módosulásai révén lát(hat)ja el, addig a marshalli értelemben felfogott „pénzt" – nagy tömegének betudható – alacsony keresztárrugalmassága (vagyis relatíve kis mennyiségi változása) predesztinálja e pozíció betöltésére. Ha ugyanis egy meghatározott volumenű „puffer"-jövedelem nagyszámú, a „pénzt" alkotó termék között „szóródik szét", akkor e komponensek mindegyikének keresletére csak elenyésző hatást gyakorol, lényegében érintetlenül hagyva azok határhasznát. Az összetett jószág vásárlására fordított jövedelem egységnyi változása tehát a marginális haszon összehasonlíthatatlanul kisebb

több szempontból is vitára ingerlő megállapításait.

[13] [4] 86. old. Lásd még [5] 159. old.

módosulásával jár, mint amit ugyanezen jövedelmi rész valamely ,,közönséges" termék keresletétől való elvonása vagy hozzáadása esetén tapasztalnánk.

Az inkongruencia és a jövedelmi hatás látszólagos összefüggéséről

Marshall módszertani ,,trükkje" az elméleti közgazdászok kollektív tudatában – mára közhellyé vált, s így nem csoda, ha az általa hordozott jelentéstartalom igen pongyola, esetenként félrevezető interpretációival találkozhatunk. Ezek egyike szerint például, ha feltesszük, hogy p_X csökken és a pénz határhaszna állandó, akkor ez azt jelenti, hogy p_X csökkenése nem érinti a fogyasztó reáljövedelmét.[14]

S ahogy Hicks megnyilvánulásaiból gyakran tapasztaljuk, ő ugyancsak a jövedelmi hatás(ok) hiánya mellett látja biztosítva a termékek fogyasztási kapcsolatának torzításmentes tesztelését.[15] Joggal gondolhatunk tehát arra, hogy – a "pénz" határhasznának transzmissziója révén - a jövedelmi hatás és az inkongruencia között kauzális kapcsolat áll fenn, vagy legalábbis ez a két jelenség ugyanazon problémakör különböző vetületeit, s egymást feltételező ikerszimptómáit takarja.

Szükségesnek tartjuk ezért – most csak tanulmányunk kérdésfelvetésének szempontjából – megjegyezni a következőket.

A ,,pénz", vagyis a többi termék változatlan határhaszna valóban a javak közötti fogyasztási kapcsolat torzításmentes tesztelésének lényegi momentuma (tulajdonképpeni indikátora), azonban ún. *post hoc, ergo propter hoc* típusú, téves logika áldozataivá válunk, ha gondolatfűzésünkbe bármiféle jövedelmi hatást is bekapcsolunk. Ez utóbbi(ak)hoz ugyanis az inkongruenciának lényegében semmi köze sincs, lévén hogy a ,,pénz" marginális hasznosságának változatlansága esetén ténylegesen csak a puffer-jelenséghez kapcsolódó deformáció, s nem az árváltozással járó jövedelmi effektus(ok) szintje lesz szükségszerűen elenyésző.

A (22) alatti függvény példáján keresztül ugyanis bizonyítható, hogy habár az X jószág árának jelentős módosulása számottevő reál-, illetve ,,hagyományos" értelemben vett (saját- és kereszt-) jövedelmi hatás(oka)t vált ki, a puffer-effektus mértéke ennek ellenére zérus, lévén, hogy Y (vagyis a tulajdonképpeni ,,pénz") keresletét, s így határhasznát az említett árváltozás

---

[14] Itt valójában arról van szó, hogy ha az árváltozás – az illető termékre fordított kiadási részarány elhanyagolhatósága miatt – nem érinti a fogyasztó reáljövedelmét, akkor a ,,pénz" határhaszna lényegében állandó marad. A tétel azonban nem megfordítható, ugyanis a pénz határhasznának változatlanságából – mint majd látni fogjuk – nem következik egyértelműen a reáljövedelem állandósága is egy árváltozást követően.

[15] Lásd pl. [4] 86. és 90. old.

nem érinti.[16] Mivel a (22) formula esetében nem zárható ki, hogy s_X akár szignifikánsan eltérjen nullától, a „pénz” sem töltheti be automatikusan a puffer-jószág szerepét. (Határhasznának állandósága itt *nem oka, hanem következménye* a kongruenciának.)

A puffer- és jövedelmi-hatások közötti valóságos összefüggések feltárását a puffer-jószágok egyfajta „szerephalmozása” zavarja. A hasznossági függvények változói közti megjelenésük ugyanis egyrészt valóban kiküszöböli az illető torzítást, másrészt viszont eltünteti a tesztelésben részt vevő termékek keresletére ható (saját- és kereszt-) jövedelmi hatást is.

Ennek illusztrálására tekintsük először a „klasszikus” – mereven konstans határhasznú – puffer-termék esetét. Mivel a hasznossági függvény ilyenkor kvázilineáris jellegű, könnyen belátható, hogy a jövedelmi hatás kizárólagosan az e jószág keresletét érintő *kereszt*effektus formájában van jelen. (A rend kedvéért jegyezzük meg azt is, hogy ez a hatás egy, az ár elmozdulásához igazodó ugrást jelent a jövedelem reálszintjét szimbolizáló közömbösségi görbék között.)

Marshall közelítő megoldásánál – mint tudjuk – az árváltozásban érintett termék költségvetési részesedése (s_X) elhanyagolható. Ennek triviális következménye, hogy az ún. felszabaduló jövedelem szintje is rendkívül alacsony. Ha most arra gondolunk, hogy ez az imponderábilis mérték egyúttal (mint Sluckij szerinti kompenzációs változás) az ármozgás (reál)jövedelmi hatását is jellemzi, akkor beláthatjuk, hogy ebben az esetben a jövedelmi effektus egyes termékekre szétterülő megnyilvánulása is alig érezhető.

Mindkét verzió közös jellemzője tehát, hogy a keresletek árváltozásra reagáló, s ugyanakkor a fogyasztási kapcsolatra jellemző elmozdulását a (saját- és kereszt-) helyettesítési hatás hordozza, ami látszólag arra utal, hogy a jövedelmi effektusok jelenléte zavarná a tesztelési eredmények kongruenciáját.

Gondolatmenetünket összefoglalva azonban jegyezzük most meg: az inkongruencia jelenségének sem oka, sem hordozója a jövedelmi hatás. A fogyasztási kapcsolat jellegének feltárására hivatott eljárások eredményei ennek jelenlétében is megegyezhetnek, és ugyanígy igaz, hogy az ominózus hatást eltávolítva is észlelhetünk inkongruenciát.[17] S bár a torzításért felelős puffer-szindróma közömbösítése során bizonyos jövedelmi effektus(ok) eliminálására is sor kerül, ez pusztán csak sajátos „mellékterméke” a mérlegelt határhasznok állandóságában megnyilvánuló, kongruens eredményeket garantáló tényleges feltétel biztosításának.

[16] Az X jószág határhaszon-, s ezért keresleti függvénye ekkor hiperbolikus. Lásd még erről [2] és [8] elemzéseit.

[17] Hicks [4]-ben adott, kizárólagosan a helyettesítési hatásra épülő kritériumairól van szó. Vizsgálatuk nem tárgya jelen tanulmánynak.

A nem-additív függvények melletti inkongruenciáról

Hátra van még azoknak az eseteknek a vizsgálata, amikor *nem additív* hasznossági függvények mellett tapasztalunk a mérési módszerek eredményei között inkongruenciát. A puffer-hatás eme sajátos megnyilvánulásainak egyik fajtáját az jellemzi, hogy Y termék kereslete annak ellenére nem reagál az X jószág árváltozására, hogy a két fogyasztási cikk között pl. komplementer kapcsolat mutatható ki a határhasznok keresztváltozós függvénye alapján. Ezt illusztrálja többek között az

$$U = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} \tag{3a}$$

– Cobb-Douglas-típusú – hasznossági függvény, míg az

$$U = (\ln X + \ln Y)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

funkció ugyanezen szituáció helyettesítő javakra vonatkozó változatát tükrözi.

A nem-additív inkongruencia másik esetében a kétfajta tesztelési eljárás eredménye nem csak eltérő, hanem ellentétes. Ezt tapasztaljuk például a már ugyancsak ismerős

$$U = \left(C - \frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (C \to \infty, \text{konstans}) \tag{9}$$

függvény tekintetében. Ennek vizsgálata során – mint már jeleztük – a határhasznok keresztreagálása szempontjából X és Y helyettesítő viszonyára következtethetünk, hiszen például ez esetben igaz, hogy:

$$MU_Y = \frac{I}{2Y^2\left(C - Y^{-1} - X^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{30}$$

amikor is az X jószág keresletének és fogyasztásának növekedése az MU_Y csökkenéséhez vezet. Ugyanakkor, a keresztárrugalmasság komplementer kapcsolatra utal, mivel az Y termék keresleti függvénye:

$$Y = \frac{I}{p_Y + (p_Y \cdot p_X)^{\frac{1}{2}}} \tag{31}$$

(I = nomináljövedelem) alapján észrevehető, hogy p_X elmozdulása az Y ellentétes irányú változását indukálja.

A puffer-hatás megjelenése a fenti esetekben is azzal hozható kapcsolatba, hogy az árváltozást követő átrendezési folyamat lezárulásakor a mérlegelt határhasznok szintje eltérést mutat az eredetihez képest. Az inadekvát keresleti reakció tehát ezúttal is puffer-jószág jelenlétében kerülhető el.

Az inkongruencia nem-additív funkciók mellett jelentkező megnyilvánulásai gyakran a probléma ismert, additív típusú változataira vezethetők vissza az illető hasznossági függvény megfelelő *monoton transzformációja* révén. Így például a példáinkban szereplő (3a) és (5) hasznossági összefüggések egyaránt a (22), míg a (9) a (21) formájú alakzattá transzformálhatók.

Összegzés és kitekintés

Mint erre tanulmányunkban igyekeztünk rávilágítani, a javak helyettesítésének illetve komplementaritásának megítélése az elmélet számára korántsem jelent trivialitást, hiszen e kérdés eldöntésére alternatív – egymással csak korlátozottan kongruens – megközelítési lehetőségeket ad. Fejtegetéseinkből talán az is kiderült, hogy igen hálátlan feladat lenne e metódusok rangsorolása, hiszen sikerességük – a vizsgált jelenség leképezése szempontjából – erősen viszonylagos.

Elsőnek a kardinális alapokon nyugvó Edgeworth-Pareto-féle módszerrel foglalkoztunk. Nem túlzás azt állítani, hogy a fogyasztási kapcsolat jellegének felismerésére teljesen meggyőző gondolatmenetet ajánl. A javak közti relációt szimmetrikusnak tünteti fel, következtetései egyéb torzító tényezőtől is mentesek, s mint ilyenek, a többi tesztelési eljárás etalonjai lehetnének. Mivel azonban ez az elv a hasznosság – szinte általánosan megkérdőjelezett – mérhetőségére támaszkodik, gyakorlati – és retrospektív módon: elméleti – alkalmazhatósága erősen korlátozott.

A határhasznok keresztreagálásán alapuló megoldás nem kifejezetten „makulátlan" ordinalista ellenreakciójaként értékelhető a keresztárrugalmasságot alkalmazó kritériumrendszer kidolgozása. Bemutattuk ugyanis, hogy az alkalmazásával nyert tesztelési eredményeket a javak közötti kapcsolatok milyenségén túl egyéb, torzító tényezők is befolyásolhatják, melyek egyrészt az asszimmetrikus, másrészt a paretoihoz képest inkongruens minősítésekért felelősek.

A jelzett problémák ellenére – mint láttuk – az esetek többségében a komplementaritás/helyettesítés általunk tárgyalt kritériumai – egymással azonos eredményt szolgáltatva – a termékek valós relációit tükrözhetik. Ennek magyarázata a „pénz", mint puffer-jószág határhasznának állandóságában rejlik, aminek egyik, nagyon gyakran teljesülő biztosítéka, hogy a tesztelt javakra fordított kiadás csak elenyésző mértékben terheli a fogyasztó költségvetését.

E logikai momentum érdekes – most csak jelzésszerűen felvillantott – kapcsolatot létesít jelen dolgozat témája, illetve a *fogyasztói többlet* elmélete között. Ez utóbbi kategória többféle értelmezési lehetősége ugyanis szintén a

,,pénz" határhasznának mozdulatlanságát feltételezve ad mennyiségileg kongruens eredményt. E közös motívum oka az említett határhaszon (sokszor csak implicit, de időnként tökéletlenül ellátott) *etalon-funkciójában* keresendő.

Egyrészt, a javak közötti rokonság minősége a ,,pénzzel" való helyettesítésük határrátájának viselkedésére is visszavezethető, hiszen e ráta elmozdulásának iránya, illetve a kereslet erre reagáló mennyiségi alkalmazkodásának jellege a helyettesítő vagy komplementer viszonnyal hozható összefüggésbe.[18] Másrészt, a fogyasztói többlet, mint ab ovo két hasznossági szint közötti különbség a ,,pénz" bizonyos mennyiségeként fejezhető ki, amikor is e nagyságot természetszerűleg befolyásolja a pénz belső, szubjektív értékének foka. Egyértelmű, hogy az említett ,,etalon" változékonysága mindkét elméleti síkon inkongruens, ,,nem hiteles" mérési eredményekhez vezet, sőt, valószínűsíthető, hogy a fogyasztói többlet mérésénél, illetve a javak kapcsolatának tesztelésénél fellépő torzítás karaktere sem független egymástól. (Kvázilineáris hasznossági függvények esetében ez a probléma természetszerűleg nem lép fel.) E vonatkozások vizsgálata azonban egy másik dolgozat tárgya lehetne.

Irodalom

1. Chipman, J. S.: The Paretian Heritage. Cahiers Vilfredo Pareto, Revue europèenne des sciences sociales 14. 1976.
2. Chipman, J. S. – Moore, J. C.: The scope of consumer's surplus arguments. In: Evolution, Welfare and Time in Economics: Essays in Honor of Nicholas Georgescu-Roegen. Lexington, Mass. 1976.
3. Georgescu-Roegen, N.: A diagrammatic analysis of complementarity. Southern Economic Journal 19, July 1952.
4. Hicks, J. R.: Érték és tőke. KJK. 1978.
5. Hoch, R.: Fogyasztás és ár. KJK. 1972.
6. Mátyás, A.: A modern közgazdaságtan története. Aula kiadó 1993.
7. Neumann, J. – Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior. 3rd ed. Princeton: Princeton University Press 1953.
8. Samuelson, P. A.: Constancy of the marginal utility of income In: Studies in Mathematical Economics and Econometrics, In Memory of Henry Schultz. Chicago: University of Chicago Press, 1942.
9. Varian, H. R.: Mikroökonómia középfokon. KJK. 1991.

[18] Ugyanezt a logikai mozzanatot emeli a helyettesítés/komplementaritás kritériumrendszerének középpontjába Hicks – némileg más feltételrendszer keretein belül. Lásd: [4] 3. fejezet. Lényegében ezen a gondolatmeneten alapul Henderson és Quandt meghatározása is. Lásd: J. M. Henderson – R. E. Quandt: Microeconomic Theory (A mathematical approach) McGraw-Hill Book Company 1971. 37. old.

THE THEORETICAL PROBLEMS OF DEFINITION OF SUBSTITUTES AND COMPLEMENTS (PART TWO)

The second part of paper shows the "puffer-effect" which deforms the informations about the relation of the commodities. In this way, the cardinal and ordinal aspect defines often different relationship between commodities when the marginal utility of money as "numeraire" is variable. The paper explaines that the constancy of this marginal utility occasions measuring unbiased of consumer surplus too.

EGY OSZTÁLYZATON ALAPULÓ FUZZY RENDEZŐ MÓDSZER[1]

BORGULYA ISTVÁN
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

A fuzzy logika alkalmazására egyre több példát láthatunk. Segítségével természetesebb módon kezelhetjük a nem véletlen jellegűen pontatlan, bizonytalan fogalmakat, döntéseket. Rendező módszerei is fontos szerepet játszanak a gyakorlatban, számos területen felhasználhatók a döntéselőkészítésben. Egy jogeset rendező feladat kapcsán én is alkalmaztam e rendező módszereket, illetve saját rendező módszert is kifejlesztettem, mely R. Jain több kritérium szerinti alternatíva rendező módszeréhez hasonló. Ezen "osztályozó-módszer" az oktatásban megszokott osztályozás elvén alapul. Az alternatívákat leíró kritériumértékeket osztályzatként adja meg, és az alternatívát leíró osztályzatok fuzzy halmazait aggregálva, minden alternatívához egyetlen extra osztályzatot rendel. Az alternatívák az extra osztályzatok alapján rendezhetők. Az "osztályozó-módszer" a mintapéldák szerint általánosan alkalmazható rendezésre. Más rendező módszerekkel, mint pl. az ELECTRE II, a Yager-módszer összevetve hasonló eredményeket ad.

1. Bevezetés

A fuzzy logika rendező módszereivel egy jogeset rendező feladat kapcsán kezdtem foglalkozni. A fuzzy logika jogi alkalmazhatóságát vizsgáló L. Philipps vetette fel, hogy R. R. Yager fuzzy logika módszere [9], amely cél alternatívák közül több kritérium alapján egy "legmegfelelőbb" alternatívát választ ki, jogesetek, mint alternatívák körében is alkalmazható [6].

Magyarországi, 1980-81-es bírósági jogesetekkel próbálkozva sikerült a rendezés [2]. Az eseteket leíró különböző kritériumokat (életkor, jogosítvány jellege stb.) egységesen kezeltem: a kritériumokat fuzzy halmazként értelmezve értékeiket osztályzatként adtam meg. Ötfokozatú osztályozást választva, az osztályzatokhoz tartozó fuzzy halmazok tartalmazási függvényeit Gauss-görbékkel adtam meg. Rendezéshez a Yager-módszert alkalmazva monoton, az ítéletek súlyosságának megfelelő rendezést kaptam.

[1]E tanulmány az OTKA T18562 kutatás keretében készült. Beérkezett 1995. május 7.

Az egységes, a kritériumok osztályzásán alapuló megközelítés vetette fel az ötletet, hogy a problémához illeszkedő, új rendező módszert fejlesszek. Ez az "osztályozó-módszer" az alternatívákhoz egyetlen extra osztályzatot rendel, mely alapján rendezhetők az alternatívák.

Az „osztályozó-módszer", amely R. Jain rendező módszeréhez [4] hasonló, az osztályzatok súlyozott aggregálásán alapul. Mivel az osztályzatok feldolgozása különböző szabályokkal írható le, a módszer szabályalapú aggregációval állítja elő az extra osztályzat fuzzy halmazát, és fuzzy-rendszerként programozható.

Bár az „osztályozó-módszer" jogesetek rendezésére készült, általánosan is használható. Ha a kritériumok értékei értelmezhetők osztályzatként (vagy azzá transzformálhatók), alkalmazható a módszer és a bemutatott mintapéldák szerint hasonló erdeményeket ad más rendezési módszerekkel.

Nézzük tehát az "osztályozó-módszert", kapcsolatát a Jain-módszerrel és a módszert szemléltető példákat.[2]

2. Az „osztályozó-módszer"

A jogeset rendezésnél felvetett matematikai probléma a következő: olyan több kritériummal jellemzett alternatívákat kell rendezni, ahol a kritérium értékek fuzzy halmazok.

E probléma megoldását fuzzy logika programcsomaggal kíséreltem meg, és ennek lehetőségei természetesen befolyásolták a megoldás menetét. Így pl. ahhoz, hogy egyszerűbben lehessen kezelni a problémát, a kritérium értékek egységes, ötfokozatú osztályzatokkal való leírását választottam és minden osztályzathoz azonos, Gauss-görbével megadott fuzzy halmazt rendeltem. A kritériumok ezen egységes leírása azt is lehetővé tette, hogy az alternatívákat az oktatásban megszokott módon "osztályozzam". Ez az „osztályozás" minden kritériumot, minden lehetséges értékével figyelembe tud venni, és eredménye az alternatíva rendezés alapját képezheti.

A kialakított „osztályozó-módszer" alapgondolata a következő:

Az oktatásban a legkülönbözőbb tárgyaknál ugyanolyan osztályzatokkal jellemezzük a hallgatók tudását. Általában tanulmányi átlagot is számolunk. A diplomában a tanulmányi átlagot ráadásul különböző súlyú osztályzatokból számoljuk. Ezen átlagok lehetővé teszik a tanulmányi teljesítmény szerinti sorrend megállapítását. Tulajdonképpen e teljesítmény szerinti rendezést évszázadok óta alkalmazzák az oktatásban, és mindenki elfogadja, mint objektív rendezési lehetőséget. (Természetesen egy hallgató megítélését más

[2] A módszer programjait a müncheni egyetem Jogfilozófia és Jogi informatika intézetében az FS-Fuzzysoft programcsomaggal készítettem egy DAAD kutatási ösztöndíj alkalmával.

szempontok is befolyásolják.)

Az "osztályozó-módszer" ezt a gyakorlatban alkalmazott, bevált rendező módszert, a tanulmányi átlag szerinti rendezést másolja le. A módszer alapja egy átlagszámítás, amely nem igényel különösebb matematikai vizsgálatot. Matematikai megfontolásokat igényelnek viszont az osztályzatok tulajdonságait biztosító fuzzy halmazok és műveletek megválasztása. Így ahhoz, hogy az „osztályozó-módszer" az oktatásban megszokott módon tudja az osztályzatokat kezelni, meg kell állapítani az osztályzatok jellemző tulajdonságait és meg kell vizsgálni, milyen fuzzy rendszerrel valósíthatók meg a kapott tulajdonságok és a rendezés.

A fuzzy rendszer szempontjából az osztályzatok jellemzői a következők:

a) A legkülönfélébb tantárgyaknál ugyanazon p-fokozatú (pl. 5-fokozatú) osztályozás valamely osztályzatával (1,2,...) mérjük a tudást.

b) Osztályzatként köztesjegy (pl. 3.5) is adható. Az, hogy egy köztesjegyet mennyire tartunk egy egész értékű osztályzathoz közelinek, általában szubjektív megítélés kérdése.

c) Az átlag (tanulmányi, diploma) az osztályzatok súlyozott átlaga, melyet szintén osztályzatnak tekintünk (általában köztesjegy).

Ezen jellemzők megvalósítása az „osztályozó-módszernél" a következő:

- Ugyanazon osztályzattal jellemezzük a különböző kritériumokat, de nem szükséges minden kritériumnál azonos, p-fokozatú osztályozás.

- Az osztályzatokat olyan fuzzy halmazokkal definiáljuk, melyek tartalmazási függvényei kifejezik a köztesjegyek hozzátartozásának fokát az osztályzat halmazhoz. Emellett azt is ki kell fejezniük, hogy a köztesjegyek és a közvetlen környezetükbe eső értékek (pl. az 1.5, 2.5, 3.5 stb.) két szomszédos osztályzat halmazba is tartoznak. Egy osztályzat tartóhalmazát (supp) pl. az [osztályzat-0.6, osztályzat+0.6] intervallummal adhatjuk meg (a p-számú intervallum közül a szomszédosoknak van közös része). Az osztályzat fuzzy halmaz tartalmazási függvénye pedig olyan szimmetrikus függvény, amely az intervallum középpontjában veszi fel az 1 értéket, és a középponttól mindkét irányban monoton csökkenő. A megfelelő függvény kiválasztását vagy egy közvélemény kutatás, vagy egy közelítő függvény keresés alapozhatja meg. Én a közelítő függvény keresést választottam. Ha egyenesekkel írjuk le a keresett tartalmazási függvényt, az egyenesek meredeksége révén a középpontban, vagy az intervallum végpontjaiban nem mutatja reálisan a hozzátartozás fokát. Pl. a 3.45, 3.5, 3.55 vagy a 3.95, 4, 4.05 osztályzatok közt alig van különbség, így egyenes vagy törtvonal helyett körívek illesztése megfelelőbb lenne. A fuzzy logika programcsomag függvényválasztékából a Gauss-görbe fejezi ki leginkább ezen tulajdonságokat, így minden osztályzatnál azonos alakú Gauss-görbéket választottam tartalmazási függvénynek.

- Az osztályzatként értelmezhető átlag megvalósításához az eredményt is p-fokozatú osztályzatokkal adjuk meg. A p értékét a kritériumoknál alkalmazott legnagyobb fokozatú osztályozás határozza meg. Nevezzük ezt a p számú osztályzatból álló fuzzy halmazt „eredményhalmaznak". Legcélszerűbb az átlagot az eredményhalmazban előállítani. Ebben az esetben az osztályzatok súlyozott összege az eredményhalmaz valamilyen részhalmaza lesz (nevezzük ezt „extra osztályzat" halmaznak) és az átlagnak e részhalmaz súlypontja felel meg.

Ahhoz, hogy a súlypontot osztályzatként értelmezzük, szabályoznunk kell az alternatívákat leíró osztályzatoknak az eredményhalmaz osztályzataira való leképezését. A következő szabályok szükségesek:

- Minden osztályzathoz az eredményhalmaz ugyanolyan elnevezésű osztályzatának egy részhalmazát rendeljük. A részhalmaz tartalmazási függvénye szintén Gauss-görbe.

- Minden osztályzat a hozzá tartozó kritérium súlyszámának megfelelő mértékben befolyásolja a végeredményt (a maximális súlyszám értéke 1), pl. a leképezésnél kapott részhalmaz magasságát a súlyszámmal szorozzuk. Tűzzük ki célul azonban azt, hogy elsősorban a nagyobb súlyszámú kritériumok befolyásolják a végeredményt (hasonló célt tűz ki a Yager-módszer is [10]). Ezt pl. úgy érhetjük el, hogy a részhalmaz magasságát a súlyszám négyzetével szorozzuk.

- Ha több kritérium azonos osztályzatot kap, akkor a különböző súlyokkal szorzott osztályzatoknak más-más részhalmazt feleltessünk meg az eredményhalmaz azonos nevű osztályzat halmazában.

- Az eredményhalmazban az osztályzatok leképezésével kapott részhalmazokat aggregálva (T-konorma) kapjuk az „extra osztályzat" halmazt. Az „extra osztályzat" halmaz súlypontja, ill. x-tengelyen való vetülete már osztályzatként értelmezhető.

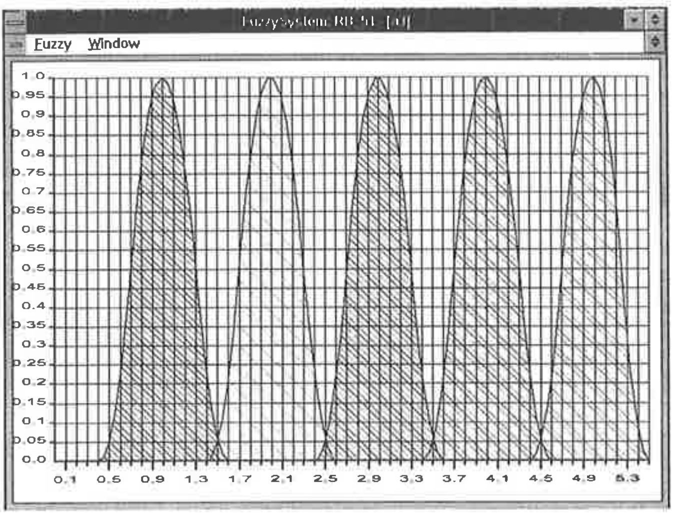
E több kritérium szerinti rendező módszert a következőképp fogalmazhatjuk meg általánosan:

Legyen $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az alternatíváknak egy véges halmaza, legyen $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ a fuzzy kritériumoknak egy véges halmaza, és legyenek továbbá $g_1, g_2, \ldots, g_m$ a kritériumokhoz tartozó súlyszámok, a súlyszámok maximális értékét egynek választva.

Tekintsünk X felett minden k_j fuzzy kritériumot nyelvi változónak ($1 \leq j \leq m$) és legyen $k_j = \{S1, S2, \ldots, Sp_j\}$, ahol $S1, S2, \ldots, Sp_j$ a nyelvi változó értékei. Az $S1, S2, \ldots, Sp_j$ fuzzy halmazok μ tartalmazási függvényei és tartóhalmazaik (supp) az osztályzatoknak megfelelően legyenek

$$
\begin{array}{ll}
\mu_{S1}(x) & \text{supp } S1 = [0.4, 1.6]\,, \\
\mu_{S2}(x) & \text{supp } S2 = [1.4, 2.6]\,, \\
\vdots & \vdots \\
\mu_{Sp_j}(x) & \text{supp } Sp_j = [p_j - 0.6, p_j + 0.6]\,,
\end{array}
$$

és minden tartalmazási függvény legyen azonos alakú Gauss-görbe a tartóhalmaz felett. Természetesen az osztályozás fokozatainak p száma tetszőleges, de a pontosság és a kifejezési lehetőségek esetenként változnak (Az *1. ábra* $p = 5$ esetén szemlélteti a k_j kritérium fuzzy halmazait). Az a_i alternatívát ($1 \leq i \leq n$) a k_j kritérium $S1, S2, \ldots, Sp_j$ fuzzy halmazaival értékelhetjük.



1. ábra: Egy kritérium mint nyelvi változó

Az „osztályozó-módszer" minden a_i alternatívához egy R_i „extra osztályzat" fuzzy halmazt rendel, melyek egy közös E fuzzy eredményhalmazban fognak megjelenni. Az E halmaz lehetővé teszi az R_i halmazok összehasonlítását, és azt is, hogy magát az R_i halmaz definiálást elkerüljük. Az E halmaz a kritériumokkal azonos fuzzy halmaz:

$$E = \{S1, S2, \ldots, Sp_k\} ,$$

ahol $k = \max p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, és minden R_i halmaz az E halmaz részben aktivizált részhalmazaiból fog keletkezni.

Az R_i halmazok képzéséhez fuzzy halmazok leképezései és aggregálásai szükségesek. Az alkalmazható fuzzy logika programcsomagban e műveletek csak olyan programblokkokkal valósíthatók meg, amelyeket a programcsomag Kosko [5] FAM-rendszereként (FAM: fuzzy associativ memories) kezel.

Egy egyszerű FAM-rendszer az n-dimenziós fuzzy halmazokat m-dimenziós fuzzy halmazokba képezi le k darab (A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_k, B_k) FAM-szabály párhuzamos, egyidejű felhasználásával. Minden A-input adat valamilyen mértékben aktivizálja a FAM-rendszer minden szabályát. Az (A_i, B_i) FAM-szabály, melynek formája

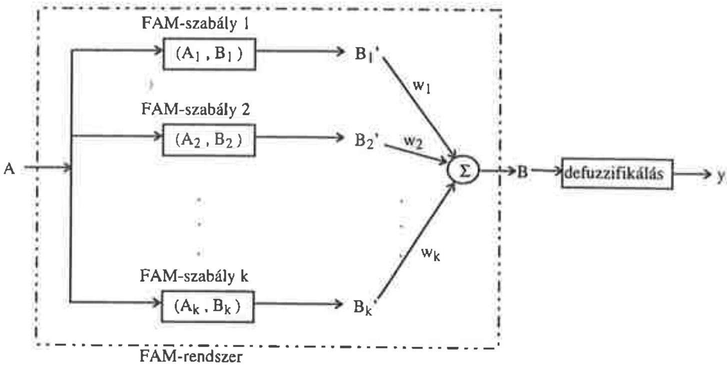
$$\texttt{IF}\ C = A_i \quad \texttt{THEN} \quad D = B_i$$

(ahol C, D nyelvi változók és a lehetséges értékei közé tartozik A_i, B_i), az A input adatot a B_i halmaz részben aktivizált B_i' részére képezi le. A teljes FAM-rendszer által előállított B halmaz a részben aktivizált B_1', B_2', ..., B_k' fuzzy halmazok súlyozott összege:

$$B = w_1 B_1' + w_2 B_2' + \ldots + w_k B_k' ,$$

ahol a [0,1] intervallumbeli w_i értékek a FAM-szabályok súlyszámait jelölik.

A FAM-rendszerhez közvetlenül kapcsolódik egy defuzzifikáló eljárás, amely a B fuzzy halmazhoz egyetlen számot rendel *(2. ábra)*. A B halmaz y súlypontját pl. a súlypont-módszer (COG: Center of Gravity) szolgáltatja.



2. ábra: Egy fuzzy-rendszer struktúra (Forrás: Kosko, 1992)

Esetünkben tehát alkalmazni kell egy FAM-rendszerként működő programblokkot R_i előállítására. A programblokk input adatai a kritériumok o_1, o_2, ..., o_m osztályzatai lesznek. Minden egyes o_j osztályzat az adott kritérium $S1$, $S2$, ..., Sp_j értékei közül egyet, vagy két szomszédosat részben aktivizál és a FAM-szabályok ezen részben aktivizált halmazokat képezik le az E halmazba. Az R_i halmaz tehát az $S1$, $S2$, ..., Sp_k halmazok akár többször is részben aktivizált részhalmazainak súlyozott összege lesz.

Az osztályozás elvét megvalósító FAM-szabályok a következők:

$$\texttt{IF } k_1 = S1 \quad \texttt{THEN} \quad E = S1 \;\; CF = g_1^2$$

$$\texttt{IF } k_1 = S2 \quad \texttt{THEN} \quad E = S2 \;\; CF = g_1^2$$

$$\vdots$$

$$\texttt{IF } k_1 = Sp \quad \texttt{THEN} \quad E = Sp \;\; CF = g_1^2$$

$$\texttt{IF } k_2 = S1 \quad \texttt{THEN} \quad E = S1 \;\; CF = g_2^2$$

$$\texttt{IF } k_2 = S2 \quad \texttt{THEN} \quad E = S2 \;\; CF = g_2^2$$

$$\vdots$$

$$\texttt{IF } k_2 = Sp \quad \texttt{THEN} \quad E = Sp \;\; CF = g_2^2$$

$$\vdots$$

$$\texttt{IF } k_m = S1 \quad \texttt{THEN} \quad E = S1 \;\; CF = g_m^2$$

$$\texttt{IF } k_m = S2 \quad \texttt{THEN} \quad E = S2 \;\; CF = g_m^2$$

$$\vdots$$

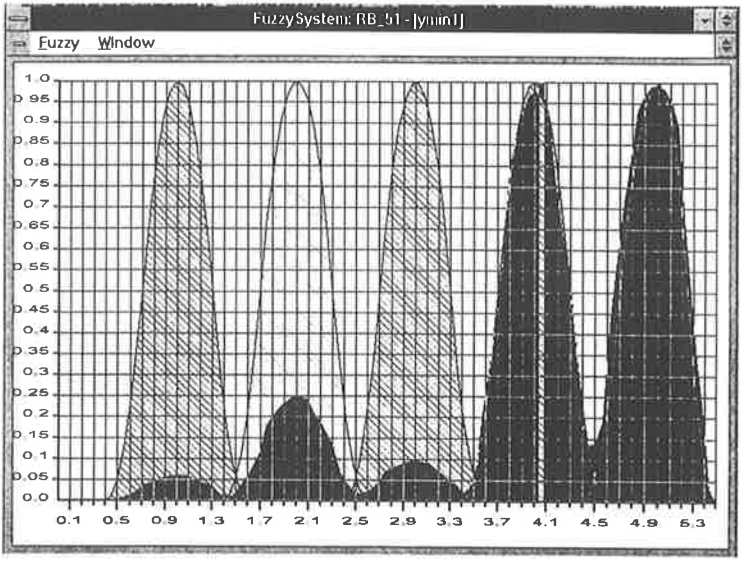
$$\texttt{IF } k_m = Sp_j \quad \texttt{THEN} \quad E = Sp \;\; CF = g_m^2$$

ahol a CF (certancy faktor) a szabály bizonyossági fokát adja meg, mellyel a FAM-rendszer automatikusan szorozza a szabály eredményét. E CF értéket esetünkben a premisszában szereplő kritérium súlyszám négyzetének kell választani (a kitűzött célnak megfelelően).

A FAM-rendszer működése során egy a_i alternatívához tartozó o_1, o_2, ..., o_m osztályzatsorozat a FAM-szabályok feltétel részében szereplő $S1$, $S2$, ..., Sp_j halmazokat részben aktivizálja, és a szabály ugyanolyan mértékben aktivizálja a következmény részben szereplő azonos nevű halmazt. Minden E halmazba történő leképezésnél a CF értékkel szorozza az adott Gauss-görbét. A leképezések után a részben aktivizált halmazokat aggregálja (az algebrai összeg operátorral összeadja őket), majd végül defuzzifikálással képezi az aggregált halmaz súlypontját.

Egy ilyen eredményt mutat a *3. ábra*, melyben ötfokozatú osztályozás esetén láható az E halmaz (az 5 Gauss-görbével határolt halmaz), az E halmazban kialakított R_i extra osztályzat halmaz (sötét területű részhalmazok) és R_i defuzzifikálással kapott y_i súlypontja (függőleges vonal).

Az előállított fuzzy-rendszer tehát minden a_i alternatívához az input osztályzat sorozat alapján meghatározza az R_i halmaz y_i súlypontját és a kapott y_i értékek alapján rendezhetők az alternatívák.



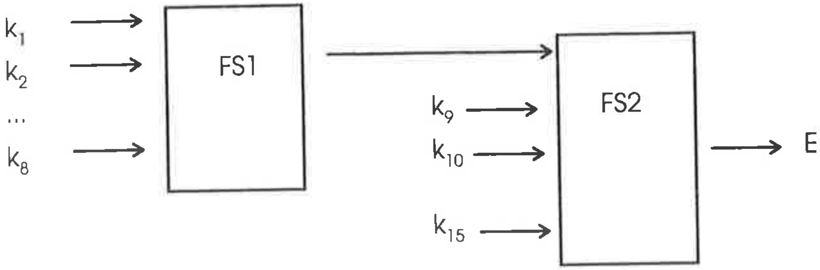
3. ábra. A FAM-rendszer eredményhalmaza

A módszer programja

Az "osztályozó-módszer" fuzzy logika szoftverrel, vagy fuzzy szakértői rendszerrel programozható. Én az FS-Fuzzysoft fuzzy logika programcsomagot választottam a program elkészítéséhez [3].

Az FS-Fuzzysoft szoftver minden olyan szolgáltatást nyújtani képes, ami az „osztályozó-módszer" elkészítéséhez szükséges. Így definiálhatók fuzzy halmazok különböző tartalmazási függvényekkel, és grafikus formában építhető fel a fuzzy-rendszer alapelemekből. Alapelemként tartalmaz a rendszer pl. egy FS-blokkot, amely egy egyszerű szabályalapú szakértői rendszer és amely a nyelvi változókat a FAM-rendszer elvei szerint kezeli.

Bár az FS-blokk szabályai azonos formájúak az FAM-rendszerbeliekkel, egy az egyben mégsem írhatók fel mindig a szabályok. Az FS-blokk mérete korlátozott: 8 input és 8 output nyelvi változót és maximum 1000 szabályt kezel egyszerre. Egy 15 kritériumos feladatnál pl. két FS-blokkot kell egymás után alkalmazni. Az első blokk a legkisebb súlyú kritériumokat kezeli, a második pedig folytatva a feldolgozást, a legnagyobb súlyú kritériumokat is hozzávéve állítja elő az eredményhalmazt. Így a két blokk közt meg kell osztani a FAM-szabályokat *(4. ábra)*.



4. ábra. Fuzzy-rendszer 15 input adattal

Az FS-blokkok alkalmazása különböző paraméterek beállításával történik. Többféle operátor közt válogathatunk, melyek a szabályok feltétel és következmény részében a fuzzy halmazokat aggregálják, módosítják. Az „osztályozó-módszer" esetén a FAM-szabályhoz tartozó leképezéshez („inferenciához") az algebrai szorzat operátort választottam, hogy a leképezés után is Gauss-görbét kapjunk. Aggregáláshoz az algebrai összeg operátort választottam, hogy „egymásra rakja" a közös tartóhalmazú részhalmazokat, és a defuzzifikáláshoz az egyetlen választható súlypont-módszert (COG) alkalmaztam.

Definíció. Tetszőleges A, B fuzzy halmazok esetén az *algebrai szorzat* operátor:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x) ,$$

az *algebrai összeg* operátor:

$$\mu_C(x) = 1 - \big(1 - \mu_A(x)\big) * \big(1 - \mu_B(x)\big) ,$$

és a *súlypont-módszer:*

$$COG = \frac{\int_a^b x\mu(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x)\,dx} .$$

3. Az "osztályozó" és a Jain-módszer

Az "osztályozó-módszer" elkészítése után hívták fel figyelmemet arra, hogy a módszer R. Jain [4] alternatíva rendező fuzzy logika módszeréhez hasonló. Nézzük tehát, miben hasonló a két módszer, ill. milyen formai hasonlóság van az "osztályozó-módszer" és a Jain-módszer közt (Az összehasonlításnál felhasználjuk a korábbi jelöléseket).

A Jain-módszer lépései:

1. Minden a_i alternatívához képez egy R_i fuzzy halmazt
$$R_i = \sum_{j=1}^{m} g_i * r_{ij}$$
formában, ahol g_j a súlyok fuzzy halmazait, r_{ij} pedig a k_j kritérium fuzzy értékét jelöli az a_i alternatíva esetén (A kijelölt műveletek fuzzy halmazok szorzását, összegzését jelentik).

2. Képezi az R_i halmazok tartóinak unióját:
$$S = \bigcup_{j=1}^{n} \text{supp } R_i \ ,$$
és definiál S-en egy M „maximalizált" fuzzy halmazt
$$\mu_M(r) = [r/r_{\max}]^{\beta}$$
tartalmazási függvénnyel, ahol $r_{\max} = \sup S$ és β természetes szám (az M halmaz felső korlátot ad a $\mu_{R_i}(r)$ értékekre).

3. Az M és R_i halmazokból képezi az R_{io} fuzzy halmazokat, melyek tartalmazási függvényei:
$$\mu_{R_{io}}(r) = \min\{\mu_{R_i}(r), \mu_M(r)\} \qquad (r \in S) \ .$$

4. Minden a_i alternatívához egy y_i értéket rendel:
$$y_i = \max \mu_{R_{io}}(r) \qquad (r \in S) \ .$$
Az y_i értékek az alternatívák sorrendjét jelölik ki.

Többen kritizálták Jain módszerét [7, 10], mivel az M halmaz képzéséhez nem ad segítséget (β választása), és az a_i alternatívához rendelt y_i csak egyetlen maximális értéket képvisel (a többit nem veszi figyelembe a rendezésnél).

Az "osztályozó-módszer" e hiányosságokat kiküszöböli. Lépései, összevetve a Jain-módszer lépéseivel a következők:

1. Szintén minden a_i alternatívához képez egy R_i fuzzy halmazt

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} g_i * r_{ij}$$

formában, de a g_j súlyok csak [0,1] intervallumbeli valós számok lehetnek, és az r_{ij} értékek speciális, minden kritérium esetén azonos fuzzy osztályzathalmazok (Az osztályzat fokozatainak száma kritériumonként más-más lehet).

Az R_i halmaz is másként keletkezik: előre adott osztályzathalmazokból épül fel, és fuzzy rendszerként, szabályalapú aggregációval készül.

2-3. A módszer az R_i halmazok tartalmazási függvényeinek értékét nem korlátozza, így nincs szükség sem az M definiálására, sem az R_{io} halmazok képzésére. Helyettük egy közös E halmazban kerülnek összehasonlításra az R_i halmazok.

4. Az a_i alternatívához rendelt y_i érték, amely az R_i halmaz súlypontja, minden kritériumérték figyelembevételével készül. Az y_i értékek az alternatívák sorrendjét szintén kijelölik.

Összességében megállapítható, hogy az „osztályozó-módszer" a súlyozott osztályzatok összegzése révén hasonló a Jain-módszerhez, de az alternatívákhoz rendelt y_i értékek fuzzy-rendszerként való előállítása már eltérő megoldási elv a Jain-módszertől.

4. Példák

Közlekedési jogesetek rendezése

Mint a bevezetésben említettem, az „osztályozó-módszer" jogesetek rendezésére készült. Nézzük ezért első mintapéldaként néhány jogeset, mint alternatíva rendezését.

Rendezésre a közlekedési jogesetek köréből választottam eseteket. Két különböző kategóriából: a súlyos testi sértéssel járó, valamint az egy halálos sérüléssel járók közül 7-7 esetet emeltem ki (a Baranya megyei bíróságok 1980-81-es jogesetei). A rendezésnél a jogesetek egy korábbi statisztikai feldolgozásánál megismert főbb kritériumait és súlyszámait használtam fel [1]. Az esetek leírása most a 14 legnagyobb súlyszámú kritérium alapján történt (A 14 kritériumot és súlyszámaikat az *5. ábra*, az $F1$, $F2$, ..., $F14$-el jelölt jogesetek osztályzatokon alapuló leírását pedig a *6. ábra* tartalmazza).

A rendezést összehasonlításképpen a Yager-módszerrel [9] is elkészítettem, amely minden kritérium t_j "lehetségességi értékének" figyelembevételével, az a_i alternatívához egy y_i értéket rendel

$$y_i = \max\ \min(\mu_{k_j}(a_i), t_j)$$

minden k_j-re $(1 \leq j \leq m)$, és az alternatívákat szintén az y_i értéket alapján rendezi.

A módszerekkel külön rendeztem az F1, F2, ..., F7, illetve az F8, F9, ..., F14 jogeseteket. A rendezés eredményét a *7. ábra* tartalmazza.

	Kritérium	Súly
1.	KRESZ szabályszegés	1.00
2.	Életkor	0.70
3.	Az elkövetőt ért hátrány	0.50
4.	A minősítő jellegű sérülésen túli további sérelem	0.31
5.	Korábbi közlekedési előélet	0.30
6.	Jogosítvány jellege	0.26
7.	A baleset után létrejövő körülmények a sértettel kapcsolatban	0.25
8.	Az elkövető családi helyzete, eltartási kötelezettségei	0.24
9.	A szabályszegés elkövetésének oka	0.21
10.	Milyen típusú járművel közlekedett	0.20
11.	A gépkocsi műszaki állapota, egyéb külső körülmények	0.16
12.	A közlekedési morál megsértése	0.15
13.	A baleset időpontja	0.14
14.	Hasonló esetek gyakorisága	0.10

5. ábra: Kritériumok és súlyszámaik

Kritérium	Jogeset													
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
1.	1	3	3	3	5	4	5	1	3	5	3	3	5	5
2.	5	1	1	5	5	5	5	5	1	5	5	5	5	5
3.	5	5	5	3	5	5	5	3	0	2	5	5	5	5
4.	3	4	3	2	3	4	4	4	2	3	0	0	0	0
5.	0	0	0	0	2	2	1	0	4	0	0	0	5	5
6.	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	5	5
7.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8.	2	3	4	0	3	4	0	3	5	5	1	0	1	1
9.	3	2	2	2	1	4	5	1	1	5	4	4	5	3
10.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	3
11.	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	5	3	3
12.	0	1	0	0	0	0	3	0	0	3	0	0	3	3
13.	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
14.	0	5	5	5	0	0	5	1	1	5	1	0	1	5

6. ábra. Jogesetek leírása osztályzatokkal

Jogeset	Ítélet	Yager módszer	Osztályozó módszer
F1	30 napi pénzbüntetés	1	2.53
F2	50 napi pénzbüntetés	1.5	2.73
F3	70 napi pénzbüntetés	1.5	2.79
F4	7 hó felfüggesztett börtön	3	3.49
F5	7 hó felfüggesztett börtön	3.45	3.84
F6	8 hó javító nevelő munka	3.5	4.18
F7	7 hó börtön	3.5	4.42
F8	1 év felfüggesztett börtön	1	2.31
F9	1 év börtön	1.5	2.54
F10	1 év 2 hó börtön	2.5	4.06
F11	1 év 2 hó börtön	3	3.68
F12	1 év 2 hó börtön	3	3.68
F13	1 év 6 hó börtön	3.45	4.25
F14	1 év 8 hó börtön	3.45	4.71

7. ábra. A rendezés eredményei

Az eredményeket vizsgálva megállapítható:

- a Yager-módszerrel kapott osztályzatok helyesen mutatják az ítéletek súlyosságát. Néhány esetben azonos értékeket rendel különböző, de sorrendben egymás után következő jogesethez: pl. nem differenciál az F2 és F3 jogesetek közt (50 és 70 napi pénzbüntetés közt). De az ellenkezőjére is találunk példát: az F10, F11, F12 jogesetnél azonosak az ítéletek, viszont a módszer különbséget észlel a jogesetek közt.
- Az "osztályozó-módszer" szinte minden jogesethez más osztályzatot rendel, és az osztályzatok itt is helyesen mutatják a sorrendet. Csupán az F10, F11, F12 jogesetek közti sorrend tér el a Yager-módszer által megállapított sorrendtől. Ezen jogeseteknél viszont az "osztályozó-módszer" sorrendje jobb, ugyanis ha ellenőrizzük a mellékbüntetéseket is (járművezetéstől való eltiltás), a jogesetek helyes sorrendje F11, F12, F10, ami az "osztályozó-módszer" sorrendjével azonos.

Összegezve: mindkét módszer helyesen rendezi a jogeseteket, azaz fuzzy logika módszerekkel vizsgálhatók a jogesetek. A Yager-módszer a közel azonos súlyosságú jogesetek közt nem mindíg tesz különbséget, így ítéletcsoportokhoz azonos számokat rendel. Az „osztályozó-módszernél" pont az ellenkezőt tapasztaljuk: mivel majd minden jogesethez más számot rendel, az azonos ítéletekhez osztályzat intervallum kapcsolható. Tehát az "osztályozó-módszer" jobban differenciál az esetek közt, mint a Yager-módszer.

B. Roy példája

Második mintapéldánk B. Roy-tól származik, melyet a fuzzy preferencia relációkon (fuzzy outranking relation) alapuló ELECTRE II és ELECTRE III rendező módszer szemléltetésére mutatott be [8].

A példában 9 alternatívát 5 azonos súlyú kritérium alapján kell rendezni. Az adatok a következők:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
k_1	0.72	0.50	0.72	0.60	0.60	0.75	0.50	0.50	0.50
k_2	0.73	0.50	0.73	0.60	0.60	0.75	0.50	0.50	0.50
k_3	0.60	0.60	0.30	0.30	0.60	0.50	0.70	0.50	0.30
k_4	0.50	0.70	0.70	0.70	0.50	0.50	0.70	0.50	0.70
k_5	0.50	0.70	0.50	0.10	0.10	0.50	0.70	0.50	0.50

Roy példáját a Yager és az "osztályozó-módszerrel" is rendeztem. A Yager-módszernél a kritériumok lehetségességi értékét egynek választottam, az "osztályozó-módszernél" pedig a kritériumok $[0,1]$ intervallumbeli értékeit osztályzatnak tekintettem és a $[0,5]$ intervallumba transzformálva számoltam velük. A rendezés eredményét a *8. ábra* tartalmazza. Hat különböző sorrendjét mutatja a kilenc alternatívának. Az első három az ELECTRE II módszerrel készült és a preferencia relációk értelmezését befolyásoló λ_1, λ_2 küszöbértékektől függően eltérő sorrendeket mutat. A negyedik az ELECTRE III rendező módszerrel készült, amely az $u(x) = 0.3 - 0.15x$ $(0 \leq x \leq 1)$ diszkriminációs küszöbfüggvénnyel számol. E módszer pl. az a_4, a_5 és a_9 alternatívákat nem tudja összehasonlítani. Az utolsó két sorozat a Yager, valamint az "osztályozó-módszer" eredményei.

	Módszer	Sorrend
1.	ELECTRE II $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.6$	$a_1 > a_7 > a_6 = a_3 = a_2 > a_9 = a_8 > a_5 > a_4$
2.	ELECTRE II $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.6$	$a_6 = a_3 = a_1 > a_7 = a_2 > a_9 = a_8 > a_5 > a_4$
3.	ELECTRE II $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.8$	$a_6 = a_3 = a_1 = a_7 = a_2 > a_5 = a_9 = a_8 > a_4$
4.	ELECTRE III	$a_1 > a_6 > a_7 > a_2 > a_3 > a_9 > a_8$ $a_3 > a_4 \quad a_3 > a_5$
5.	Yager m.	$a_6 > a_3 = a_1 > a_7 = a_2 = a_4 = a_9 > a_5 > a_8$
6.	Osztályozó m.	$a_6 > a_3 > a_1 > a_7 > a_2 > a_5 > a_4 > a_9 = a_8$

8. ábra: A Roy-példa különböző eredményei

Az eredményeket összegezve megállapítható: minden módszer (az ELECTRE II a paraméterektől függően), részben hasonló, de más-más sorrendet képezett. Az "osztályozó módszer", a többi módszerrel azonosan az első 5 helyre, valamint az utolsó 4 helyre ugyanazon alternatívákat sorolja. Az "osztályozó módszer" rendezési sorrendje leginkább a Yager-módszer és az ELECTRE II ($\lambda_1 = 0.9$) rendezésével egyezik meg.

6. Összefoglalás

A bemutatott, osztályzaton alapuló fuzzy rendező módszer a példák tanusága szerint olyan alternatívák rendezésére alkalmas, ahol a fuzzy kritériumok osztályzatokkal jellemezhetők, vagy ahol a kritériumok értékei osztályzatként értelmezhetők. Eredményei hasonlóak más rendező módszerek eredményeihez. Az „osztályozó-módszer" fuzzy-rendszerként, szabályalapú aggregációval kezeli a kritériumokat. Fuzzy logika szoftver esetén egyszerűen programozható.

A módszer több ponton hasonló R. Jain alternatíva rendező módszeréhez, de az alternatívákhoz rendelt súlypontok szerinti rendezés már eltérő megoldási elv Jain módszerétől.

Irodalom

1. Borgulya I.: A büntetéskiszabás modellezése közlekedési ügyek körében. Jogtudományi Közlöny 1985/1.
2. Borgulya I.: Die Ordnung von Rechtsfällen mit Fuzzy Logik Methoden. Megjelenés alatt.
3. FS-Fuzzysoft Handbuch. Fuzzy-Logik Betriebsystem Version 1.0, Fuzzysoft AG. 1993.
4. R. Jain: A procedure for multiple-aspect decision making using fuzzy sets. International Journal of System Science Vol. 8. No 1. 1977. pp. 1–7.
5. B. Kosko: Neural Networks and Fuzzy Systems Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1992.
6. L. Philipps: Just Decisions Using Multiple Criteria or: Who Gets the Porsche? An Application of Ronald R. Yager's Fuzzy-Logik Method. In: 5th International Conf. on AI and Law, Maryland ACM 1995. pp. 195–200.
7. H. Rommelfanger: Fuzzy Decision-Support-Systeme. Entscheidung bei Unschärfe. 2nd ed. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1993.
8. B. Roy: Selektieren, Sortieren und Ordnen mit Hilfe von Prävalenzrelationen: Neue Ansätze auf dem Gebiet der Entscheidungshilfe für Multikriteria-Probleme Zeitschrift für Betriebswirtschaftliche Forschung 32. (1980), pp. 465–497.
9. R. R. Yager: Fuzzy Decision Making Including Unequal Objectives. FSS. 1. 1978. pp. 87–95.
10. H. J. Zimmermann, L. Gutsche: Multi-Criteria-Analyse. Springer Verlag, Berlin 1991.

FUZZY ORDERING METHOD WITH INTEGER VALUATION

In this paper we present a new ordering method for multiple attribute decision making using fuzzy sets. This mark-based method, which is similar to R. Jain's ordering method, based on the mark-giving-method of a teacher. If we can give the values of attributes as marks, or we can interpret them as marks, the method can be applied. The mark-based method we can implement as a fuzzy system, which applies a rule-based aggregation to the fuzzy attributes. The method is easily realisable with fuzzy logic software, or with fuzzy expert system. The mark-based method we can apply by legal cases and according to the samples this is a general ordering method. It gives according to the samples similar results as the other ordering methods (Yager's, ELECTRE II-III).

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

A BELSŐ VÁLLALATI NÖVEKEDÉS FINANSZÍROZÁSI MODELLJE

KATITS ETELKA
JPTE Pollack Mihály Műszaki Kar

A várható hozamokból számított tőkeérték változására épülő finanszírozási modell leírásához alapelveket és feltételeket kell lerögzíteni. Itt azt szeretnénk bemutatni, hogy két – az ún. szükséges és hatékony – alapelv rögzítése közül egy is elegendő a vállalati – kizárólag – belső finanszírozási forrásokból tervezett növekedési program létezéséhez.

Bevezető

A *vállalati növekedés* fogalma alatt általában *bizonyos mértékek,* mint az üzleti forgalom, a foglalkoztatottak vagy az értéktermelés (bruttó, nettó) *változását* értjük. *Finanszírozási* oldalról a vállalati növekedés mértékét a *tőkeérték (vállalati érték)* kategóriája jelenti. Megkülönböztethető az éves beszámoló szerint elszámolás és a pénzáram alapon történő számszerűsítés. *Az elszámolási profit* nagyságát több mérőszámmal határozhatjuk meg, pl. kamat- és adófizetés előtti profittal, adózott profittal, a részvényegységre jutó profittal és a visszatartott profittal. A *pénzáram* alapon történő számítás nem egységes, többféle módszer használatos. E helyen nem vállalkozunk arra, hogy állást foglaljunk valamelyik cash flow számítási módszer mellett, de két jellegzetességet kiemelünk. Az egyik az, hogy a számszerűsített pénzáram növekményi (inkrementális) bázison készüljön. A másik pedig az, hogy a pénzáram az üzletmenet-befektetés-finanszírozás területeken bekövetkező hatásokat egyaránt számszerűsítse. Azaz, ha a vizsgált időszakban változást (növekedést) tervezünk az üzletmenet-befektetés-finanszírozás területeken, akkor el kell készíteni a változás nélküli és a változással együtt értendő számításokat. A kettő különbözete a növekményi pénzáram.

Ezek után a tőkeértéket az említett mértékek egy adott (tervezési vagy becslési) időintervallum periódusonkénti diszkontált összege határozza meg.

Olyan vállalati gazdasági modellben folytatjuk vizsgálódásainkat, mely szerint az elsődleges cél a részvényesek gazdagságának maximalizálása [Milgrom-Roberts 1992]. A döntéshozatali folyamatban a részvényesek érdekei meghatározóak, ezért a vállalati növekedés egy olyan optimalizálási feladat, amelyben a vállalati érték (a részvényesek gazdagságának) maximalizálása a cél.

A továbbiakban megpróbáljuk az általánosan elfogadott axiómák megoldáshalmazát úgy korlátozni, hogy végül is csak egy megoldás maradjon. Célunk ilyen elvek kifejezése és leírása. Olyan alapelveket és feltételeket rögzítünk, amelyek közül egy elegendő a vállalat növekedési programjának megvalósításához. Ehhez azonban definiálási feladatokat kell elvégeznünk.

Alkalmazott kategóriák és definíciók

A vállalati növekedés két típusát különböztetjük meg:

- A *belső növekedés* teljes mértékben külső források igénybe vétele nélkül érhető el, vagyis a finanszírozási források kizárólag a profitvisszatartásból származnak.

- A *fenntartható növekedés* esetén a vállalati tőkeszerkezet változatlan marad úgy, hogy a társaság nem bocsát ki – nyilvánosan – új, pótlólagos részvényeket. Ez tehát olyan növekedés, amely új részvénytőke bevonása nélkül, a kölcsöntőke/részvénytőke arány megtartása mellett érhető el [Babcock, 1970].

(Megjegyezzük azt, hogy e két növekedési típus a zárt részvénytársaságokra jellemző.)

Itt most csak a belső növekedéssel foglalkozunk, mert olyan részvénytársaságot vizsgálunk, amelynek tőkeszerkezetében nincsen idegen forrás, azaz működését nem kölcsöntőkével, hanem visszatartott profittal finanszírozta.

Fontosnak tartjuk még három fogalom meghatározását:

- A *növekedési stratégia* a tőkeérték emelése a tervezési vagy becslési időintervallum alatt.

- A *növekedési program* a beruházási és a finanszírozási programot, az osztalék kifizetéseket, valamint tőkeérték meghatározásához szükséges kamatrátákat karakterizálja. Nem szabad megfeledkeznünk arról a feltételezésről, hogy ezen növekedési program valamennyi változója a priori ismeretlen.

Ebben különbözik a hagyományos optimalizálási feladatként leírt növekedési modelltől, amelyben a kamatrátát ismertnek tételezzük [Heubes, 1991]. A tőkepiaci teóriák eredményei, a Capital Asset Pricing Model (CAPM) alapját képező tőkepiaci és értékpapír kockázat-megtérülés egyenes (CML és SML), az Arbitrage Pricing Theory (APT) bizonyítják azt, hogy a nyilvánosan jegyzett társaságoknál a kamatráták csak korlátozó feltételezések mellett származtathatók [Copeland-Weston 1992], ezért a nevezett modellek használata meglehetősen korlátozott.

- A *vállalati érték*et a részvényeseknek fizetett osztalék diszkontálásával határozzuk meg. Ebben a klasszikus megközelítést követjük, mely szerint a vállalatnak kötelessége törekedni az optimális osztalékfizetési ráta elérésére a célból, hogy maximalizálja a vállalat értékét. Tehát a vállalati érték nem más, mint a jövőbeli osztalékok jelenértéke. (A számításhoz használatos formulák megtalálhatók: [Gordon-Shapiro 1956].) Ezzel szemben a modern megközelítés az osztalékok irrelevanciáját foglalja magában, vagyis a vállalat értéke – közvetlenül – annak beruházási teljesítményétől függ, és nem az osztalékpolitikájától [Miller-Modigliani 1961]).

Növekedési stratégiák

Amennyiben a növekedési stratégiát a vállalati értékek pozitív irányú alakulása befolyásolja, úgy a tervezési időhorizont különböző periódusaiban a részvényeseknek történő kifizetések növekvő tendenciát jeleznek.

Ezt a következőképpen fejezzük ki (a pénzáramtételek a periódusok végén merülnek fel):

$$E_t = \frac{1}{q_t}\Big(\sum_{\tau=t+1}^{T} d_\tau q_\tau + E_T q_T\Big) = (1+i_t)E_{t-1} - d_t \qquad (t=0,\ldots,T)\ ,$$

ahol

E_t az adott üzleti periódus tőkeértéke,

q_t az adott periódus diszkontfaktora, azaz

$$q_t = \prod_{\tau=1}^{t}(1+i_\tau)^{-1}$$

d_t az adott periódusban kifizetett vagy kifizethető osztalék nagysága,

i_t az adott periódus kamatrátája,

T a tervezési időhorizont utolsó periódusa.

A növekedési stratégiát akkor tudjuk számszerűsíteni, ha bevezetjük a g_t növekedési rátát, ahol g_t a növekedési ráta a t-edik időszakban. Segítségével a tőkeérték változása leírható az alábbi módon:

$$E_t = (1 + g_t)E_{t-1} \qquad (t = 1, \ldots, T) .$$

Eszerint a $\mathrm{g} = (g_1, \ldots, g_T)$ növekedési stratégia, ami a tőkeérték tervezett és megkívánt fejlődése a tervezési időhorizont alatt.

*Pozitív növekedés*ről akkor beszélünk, ha a folyó osztalékról a részvényesek lemondanak, ezzel szemben *negatív növekedés* esetén a közgyűlés megszavazza a kiosztható osztalékot.

Az $E_t = (1 + i_t)E_{t-1} - d_t$ és az $E_t = (1 + g_t)E_{t-1}$ kifejezések miatt a g_t növekedési stratégia és a d_t osztalékfizetés között fennáll az alábbi összefüggés:

$$d_t = (i_t - g_t)E_0 \prod_{\tau=1}^{t-1}(1 + g_\tau) \qquad (t = 1, \ldots, T) \tag{1}$$

A növekedési stratégia választásából az alábbi konzekvenciákat fogalmazhatjuk meg:

- Ha $g_t = i_t$, akkor a t-edik periódusban nincsen osztalékfizetés. A t-edik periódusban a vállalati érték a megelőző periódus értékének kamatával emelkedik. (A kamatrátát opportunity cost-ként kalkuláljuk.)

- Ha $g_t = 0$, akkor a t-edik periódusban nincsen osztalék és legfeljebb a megelőző periódus tőkeértékének kamata nyerhető.

- Ha $g_t = -1$, akkor az (1) egyenlet $d_t = (1 + i_t)E_{t-1}$ formát ölt, vagyis a megelőző periódus felkamatolt tőkeértéke a t-edik periódusban teljes mértékben kifizetésre kerül.

- Ha $g_t > i_t$, akkor a növekedési stratégia célkitűzése a megelőző periódus kamatát meghaladó tőkeérték növelése. Az (1) egyenlettel egybevetve látjuk azt, hogy ez a növekedés csak pótlólagos tőke bevonásával lehetséges a t-edik periódusban.

Van egy megválaszolatlan kérdésünk! Vajon realizálható a kiválasztott növekedési stratégia? – Ez elsősorban attól függ, milyen beruházási és finanszírozási intézkedéseket valósít meg a cég a becsült időintervallumban, azaz a növekedési program teljesítésétől függ.

Növekedési program

A növekedési program a tervezési időintervallumban a beruházási és finanszírozási intézkedésekkel írható le. Ezen intézkedések fizetési áramai legkésőbb a T tervezési periódusban lezárulnak, vagyis az adott beruházás megtérül, valamint a finanszírozási kötelezettségek teljesülnek. (Esetlegesen a tervezési időintervallumon túl keletkező kifizetések egy külső kamatráta mellett történő diszkontálással figyelembe vehető.)

Vezessünk be egy újabb függvényt! Legyen az $e_t(\mathbf{x}) = e_t(x_1, \ldots, x_n)$ a pótlólagos többlethozam vektora, amely az $\mathbf{x}$ beruházási és finanszírozási intézkedésektől függ és a t-edik periódusban kifizetésre kerül; $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a választható beruházási és finanszírozási intézkedések vektora. Ha ez nem minden periódusban ugyanannyi, akkor pl. x_t^i a t-edik periódusban megtett i-edik intézkedés, s ennek eredménye a hozamra $e_t^i(x_t^i)$, ahol $i = 1, \ldots, n$.

Mivel a legkorábban az 1. periódus végén történik az osztalékfizetés, és figyelembe vesszük azt, hogy a T időszakban várható kifizetés után az összhozam (vagyon) nagysága

$$E_T = E_0 \prod_{\tau=1}^{T} (1 + g_\tau) ,$$

ezért érvényesek az alábbiak:

$$0 = e_0(\mathbf{x}) \tag{2}$$

$$d_t = e_t(\mathbf{x}) , \qquad (t = 1, \ldots, T-1) \tag{3}$$

$$d_T + E_0 \prod_{\tau=1}^{T} (1 + g_\tau) = e_T(\mathbf{x}) \tag{4}$$

$$x_t^i \in X \subset I\!R^+ \cup \{0\} \tag{5}$$

A (2), (3), (4) a beruházási és finanszírozási program likviditási feltételei, az (5) pedig nemnegativitási feltétel.

Egy olyan növekedési program választható, amely a kezdeti E_0 tőkeértéket (1)-(5) feltételek mellett maximalizálja, mert az i_t kamatráta exogén tényező. Ezzel meghatároztuk az $\mathbf{x}$ beruházási és finanszírozási programot, a $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_T)$ osztalékfizetési vektort és az $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_T)$ kamatráta vektort. Az $(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{i})$ hármas a növekedési programot fejezi ki.

Mivel az osztaléksor diszkontálásához szükséges kamatráta ismeretlen, egy adott növekedési stratégia megvalósítását célzó beruházási és finanszírozási program nem egy optimalizálási feladat megoldásából származik. A következő részben két olyan alapelv rögzítését javasoljuk, amely egy növekedési programot határoz meg, ezúttal már optimalizálási feladatként.

A növekedési program két alapelve

Egy növekedési program realizálása megkívánja a likviditási feltételek, valamint külön korlátok figyelembe vételét. Az I. alapelv megköveteli az $(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{i})$ keresett növekedési program szükséges feltételeinek teljesítését.

I. alapelv: $(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{i})$ teljesíti az (1)–(5) feltételeket az

$$E_0 = \sum_{t=1}^{T} d_t q_t$$

egyenlettel, ahol

$$q_t = \prod_{\tau=1}^{t} (1 + i_\tau)^{-1}$$

A II. alapelv egy hatékonysági követelmény, amely megköveteli az i_t kamatrátával meghatározott vállalati érték maximalizálását. Mivel i_t ebben az esetben a t-edik periódus marginális megtérülése, ez a II. alapelv megfelel a bizonyosság és a tőkepiac arbitrage-szabadság feltételeinek. (Ez az ún. Fisher eset, amikor a tőkekihelyezési és -felvételi kamatráta megegyezik [Ulbert, 1992], ezáltal biztosított a $\mathbf{d}$ mértékű kifizetés. Ebben az összefüggésben a bizonyosság a jövő pontos ismeretét jelenti, ahol a várakozások pontosan realizálódnak, ahol tökéletes piac van, s amelyben mindenkire érvényes konstans kamatráta érvényesül.)

II. alapelv: $\mathbf{x}$ maximalizálja a kezdeti tőkeértéket, azaz $\mathbf{x}$ optimális megoldás a

$$\max_{x_i \in X} \sum_{t=0}^{T} e_t(\mathbf{x}) q_t$$

formulából adódik.

Ezzel a két alapelvvel megfogalmaztuk a jövőbeni növekedési program korlátait. Ismét felmerül egy eddig megválaszolatlan kérdés! Vajon nem ellentmondásos egymással az I. és II. alapelv? – Erre a kérdésre csak a következő kondíciók érvényesülése esetén válaszolhatunk tagadással:

(K1) Az $e_t(\mathbf{x})$ minden $t = 0, \ldots, T$-re konkáv. Ez pedig azt jelenti, hogy a beruházási intézkedések csak csökkenő vagy konstans határhaszonnal és a finanszírozási intézkedések csak növekvő vagy konstans határköltséggel engedhetők meg.

(K2) Az X konvex feltétel kizárja a nem egész számú alternatívákat, illetve a fix költség ugrásokat.

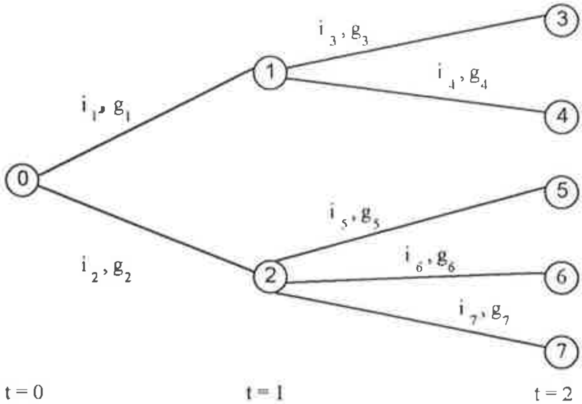
(K3) Minden időpontban ($t = 0, \ldots, T-1$) lehetőség van egyperiódusú futamidővel korlátlan forrásmennyiséget i_A kamatrátával kihelyezni, illetve i_B kamatrátával felvenni. (Ez az ún. Hirshleifer eset, vagyis az i_B hitelfelvételi kamatláb meghaladja az i_A befektetési kamatlábat [Ulbert, 1992].) Tehát a források időbeni transzferálásával kiigazítható a jelenbeli és a jövőbeli fogyasztás vagy megtakarítás.

(K4) A $\max_{x_i^j \in X} \sum_{t=0}^{T} e_t(\mathbf{x}) q_t$ minden i-re $i_A \leq i_t \leq i_B$, ahol $t = 1, \ldots, T$, egy végső megoldás. Ez a feltétel biztosítja a határmegtérülést minden hatékony kifizetési vektorra.

A fent megnevezett feltevések közül egy feltétel megsértése nem jelenti azt, hogy az elképzelt növekedési koncepciót teljesen fel kell adni. Például: a (K3) nem teljesül, mert a korlátlanul rendelkezésre álló forrás felvétele i_B kamatrátával nem lehetséges (mert olyan magas), így a finanszírozási intézkedés (hitelfelvétel) a priori kizárt. Eltekintve a tökéletes tőkepiac irreális esetétől, így a határmegtérülés a priori ismeretlen. Az sem zárható ki magas növekedési rátánál, hogy egyes g_t növekedési ráta nagyobb, mint a megfelelő i_t határmegtérülés és az egyes d_t kifizetés negatív. Ez esetben a növekedési stratégia realizálható lenne pótlólagos saját tőke bevonásával, de ezt a priori kizártuk. Ekkor vagy az (1)–(5) feltételekre tekintettel vagyunk, vagy a növekedési ráta olyan szintre redukálódik, amelynél minden kifizetés nem negatív.

Növekedési stratégia a bizonytalan elvárások esetére

A fenti megfontolások átültethetők a bizonytalan elvárások esetére is. A döntési fa segítségével a gazdasági környezet alakulása (változatok) végül is sok állapottal jellemezhető. A döntési fa a lehetséges állapotok bekövetkezési valószínűségének becslésén alapulnak. Legyen Z_t a lehetséges környezeti állapotok halmaza a t-edik időpontban és p_t a z_t^j-edik állapot szubjektív bekövetkezési valószínűsége ($t = 0, \ldots, T$ és $j = 1, \ldots, m$). Minden lehetséges állapotnak megfelel egy i_z kalkulatív kamatláb *(1. ábra)*.



1. ábra: Döntési fa

A bizonytalan elvárások esete is tartalmazza az $\mathbf{x}$ vektort, mint minden $z_t^j \in Z_t$ állapotban megvalósítható beruházási és finanszírozási intézkedések aktivitási nívóját és minden $z_t^j \in Z_t$ $(t = 1, \ldots, T)$ állapotban a $\mathbf{d}$ kifizetési vektort. Ezek szerint egy $\mathbf{g}$ növekedési stratégia meghatározható, mégpedig aszerint, ahogy változik a tőkeérték minden lehetséges környezeti változatnál. Minden periódusban annyi tőkeérték-változat adódhat, ahány a lehetséges állapotok száma. (Az 1. ábra szerint a növekedési rátát a kamatráta indikálja.) Ezzel a növekedési stratégia a prognosztizált gazdasági fejlődéshez illeszthető.

A $z_t^j \in Z_t$ egy a t-edik időpontban realizálható állapot $(j = 1, \ldots, m)$, ahol $z_0 = 0$, ezáltal adódik a kiválasztott növekedési stratégiánál az alábbi összhozam (vagyon) nagysága:

$$E_z = E_0 \prod_{\tau=1}^{t} (1 + g_{z\tau})$$

A biztos elvárások esetéhez hasonlóan létezik a következő összefüggés a $\mathbf{d}$ osztalékfizetés és a $\mathbf{g}$ növekedési stratégia között:

$$d_z = (i_z - g_z) E_0 \prod_{\tau=1}^{t-1} (1 + g_{z\tau}) \qquad \text{minden } z_t^j \in Z_t, \quad (t = 1, \ldots, T)\,. \tag{6}$$

Itt is ügyelünk a (2)–(5)-nek megfelelően a következő feltételekre:

$$d_z = e_z(\mathbf{x}) \qquad \text{minden } z_t^j \in Z_t, \quad (t = 1, \ldots, T-1)\,. \tag{7}$$

$$d_z + E_0 \prod_{\tau=1}^{T}(1 + g_{z\tau}) = e_z(\mathbf{x}) \tag{8}$$

$$0 = e_0(\mathbf{x}) \tag{9}$$

$$x_t^i \in X \tag{10}$$

A keresett $(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{i})$ növekedési programhoz megköveteljük az I. és II. alapelvek tartalmához hasonló módon az I* és II* alapelveket.

I alapelv:* $(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{i})$ megvalósítható, azaz teljesülnek a (6)–(10) feltételek.

II alapelv:* az $\mathbf{x}$ maximalizálja az E_0 kezdeti tőkeértéket, azaz $\mathbf{x}$ optimális megoldás a (11)-ből adódik.

$$\max_{x_t^i \in X} \sum_{t=0}^{T} \sum_{z_t^j \in Z_t} e_z(\mathbf{x}) p_z q_z, \qquad \text{ahol } q_z = \prod_{\tau=1}^{t}(1 + i_{z\tau})^{-1} \tag{11}$$

Az I.* és a II.* alapelvek közül az egyik elegendő a növekedési program létezéséhez, ám a következő feltételek fennállása esetén:

K1* Az $e_z(\mathbf{x})$ konkáv, minden $z_t^j \in Z_t$, ahol $t = 0, \ldots, T$.

K2* Az X konvex.

K3* Minden állapotban $z_t^j \in Z_t$ $(t = 0, \ldots, T-1)$ egyperiódusú futamidővel korlátlanul befektethető forrás $i_z^A \geq 0$ kamattal. Minden állapotban $z^* \in Z_t$ $(t = 0, \ldots, T-1)$ és minden időben közvetlen követő z_t^j állapotra létezik egy feltételezett hitelszerződés egyperiódusú futamidőre i_z^B kamattal. Ez tartalmazza a korlátlan források bevonásának lehetőségét z^* állapotban azzal a feltétellel, hogy a kamat és a tőkerészek teljesítése csakis a következő z_t^j állapotban történik.

K4* A $\max_{x_t^i \in X} \sum_{t=0}^{T} \sum_{z_t^j \in Z_t} e_z(\mathbf{x}) p_z q_z$ minden $\mathbf{i}$-re és $z_t^j \in Z_t$, ahol $t = 1, \ldots, T$ és a

$$(1 + i_z^A) p(z_t^j | z^*) - 1 \leq i_z \leq (1 + i_z^B) p(z_t^j | z^*) - 1$$

korláttal, ahol $z_t^j \neq z^*$ egy végső optimális megoldás. Itt a $p(z_t^j | z^*)$ a z_t^j állapot bekövetkezésének valószínűsége, ha közvetlenül előtte a z^* állapot bekövetkezik.

Összegzés

A közölt fejtegetések bemutatták, hogyan realizálható a belső vállalati növekedésre alapozott vállalati érték megfelelő beruházási és finanszírozási döntésekkel. A bemutatott finanszírozási modell a keresett növekedési program szükséges és hatékony alapelvére épít. Ezzel nemcsak ezen alapelveknek megfelelő beruházási és finanszírozási program, az osztalékfizetés és a vállalati érték, hanem a vállalati érték közléséhez szükséges kamatráták, mint endogén modellváltozók is nyerhetők.

A magas növekedési ráta követelménye ahhoz vezet, hogy a kívánt növekedés csak pótlólagos saját tőke bevonásával realizálható. Ezt a lehetőséget eleve kizártuk, ezért vagy a közölt feltételekre tekintettel kell lenni, vagy pedig a növekedési rátát kell csökkenteni, amíg valamennyi kifizetés nem negatív. Megfogalmaztuk a csökkenő tőkeérték konzekvenciáit is. Ez esetben a nomináltőke megőrzése már nem garantálható. Ebből pedig két dolog is következik. Az egyik az, hogy az értékmegőrzés koncepciója fontos mozzanat – a belső vállalati növekedés esetében is – az $e_t(\mathbf{x})$ hozam meghatározásában, mivel a hozam számítása során mérni szükséges a vonatkozó periódus során végbement tőkeváltozást. A másik pedig az, hogy a nyitó tőkét feltétlenül meg kell őrizni, még azelőtt, hogy a profitot elismerték volna.

Irodalom

1. Babcock, G. C. [1970]: The Concept of Sustainable Growth. Financial Analysts Journal, május-június, 108–114.
2. Copeland, T. E. - Weston, J. F. [1992]: Financial Theory and Corporate Policy. Addison-Wesley Publishing Co. 193–231.
3. Drukarczyk, J. [1993]: Finanzierung. Gustav Fischer Verlag, 35–124.
4. Gordon, M. J. - Shapiro, E. [1956]: Capital Equipment Analysis: The Requried Rate of Profit. Management Science, 102–110.
5. Heubes, J. [1991]: Konjunktur und Wachstum. Verlag Franz Vahlen, 208–219.
6. Komlósi, S. [1994]: Bevezetés egyensúlyi és optimalizáló modellek vizsgálatának matematikai módszereibe. JPTE, KTK, 465.
7. Milgrom, P. - Roberts, J. [1992]: Economics, Organization and Management. Prentice Hall, 449–535.
8. Miller, M. H. – Modigliani, F. [1961]: Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares. Journal of Business, október, 411–433.
9. Tietze, J. [1992]: Einführung in die Angewandte Wirtschaftsmathematik. Vieweg Verlag, 498.
10. Ulbert, J. [1992]: A beruházások gazdaságtana. Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, 7–118.

MODELLING THE INTERNAL GROWTH PROGRAM OF ENTREPRISES

Based on the capital value as a mesaure of growth, an approach for the determination of growtl programs is proposed. Two principles – necessary and efficiency – are formulated and conditions for the existence of an internal growth program satisfying these principles are given.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Beszámoló a XIV. Európai Operációkutatási Konferenciáról

(Jeruzsálem, 1995. július 3-6)

A konferencia az EURO megalapításának 20. évfordulójára esett, ezért a szokásosnál is szélesebbkörű és némileg ünnepélyesebb volt. A rendezők (az ORSIS – az Izraeli Operációkutatási Társaság – vezetői és tagjai, valamint az EURO konferenciaszervező bizottsága) mindent megtettek azért, hogy a konferencia ne csak külsőségeiben, hanem tartalmában is méltó legyen az évfordulóhoz, és reprezentálja az OR/MS minél több területét.

A konferencia alcíme „Towards Intelligent Decision Support" (Az intelligens döntéstámogatás felé) egy olyan keretet tűzött ki, amelyik egyrészt divatos, forrongó területe az operációkutatásnak, másrészt pedig magában foglalja mindazon eszközök zömét, amelyekkel az operációkutatási alkalmazásokban találkozni szoktunk.

A 27 párhuzamos tematikus szekcióban zajló 3 napos konferencia több, mint 600 előadást tartalmazott. Mint általában, most is kiegyensúlyozott volt a kínálat abban a tekintetben, hogy elméleti és gyakorlati orientációjú előadások egyaránt helyet kaptak a programban. Az általában 15-20 főnyi érdeklődő hol langyosabb, hol hevesebb vitákat, beszélgetéseket folytatott a szekciókban.

A szokásoknak megfelelően az egyes délelőttök most is fél-plenáris ülésekkel, meghívott előadókkal zajlottak le. Ezek az előadások aránylag sok érdeklődőt vonzottak, különösen a „nagy" nevek, vagy az érdekesebbnek ígérkező témák esetében. Mivel ezek az előadások jól jelzik az európai operációkutatás legfrissebb területeit, ezért nem általános helyzetképet, vagy néhány kiragadott címet, nevet sorolok fel beszámolómban, hanem a 20 előadás címének és előadójának teljes listájával igyekszem tájékoztatni azokat a kollégákat, akik nem juthattak el a konferenciára. Úgy vélem, tanulságos lehet ez a felsorolás azért is, mert tükrözi az alcímben jelzett témához, a döntéstámogatáshoz való kapcsolódások mikéntjét.

Old and new results in dynamic games (Robert J. Aumann, Izrael)

Heavy traffic analysis of polling system in tandem (Martin I. Reiman, Lawrence M. Wein, USA)

New advances in modelling and evaluating environmental issues (Peter Nijkamp, Jeroen van den Bergh, Hollandia)

Low earth orbit satellite systems – some research issues (Bezavel Gavish, USA)

Working with clinicians, managers and OR to improve healthcare (A. David Clayden, Anglia)

The European school of MCDA: a historical review (Bernard Roy, Daniel Vanderpooten, Franciaország)

A review on the contributions of operational research approach to project management (L. Valadares Tavares, Portugália)

Review and trends of operations research approaches to transportation analysis and traffic management (M. Bielli, M. Gastaldi, P. Reverberi, Olaszország)

Financial modelling: where to go? (Jaap Spronk, Hollandia)

A hybrid simulation/optimization scenario model for asset/liability management (Guus C.E. Boender, Hollandia)

After the fuzzy wave has reached Europe (Hans Hellendoorn, Németország)

Continuous location of attracting and undesirable facilities (Frank Plastria, Belgium)

A survey of some recent developments in data envelopment analysis (William W. Cooper, USA, Kaoru Tone, Japán)

Artificial intelligence and human decision making (Jean-Charles Pomerol, Franciaország)

MIP modelling of changeovers in production planning and scheduling problems (Laurence A. Wolsey, Belgium)

The interface between OR/MS and decision theory (Abraham Mehrez, Izrael)

Rough set approach to knowledged-based decision support (Zdislaw Pawlak, Lengyelország)

Combinatorial optimization models for production scheduling in automatic manufacturing systems (Yves Crama, Belgium)

Multicriteria Decision Analysis: some thoughts based on the tutorial and discussion sessions of the ESIGMA meetings (Carlos A. Bana E Costa, Portugália, Theodor J. Stewart, Dél-Afrika, Jean-Claude Vansnick, Franciaország)

Why is operation research not very popular in practice? (Marc Salomon, Hollandia, Charles Corbet, Franciaország)

A konferencia résztvevői számára a fenti előadások kivonatai, egyes esetekben teljes szövege, külön kötetben kerültek kiadásra, egy másik kötetben pedig a szekciók előadás-kivonatai szerepeltek. A szekciókban magyar előadókkal is szép számban találkozhattunk, kollégáink az alábbi előadásokat tartották a konferencián:

J. Abaffy (BKE), M. Bertocchi (Bergamo): *A multinomial model of the* *term structure of interest rates for the Italian market: a statistic and optimization approach*

G. Bacsó (ELTE): *Uniquely colorable perfect graphs*

A. Faragó (Miskolci Egyetem): *Mobile virtual networking*

J. Fodor (ELTE), M. Roubens (Liege): *Valued covering relations (traces) and MCDA exploitation procedures*

I. Futó, A. Gábor (BKE): *A knowledge based model for hospital evaluation*

A. Gábor (BKE): *FLEXPERT – benefits advisory system*

M. Hajdú, L. Mályusz (BME): *Changing the project duration in precedence diagramming*

Zs. Harnos (Kertészeti Egyetem): *Methodology for a sustainable agriculture*

T. Keresztfalvi (ELTE): *Multiobjective fuzzy linear optimization with extended addition and linear approximation of the set of feasible solutions*

E. Klafszky, L. Mályusz (BME): *Trusses with special constitutive relations*

P. Kas, E. Klafszky (BME): *An algorithm for minimizing Bregman-type functions over linear constraints*

M. Kovács (ELTE): *A neuro-reasoning method for fuzzy linear programming*

K. Szenteleki (Kertészeti Egyetem): *Computer model of Hungarian wine sector*

J. Temesi (BKE): *MCDSS: a bunch of methods or a new philosophy?*

T. Terlaky, B. Jansen, C. Roos (Delft): *Target-following methods and weighted logarithmic barriers for linear and self-concordant non-linear programming*

T. Terlaky, B. Jansen, C. Roos (Delft): *Sensitivity analysis in linear programming: old traps, new solutions*

A helyszín arra is alkalmat adott, hogy a résztvevők jobban megismerkedjenek Jeruzsálemmel, Izraellel. A nyitófogadáson Jeruzsálem polgármestere a Dávid toronyban üdvözölte a történelmi díszletek között összesereglett operációkutatókat, a zárófogadást pedig az Izraeli Múzeum gyönyörű kertjében tartották. Akiknek ideje engedte, Izrael más tájaira szervezett utazásokon is részt vehettek a konferencia előtt, vagy után.

Természetesen a konferencián sok szakmai program is zajlott. Az egyes operációkutatási területek munkacsoportjai (EURO Working Groups) kihasználták az alkalmat összejövetelekre, tisztújításra.

A jól sikerült konferencia végén Paolo Toth, az EURO elnöke az 1996-ban Spanyolországban rendezendő konferencián történő viszontlátás reményében búcsúzott el a résztvevőktől.

Temesi József