PÉNZ- ÉS TŐKEPIACI IDŐSOROK SZTOCHASZTIKUS VOLATILITÁS MODELLJEI[1]

VARGA JÓZSEF
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Ebben a dolgozatban az idősorok sztochasztikus volatilitás modelljeivel kapcsolatos fontosabb fogalmakat foglaljuk össze a teljesség igénye nélkül. Tárgyaljuk az ARCH folyamatok általánosítását, módosított változatait, továbbá foglalkozunk az ARCH folyamatoknak az eszköz értékelési elméletben betöltött szerepével.

Bevezetés

Pénz- és tőkepiaci idősorok statisztikai módszerekkel történő elemzésekor célszerű az $(x_1, x_2, \ldots, x_T)$ megfigyelt idősort valamely sztochasztikus folyamat egy realizációjának tekinteni. Ezt a realizációt általában az $\{x_t\}_1^T$ szimbólummal jelöljük, míg maga a sztochasztikus folyamat egy alkalmas valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók $\{X_t\}_{-\infty}^{\infty}$ együttese. Általában elegendő az indexhalmazt a $\mathcal{T} = (\infty, T)$ halmazra korlátozni, továbbá, ha nem okoz félreértést, akkor mind a generáló sztochasztikus folyamat, mind pedig a realizációja jelölésére az x_t szimbólumot szokás alkalmazni. Ezekkel a megállapodásokkal a sztochasztikus folyamat leírható egy T-dimenziós valószínűség-eloszlással, és a realizáció valamint a sztochasztikus folyamat közötti kapcsolat hasonló a minta és a populáció klasszikus statisztikában megismert kapcsolatához. A valószínűség-eloszlás teljes meghatározása helyett megelégszünk az első- és másodrendű momentumok, vagyis az

$$\mathrm{E}(x_1), \mathrm{E}(x_2), \ldots, \mathrm{E}(x_T)$$

várható értékek, a

$$\mathrm{Var}(x_1), \mathrm{Var}(x_2), \ldots, \mathrm{Var}(x_T)$$

varianciák, és a $T(T-1)/2$ számú

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j), \quad i < j$$

kovariancia meghatározásával. Ha feltételezhető az együttes normális eloszlás, akkor ezek a momentumok teljesen meghatározzák a sztochasztikus folyamat tulajdonságait. Ha a normalitásra vonatkozó feltételezés nem helytálló, de lineárisnak tekinthető a folyamat olyan értelemben, hogy a folyamat jelenlegi értékét korábbi értékeinek és más vele kapcsolatban álló folyamat jelenlegi és múltbeli értékeinek lineáris kombinációja generálja, akkor ezek a

[1] Beérkezett: 2001. január 24.

momentumok szintén meghatározzák a folyamat fő tulajdonságait. A folyamat összes első- és másodrendű momentumának meghatározása (becslése) azonban mindkét esetben lehetetlen, mivel T számú megfigyelés (egyetlen realizáció) áll rendelkezésre a $T + T(T+1)/2$ számú ismeretlen paraméter meghatározására. Ezért további egyszerűsítő feltételezésekkel kell élnünk az ismeretlen paraméterek számának csökkentésére.

Figyelembe kell vennünk, hogy az együttes eloszlás ismeretlen paramétereinek egyetlen realizációból történő meghatározása csak akkor megalapozott, ha a folyamat *ergodikus*, ami nagy vonalakban fogalmazva azt jelenti, hogy a minta alapján becsült momentumok közelítik a populáción alapuló megfelelő momentumokat, ha a realizáció hossza minden határon túl nő. Mivel pedig *az ergodicitás fennállását egyetlen realizáció alapján nem ellenőrizhetjük*, a továbbiakban feltesszük, hogy minden vizsgálandó idősor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Az egyik fontos egyszerűsítő feltételezés az idősor *stacionaritása*, amely esetben a folyamat egy bizonyos *statisztikai egyensúlyban van.* Szigorú értelemben akkor mondjuk stacionáriusnak a sztochasztikus folyamatot, ha tulajdonságait nem befolyásolja az időtengely origójának megváltoztatása, másképpen fogalmazva, ha az együttes eloszlás bármely $t_1, t_2, \ldots, t_n$ időpont-együttes esetében megegyezik a $t_1+k, t_2+k, \ldots, t_n+k$ időpontokhoz tartozó együttes eloszlással, ahol k tetszőleges időeltolás (késleltetés). Az $n=1$ esetben ez azt jelenti, hogy a peremeloszlások nem függnek az időtől, ami viszont azzal jár, hogy ha $\mathrm{E}(|X_t|^2) < \infty$, akkor mind a várható érték, mind pedig a szórás állandó, azaz

$$\mathrm{E}(x_1) = \mathrm{E}(x_2) = \ldots = \mathrm{E}(x_T) = \mathrm{E}(x_t) = \mu$$

és

$$\mathrm{Var}(x_1) = \mathrm{Var}(x_2) = \ldots = \mathrm{Var}(x_T) = \mathrm{Var}(x_t) = \sigma_x^2 .$$

Az $n = 2$ esetben a szigorú stacionaritás következményeként az összes kétváltozós eloszlás független az időtől, így az összes kovariancia csak a k késleltetéstől függ, vagyis

$$\mathrm{Cov}(x_1, x_{1+k}) = \mathrm{Cov}(x_2, x_{2+k}) = \ldots = \mathrm{Cov}(x_{T-k}, x_T) = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) .$$

Ezért az autokovarianciát, illetve az autokorrelációt a következőképpen értelmezzük:

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \mathrm{E}\big((x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)\big)$$

és

$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k})}{\big(\mathrm{Var}(x_t) \cdot \mathrm{Var}(x_{t-k})\big)^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} .$$

Az autokovariancia és az autokorreláció is csak a k késleltetéstől függ. Mivel ezek a feltételek a folyamatnak csak az első, illetve másodrendű momentumait tartalmazzák, ezt a stacionaritást *másodrendű* vagy *gyenge stacionaritásnak* nevezzük. Az autokorrelációkat, mint a k késleltetés függvényét *autokorreláció függvénynek* is nevezik.

Az idősorelemzés alapvető tétele (Wold-dekompozíció) szerint minden gyengén stacionárius, tisztán nemdeterminisztikus $(x_t - \mu)$ sztochasztikus folyamat kifejezhető korrelálatlan valószínűségi változók lineáris kombinációjaként. (Tisztán nemdeterminisztikusnak akkor mondjuk a folyamatot, ha $(x_t - \mu)$ egyetlen lineárisan determinisztikus komponenst sem tartalmaz.)

A lineáris kombináció vagy lineáris filter értelmezés:

$$x_t - \mu = a_t + \psi_1 \cdot a_{t-1} + \psi_2 \cdot a_{t-2} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot a_{t-j}\,, \qquad \psi_0 = 1\,.$$

Az $\{\, a_t \,:\, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$ korrelálatlan valószínűségi változók sorozata, amelynek elemeit az *idősor innovációinak* nevezzük, és egy rögzített eloszlásból származó változóknak tekintjük őket, továbbá feltesszük, hogy

$$\mathrm{E}(a_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(a_t) = \mathrm{E}(a_t^2) = \sigma^2 < \infty$$

és

$$\mathrm{Cov}(a_t, a_{t-k}) = \mathrm{E}(a_t a_{t-k}) = 0, \quad \forall k \neq 0\,.$$

Egy ilyen tulajdonságú sorozatot *fehér zaj folyamatnak* nevezünk, és jelölésére általában az $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$ szimbólumot alkalmazzuk. A lineáris filter értelmezésben szereplő együtthatókat az irodalomban ψ súlyoknak nevezik.

Az idősor nem-lineáris jellegének modellbe foglalása úgy történhet a legegyszerűbben, hogy megengedjük a folyamat varianciájának, vagy feltételes varianciájának bizonyos diszkrét időpontokban való megváltozását, vagy folytonos változását. A stacionárius folyamat varianciája állandó ugyan, de bizonyos feltételes varianciái változhatnak.

Az x_t nem lineáris stacionárius folyamat $\mathrm{Var}(x_t)$ varianciája minden t időpontban állandó, a $\mathrm{Var}(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots)$ feltételes variancia azonban függ a folyamat megfigyelt értékeitől, ezért periódusról periódusra változhat.

1 Sztochasztikus volatilitás modellek

Tegyük fel, hogy az $\{x_t\}_1^t$ sorozatot az

$$x_t = \mu + \sigma_t U_t \tag{1}$$

szorzatfolyamat generálta, ahol U_t egy standardizált folyamat, vagyis $\mathrm{E}(U_t) = 0$ és $\mathrm{Var}(U_t) = 1$ minden t időpontban, σ_t pedig olyan pozitív valószínűségi változókból álló sorozat, amelyre $\mathrm{Var}(x_t | \sigma_t) = \sigma_t^2$. Tehát σ_t az x_t feltételes szórása. Általában feltételezik, hogy $U_t = (x_t - \mu)/\sigma_t$ normális eloszlású és független a σ_t-től. A továbbiakban feltesszük, hogy U_t szigorú értelemben vett fehér zaj folyamat. Megmutatható, hogy az (1) egyenlet a

$$\frac{dP}{P} = d(\log P) = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásának diszkrét idejű közelítése, ahol $x_t = \Delta \log P_t$, $W(t)$ pedig a standard Wiener-folyamat. Ez az ún.

diffúzió folyamat, amelyet a finanszírozás-elméleti modellekben eszközértékelésre alkalmaznak.

A fenti feltételekből következően x_t várható értéke μ, varianciája

$$\mathrm{E}(x_t - \mu)^2 = \mathrm{E}(\sigma_t^2 U_t^2) = \mathrm{E}(\sigma_t^2)\,\mathrm{E}(U_t^2) = \mathrm{E}(\sigma_t^2)\ ,$$

az autokovariancia függvény pedig

$$\mathrm{E}\big((x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)\big) = \mathrm{E}(\sigma_t \sigma_{t-k} U_t U_{t-k}) = \mathrm{E}(\sigma_t \sigma_{t-k} U_t)\,\mathrm{E}(U_{t-k}) = 0\ ,$$

vagyis fehér zaj. Vegyük észre, hogy az $S_t = (x_t - \mu)^2$ négyzetes és az $M_t = |x_t - \mu|$ abszolút eltérés autokorrelált lehet. Például a négyzetes eltérésre fennáll

$$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-k}) = \mathrm{E}\big((S_t - \mathrm{E}(S_t))(S_{t-k} - \mathrm{E}(S_{t-k}))\big) = \mathrm{E}(S_t S_{t-k}) - \big(\mathrm{E}(S_t)\big)^2 =$$
$$\mathrm{E}(\sigma_t^2 \sigma_{t-k}^2)\mathrm{E}(U_t^2 U_{t-k}^2) - \big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2 = \mathrm{E}(\sigma_t^2 \sigma_{t-k}^2) - \big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2\ ,$$

és így az S_t k késleltetésű autokorrelációja

$$\rho_{k,S} = \frac{\mathrm{E}(\sigma_t^2 \sigma_{t-k}^2) - \big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2}{\mathrm{E}(\sigma_t^4) - \big(\mathrm{E}(\sigma_t^2)\big)^2}\ .$$

Ezek után felmerül a kérdés, hogy milyen modell lehet alkalmas a σ_t feltételes szórás leírására? Nyilvánvaló, hogy normális eloszlás nem jöhet szóba, mivel pozitív valószínűségi változókból álló sorozatról van szó, de mert σ_t eloszlása valószínűleg jobb oldali ferdeségű, ezért a lognormális eloszlás megfelelő választásnak tűnik. Legyen

$$h_t = \log \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \eta_t\ , \tag{2}$$

ahol $\eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2)$ (független azonos normális eloszlású, zérus várható értékkel és σ_η^2 varianciával) és független az U_t folyamattól. A h_t szokásos értelmezés szerint a véletlen és nem egyenletes új információnak a pénz- és tőkepiacokra történő beáramlását reprezentálja. (ld. Clark (1973), Tauchen és Pitts (1983)). Ezzel

$$x_t = \mu + U_t \exp(h_t/2)\ .$$

Felhasználva, hogy U_t mindig stacionárius, azt kapjuk, hogy x_t akkor és csak akkor (gyenge értelemben) stacionárius, ha h_t is az, ez pedig a $|\gamma_1| < 1$ esetben teljesül. Ezzel a feltételezéssel, valamint a lognormális eloszlás tulajdonságainak a felhasználásával belátható, hogy x_t és S_t minden páros rendű, az

$$\mathrm{E}\big((x_t - \mu)^r\big) = \mathrm{E}\big((S_t)^{r/2}\big) = \mathrm{E}(U_t^r)\mathrm{E}\big(\exp(r h_t/2)\big) =$$
$$\frac{r!}{2^{r/2}(r/2)!}\exp(r\mu_h/2 + r\sigma_h^2/4)$$

összefüggéssel meghatározott momentuma létezik, ahol

$$\mu_h = \mathrm{E}(h_t) = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} \qquad \text{és} \qquad \sigma_h^2 = \mathrm{Var}(h_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\gamma_1^2} \,.$$

A páratlan rendű momentumok mind zérussal egyenlőek. A momentumokkal meghatározott csúcsosság vagy kurtózis mérték

$$\frac{\mathrm{E}(S_t^2)}{(\mathrm{E}(S_t))^2} = \frac{\mathrm{E}(x_t-\mu)^4}{(\mathrm{E}(x_t-\mu)^2)^2} = 3\exp(\sigma_h^2) > 3 \,,$$

ami azt jelenti, hogy a folyamat vastagabb farokrészekkel jellemezhető, mint a normális eloszlás. Az S_t autokorreláció függvényének meghatározásához vegyük figyelembe, hogy

$$\mathrm{E}(S_t S_{t-k}) = \mathrm{E}(\sigma_t^2\sigma_{t-k}^2) = \mathrm{E}(\exp h_t \cdot \exp h_{t-k}) = \mathrm{E}\left((\exp(h_t + h_{t-k})\right) =$$
$$\exp\left((\mu_h + \sigma_h^2) + (\mu_h + \gamma_1^k\sigma_h^2)\right) = \exp\left(2\mu_h + \sigma_h^2(1+\gamma_1^k)\right) \,.$$

Ezzel a k késleltetésű autokovariancia

$$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-k}) = \exp\left(2\mu_h + \sigma_h^2(1+\gamma_1^k)\right) - \exp(2\mu_h + \sigma_h^2) =$$
$$\exp(2\mu_h + \sigma_h^2)\left(\exp(\sigma_h^2\gamma_1^k) - 1\right) \,,$$

az autokorreláció pedig

$$\rho_{k,S} = \frac{\exp(\sigma_h^2\gamma_1^k) - 1}{3\exp(\sigma_h^2) - 1} \,.$$

Az (1) logaritmusát véve a négyzetes eltérésre

$$\log S_t = h_t + \log U_t^2 = \mu_h + \frac{\eta_t}{1-\gamma_1 B} + \log U_t^2$$

adódik, ez pedig azt mutatja, hogy $\log S_t \sim ARMA(1,1)$, de az átlagtól való eltérések nem normális eloszlásúak. Ha az U_t normális eloszlású, akkor $\log U_t^2$ várható értéke -1.27, a varianciája pedig 4.93, és az eloszlás nagyon hosszú bal oldali farokrésszel rendelkezik, ez pedig annak a következménye, hogy zérushoz nagyon közeli számok logaritmusait vesszük. A $\log S_t$ autokorreláció függvénye

$$\rho_{k,\log S} = \frac{\gamma_1^k}{1 + 4.93/\sigma_h^2} \,.$$

Előfordulhat, hogy az S_t bizonyos értékei zérussal egyenlőek, ezeknek pedig nem vehetjük a logaritmusát. Ennek a problémának a kiküszöbölésére a Koopman és szerzőtársai által javasolt

$$\log S_t \approx \log(S_t + c\cdot s_S^2) - \frac{c\cdot s_S^2}{S_t - c\cdot s_S^2}$$

transzformációt szokás alkalmazni, ahol s_S^2 az S_t minta alapján becsült varianciája, c pedig egy kis szám, amelyre Koopman és szerzőtársai a 0.02 értéket javasolják (Koopman et al. (1995)).

A sztochasztikus volatilitás (SV) modellek alkalmazásának legnagyobb nehézségét az jelenti, hogy a becslés rendkívül nehéz. A becslési módszerek egy része *maximum likelihood* módszer, amelyek igen intenzív számítógép alkalmazást igényelnek. Ilyen módszereket ismertet Shephard (1996). Kényelmesebb becslési módszer a *kvázi maximum likelihood* (QML) módszer, amelyről vázlatos leírás található Koopman et al. (1995) 7. fejezetében. Ez a becslési eljárás a Kalman filter módszert alkalmazza a σ_t^2 volatilitás becslésére.

2 ARCH folyamatok

Az x_t feltételes szórását meghatározó folyamatról feltettük korábban, hogy nem függ az x_t-től. Például a (2) AR(1) lognormális modellben σ_t az $\{\eta_t, \sigma_{t-1}, \sigma_{t-2}, \dots\}$ információ halmaztól függ. Most azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a feltételes szórás az x_t múltbeli értékeinek függvénye, vagyis

$$\sigma_t = \mathcal{I}(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) .$$

Abban az esetben például, amikor σ_t csak x_{t-1} függvénye,

$$\sigma_t = \mathcal{I}(x_{t-1}) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 (x_{t-1} - \mu)^2\right)^{1/2} , \tag{3}$$

ahol $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_1 > 0$. Ha $U_t \sim NID(0,1)$ és független σ_t-től, akkor $x_t = \mu + U_t \sigma_t$ fehér zaj feltételes eloszlása normális eloszlás, vagyis

$$x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots \sim NID(\mu, \sigma_t^2)$$

és

$$\mathrm{Var}(x_t | x_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 (x_{t-1} - \mu)^2 .$$

Ha $\alpha_1 < 1$, akkor a feltételes variancia

$$\mathrm{Var}(x_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} ,$$

és x_t gyenge értelemben stacionárius. Az x_t negyedik momentuma véges, ha $3\alpha_1^2 < 1$ és ekkor a kurtózis

$$\frac{3(1 - \alpha_1^2)}{1 - 3\alpha_1^2} .$$

Ez az érték háromnál nagyobb, ezért az x_t feltétel nélküli eloszlása a normális eloszlásénál vastagabb farokrészű eloszlás. Ha ez a momentum feltétel nem teljesül, akkor az x_t^2 varianciája nem véges, ezért x_t^2 nem stacionárius (gyenge értelemben véve). Ezt a modellt Engle (1982) vezette be, és *elsőrendű autoregresszív feltételes heteroszkadasztikus* (ARCH(1)) folyamatként ismert. Az ARCH folyamatok a pénz- és tőkepiaci idősorok nem lineáris modelljeinek különösen népszerű osztályát alkotják. Ezt a népszerűséget számos publikáció jelzi, amelyek közül csak néhányat említünk. Engle és Bollerslev (1986), Bollerslev, Chou és Kroner (1992), Bera és Higgins (1993), Bollerslev, Engle és Nelson (1994).

Az ARCH(1) modell az $\varepsilon_t = x_t - \mu = U_t\sigma_t$ kényelmesebb jelöléssel a következő alakban írható:

$$\varepsilon_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots \sim NID(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \,.$$

Bevezetve a $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ jelölést, a modell

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t$$

alakban is írható. Mivel $\mathrm{E}(\nu_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots) = 0$, a modell az ε_t^2 négyzetes eltérés AR(1) modellje. A hibák azonban nyilvánvalóan heteroszkedasztikusak, mivel $\nu_t = \sigma_t^2(U_t^2 - 1)$. Az ARCH(1) modell természetes módon adódó általánosítása az ARCH(q) folyamat, ahol (3)-at

$$\mathcal{I}(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-q}) = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (x_{t-i} - \mu)^2\right)^{1/2} \tag{4}$$

váltja fel, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq q$. A folyamat gyenge értelemben véve stacionárius, ha az ARCH paraméterek karakterisztikus egyenletének minden gyöke az egységkörön kívül esik, vagyis, ha $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$. Ebben az esetben a feltétel nélküli variancia

$$\mathrm{Var}(x_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i} \,.$$

A feltételes variancia függvény

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \,.$$

A modellek gyakorlati alkalmazása során, ha a q nagy, a nem korlátozott becslési eljárás gyakran vezet az α_i paraméterekre kirótt nem-negativitási feltétel megsértésére. Ez a feltétel a σ_t^2 feltételes variancia pozitivitásának biztosításához szükséges. Néhány korai alkalmazásban ennek a feltételnek a biztosítására csökkenő késleltetési struktúrát alkalmaztak.

A modell rugalmasságának növelésére Bollerslev (1986, 1988) bevezette az általánosított ARCH (GARCH) modellt. A GARCH(p, q) folyamat feltételes variancia függvénye

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2 \,,$$

ahol $p > 0$, $\beta_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha(B)$ és $\beta(B)$ a B késleltető operátor polinomjai. A GARCH(p, q) modell feltételes varianciájának egyértelmű meghatározottságához a megfelelő $\sigma_t^2 = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon_t^2$ (ARCH(∞)) modell minden együtthatójának pozitívnak kell lennie. Abban az esetben, amikor $\alpha(B)$ és $\beta(B)$ nem rendelkezik közös gyökökkel és a $\beta(B)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, ez a pozitivitási feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a $\theta(B) = \alpha(B)/(1 - \beta(B))$ minden együtthatója nemnegatív. Ennek szükséges és elégséges feltételeiről Nelson és Cao (1992) dolgozatában olvashatunk. A

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

GARCH$(1, 1)$ folyamat esetében ezek a feltételek megkövetelik mindhárom paraméter nemnegativitását.

Ez a modell rendkívül népszerű a pénz-és tőkepiaci idősorok modellezése területén. A GARCH(p, q) folyamatnak a fentivel egyenértékű alakja

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha(B) + \beta(B))\,\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta(B)\nu_{t-1}\,, \tag{5}$$

vagyis $\varepsilon_t^2 \sim$ ARMA(m, p), ahol $m = \max(p, q)$. Ez a folyamat akkor és csak akkor gyenge értelemben stacionárius, ha az $\alpha(B) + \beta(B)$ gyökei az egységkörön kívül helyezkednek el, vagyis, ha $\alpha(1) + \beta(1) < 1$. Ez a feltétel biztosítja, hogy ε_t is gyenge értelemben stacionárius. Mivel az ARCH folyamatok vastag farokrészekkel rendelkeznek, a gyenge stacionaritás feltételei gyakran szigorúbbak a szigorú stacionaritás feltételeinél. Megmutatható például, hogy ε_t és σ_t^2 a GARCH$(1, 1)$ modellben akkor és csak akkor szigorúan stacionárius, ha

$$\mathrm{E}\left(\log(\beta_1 + \alpha_1 U_t^2)\right) < 0\,,$$

és ez teljesül például, ha $U_t \sim N(0, 1)$, $\alpha_1 = 3$ és $\beta_1 = 0$, a gyenge stacionaritás feltételei ugyanakkor nem teljesülnek. Bougerol és Picard (1992) dolgozatában olvashatunk az általános eset, a GARCH(p, q) folyamat stacionaritási feltételeiről.

A stacionaritási feltételek körüli bonyodalmak vezettek a GARCH modellek volatilitás állandósága vagy volatilitás tartóssága (volatility persistence) fogalmának bevezetéséhez. Ha (5)-ben $\alpha(1) + \beta(1) = 1$, akkor az $\alpha(B) + \beta(B)$ polinomnak van egységgyöke. Ekkor a modellt integrált GARCH modellnek vagy IGARCH(p, q) modellnek nevezzük (Engle és Bollerslev (1986)). A pénz- és tőkepiaci idősorok esetében gyakran fordul elő, hogy $\alpha(1) + \beta(1)$ nagyon közel esik 1-hez, és ha ez teljesül, akkor egy idősori kilengésnek, várható értéktől való eltérésnek a feltételes varianciára irányuló hatása tartós olyan értelemben, hogy minden előrejelzés tekintetében lényeges marad.

Bollerslev et al. (1994) a GARCH modellek volatilitás állandóságának a fogalmát nem tartották megfelelőnek. Javasolták úgy módosítani a fogalmat, hogy a kilengések nem állandósulnak, ha σ_t^2 stacionárius olyan értelemben, hogy az $\mathrm{E}(\sigma_{t+s}^2|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ feltételes várható érték konvergál az $\alpha_0/(1 - \alpha(1) - \beta(1))$ feltétel nélküli varianciához, ha $s \to \infty$. Másik definíció az előrejelzések momentumaira vonatkozó feltételt tartalmaz, amely szerint a kilengések akkor és csak akkor nem állandósulnak, ha valamely $\eta > 0$-ra teljesül, hogy az $\mathrm{E}(\sigma_{t+s}^{2\eta}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ feltételes várható érték konvergál egy, az $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$ sorozattól független véges számhoz. A volatilitás állandóság vizsgálatának eredménye sajnálatos módon attól is függhet, hogy melyik definíciót alkalmazzuk. Tekintsük például a

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_t^2 (U_t^2 + \beta_1)$$

GARCH$(1,1)$ modellt, amelyre a módosított definícióban szereplő feltételes várható érték

$$\mathrm{E}(\sigma_{t+s}^2|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = \alpha_0 \sum_{k=0}^{s-1} (\alpha_1 + \beta_1)^k + \sigma_t^2 (\alpha_1 + \beta_1)^s \, .$$

Belátható, hogy a feltételes várható érték akkor és csak akkor konvergál az $\alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$ feltétel nélküli varianciához, ha $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Az IGARCH modellben $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, ekkor tehát a feltételes várható érték végtelenbe konvergál, ha $s \to \infty$, mivel ekkor

$$\mathrm{E}(\sigma_{t+s}^2|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots) = s \cdot \alpha_0 + \sigma_t^2 \, .$$

Az IGARCH modell azonban szigorúan stacionárius, a szigorú stacionaritás esetében pedig $\mathrm{E}(\sigma_{t+s}^{2\eta}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots)$ véges számhoz konvergál, ha $0 < \eta < 1$ (ld. Nelson (1990)). Ezekből az eredményekből arra következtethetünk, hogy bármely nyilvánvalóan jelenlevő volatilitás állandóság inkább az eloszlás vastag farokrészének a következménye, mint a nem-stacionaritás velejárója.

A volatilitás állandóság jellemezhető az *impulzus válasz együttható* (impulse response coefficient) segítségével is. A $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1$ jelölés bevezetésével a GARCH$(1,1)$ modell így írható:

$$(1 - \phi_1 B)\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta_1 B)\nu_t \, ,$$

vagy

$$\Delta \varepsilon_t^2 = (1 - B)(1 - \phi_1 B)^{-1}(1 - \beta_1 B)\nu_t = \Theta(B)\nu_t \, .$$

Az impulzus válasz együttható a $\Theta(B)$ késleltető polinomból határozható meg.

$$\Theta_0 = 1, \qquad \Theta_1 = \phi_1 - \beta_1 - 1, \qquad \Theta_j = (\phi_1 - \beta_1)(\phi_1 - 1)\phi_1^{j-2}, \quad j \geq 2 \, .$$

A kumulált impulzus válasz $\Theta_1 = 0$, mivel a $\Theta(B)$ polinomnak van egységgyöke, vagy másképpen

$$\sum_j \Theta_j = (\phi_1 - \beta_1)\phi_1^{j-1} \, ,$$

amely exponenciálisan konvergál zérushoz, ha $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1 < 1$. A $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 1$ esetben azonban, amikor tehát IGARCH$(1,1)$ modellről van szó,

$$\Delta \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta_1 B)\nu_t \, ,$$

$\sum_j \Theta_j = 1 - \beta_1 = \Theta(1) \neq 0$, ezért a volatilitás állandósága nem véges.

3 Módosított GARCH folyamatok

Feltételeztük ugyan, hogy ε_t feltételes eloszlása normális eloszlás, ez azonban nem lényeges feltétel. Például Bollerslev (1987) azt az esetet vizsgálta, amikor az eloszlás ismeretlen ν fokszámú standardizált t-eloszlás, és a fokszám a rendelkezésre álló adatokból becsülhető. A $\nu > 4$ esetben egy ilyen eloszlás leptokurtikus, ezért az eloszlás farokrészei vastagabbak a normális eloszlásénál.

Jorion (1988) a normális és a Poisson-eloszlás keverékét, Baillie és Bollerslev (1989) az exponenciális eloszlást, Hsieh (1989) normális és lognormális eloszlás keverékét, Nelson (1991) pedig az általánosított exponenciális eloszlást vizsgálta.

További módosításokat eredményezett, hogy az addig feltételezett kvadratikus kapcsolatnál rugalmasabb kapcsolatot engedtek meg a σ_t^2 és az ε_t között. Az egyszerűség kedvéért a

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 U_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{6}$$

GARCH$(1,1)$ modell változatait tekintjük át.

Taylor (1986) és Schwert (1989) a feltételes szórás modellezését javasolták a variancia helyett. A modell:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \beta_1 \sigma_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1} |U_{t-1}| + \beta_1 \sigma_{t-1} \,. \tag{7}$$

Itt a feltételes variancia az abszolút kilengések súlyozott átlagának négyzetgyöke. Ebből pedig az következik, hogy nagy kilengéseknek kisebb a hatása a feltételes varianciára, mint a standard GARCH modellben. A kilengésre adott nem szimmetrikus válasz explicit módon szerepel a

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 f(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}) + \beta_1 \log(\sigma_{t-1}^2) \tag{8}$$

exponenciális GARCH (EGARCH) modellben, ahol

$$f(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}) = \Theta_1 \varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1} + (|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}| - \mathrm{E}(|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}|)) \,.$$

Az $f(\cdot)$ *információ hatás függvény* a feltételes volatilitás újraértékelésével kapcsolatos, amely a $\log(\sigma_t^2)$ és az ε_{t-1} új információ közötti relációt írja le. Nem szimmetrikus választ tartalmaz, mivel $\partial f/\partial \varepsilon_{t-1} = \Theta_1 + 1$, ha $\varepsilon_{t-1} > 0$, és $\partial f/\partial \varepsilon_{t-1} = \Theta_1 - 1$, ha $\varepsilon_{t-1} < 0$. Láthatjuk azt is, hogy a volatilitás a minimumát veszi fel az $\varepsilon_{t-1} = 0$ esetben. Ez az aszimmetria hasznos, mert gyorsabb reagálást tesz lehetővé abban az esetben, amikor a piac hanyatlik, mint az erősödő piac esetében. Ez a *tőkeáttételi hatásként* ismert tényező rendkívül fontos több pénz- és tőkepiaci eszköz tekintetében. Könnyen igazolható, hogy $f(\varepsilon_{t-1})$ szigorú értelemben vett fehér zaj zérus várható értékkel és konstans varianciával, és így $\log(\sigma_t^2)$ ARMA$(1,1)$ folyamat, amely akkor stacionárius, ha $\beta_1 < 1$.

A (6), (7) és (8) feltételeket magában foglaló modell a nem-lineáris ARCH (NARCH) modell (ld. Higgins és Bera (1992)). A NARCH modell általános alakja

$$\sigma_t^\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 f^\gamma(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}^\gamma \,.$$

Ennek egy változata a

$$\sigma_t^\gamma = \alpha_0 + \alpha_1 g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}^\gamma \,.$$

„küszöb" ARCH, (threshold ARCH, rövidített jelöléssel TARCH) modell, ahol

$$g^{(\gamma)}(\varepsilon_{t-1}) = \theta \cdot I(\varepsilon_{t-1} > 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^\gamma + \theta \cdot I(\varepsilon_{t-1} \leq 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^\gamma \,.$$

Az $I(\cdot)$ indikátor függvényt jelöl. A $\gamma = 1$ eset a Zakonian-féle TARCH modell (Zakonian (1994)), a $\gamma = 2$ eset pedig a Glosten, Jagannathan és Runkle (1993) által kidolgozott GJR modell, amelyben az új információra kvadratikus volatilitás válasz következik, és különböző együtthatókat tartalmaz a jó és rossz hírek súlyozására. Megőrzi ugyanakkor azt a tulajdonságot, hogy a volatilitás minimális, ha nincs új információ.

Ding, Granger és Engle (1993), majd Hentschel (1995) nagyon általános modell osztályt vezettek be. Engle (1996) aszimmetrikus ARCH (AARCH) modellje, valamint Sentana (1995) kvadratikus ARCH (QARCH) modellje

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta \varepsilon_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

alakban írható, ahol negatív δ érték azt jelenti, hogy a jó hír, a kedvező információ kevésbé növeli a volatilitást, mint a rossz hír. A modellben ε_{t-1} második hatványa is szerepel, ezért ezek a modellek nem speciális esetei a Ding, Granger és Engle, valamint Hentschel által javasolt általános modell osztálynak.

A (6) GARCH$(1,1)$ modell formulába foglalásának egy másik lehetséges módja az $\alpha_0 = \omega(1 - \alpha_1 - \beta_1)$ segítségével történő megfogalmazás, ahol ω a feltétel nélküli variancia, vagy másképpen a hosszútávú volatilitás, amellyel a folyamat

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1(\varepsilon_{t-1} - \omega) + \beta_1(\sigma_{t-1}^2 - \omega) \,.$$

Az EVIEWS programcsomag ezt a modellt kiterjeszti arra az esetre, amikor megengedett a visszatérés egy változó q_t szintre. A modell:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \quad q_t + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - q_{t-1}) + \beta_1(\sigma_{t-1}^2 - q_{t-1}) \\ q_t &= \quad \omega + \zeta(q_{t-1} - \omega) + \xi(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \,. \end{aligned}$$

Ebben a modellben q_t a hosszútávú volatilitás, amely ζ hatványkitevőivel ω-hoz konvergál, a $\sigma_t - q_t$ „eltűnő" komponens pedig zérushoz tart $\alpha_1 + \beta_1$ kitevőivel. Ez az ún. *komponens* GARCH modell összekapcsolható a TARCH modellel, lehetővé téve az állandó és az eltűnő tag aszimmetriájának figyelembe vételét. Az *aszimmetrikus komponens* GARCH modell automatikusan építi be az aszimmetriát az eltűnő komponensbe.

Két további modell osztályt említünk még, az egyik a *strukturális* ARCH (STARCH) modell osztály, amelyet Harvey, Ruiz és Sentana (1992) publikált, és az *átváltó* ARCH (switching ARCH, rövidítve SWARCH) modellek, amelyekről lényegében egyidőben közöltek eredményeket Cai (1994), illetve

Hamilton és Susmel (1994). A STARCH modell különböző, nem megfigyelt komponensekre bontja ε_{t-1}-et, amely komponensek mindegyike ARCH alakú, a SWARCH modell pedig több, eltérő ARCH modellt foglal magában, amelyek között Markov-lánc szerint átvált a folyamat.

4 Hosszú memóriájú volatilitás folyamatok — A FIGARCH modell

A hozam idősorok egyik jellemzője, hogy a hozamok abszolút értékeiből, vagy hatványaiból álló idősorok autokorrelációi nagyon lassan szűnnek meg. Ez különösen igaz a hozamok négyzeteiből álló idősorokra. Ding, Granger és Engle (1993) az S&P 500 index napi értékeit vizsgálták az 1928 és 1991 közötti időszakban, és azt találták, hogy az első negatív autokorreláció 2598 késleltetés mellett fordul elő. Hasonló eredményre jutott Mills (1996), a London FT 30 napi hozamait vizsgálva az 1935 és 1994 közötti periódusban. Válaszul ezekre az eredményekre Baillie, Bollerslev és Mikkelson (1996) megalkotta a Fractionally Integrated GARCH (FIGARCH) modellt. A FIGARCH folyamatot, vagy FIGARCH$(1, d, 1)$ modellt, mint az (5) általánosítását a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\Delta^d \varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1 \nu_{t-1} \; . \tag{9}$$

Ennek a fentivel ekvivalens alakja:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \Delta^d)\varepsilon_t^2 - \big(\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\Delta^d\big)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \; . \tag{10}$$

A késleltető operátor segítségével (9) így is írható:

$$\Delta \varepsilon_t^2 = \alpha_0^* + \Delta^{1-d}\big(1 - (\alpha_1 + \beta_1)B\big)^{-1}(1 - \beta_1 B)\nu_t = \alpha_0^* + \Theta(B)\nu_t \; ,$$

a (10) megfelelője a késleltető operátorral kifejezve

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1-\beta_1) + (1 - (1 - (\alpha_1 + \beta_1)B)(1 - \beta_1 B)^{-1}\Delta^d)\,\varepsilon_t^2} = \alpha_0^{**} + \pi(B)\varepsilon_t^2$$

A FIGARCH(p, d, q) folyamat stacionárius, ha $0 \le d \le 1$. Ha $0 < d < 1$, akkor $\Theta(1) = 0$, és így a feltételes varianciára ható kilengések elhalnak. Nem ez a helyzet a $d = 0$ esetben, amikor is $\sum_j \Theta_j$ hiperbolikus függvény szerint csökken, és ez fontos információ a volatilitást kiváltó kilengés, hatás terjedésének módjára és sebességére nézve. A $d > 1$ esetben $\Theta(1)$ nem értelmezett és a feltételes varincia rendkívül nagy mértékű.

A FIGARCH$(1, d, 1)$ folyamat esetében az

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 + d \ge 0 \quad \text{és} \quad 1 - 2(\alpha_1 + \beta_1) \ge d \ge 0$$

feltételek biztosítják a feltételes variancia pozitivitását.

5 ARCH az eszköz értékelés elméletében

Az ARCH folyamatok jelentősége a pénzügyi idősorok modellezése területén a legvilágosabban az eszköz értékelési modellekben nyilvánul meg, ahol a közvetítő jövőbeli bizonytalan események mellett kívánja maximalizálni várható hasznosságát. Ennek szemléltetésére tekintsük a következő példát. Tegyük fel, hogy egy reprezentatív közvetítő a W_t vagyonát a q_t mennyiségű és p_t egységárú kockázatos eszköz, és az x_t mennyiségű kockázatmentes eszköz vásárlására fordítja. Ez utóbbi egységárát az egyszerűség kedvéért egységnyinek tekintjük. A periódus végén a kockázatos eszköz részvényeinek értéke egyenként y_{t+1}, ha osztalékfizetés nincsen, akkor $y_{t+1} = p_{t+1}$. A kockázatmentes eszköz értéke pedig $x_t r_t$ lesz, ahol r_t értéke 1 plusz a kockázatmentes kamatláb. Ha a közvetítő hasznossági függvénye a

$$W_{t+1} = q_t y_{t+1} + x_t r_t$$

periódusvégi vagyonának ún. átlag-variancia hasznossági függvénye, akkor allokációs problémája ennek a hasznossági függvénynek a maximalizálása a q_t szerint, vagyis

$$\max_{q_t} \; 2\mathrm{E}_t(q_t y_{t+1} + x_t r_t) - \gamma_t \mathrm{Var}_t(q_t y_{t+1}) \, , \tag{11}$$

az induló periódusbeli vagyonára vonatkozó

$$W_t = x_t + q_t p_t$$

feltétellel. Ennek a feladatnak a megoldása

$$p_t = r_t^{-1} \mathrm{E}_t(y_{t+1}) - \gamma_t q_t r_t^{-1} \mathrm{Var}_t(y_{t+1}) \, . \tag{12}$$

Ha a kockázatos eszköz mennyiségét rögzítjük q értéken, továbbá $\gamma_t = \gamma$ és $r_t = r$ állandók, akkor a (12) modell az *eszköz értékelési modell.*

Ha a kockázatos eszközt egy s periódus lejáratú határidős szerződés képviseli, akkor egy spekuláns ezért a szerződésért legfeljebb

$$p_t = r^{-s} \left(\mathrm{E}_t(y_{t+s}) - \delta \mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s}) \right) \tag{13}$$

árat hajlandó fizetni, ahol r^{-s} végzi az r kockázatmentes kamatláb melletti jelenre diszkontálást, és $\delta = \gamma q$.

A modell egyszerű átdátumozásával azt kapjuk, hogy a határidős szerződés értéke a $t+1$ időpontban, $s \geq 2$ periódussal a lejárat előtt a következőképpen is írható

$$p_{t+1} = r^{1-s} \left(\mathrm{E}_{t+1}(y_{t+s}) - \delta \mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s}) \right) \, .$$

Szorozva r^{-1}-gyel, a t időpontbeli várható értékeket véve és (13)-ból kivonva

$$p_t = r^{-1} \mathrm{E}_t(p_{t+1}) - \delta r^{-s} \left(\mathrm{Var}_t(y_{t+s}) - \mathrm{E}_t(\mathrm{Var}_{t+1}(y_{t+s})) \right) \, . \tag{14}$$

Tegyük fel, hogy y_t végtelen mozgó átlag folyamatként értelmezhető, ahol az idősor innovációi korrelálatlanok, a σ_t^2 feltételes varianciája azonban függ az időtől, vagyis

$$y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \varepsilon_{t-i} = \Theta(B)\varepsilon_t \,, \qquad \operatorname{Var}_t(y_{t+1}) = \operatorname{Var}_t(\varepsilon_{t+1}) = \sigma_{t+1}^2 \,. \tag{15}$$

Felhasználva (15)-öt,

$$\operatorname{Var}_t(y_{t+s}) = \mathrm{E}_t \left(\sum_{i=1}^{s} \Theta_{s-i} \varepsilon_{t+i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{s} \Theta_{s-i}^2 \mathrm{E}_t(\sigma_{t+i}^2) \,,$$

ezzel pedig

$$\operatorname{Var}_t(y_{t+s}) - \mathrm{E}_t\big(\operatorname{Var}_{t+1}(y_{t+s})\big) = \Theta_{s-1}^2 \varepsilon \sigma_{t+1}^2 \,,$$

és (14) most már a következőképpen írható:

$$p_t = r^{-1}\mathrm{E}_t(p_{t+1}) - \delta r^{-s} \Theta_{s-1}^2 \sigma_{t+1}^2 \,,$$

ez pedig az egyperiódusú hozam ismert formulája, amely explicit formában tartalmazza az y_{t+s} változó varianciájának a kockázat kerülő közvetítőre gyakorolt hatását.

A (12) egyszerű eszköz értékelési modell zárt alakban megadott megoldása az y_t változót generáló folyamattól függ. Tegyük fel, hogy y_t *véletlen bolyongási folyamat*, amelynek innovációi GARCH(1, 1) folyamatot követnek. Ekkor $\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = y_t$ és

$$\operatorname{Var}_t(y_{t+s}) = \mathrm{E}_t \left(\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{t+i}^2 \right) = \mathrm{E}_t \left(\sum_{i=1}^{s} \sigma_{t+i}^2 \right) = s\sigma_{t+1}^2 \,,$$

így

$$p_t = r^{-s}(y_t - \delta s \sigma_{t+1}^2) \,.$$

Határidős szerződés esetében, ahol nem cserél gazdát pénz a $t+s$ lejáratig, a kockázatmentes kamatláb zérus, tehát $r = 1$, vagyis a megoldás a következőre egyszerűsödik

$$p_t = y_t - \delta s \sigma_{t+1}^2 \,.$$

Ha $\delta \neq 0$, akkor a határidős szerződés kockázati prémiuma időtől függő. A távoli jövőre vonatkozó szerződések esetében az új információ jelentős hatást gyakorol az eszközök értékére, mivel megváltoztatja a közvetítő érzékenységét a végső kifizetés varianciájával, illetve minden közbenső varianciával szemben. Ez időfüggő kockázati prémiumot eredményez, és így jelentős hatással van az eszközök értékére.

Ha azt tételezzük fel, hogy az innovációk függetlenek az időben, és a konstans varianciájuk σ^2, akkor $\operatorname{Var}_t(y_{t+s}) = s\sigma^2$, és a (12) eszköz értékelő modell megoldása

$$p_t = y_t - \delta s \sigma^2 \,,$$

és bár az azonnali ár varianciája szerepel az értékelő egyenletben, mégsem eredményez időfüggő kockázati prémiumot, mivel a modell nem teremt kapcsolatot az új információ és a jövőbeli bizonytalanság között.

Az irodalomjegyzékben található dolgozatok számos alkalmazásról számolnak be, jelezve a volatilitás modellek finanszírozás-elméleti alkalmazhatóságát.

Irodalom

1. BAILLIE, R. T., BOLLERSLEV, T., 1989: The Message in Daily Exchange Rates:a Conditional Variance Tale, *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 297-305
2. BAILLIE, R. T., BOLLERSLEV, T., MIKKELSON, H. O., 1996: Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 74, 3-30
3. BERA, A. K., HIGGINS, M. L., 1993: On ARCH Models: Properties, Estimation and Testing, *Journal of Economic Surveys*, 7, 305-366
4. BOLLERSLEV, T., 1986: Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327
5. BOLLERSLEV, T., 1988: On the Correlation Structure for the Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process, *Journal of Time Series Analysis*, 9, 121-132
6. BOLLERSLEV, T., CHOU, R. Y., KRONER, K. F., 1992: ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, 5-59
7. BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F., NELSON, D. B., 1994: ARCH Models, in R. F. Engle, D. L. McFadden (eds.) *Handbook of Econometrics*, Volume IV, New York: North Holland, pp. 2959-3038
8. BOUGEROL, P., PICARD, N., 1992: Stationarity of GARCH Processes and of Some Nonnegative Time Series, *Journal of Econometrics*, 52, 115-128
9. CAI, J.,1994: A Markov Model of Switching-Regime ARCH, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 309-316
10. CLARK, P. K., 1973: A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variances for Speculative Prices, *Econometrica*, 41, 135-155
11. DING, Z., GRANGER, C. W. J., ENGLE, R. F., 1993: A Long Memory Property of Stock Returns and a New Model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106
12. ENGLE, R. F., 1982: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica*, 50, pp. 987-1008
13. ENGLE, R. F., BOLLERSLEV, T., 1986: Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews*, 5, 1-50
14. ENGLE, R. F.,1996: Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of 1987, *Review of Financial Studies*, 3, 103-106
15. GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R., RUNKLE, D.,1993: Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801
16. HAMILTON, J. D., SUSMEL, R., 1994: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 64, 307-333

17. HARVEY, A. C., RUIZ, E., SENTANA, E., 1992: Unobserved Component Models with ARCH Disturbances, *Journal of Econometrics*, 52, 129-157

18. HENTSCHEL, L.,1995: All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models, *Journal of Financial Economics*, 39, 71-104

19. HIGGINS, M. L., BERA, A. K., 1992: A Class of Nonlinear ARCH Models, *International Economic Review*, 33, 137-158

20. HSIEH, D. A., 1989: Modelling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 307-317

21. JORION, P., 1988: On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets, *Review of Financial Studies*, 1, 427-445

22. KOOPMAN, S. J. , HARVEY, A. C., DOORNIK, SHEPHARD, N.,1995: *Stamp 5.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*, London, Chapman and Hall

23. MILLS, T. C., 1996: Non-Linear Forecasting of Financial Time Series: An Overview and Some New Models, *Journal of Forecasting*, 15, 127-135

24. NELSON, D. B., 1990: Stationarity and Persistence in the GARCH (1,1) Model, *Econometric Theory*, 6, 318-334

25. NELSON, D. B., 1991: Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns, *Econometrica*, 59, 347-370

26. NELSON, D. B., CAO, C. Q., 1992: Inequality Constraints in Univariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 229-235

27. SHEPHARD, N., 1996: Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility, in D. R. Cox, D. V. Hinkley, O. E. Barndorff-Nielsen (eds.), *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, London, Chapman and Hall, pp. 1-67

28. SCHWERT, G. W., 1987: Effects of Model Specification on Tests for Unit Roots in Macroeconomic Data, *Journal of Monetary Economics*, 20, 73-105

29. TAUCHEN, G. E., PITTS, M., 1983: The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets, *Econometrica*, 51, 485-505

30. TAYLOR, S. J., 1986: *Modelling Financial Time Series*, New York, Wiley

31. ZAKONIAN, J. M.,1994: Threshold Heteroskedastic Models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-955

STOCHASTIC VOLATILITY IN FINANCIAL TIME SERIES MODELS

In this paper a brief summary of financial time series volatility models is given. We discuss generalised and modified versions of ARCH processes such as GARCH, NARCH, AARCH, QARCH, STARCH and FIGARCH models as well as the role of GARCH processes in asset pricing theory.