MARTOS BÉLA SZABÁLYOZÁSELMÉLETI MUNKÁSSÁGA[1]

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA Közgazdaságtudományi Intézet

Ebben a rövid írásban Martos Béla szabályozáselméleti munkásságát tekintem át. Igyekszem minél szélesebb közönséghez szólni, ezért szeretném a részleteket mellőzni. A részletek iránt érdeklődőknek melegen ajánlom a Kornai és Martos szerkesztésében megjelent (1981) művet, illetve Martos (1990) monográfiáját. Ez utóbbiról hosszabb ismertetést írtam angol nyelven (Simonovits, 1991). A cikk további hét pontból áll. 1. A szabályozáselmélet. 2. Közgazdasági alkalmazások. 3. A magyar szabályozáselméleti iskola. 4. Stabilitás és működőképesség. 5. A Leontief gazdaság szabályozása koordináció nélkül. 6. Mechanizmusok ekvivalenciája. 7. Mit tanulhatunk Bélától?

1. A szabályozáselmélet

A szabályozáselmélet műszaki feladatok megoldására kidolgozott matematikai elmélet. Alapfogalmai: az n-dimenziós *állapotvektor* (x), az m-dimenziós *szabályozási vektor* (u), a p-dimenziós *megfigyelési vektor* (y), az n-dimenziós *zajvektor* (v) és az *állapotegyenlet*. Folytonos idejű, lineáris rendszer esetében a következő differenciálegyenlet-rendszer írja le a rendszer mozgását.

Állapotegyenlet-rendszer:

$$x' = Px + Ru + v \ , \tag{1.1}$$

ahol a $'$ az idő szerinti deriválást jelöli, P és R megfelelő méretű mátrixok. Az alkalmazásokban fontos, hogy az állapotvektor helyett általában csak valamilyen függvénye (pl. az állapot-komponensek összege) figyelhető meg.

Megfigyelési egyenletrendszer:

$$y = Sx \ , \tag{1.2}$$

ahol S egy $p \times n$-es mátrix. A *klasszikus* szabályozáselméletben a szabályozási vektor a megfigyelési változó függvénye.

---

[1]Martos Béla 75. születésnapja alkalmából a Magyar Modellezési Társaság 1995. őszi balatonkenesei konferenciáján elhangzott ünnepi előadás alapján. Beérkezett 1996. január 11.

Visszacsatolási egyenletrendszer:

$$u = Fy + w \tag{1.3}$$

ahol F egy $m \times p$-es mátrix és w egy m-es vektor. Közgazdasági alkalmazásokban nagyon fontos a *decentralizált* szabályozás, ahol F blokk-diagonális mátrix. Legegyszerűbb esetben, amikor $m = n$, F diagonális mátrix. (1.2)-t behelyettesítve (1.3)-ba, majd az új $u = FSx + w$ egyenletet (1.1)-be adódik az

Alapegyenletrendszer

$$x' = (P + RFS)x + Rw + v\ . \tag{1.4}$$

Az (1.4) differenciálegyenlet-rendszer stacionárius megoldása – ha létezik – $x^0 = -(P + RFS)^{-1}(Rw + v)$. A nem stacionárius megoldása is explicite felírható. A fő cél azonban a rendszer *stabilizálása*: $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^0$.

Az utóbbi évtizedekben megjelent és egyre inkább egyeduralkodóvá válik az *optimális* szabályozáselmélet (Pontrjagin et al. 1961). Lineáris állapotegyenlet mellé kvadratikus célfüggvényt társítva, a cél egy olyan szabályozási pálya keresése, amely minimalizálja a *veszteségfüggvényt*:

$$I[x,u] = \int_0^T [x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)]dt\ , \tag{1.5}$$

ahol Q egy $n \times n$-es pozitív definit és R egy $m \times m$-es nemnegatív definit mátrix. Ha normális eloszlású sztochasztikus zajok is fellépnek, akkor a Linear-Quadratic-Gaussian jelzőhármas rövidítéseként LQG-elméletről beszélünk.

2. Közgazdasági alkalmazások

A hagyományos neoklasszikus közgazdaságtan alapjában véve statikus volt. Nagy áttörést jelentett, amikor az 1930-as években megjelentek az első dinamikus közgazdasági modellek. A szabályozáselmélet alkalmazása olyan dinamikus modellekhez vezetett, amelyekben elvált az állapot- és a szabályozási (döntési) változó.

A szabályozáselmélet közgazdasági alkalmazásai a klasszikus elmélettel kezdődtek. Például Phillips (1954) a makrogazdaság szabályozási mechanizmusait tanulmányozta. A magyar szabályozáselméleti iskola szemléletéhez legközelebb Lovell (1962) és McFadden (1969) munkái álltak.

Érdekes, hogy az optimális LQG elmélet közgazdasági célú kidolgozásával Simon (1956) megelőzte a mérnököket. A dinamikus optimalizálás módszerei talán Cass (1965) és Koopmans (1965) optimális növekedésről szóló cikkeivel léptek be a közgazdaságtanba. Innen már viszonylag könnyen adódtak a makroökonómia optimális szabályozási modelljei.

3. A magyar szabályozáselméleti iskola

Az optimális szabályozáselmélet magyar alkalmazása idáig meglehetősen szórványos volt: Virág (1969) és Szepesi és Székely (1972). Annál többen alkalmaztuk a klasszikus szabályozáselméletet közgazdasági elemzésre.

A kezdetet Kornai (1970) könyve jelentette, amely a közgazdaságtan alapvető, rendszerelméleti alapon történő megújítását tűzte ki célul. Ennek keretében kezdtük a gazdasági rendszerek vegetatív szabályozását tanulmányozni. Biológiai analógia alapján *vegetatív szabályozás*ról beszélünk, ha ár- és tervjelzések helyett a gazdasági egységek a saját maguknál megfigyelhető elemi információk alapján elemi döntéseket hoznak. Például, ha lemerül a késztermék-készlet, akkor növelik a termelést.

Kornai és Martos (1971) dolgozta ki az első vegetatív szabályozási modellt. E munka alapján számos cikk született, melyet Kornai és Martos szerkesztésében (1981) *Árjelzések szabályozás nélkül* c. kötet foglalt egységben. Mint a könyv egyik közreműködője tanúsíthatom, hogy Kornai és Martos mennyi energiát fektetett be a benyújtott kötet kialakításába.

A kötet megjelenése után legtöbben új témák után néztünk, Martos azonban folytatta a kutatást. Rövidebb cikkek után (pl. Martos, 1984) akadémiai doktori értekezésében megírta a téma alapművét, amely 1990-ben angolul jelent meg. Helyszűke miatt csupán három területet emelek ki Martos hozzájárulásából: a stabilitás és működőképesség kapcsolatát, a koordinálatlan szabályozás stabilitási tételeit és a mechanizmusok ekvivalenciáját.

4. Stabilitás és működőképesség

A szabályozáselméletben nagyon gyakran megelégednek a rendszer stabilizálásával. Ez műszaki alkalmazásoknál általában megfelelő, de közgazdasági alkalmazásoknál a tranziens pályák sokkal tartósabbak annál, semhogy elhanyagolhassuk őket. Itt lép be a *működőképesség*, amely azt jelenti, hogy a rendszer bizonyos állapotvektorának egy *megengedett* $\mathbf{X}$ tartományon belül kell lennie. Hasonló szerepet játszik a megengedett szabályozási vektorok tartománya ($\mathbf{U}$). A legegyszerűbb ilyen összefüggések a nem negativitási feltételek, például készleteknek, a termelésnek és a fogyasztásnak, de gyakran a vételnek is pozitívnak kell lenniük. Különösen fontos annak meghatározása, hogy az x^0 kezdőállapotoknak milyen tartománya ad működőképes pályákat és a szabályozási vektor milyen tartományban mozoghat, anélkül, hogy a rendszert működésképtelenné tenné. Az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{U}$ tartományt *kompatibilisnak* nevezzük, ha (i) van olyan $u_1 \in \mathbf{U}$ szabályozásvektor és $x_1 \in \mathbf{X}$ állapotvektor, amelyre $Px_1 + Ru_1 = 0$ és (ii) azoknak az $u_1 \in \mathbf{U}$ vektoroknak az $\mathbf{U}_1$ halmaza, amelyekre $-P^{-1}Ru_1$ $\mathbf{X}$ belsejébe esik, nem üres.

A vektornormákra támaszkodva Martos (1990) kidolgozta az (1.1) rendszer működőképességi elméletét és használható elégséges feltételeket adott a működőképességi tartomány meghatározására:

1. tétel. *Ha (P, R) stabil, X és U kompatibilis, és $x_0 \in X$, akkor van olyan $\beta > 0$ valós szám, hogy tetszőleges $u^* \in U$, az $\|Px_0 + Ru(t)\| < \beta$ feltételt kielégítő szabályozási pályára teljesül, hogy x^* pálya működőképes.*

5. A Leontief gazdaság szabályozása koordináció nélkül

Eddig általánosságban beszéltünk, ideje hát egy konkrét gazdasági példát is bemutatni.

A gazdaság változói a következők: r = a termelés n-vektora, q = az outputkészletek n-vektora, Y = az árutranszferek $n \times n$-es mátrixa, V = az inputkészletek $n \times n$-es mátrixa. A = a termelési kapcsolatok együtthatómátrixa, c a végső fogyasztás n-vektora, β és γ szabályozási együtthatók, A-tól γ-ig időben állandók. Az e vektor összes eleme 1.

A legegyszerűbb modell egyenletei a következők:
outputkészlet-változás = termelés − fogyasztás

$$q' = r - Ye - c\,, \tag{5.1}$$

inputkészlet-változás = beszerzés − termelő felhasználás

$$V' = Y - A\langle r\rangle\,, \tag{5.2}$$

termelés-növekedés = outputkészlet-változási korrekció − outputkészlet-eltérési korrekció

$$r' = 2\beta\gamma q' - \gamma^2(q - q^*)\,, \tag{5.3}$$

beszerzés növekedés = inputkészlet-változási korrekció − inputkészlet-eltérési korrekció

$$Y' = 2\beta\gamma V' - \gamma^2(V - V^*)\,. \tag{5.4}$$

A modell egyik legfontosabb vonása, hogy *koordinálatlan*: például az i-edik termelő csak a saját outputkészlete alapján dönt, míg az i-edik termékhez szükséges j-edik termék beszerzését végző egység pusztán a saját inputkészlete alapján dönt. Márpedig az irreducibilis A mátrixú gazdaság *összefüggő*. Ezért meglepő a

2. tétel. *Az (5.1)-(5.4) rendszer aszimptotikusan stabil, ha $\beta > \beta_0$, ahol β_0 egy kritikus érték.*

Az 1. és a 2. tétel alapján kimondható egy

Következmény. *A fenti modell lokálisan működőképes.*

Nincs terünk a többi modell bemutatására, csak felsoroljuk elnevezésüket: rendelésjelzéses, készlet- és rendelésjelzéses, kereskedelmi és árjelzési modell.

6. Mechanizmusok ekvivalenciája

Martos Bélát különösen érdekelte a különböző szabályozási mechanizmusok ekvivalenciája. Először az 1. pont általánossági szintjén definiálta két rendszer ekvivalenciáját, majd a 4. pont konkrétságában tanulmányozta az árjelzéses és árjelzés nélküli rendszerek ekivalenciáját.

3. tétel. *Ha a gazdaság összefüggő, akkor két, egyaránt koordinálatlan árjelzéses és árjelzés nélküli rendszer nem lehet egymással ekvivalens.*

7. Mit tanulhatunk Bélától?

A távirati stílusú ismertetés után néhány szubjektív szóval zárom a dolgozatomat. Mit tanulhatunk Bélától?

a) *Eredetiséget.* A Kornai által javasolt 1971-es modell matematikai elemzésén túl Béla kidolgozta a működőképesség és az ekvivalencia témakörét. Mindhárom területen ragyogóan ötvözte a matematikai és a közgazdasági elemzést.

b) *Igényességet.* Akármilyen jónak is tűnhet egy modell, mindig akad javítanivaló rajta. Számos neves tudóst ismerek, aki igyekszik elrejteni a korábbi munkákban elkövetett hibákat, és ilyenkor javítás helyett tökéletesítésről beszél. Béla nem ilyen ember. Nyíltan feltárja az esetleges tévedéseket, például az 1971-es cikk rejtett koordináltságát, vagy a korábbi ekvivalencia definíció problémáit.

c) *Realizmust.* Manapság a matematikai módszerek gyakran elhomályosítják a közgazdasági tartalmat. Bélánál a matematikai módszer mindig eszköz marad, Béla sohasem feledkezik meg a feltevések és a tételek közgazdasági értelmezéséről. Jellemző, hogy milyen örömet okozott neki, amikor fölfedezett egy empirikus cikket a készlet- és rendelésjelzéses szabályozás valóságáról. Nem állítom azt, hogy Béla gyakorlati közgazdász. Nyugodtan leírom viszont, hogy Béla olyan szabályozáselméleten dolgozott, amely kapcsolatban áll a gyakorlattal.

d) *Eleganciát.* Béla minden cikkét nagy műgonddal írja meg. Mindig tömör, és mindig érthető. Még a jelölések megválasztásával is az érthetőséget akarja elősegíteni. Mondatai nemcsak érthetők, de szellemesek is.

Manapság viszonylag kevés érdeklődés mutatkozik az olyan munkák iránt, amelyek nem az optimalizáláson alapszanak. Ez lehet az oka, hogy jelenleg Béla programozási munkái beárnyékolják szabályozáselméleti munkáit. Bízom benne, hogy amilyen mértékben a matematikus közgazdászok ráébrednek az optimalizálási megközelítés korlátozottságára, térnek vissza Béla szabályozási műveihez is.

Irodalom

1. CASS, D. (1965) Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies 32* 233-240.
2. KOOPMANS, T. C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth" in Semain d'Etude sur le Role de l'Analyse Econometrique dans la Formulation due Plans de Dévelopment, Vatikán, A Pápai Tudományos Akadémia, I. kötet, 225-287.
3. KORNAI, J. (1971) *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
4. KORNAI, J. és MARTOS, B. (1971) "Gazdasági rendszerek vegetatív működése", *Szigma 4* 34–50.
5. KORNAI, J. és MARTOS, B., szerk. (1981) *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
6. KUHN, H. W. és SZEGÖ, G. (1969) *Mathematical Systems Theory and Economics, I.* Berlin, Springer.
7. LOVELL, M. C. (1962) "Buffer Stocks, Sales Expectations and Stability: A Multi-sector Analysis of the Inventory Cycle", *Econometrica 30* 267–296.
8. MARTOS, B. (1981) "Fogalmak és tételek a szabályozás-elméletből", *Kornai és Martos, szerk.* 73–101.
9. MARTOS, B. (1984) "Nem walrasi szabályozási mechanizmusok, *Szigma 17* 123–145.
10. MARTOS, B. (1990) *Economic Control Structures*, Amszterdam, North-Holland.
11. MARTOS, B. (1991) "Viable Control Trajectories in Linear Systems", *Problems of Information and Control Theory 20* 267–280.
12. McFADDEN, D. (1969) "On the Controllability Decentralized Macroeconomic Systems, The Assignment Problem", *Kuhn és Szegő, szerk.* 221–239.
13. PHILLIPS, W. (1954) "Stabilization Policy and a Closed Economy", *Economic Journal 64* 290–323.
14. PONTRJÁGIN, L. SZ., BOLTYANSZKIJ, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. és MISCSENKO, J. F. (1961) *Optimális folyamatok elmélete,* (orosz eredeti fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1968.
15. SIMON, H. A. (1956) "Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function", *Econometrica 24* 74–81.

16. SIMONOVITS, A. (1991) A Review on B. MARTOS' *Economic Control Structures, Acta Oeconomica 43* 353–356.

17. SZEPESI, GY. és SZÉKELY, B. (1971) "A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben", *Szigma 4* 137–151.

18. VIRÁG, I. (1969) "Optimális felhalmozási pályák", *Gazdasági fejlődés és tervezés*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 108-136.

REVIEW OF BÉLA MARTOS' WORK ON CONTROL THEORY

This paper is a short review of Béla Martos' work on control theory. Since it addressed to a wider audience, details are omitted. Those interested in details should consult the volume edited by Kornai and Martos (1981), the monograph (Martos, 1990) and its longer survey (Simonovits, 1991). The paper consists of seven sections. 1. Control theory. 2. Economic applications. 3. The Hungarian school of control theory. 4. Stability and viability. 5. An example. 6. Equivalence of mechanisms. 7. What can we learn from Béla?