FOLYTONOS ÉS LIPSCHITZ-FOLYTONOS GLOBÁLIS OPTIMALIZÁCIÓ: ALGORITMUSOK ÉS ALKALMAZÁSOK[1]

PINTÉR JÁNOS
Faculty of Management, Dalhousie University, Canada

A dolgozat célja a folytonos és Lipschitz-folytonos szerkezetű globális (többextrémumú) optimalizálási feladatok körének áttekintő tárgyalása. Összefoglaljuk a globálisan konvergens adaptív partíciós algoritmusokra vonatkozó alapfogalmakat és fő eredményeket, és tárgyaljuk az implementáció kérdéseit is. Végül néhány alkalmazási esettanulmányt ismertetünk. A dolgozat a Pintér (1995b) monográfián, illetve az annak alapján benyújtott akadémiai doktori téziseken alapul. A technikai részleteket illetően erre a könyvre, valamint az irodalomjegyzékben felsorolt munkákra utalunk.

Kulcsszavak: Folytonos és Lipschitz-folytonos globális optimalizáció; globálisan konvergens adaptív partíciós algoritmusok; implementációs kérdések; az LGO integrált modellfejlesztési és algoritmus programrendszer; alkalmazási esettanulmányok.

1. Bevezetés

A döntéshozatal alapvető emberi tevékenység. Döntéseink egy része igen egyszerű, és következményeik sem túl lényegesek; sok más döntési szituáció viszont egyáltalán nem triviális, és a döntéshozó(k) felelőssége komoly. A döntési feladatok számszerűsített megfogalmazása nem mindig indokolt, és sok esetben nem könnyű. Az említett nehézségek ellenére, a megfelelő kvantifikáció — döntési modell megfogalmazása és numerikus elemzése — gyakran segíti az objektív(ebb) döntéshozatalt.

A tudományos kutatásban, műszaki és gazdasági feladatok megoldása során megfogalmazott döntési (optimalizációs) modellek tipikus alapszerkezete a következő: optimalizálandó egy kiválasztott (elsődleges) célfüggvény értéke — a döntés realitását biztosító — korlátozó feltételek mellett. Ennek megfelelően, a matematikai programozás alapmodellje a következő generikus

[1] Beérkezett 1996. július 29.

feladattípus vizsgálatával foglalkozik:

$$\min f(x) \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Az (1) optimalizálási feladatban x a döntést leíró n-változós valós vektor; a döntési feladat célfüggvényét $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, a megengedett döntések (nem üres) halmazát pedig $D \subset \mathbb{R}^n$ jelöli. A megengedett halmaz tipikusan a

$$D = \{f_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \ldots, J\} \tag{2}$$

alakban adott; $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $j = 1, \ldots, J$ az x-re vonatkozó feltételeket leíró függvények.

Az (1)–(2) szerkezetű modell globálisan optimális megoldása elemi analitikus feltételek mellett létezik. (Példaként itt Weierstrass tételére utalunk, amelynek értelmében D korlátos és zárt volta, f folytonossága esetén az (1) feladat optimális megoldásainak halmaza nem üres.)

A folytonos numerikus optimalizáció elméletének sarkalatos klasszikus feltevése szerint ez az optimális döntés lokális információn alapuló keresési eljárásokkal egyértelműen meghatározható. Ez a feltevés sok gyakorlatilag fontos esetben helytálló. Példaként a konvex programozási paradigma — konvex D halmaz, szigorúan konvex f függvény — keretében leírható feladatok széles osztálya említhető: itt egy megfelelő lokálisan konvergens algoritmus által meghatározott optimumpont (1) abszolút (globális) megoldása.

A numerikus analízis és operációkutatás modelljeinek, algoritmusainak és modellalkotási-döntéstámogató rendszereinek túlnyomó többsége — lásd pl. Bachem, Grötschel és Korte (1983), Murtagh és Saunders (1983), Hillier és Lieberman (1986), Brooke, Kendrick és Meeraus (1988), Fourer, Gay és Kernighan (1991), Schrage (1991), Wolfram (1991), Powell (1992), Press, Teukolsky, Vetterling és Flannery (1992), Moré és Wright (1993), Winston (1994), Heckert és Filliben (1995), MathWorks (1995), Reinhardt (1995), Schittkowski (1995) munkáit — értelemszerűen lokális megoldások meghatározására szorítkozik.

Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy léteznek olyan — gyakorlatilag is fontos — feladatosztályok, amelyek a globális optimum mellett más (lokális) optimumhelyekkel is rendelkezhetnek. Tekintsünk példaként egy nemlineáris egyenletrendszert, amelynek az egzakt megoldás(ok)on túlmenően lokális (pszeudo) megoldásai is vannak. Ezek esetében a megfelelően képezett hibafüggvény abszolút értéke pozitív; az egyenletrendszer megoldására alkalmazott lokális kereső módszerek globális megoldáshoz való konvergenciája pedig általában véve nem biztosított.

Egy másik példaként 'fekete doboz' *(black box, oracle)* rendszerek optimális bemenő paramétereinek meghatározása említhető. A 'fekete doboz' például egy általunk analitikusan nem ismert — vagy explicit formában gyakorlatilag nem kezelhető — rendszermodell lehet, amelyet a modell-output és a rendelkezésre álló mérési adatok összevetése alapján szeretnénk kalibrálni. Az egyes paraméter-kombinációk minősége gyakran csak számításigényes módszerekkel — pl. Monte Carlo szimulációs ciklusok végrehajtása, vagy egy 'beépített' differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldása stb. útján — értékelhető ki.

Az említett példákban — és számos más hasonló esetben — a fent említett konvexitási feltételek nem mindig teljesülnek, illetve azok ellenőrzése nem kényelmes, vagy gyakorlatilag kivihetetlen. Ezért az indukált döntési feladat tetszőleges lokális megoldásának globális optimalitása nem garantált. Mivel a lokális megoldások száma és minősége általában szintén nem ismert, indokolt a globális megoldás meghatározására irányuló, megfelelő módszer alkalmazása.

A globális optimalizáció (GO) a matematikai programozási feladatok abszolút megoldásának meghatározására irányuló algoritmusok elméletével, gépi realizációs kérdéseivel és alkalmazásaival foglalkozik. A GO legelső eredményeit ismertető munkák az 1960-as évek elejétől kezdve jelentek meg az operációkutatási irodalomban (lásd pl. Moore (1962), Kushner (1964), Tuy (1964), Mockus (1967), Piyavskii (1967), Neimark és Strongin (1969)). A tudományterület népszerűsége az utóbbi két évtizedben igen számottevően nőtt: példaként Dixon és Szegő (1975, 1978), Strongin (1978), Wilde (1978), Zielinski és Neumann (1983), Evtushenko (1985), Fedorov (1985), Žilinskas (1986), Pardalos és Rosen (1987), van Laarhoven és Aarts (1987), Forgó (1988), Ratschek és Rokne (1988), Mockus (1989), Rinnooy Kan és Timmer (1989), Törn és Žilinskas (1989), Diener (1990), Horst és Tuy (1990), Zhigljavsky (1991), Zhigljavsky és Žilinskas (1991), Floudas és Pardalos (1992), Hansen (1992), Horst és Pardalos (1995) munkáit említjük meg.

A GO iránti növekvő érdeklődést tükrözi az 1991 óta megjelenő *Journal of Global Optimization*, és a Kluwer Academic Publishers által indított *Nonconvex Optimization and its Applications* című könyvsorozat is. A jelen áttekintő dolgozat alapjául szolgáló monográfia (Pintér, 1995b) ebben a sorozatban jelent meg.

Az említett könyv a folytonos, ill. Lipschitz-folytonos szerkezetű GO feladatok megoldására szolgáló algoritmusok egységes elméletét, implementációját és néhány alkalmazását tárgyalja. Ezen belül különös hangsúlyt kap az adaptív, gradiensmentes *(direct)* partíciós stratégiák osztálya: ezek a módszerek a D megengedett halmaz szekvenciális felosztásához vezetnek, és igen általános feltételek mellett rendelkeznek globális konvergencia-tulajdonságokkal. A determinisztikus partíciós módszerek mellett — véletlen kereső eljárásokon, illetve ezeknek lokális módszerekkel kombinált kiterjesztésein alapuló — adaptív sztochasztikus algoritmusokat is tárgyalunk. Az említett módszertípusok alkalmazása elsősorban olyan esetekben javasolható, amikor a feladattal kapcsolatban rendelkezésre álló strukturális információ 'minimális', illetve annak használata nem kézenfekvő. (Itt utalunk a korábban említett feladattípusokra; további példákat később sorolunk fel.)

A dolgozat célja a folytonos, illetve Lipschitz globális optimalizálási feladatok körének áttekintő tárgyalása, a fent említett könyv alapján. (A dolgozatban alkalmazott jelölések is ezt a munkát követik.) Összefoglaljuk a globálisan konvergens adaptív partíciós algoritmusokra vonatkozó alapfogalmakat és fő eredményeket, és kitérünk az implementáció kérdéseire is. Végül néhány alkalmazási esettanulmányt ismertetünk. A könyvben tárgyalt széles körű irodalomjegyzékből csak a legfontosabbakat emeljük ki.

2. Globális optimalizáció: modelltípusok és algoritmusok

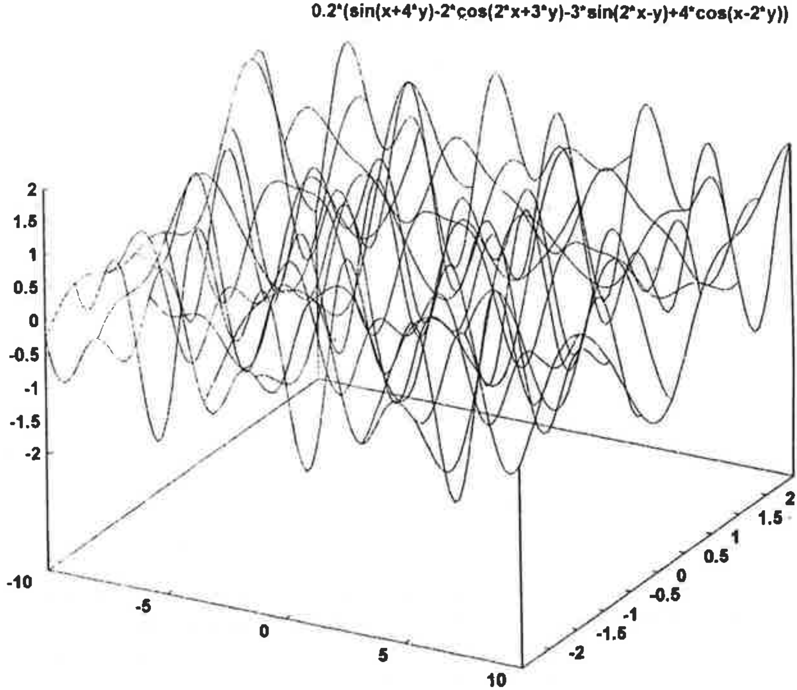
A Pintér (1995b) munka I. része a GO témaköréhez szolgál rövid bevezetésként; két fejezetet foglal magában (terjedelme kb. 40 oldal). Az általános globális optimalizálási probléma (GOP) formálisan azonos az (1) feladattal,

$$\min f(x) \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n; \tag{3}$$

a következő — minimálisan előírt — analitikus feltételek mellett:

- a megengedett megoldások D halmaza korlátos és testszerű (*robust*, tehát egy nem üres, nyílt halmaz lezárása) $\mathbb{R}^n$-ben;
- az $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^1$ célfüggvény folytonos.

Illusztrációképpen tekintsük az 1. ábrát, amely egy GOP-t mutat be: keresendő a Lipschitz-folytonos, többextrémumú célfüggvény abszolút minimuma egy kétdimenziós intervallum-tartomány felett.



1. ábra: Kétdimenziós intervallum felett definiált többextrémumú függvény

Jelölje $X^\star$ a (3) feladat globális megoldásainak halmazát. A fenti elemi feltételek biztosítják, hogy $X^\star$ nem üres; legyen $x^\star \in X^\star$ esetén $z^\star = f(x^\star)$. Nyilvánvaló, hogy $z^\star$ garantált becsléséhez — véges számú D-beli pontban meghatározott függvényérték alapján — az f folytonosságánál erősebb feltétel szükséges. Ez leggyakrabban a következő alakú:

- $f : D \longrightarrow I\!R^1$ Lipschitz-folytonos, tehát tetszőleges $x, y \in D$ pontpárra nézve fennáll
$$|f(x) - f(x)| \leq L\|x - y\| \,. \qquad (4)$$
$L = L(f, D)$ az f függvény (minimális) Lipschitz-konstansa a D halmazon (ill. annak egy tetszőleges — érvényes — felső becslése); $\|\cdot\|$ pedig az euklideszi norma.

Elméletileg a (3) GOP megoldása $X^\star$ összes elemének és a $z^\star$ optimum értékének meghatározását jelenti. Az algoritmikus kezelhetőség érdekében feltesszük még, hogy

- X^* legfeljebb megszámlálható.

Megjegyezzük, hogy a legtöbb gyakorlati feladat esetében X^* véges; sok esetben X^* csak egyetlen x^* pontot tartalmaz.

Az általános globális optimalizálási feladatosztály legfontosabb speciális kategóriáit a könyv 1.1. fejezete ismerteti. Ezek a következők:

- konkáv minimalizálás (CM);
- differenciális konvex (DC) programozás;
- folytonos, ill. Lipschitz globális optimalizáció (CGO, ill. LGO).

Itt csak az LGO problémára (LGOP) utalunk, amelyben az $f := f_0$ Lipschitz-folytonos célfüggvény mellett a (2) alakú D halmaz is Lipschitz-folytonos $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $j = 1, \ldots, J$ feltételi függvények által definiált. Az LGOP feladatosztály igen általános; egyebek között tartalmazza a CM és DC feladatok osztályát is. (CGOP még ennél is általánosabb, hiszen abban csak a problémát definiáló függvények folytonosságát tételezzük fel.) Az LGOP vizsgálatára irányuló kutatások szinvonalas áttekintését illetően Horst és Tuy (1990), Hansen és Jaumard (1995) munkáit említjük.

Az 1.2. fejezetben a következő gyakran alkalmazott megoldási stratégiákat tárgyaljuk röviden:

- rácsfedéssel, illetve véletlen kereséssel kombinált lokális algoritmusok;
- szekvenciálisan javuló lokális megoldások előállítása (pl. *tunneling*);
- az összes lokális és globális optimum előállítására irányuló (pl. stacionárius pontokat kereső) módszerek;
- relaxációs (szekvenciálisan finomított külső approximáción alapuló) eljárások;
- a korlátozás és szétválasztás *(branch and bound, B&B)* elvén alapuló módszerek.

Megjegyezzük, hogy a jelen dolgozatban (a könyvben) központi témaként tárgyalt adaptív felosztási stratégiák osztályához tartoznak a B&B típusú algoritmusok is.

3. Adaptív partíciós módszerek folytonos és Lipschitz szerkezetű feladatok megoldására

Az elméleti tárgyalás gerincét a könyv II. részének hét fejezete alkotja (mintegy 110 oldalnyi terjedelemben). A 2.1. fejezetben bevezetjük az általános partíciós algoritmus-séma (PAS) fogalmát.

2.1.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ testszerű, I pedig egy véges indexhalmaz. $\{D_i : i \in I\}$ a D halmaz egy testszerű felbontása, ha D_i $i \in I$ testszerű* *halmazok, amelyekre nézve érvényesek az alábbi relációk:*

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i \quad \text{és} \quad D_i \cap D_j = \delta(D_i) \cap \delta(D_j) \qquad i,j \in I, \quad i \neq j; \tag{5}$$

itt $\delta(D_i)$ a D_i halmaz határát jelöli.

2.1.3. Definíció. *Legyen adott D egy testszerű felbontása. A $P\{D_i, f(D_i)\}$ partíció operátor egy olyan funkcionál, amelynek értékét a D_i halmazból kiválasztott $x_i(m)$ mintavételi pontok (sample points) és az azokban felvett $z_i(m) = f(x_i(m))$ függvényértékek határozzák meg:*

$$P\{D_i, f(D_i)\} := P\{x_i(m), z_i(m); \quad m = 1, \ldots, M_i\}. \tag{6}$$

Egyszerű példaként egy n-dimenziós intervallum részintervallumokra való felbontását említjük: a mintapontok pl. a részintervallumok kiválasztott csúcspontjai és/vagy belső pontjai lehetnek. Megjegyezzük, hogy $P\{D_i, f(D_i)\}$ értéke tipikusan függ néhány más algoritmus-paramétertől is, mint pl. a Lipschitz-konstans (példákat később idézünk).

Partíciós algoritmus séma

0. (Kezdőértékek beállítása.) Legyen $k := 0$ (iterációs index); az $I_0 := \{0\}$ indexhalmaz és $D_0 := D$, $\{D_i \; : \; i \in I_0\} = \{D_0\}$ definiálja a kezdeti felbontást.

1. (Mintavétel.) Minden $i \in I_k$ esetén válasszunk mintapontokat D_i-ből, és határozzuk meg az ezekben felvett függvényértékeket.

2. (Aggregáció.) Az $\{x_i(m), z_i(m); \quad m = 1, \ldots, M_i\}$ információ alapján határozzuk meg a $P\{D_i, f(D_i)\}$ $i \in I_k$ értékeket.

3. (Kiválasztás.) Legyen t olyan index, amely kielégíti a

$$P\{D_t, f(D_t)\} = \max_{i \in I_k} P\{D_i, f(D_i)\} \tag{7}$$

feltételt: ekkor D_t további felbontása következik.

4. (Partíció finomítás.) A D_t halmazt nem-triviális, véges, testszerű felbontásával helyettesítjük:

$$D_t = \bigcup_{l \in L_k} D_{t_l} \quad D_{t_l} \subset D_t \quad l \in L_k \tag{8}$$

Így az új aktuális partíció:

$$\{D_i : i \in I_{k+1}\} \qquad I_{k+1} := I_k \cup \{t_l : l \in L_k\} \setminus \{t\}. \tag{9}$$

Ezután áttérünk az algoritmus következő ciklusának 1. lépésére ($k := k+1$).

Globális optimalizálási algoritmusok széles köre — egyebek között a B&B típusú módszerek osztálya — írható le PAS speciális eseteként. Illusztrációként itt csupán Kushner (1964) és Piyavskii (1967) klasszikus egyváltozós algoritmusait idézzük: ezek a

$$\min f(x) \qquad a \leq x \leq b \tag{10}$$

GOP megoldására szolgálnak. Tetszőleges $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$ részintervallum és $z_{i-1} = f(x_{i-1}), z_i = f(x_i)$ függvényértékek esetén a megfelelő $P_i = P\{x_{i-1}, x_i, z_{i-1}, z_i\}$ partíciós operátorok alakja a következő.

Kushner operátor:

$$P_i = \exp\left\{\frac{-2(f^*_{k_0} - \varepsilon - z_i)(f^*_{k_0} - \varepsilon - z_{i-1})}{\sigma^2(x_i - x_{i-1})}\right\}, \quad f^*_{k_0} = \min_{1 \leq i \leq k_0} z_i; \tag{11}$$

itt $f^*_{k_0}$ tipikusan egy kezdeti (rögzített) k_0-elemű mintából adódó optimumbecslés, $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ pedig szintén rögzített algoritmus-, ill. függvénymodell-paraméterek.

Piyavskii operátor:

$$P_i = \frac{1}{2}\{L(x_i - x_{i-1}) - (z_{i-1} + z_i)\}; \tag{12}$$

itt L az f függvény Lipschitz-konstansának egy tetszőleges (érvényes) felső becslése az $[a,b]$ intervallumon.

A 2.2. fejezetben reguláris partíció operátorokat — és ezeknek megfelelő, PAS szerinti algoritmusokat — definiálunk. Ezt követően a reguláris PAS globális konvergenciájára vonatkozó szükséges és elégséges feltételek egy igen általános rendszerét határozzuk meg. A következő öt fejezetben azután ezeket az eredményeket specializáljuk különböző CGOP, ill. LGOP feladatosztályokra. Jelölje N a természetes számok halmazát.

2.2.2. Definíció. *A P partíció operátor reguláris, ha eleget tesz a következő feltételeknek:*

P1. A partíciós részhalmazok minden szigorúan egymásba skatulyázott $\{D_{i_k}\}$ sorozata egyetlen $x = \bigcap_{k \in N} D_{i_k}$ ponthoz konvergál.

P2. A partíció operátor folytonos:

$$P\{D_{i_k}, f(D_{i_k})\} \xrightarrow[k\to\infty]{} P\{\lim_{k\to\infty} D_{i_k}, f(\lim_{k\to\infty} D_{i_k})\}. \tag{13}$$

P3. Legyen $\{D_{i_k}\}$ partíciós halmazok egy tetszőleges (nem feltétlenül szigorúan) egymásba skatulyázott sorozata. Ekkor minden $x \in \bigcap_{k \in N} D_{i_k}$ esetén fennáll

$$P\{D_{i_k}, f(D_{i_k})\} > P\{x, f(x)\}, \qquad k \in N. \tag{14}$$

P4. A P operátor korlátos: minden $D_{i_k} \subset D$ esetén fennáll

$$-\infty < P\{D_{i_k}, f(D_{i_k})\} < \infty. \tag{15}$$

A részleteket itt szükségképpen mellőzve megjegyezzük, hogy — megfelelően választott partíció finomítási eljárást alkalmazva — pl. a Kushner vagy a Piyavskii partició operátorok által vezérelt PAS egyaránt reguláris. A továbbiakban kizárólag reguláris partíció operátorokat, ill. PAS-eket tekintünk, és ezekre vonatkozó szükséges és elégséges konvergencia-feltételeket bizonyítunk a könyv 2.2. fejezetében.

Jelölje X^a egy tetszőleges PAS típusú módszer által generált limeszpontok halmazát. A 2.2.1–2.2.7. tételek és a 2.2.1–2.2.3. korolláriumok eredményeit — a tömör leírás érdekében — a következő állításokban foglaljuk össze.

A1. *Minden $x^a \in X^a$ és $x \in D \setminus X^a$ esetén fennáll*

$$P\{x^a, f(x^a)\} = c^a > P\{x, f(x)\} \qquad (c^a \text{ egy alkalmas konstans}). \tag{16}$$

A2. *A $P\{x, f(x)\} = c \quad x \in D$ (c egy alkalmas konstans) reláció ekvivalens az $X^a \equiv D$ relációval.*

A3. *A $P\{x^*, f(x^*)\} = c^* > P\{x, f(x)\}$ ($x^* \in X^*, x \in D \setminus X^*$ tetszőleges pontpár, c^* egy megfelelő konstans) relációk együttesen ekvivalensek az $X^a \equiv X^*$ relációval.*

Ez szavakban kifejezve a következőket jelenti. Minden reguláris partíció operátoron alapuló PAS olyan pontsorozatot generál, amelynek határpontjai a P operátor értelmében 'egyenrangúak'; továbbá 'jobbak', mint a D halmaz határponttól különböző összes pontja (lásd A1-ben a (16) relációt). Ezen belül két fő esetet különböztetünk meg. Az első esetben (A2) a generált pontsorozat mindenütt sűrű a D halmazon; így a mintából nyert minimumbecslések sorozata tart z^*-hoz, és az ezeknek megfelelő mintapontok sorozatának torlódási pontjai X^* elemei. Megjegyezzük, hogy ez az — első pillantásra talán triviálisnak tűnő — eredmény (és ennek megfelelő algoritmus-típus) főként a CGOP vizsgálata kapcsán alkalmazható, tehát amikor a feladatot definiáló függvényekről csupán folytonosságot tételez(het)ünk fel. A második esetben (A3) a PAS olyan mintapont-sorozatot generál, amelynek torlódási ponthalmaza megegyezik az X^* optimális halmazzal. Speciálisan, ha $X^* =$

$\{x^*\}$, akkor a generált pontsorozat egyetlen torlódási pontja éppen a globális optimumhely. Az A3. eset eredménye elsősorban az általános LGOP kapcsán alkalmazható.

Hangsúlyozzuk, hogy a fentiekben összefoglalt általános eredmények tetszőleges, a PAS által leírható algoritmus-realizáció esetére nézve érvényesek. Példaként néhány ismert, PAS típusú algoritmust említünk, amelyek — megfelelő parametrizáció esetén — a következőképpen osztályozhatók:

- A2. eset: Kushner (1964), Mockus (1967), Mockus, Tiesis és Žilinskas (1978), Žilinskas (1981);
- A3. eset: Piyavskii (1967), Neimark és Strongin (1969), Shubert (1972), Strongin (1978), Boender (1984).

Megjegyezzük, hogy az itt felsorolt módszerek közvetlenül kizárólag adott (véges) intervallum felett definiált, egyváltozós GOP megoldására szolgálnak. Ezt a feladattípust elemezzük a 2.3. fejezetben, specializálva 2.2. eredményeit. A fejezetet egy általános érvényű hatékonysági becslés zárja, amely számszerűsíti a passziv rácsfedés (*grid search*) és a PAS algoritmusosztály elemei közötti minőségi különbséget (2.3.1. tétel, 2.3.1–2.3.2. korolláriumok).

Mivel (10) a legegyszerűbb (általunk vizsgált) standard GO feladattípus, megoldására kb. három évtized óta ismertek egyedi globálisan konvergens algoritmusok; ezek hatékony többváltozós kiterjesztésének módja azonban a legutóbbi évekig nem volt ismert. A 2.4. fejezetben az n-dimenziós intervallumon definiált GOP-t vizsgáljuk:

$$\min f(x) \quad a \le x \le b \quad a, x, b \in I\!R^n \quad f : I\!R^n \to I\!R^1, \tag{17}$$

és megadjuk 2.3. eredményeinek közvetlen kiterjesztését. Az n-változós esetre érvényes globális konvergencia-eredmény (2.4.1. tétel) és hatékonysági becslés (2.4.2. tétel, 2.4.1–2.4.2. korolláriumok) bizonyításán túlmenően bevezetjük a felbontható partíció operátorok fogalmát.

2.4.2. Definíció. *$\{P_i\}$, $P_i = P_i\{D_i, f(D_i)\}$ multiplikatívan felbontható partíció operátorok sorozata, ha minden P_i felírható a következő alakban:*

$$\begin{gathered} P_i\{D_i, f(D_i)\} = P_i^1\{\{x_i(m)\}\} \times P_i^2\{\{z_i(m)\}\}, \\ m = 1, \ldots, M_i, \quad i = i(k), \quad k \in N \,. \end{gathered} \tag{18}$$

Szavakban kifejezve: P_i dekompozíciójának első tényezője csak a mintapontoktól, második tényezője pedig csak az ezeknek megfelelő függvényértékektől függ.

2.4.3. Definíció. *$\{P_i\}$, $P_i = P_i\{D_i, f(D_i)\}$ additívan felbontható partíció* *operátorok sorozata, ha P_i felírható a következő alakban:*

$$P_i\{D_i, f(D_i)\} = P_i^1\{\{x_i(m)\}\} + P_i^2\{\{z_i(m)\}\} , \qquad m = 1,\ldots,M_i, \quad i = i(k), \quad k \in N . \tag{19}$$

Ismét a korábbi példákra támaszkodva: Kushner (1964) operátorának logaritmusa a 2.4.2. definíció szerinti, míg Piyavskii (1967) operátora a 2.4.3. definíció értelmében közvetlenül felbontható.

2.4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\{P_i\}$ multiplikatívan felbontható partíció operátorok sorozata kielégíti a következő feltételt: $x = \bigcap_k [xl_i, xu_i]$, $i = i(k)$, $k \in N$ esetén fennáll*

$$P_i^1\{\{x_i(m)\}\} \underset{k}{\rightarrow} 0, \quad \text{vagy} \quad P_i^2\{\{z_i(m)\}\} \underset{k}{\rightarrow} 0. \tag{20}$$

Ekkor a $\{P_i\}$ operátor-sorozat által irányított PAS típusú módszer mindenütt sűrű pontsorozatot generál a $D = [a, b\}$ halmazon; így a minimumbecslések sorozata f^*-hoz tart, és az ezeket szolgáltató pontsorozat minden torlódási pontja X^*-hoz tartozik.

2.4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\{P_i\}$ additívan felbontható partíció operátor-sorozat kielégíti a következő feltételt: $x = \bigcap_k [xl_i, xu_i]$, $i = i(k)$, $k \in N$, $z = f(x)$ esetén fennáll*

$$P_i^1\{\{x_i(m)\}\} \underset{k}{\rightarrow} 0 \quad \text{és} \quad P_i^2\{\{z_i(m)\}\} \underset{k}{\rightarrow} P_i^2(z), \tag{21}$$

ahol P_i^2 a z argumentum szigorúan monoton csökkenő függvénye. Ekkor a $\{P_i\}$ operátor-sorozat által irányított PAS típusú módszer olyan pontsorozatot generál a $D = [a, b]$ halmazon, amelyre nézve fennáll az $X^a \equiv X^*$ reláció.

A 2.4.3–2.4.4. tételek alapján közvetlenül definiálhatunk n-változós — globálisan konvergens — PAS módszerekhez vezető partíció operátorokat. Példaként itt csak Piyavskii operátorának egy lehetséges n-dimenziós általánosítását mutatjuk be:

$$P_i = L\|xu_i - xl_i\| - \frac{1}{M_i}\sum_{m=1}^{M_i} z_i(m) . \tag{22}$$

Így olyan új algoritmusok széles osztályához jutunk, amelyek konvergenciatulajdonságai azonnal megadhatók, az egyváltozós módszerek alapjául szolgáló célfüggvénymodellek — gyakorlatilag analitikusan és/vagy numerikusan nem kezelhető — általánosításának bevezetését elkerülve.

Szimplex tartományon definiált partíciós algoritmusokat tárgyalunk a 2.5. fejezetben. Tekintsük a (3) alakú LGOP-t, amelyben D egy — az adott $v_0, v_1, \ldots, v_n \in I\!R^n$ vektorok által meghatározott — n-dimenziós szimplex:

$$D = D(v_0, v_1, \ldots, v_n) =$$
$$\left\{x \in I\!R^n : x = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j v_j,\ \ \alpha_j \geq 0 \ \ j = 0, 1, \ldots, n,\ \ \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1\right\}. \tag{23}$$

Az általános PAS-t erre az esetre alkalmazva, a konvergencia-feltételeket elemezzük, és példaként egy megfelelő partíció operátort definiálunk. Erre az esetre is kiterjesztjük — valamivel általánosabb formában — a felbontható operátorok fogalmát.

A 2.6. fejezetben az általános konvex halmazon, illetőleg a csillaghalmazon (*star set*) definiált LGOP-t vizsgáljuk. Ezt a feladatosztályt — a Lipschitz-folytonos célfüggvény alkalmas kiterjesztésével — egy a D halmazt befoglaló n-intervallumon definiált LGOP-ra vezetjük vissza (2.6.1–2.6.2. lemmák). Így közvetlenül adódik a konvex, ill. csillagalakú megengedett tartomány esetére érvényes konvergencia-eredmény (2.6.1. tétel). Ezt követően numerikus szempontból külön elemezzük a konvex D tartományt meghatározó lineáris és nemlineáris feltételek kezelését, valamint a csilaghalmaz D esetét.

A 2.7. fejezet tárgya az általános LGOP megoldására alkalmas PAS bevezetése, és az erre az esetre vonatkozó globális konvergencia-eredmény bizonyítása. Tekintsük ismét az f_j $j = 0, 1, \ldots, J$ ($f_0 := f$) Lipschitz-függvények által definiált optimalizálási feladatot:

$$\min f(x) \quad x \in D \subset I\!R^n, \qquad D = \{f_j(x) \leq 0 \ \ j = 1, \ldots, M\}. \tag{24}$$

A (24) feladat kapcsán — a korábbiakkal összhangban — feltesszük, hogy

- $D \subset [a, b]$, és az f_j $j = 0, 1, \ldots, J$ Lipschitz-függvények értelmezve vannak az $[a, b]$ intervallumon;
- ha $D \neq \emptyset$, akkor előállítható véges számú testszerű halmaz uniójaként;
- az X^* halmaz legfeljebb megszámlálható.

Ezt az igen általános feladattípust illusztrálandó, tekintsük pl. egy nemlineáris egyenletrendszer megoldását az $[a, b]$ tartományon, a megoldásra vonatkozó további explicit feltételek mellett.

Az alapvető PAS sémát a (24) LGOP feladat esetére — a B&B algoritmusok szellemében — kiterjesztjük. Nevezetesen, a Lipschitz-információ alapján a D nem-megengedett, illetve szuboptimális részhalmazainak kizárására irányuló lépéseket iktatunk be, és megadjuk a korlátok megfelelő finomításának módját is. Így a következő általános eredményhez jutunk.

2.7.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (24) LGOP rendelkezik a fent részletezett szerkezeti tulajdonságokkal, és az LGOP megoldására szolgáló algoritmus a PAS megfelelő B&B típusú kiterjesztésén alapszik. Ekkor a következő állítások érvényesek:*

- *ha $D = \emptyset$, akkor ezt véges számú lépésben megállapítva az algoritmus véget ér;*
- *ha D nem üres, és az algoritmus véges számú lépésben befejeződik, akkor a talált optimumbecslés globálisan optimális;*
- *ha D nem üres, és az algoritmus végtelen, akkor a generált mintapont-sorozat torlódási pontjainak X^a halmaza azonos a globális megoldások X^* halmazával.*

A 2.7.1. és 2.7.2. korolláriumok ezt az eredményt specializálják, a PAS-B&B algoritmus posztulált tulajdonságainak függvényében.

2.7.2. Korollárium. *Tegyük fel, hogy a 2.7.1. tételben a (24) feladat szerkezetére előírt követelmények fennállnak, és a PAS-B&B algoritmust egy additívan felbontható partíció operátor-típus irányítja, amely kielégíti a 2.4.4. tétel feltételeit. Ekkor — minden ilyen típusú algoritmus-realizációra nézve — érvényes a 2.7.1. tétel.*

Megjegyezzük, hogy a mindenütt sűrű mintapont-halmazt generáló algoritmusok esetére vonatkozó eredmények természetesen ebben a legáltalánosabb tárgyalt esetben is fennállnak (tehát elvileg a 2.5–2.7. fejezetek keretében is alkalmazhatók). A CGOP esetére nézve számítási szempontból szintén ígéretes sztochasztikus stratégiák vizsgálatával a könyv III. részében foglalkozunk.

4. Implementációs kérdések, módosítások és sztochasztikus algoritmus kiterjesztések

Az adaptív partíciós algoritmusok elméleti kerete rendkívül általános, így tág teret biztosít számítógépi megvalósításukra. A globális optimalizálási probléma inherens nehézsége szükségessé teszi olyan realizációk megvalósítását, amelyek elfogadható megbízhatósággal és hatékonysággal oldanak meg reális méretű GOP-kat. A könyv III. része ennek a kérdéskörnek a vizsgálatával foglalkozik (hét fejezetben, kb. 100 oldalnyi terjedelemben).

A 3.1. fejezetben elsőként egyváltozós GO algoritmusok hatékony ('takarékos') n-dimenziós kiterjesztéseit vizsgáljuk. Tekintsük ismét a $\min f(x)$, $a \le x \le b$ $(a, x, b \in I\!R^n)$ feladatot; a $D = [a, b]$ n-intervallum $D_i = [xl_i, xu_i]$ $(i = i(k),\ k \in N)$ részintervallumokra való felbontására irányuló, PAS típusú módszereket vizsgálunk.

3.1.1. Definíció. *A P_i partíció operátor diagonális típusú, ha*

$$P_i\{D_i, f(D_i)\} = P_i\{xl_i, xu_i, f(xl_i), f(xu_i)\} \tag{25}$$

alakban felírható: P_i értéke tehát csupán az intervallum végpontjaitól és az ott felvett függvényértékektől függ (esetleges további függvénymodell-paraméterek mellett).

A jelölés egyszerűsítése érdekében az i indexet elhagyjuk, és a $zl = f(xl)$, $zu = f(xu)$ jelölést alkalmazzuk.

3.1.2. Definíció. *A P diagonális operátor multiplikatívan felbontható, ha*

$$P\{xl, xu, zl, zu\} = P_1\{xl, xu\} \times P_2\{zl, zu\} \tag{26}$$

alakban felírható.

3.1.3. Definíció. *A P diagonális operátor additívan felbontható, ha*

$$P\{xl, xu, zl, zu\} = P_1\{xl, xu\} + P_2\{zl, zu\} \tag{27}$$

alakban felírható.

3.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a P multiplikatív diagonális operátor rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $x \in D$ esetén*

$$\lim_k xl = \lim_k xu = x, \quad xl \le x \le xu, \quad xl = xl(k), \quad xu = xu(k), \quad k \in N \tag{28}$$

maga után vonja a

$$\lim_k P_1\{xl, xu\} = 0, \quad \text{vagy} \quad \lim_k P_2\{zl, zu\} = 0 \tag{29}$$

relációt. Ekkor a P által irányított PAS — egy CGOP-ra alkalmazva — mindenütt sűrű pontsorozatot generál a $D = [a, b]$ halmazon; így a minimumbecslések sorozata $f(x^*)$-hoz tart, és az optimumbecslések sorozatának minden torlódási pontja X^*-hoz tartozik.

3.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a P additív diagonális operátor rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $x \in D$ esetén (28) maga után vonja a*

$$\lim_k P_1\{xl, xu\} = 0, \quad \text{és} \quad \lim_k P_2\{zl, zu\} = P_2(z) \tag{30}$$

relációkat; itt $z = f(x)$ és P_2 szigorúan monoton csökkenő függvénye z-nek. Ekkor a P által irányított PAS — egy LGOP-ra alkalmazva — olyan pontsorozatot generál a D halmazon, amelynek limeszpont-halmaza azonos X^*-gal.

Általános diagonális partíció operátorok esetére nézve a következő eredmények adódnak.

3.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $P\{xl, xu, zl, zu\}$ diagonális operátor rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $x \in D$ esetén (28)-ból következik, hogy alkalmas c konstanssal fennáll*

$$P\{x, x, z, z\} = \lim_k P\{xl, xu, zl, zu\} = c. \tag{31}$$

Ekkor a 3.1.1. tétel állítása érvényes.

3.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a P diagonális operátor rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $x \in D$ esetén (28) alapján következik, hogy a*

$$P\{x, x, z, z\} = \lim_k P\{xl, xu, zl, zu\} \tag{32}$$

határérték x-re nézve transzláció-invariáns, z-nek pedig szigorúan monoton csökkenő függvénye. Ekkor a 3.1.2. tétel állítása érvényes.

A 3.1.1–3.1.4. tételek dimenzió-független volta lehetővé teszi — egyebek között — az ismert egyváltozós algoritmusok n-dimenziós diagonális kiterjesztését. A könyvben részletezett példák közül itt csak Strongin (1978) operátorának közvetlen általánosítását idézzük:

$$P\{xl, xu, zl, zu\} = K\|xu - xl\| + \frac{(zu - zl)^2}{K\|xu - xl\|} - 2(zl + zu); \tag{33}$$

itt $K > 4L$ tetszőleges valós szám (L az f függvény Lipschitz-konstansa).

A 3.2. fejezetben a Lipschitz-konstans becslésének — gyakorlati szempontból igen fontos — kérdését vizsgáljuk. Ennek során rámutatunk arra, hogy az elméleti konvergenciához elegendő részhalmaz-specifikus becslések érvényes sorozatát szolgáltatni: az ebből származó numerikus előnyök igen számottevőek lehetnek. Vizsgáljuk a PAS egy megfelelő realizációja során adódó — determinisztikus és/vagy sztochasztikus módszerrel generált — mintapontok alapján megadható alsó korlátok különböző formáit is. Ezt követően az extremális statisztikák elméletének klasszikus eredményeit foglaljuk össze. Végül egyszerűen realizálható numerikus módszert adunk az említett elméleti eredmények algoritmusokba való beépítésére nézve.

Az általános (24) alakú LGOP megoldására a 2.7. fejezetben javasolt PAS-B&B algoritmus-keret elméletileg korrekt (2.7.1. tétel), ennek hatékony implementációja és konkrét feladatok kapcsán történő alkalmazása azonban nem feltétlenül egyszerű. Ezért a 3.3. fejezetben röviden foglalkozunk (24)-nek a standardizált (n-dimenziós intervallumon definiált) LGOP-ra történő redukciójával. A klasszikus büntetőfüggvény-transzformáció (lásd pl. Fletcher

(1983), Hillier és Lieberman (1986)) a célfüggvény és a korlátozó feltételek együttesét egy parametrikus aggregált függvénnyel helyettesíti: példaként az LGOP esetén jól alkalmazható

$$f(x,p) := p_0 f_0(x) + \sum_{j=1}^{J} p_j \max\{f_j(x), 0\} \tag{34}$$

alakot javasoljuk ($p = (p_0, p_1, \ldots, p_J)$, $p_j > 0$ alkalmasan választott szorzótényezők). Így olyan LGOP-hoz jutunk, amelyben a (Lipschitz-folytonos) célfüggvény ugyan meglehetősen bonyolult lehet, a megengedett halmaz közelítése viszont igen egyszerű, és ezért az hatékonyan particionálható. A 3.3.2–3.3.3. — szakirodalomból idézett — tételek a büntetőfüggvény-eljárás elméleti hátterére utalnak; ennek alapján iteratívan parametrizált PAS típusú módszerek ciklikus (interaktív vagy automatikus) vegrehajtása javasolható.

A 3.4. fejezetben a CGOP/LGOP feladatosztályok megoldására általunk kifejlesztett LGO nevű programrendszert írjuk le. LGO egyesíti a modellépítés és numerikus megoldás folyamatának fő lépéseit, egy — a felhasználó által aktivizálható — menü-rendszer keretében. Ez a menü lehetővé teszi a felhasználó által elemzett CGOP/LGOP feladatok (tetszés szerinti módon ismételhető) megfogalmazását, szintaktikus ellenőrzését, összeszerkesztését, futtatását és az — alfanumerikus formában előállított és grafikusan is megjeleníthető — eredmények elemzését. A felhasználónak a menü alatt 'elrejtett' operatív környezettel csak a minimálisan szükséges mértékben kell érintkeznie; így szabadon koncentrálhat a modellfejlesztés feladatára.

Az LGO-ba épített globális és lokális (komponens-)algoritmusok végrehajtása az említett menü-rendszerhez kapcsolódik. Az optimalizációs rendszerbe a következő megoldó eljárások vannak beépítve (interaktív vagy automatikus végrehajtást egyaránt megengedő módon):

- adaptív partíción alapuló globális keresés;
- egyszerű (globális) véletlen keresés;
- Fletcher-Reeves-Polak-Ribière lokális kereső algoritmus (általunk megfelelően módosított formában);
- Powell-Brent lokális kereső algoritmus (ismét: módosított formában).

Az LGO programrendszert Lahey, illetve Unix professzionális Fortran 77 és 90 környezetben fejlesztettük ki; IBM-kompatibilis személyi számítógépeken, illetve egyedi *workstation* gépeken és -hálózatokon installáltuk (a jelen dolgozat elkészítése idején: az Egyesült Államok, Hollandia, Indonézia, Kanada és Németország néhány kutatóintézetében, illetve egyetemein). Megemlítjük, hogy természetesen más *hardware/software* környezet is alkalmas platformként szolgálhat (a programrendszer fő alkotóelemei standard Fortran nyelven írottak; a menü és grafika viszont értelemszerűen környezetfüggő).

Itt nem térhetünk ki az implementációk részleteire; további információt tartalmaz Pintér (1995c; 1996a, b). Így csak megemlítjük, hogy a könyv 3.4. fejezetében LGO-t illusztrációképpen 50-változós tesztfeladatok megoldására alkalmazzuk. (Gyakorlati alkalmazásokat alább tárgyalunk; időközben oldottunk meg nagyobb változószámú, CGOP/LGOP szerkezetű feladatokat is.)

A III. rész hátralévő 3.5–3.7. fejezeteiben sztochasztikus elemektől is függő döntési modelleket, illetve globális optimalizálási eljárásokat vizsgálunk. Ezt nem csak a véletlentől (is) függő döntési feladatok gyakorlati jelentősége indokolja, hanem az a körülmény is, hogy a globális optimalizációs — különösképpen a CGOP megoldására irányuló — módszerek között a sztochasztikus algoritmusok igen fontos szerepet játszanak. Mivel a könyvnek ezek a fejezetei részben a sztochasztikus programozás szakirodalmán, részben pedig korábbi (dokumentált) munkánkon alapszanak, itt csak igen rövid áttekintést nyújtunk. A sztochasztikus döntéselemzés és optimalizáció széleskörű irodalmából példaként Dempster (1980), Berger (1985), Ermoliev és Wets (1988), Kushner és Dupuis (1992), Prékopa (1995) munkáit említjük; a sztochasztikus GO módszereivel kapcsolatban pedig Boender és Romeijn (1995) *state-of-the-art* áttekintő tanulmányára utalunk.

A 3.5. fejezetben röviden ismertetjük a sztochasztikus döntési modellek fogalmát, majd néhány modell-variánst tárgyalunk (ezek egy része a könyv IV. részében alkalmazásra kerül). Igen tömören kitérünk néhány megoldási stratégia bemutatására is.

A 3.6. fejezetben adaptív sztochasztikus optimalizálási eljárások egy általános osztályának vizsgálatával foglalkozunk. A 3.6.1. tétel a sztochasztikus programozási feladatok széles osztályára nézve ad feltételeket, amelyek garantálják a globális optimumpont(ok) létezését. Ezt követően a Borel-Cantelli lemmát általánosítjuk (3.6.1–3.6.2. lemmák), az adaptív algoritmusokra való alkalmazás érdekében. Ezt az eredményt felhasználva, adaptív véletlen keresési eljárás-variánsok 1 valószínűségű konvergenciáját igazoljuk (3.6.2. tétel, 3.6.1. korollárium, 3.6.3. tétel).

A konvergencia-tulajdonságok megőrzése, egyben a lokális hatékonyság növelése érdekében sztochasztikusan kombinált (hibrid) algoritmusok egy igen általános osztályát vezetjük be. Ezek fő iterációi lehetővé teszik — minden egyes lépésben — egy globális (adaptív véletlen kereső típusú) algoritmus, illetve egy lokális (pl. konjugált irányokon alapuló) algoritmus soron következő lépésének (ciklusának) randomizált megválasztását. A 3.6.3. lemma a Borel-Cantelli lemma további — a hibrid stratégiának megfelelő — kiterjesztését szolgáltatja. Ennek alapján egy igen általános szerkezetű sztochasztikus programozási feladat megoldására adunk olyan hibrid algoritmus-sémát, amelynek alkalmazása során a feltételi függvények és a célfüggvény véletlen zaj által torzított értékeit megfelelő módon növekvő pontossággal határozzuk meg. Így sztochasztikus CGOP-kra vonatkozó — 1 valószínűségű — globális konvergencia-eredmény igazolható (3.6.4. tétel).

A 3.7. fejezetben zaj által torzított függvényértékek hatékony becslésének kérdéseit vizsgáljuk. Feltesszük, hogy a becslés Monte Carlo szimulációs ciklusok realizációin alapszik; így — adott pontosságot és becslési megbízhatóságot előírva — a véletlen realizációk számának lehető redukciójára törekszünk. A valószínűségszámítás klasszikus eredményeinek (Csebisev- és Bernstein-egyenlőtlenség és kiterjesztéseik) felhasználásával bizonyítjuk a 3.7.1–3.7.2. lemmákat és a 3.7.1. tételt: a tétel felső becslést ad a szükséges független realizációk számára nézve. A 3.7.1. korollárium ezt az eredményt specializálja ismeretlen valószínűségek becslésére.

Amint erre már utaltunk, a 3.5–3.7. fejezetekben tárgyalt modellek és eredmények az LGO algoritmus-implementációba építve, illetőleg a sztochasztikus modellekhez vezető alkalmazások kapcsán kerültek felhasználásra.

5. Alkalmazási esettanulmányok

CGOP és LGOP típusú feladatokra vezető alkalmazásokat tárgyalunk részletesen a könyv IV. részében (tizenkét fejezetben, mintegy 200 oldalon keresztül). A leírt alkalmazások közül néhányat önálló kutatásként, másokat pedig teammunka keretében dolgoztunk ki; a globális optimalizálási stratégia és algoritmus-implementáció minden esetben saját munkánk.

Néhány bemutatott feladattípus kapcsán tesztproblémák megoldására szorítkozunk, ezek jellege és mérete azonban nem-triviális. Más esetekben a vizsgált döntési feladatot egy nagyobb volumenű kutatási project szerves részeként oldottuk meg, és így közvetlen gyakorlati hasznosításra is sor került.

Az alkalmazott optimalizálási metodika (különösen az algoritmusok adott implementációja) értelemszerűen a konkrét GO feladat vizsgálata idején rendelkezésre álló szintet tükrözi. A közölt számítási eredményeket — megoldható feladatok mérete, műveletigény, gépidő — természetesen ennek függvényében kell értelmezni; erre vonatkozó adatok tehát kizárólag illusztratív jelleggel szerepelnek itt, vagy a könyvben.

Az alábbiakban a könyvben tárgyalt feladattípusok igen tömör ismertetésére szorítkozunk. Az alkalmazott matematikai jelölések az egyedi feladattípusokra vonatkoznak (tehát nem feltétlenül követik minden tekintetben a korábban bevezetett jelöléseket).

Nemlineáris approximáció; egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszerek megoldása

Egyenletek és egyenlőtlenségek rendszerének megoldása a numerikus matematika és — természettudományi, műszaki, közgazdasági — alkalmazásainak egyik kiemelkedő fontosságú területe. Tekintsük az

$$f_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m, \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n \qquad (m \geq n) \tag{35}$$

nemlineáris egyenletrendszert, amelynek általános értelemben vett legjobb — egzakt vagy közelítő — megoldását keressük. Tegyük fel ismét, hogy az f_i $i = 1, \ldots, m$ függvények Lipschitz-folytonosak a D korlátos, testszerű tartományon (gyakran $D = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$); az általános értelemben tekintett globális megoldások X^* halmaza pedig legfeljebb megszámlálható. Legyen $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $N\{\cdot\}$ pedig egy tetszőleges adott norma az $\mathbb{R}^m$ térben. Ekkor a keresett X^* halmaz megegyezik a

$$\min N\{F(x)\} \qquad x \in D \tag{36}$$

LGOP megoldáshalmazával. (Ha (35) egzakt megoldásainak halmaza üres, akkor (36) megoldása a legjobb — normafüggő — közelítő megoldás.) Nemlineáris egyenlőtlenségek rendszere könnyen illeszthető ehhez a leírásmódhoz: az $f_i(x) \leq 0$ feltételt pl. a $\max\{f_i(x), 0\}$ komponens képviselheti a megfelelően kibővített F vektorfüggvényben.

A javasolt megközelítésen alapuló módszert részletesen teszteltük, több száz véletlenszerűen generált feladatra vonatkozó eredményeket összesítve. A tesztfeladatok többextrémumú jellegét polinomargumentumú trigonometrikus függvények lineáris kombinációi és más — pl. a GO irodalmából ismert Shekel-típusú — függvények szolgáltatták; 1–5 változós egyenletrendszereket vizsgáltunk. Az elmúlt években további — esetenként bonyolultabb és nagyobb változószámú — (35) típusú feladatokat is megoldottunk.

A részleteket mellőzve megjegyezzük, hogy igen általános (Lipschitz-struktúrájú) nemlineáris approximációs feladatok is tárgyalhatók és oldhatók meg LGOP-ként: néhány erre vonatkozó példát az alábbiakban is bemutatunk.

Adatosztályozás (cluster analysis) és konfiguráció-tervezés

Egy véges elemszámú halmaz elemeinek megadott kritérium szerinti csoportosítása az operációkutatás és alkalmazott statisztika számos feladatának lényeges része. Legyen

$O = \{o_k \mid k = 1, \ldots, N\}$ az osztályozandó elemek halmaza;

$d_{kl} = d(o_k, o_l)$ $\quad o_k, o_l \in O$ az elempárok különbözőségének mérőszáma;

$\mathcal{D} = \{d_{kl} \mid k, l = 1, \ldots, N\}$ a különbözőségi mátrix;

$P_M = \{C_1, \ldots, C_M\}$ az O halmaz egy M számú csoportra (clusterre) való diszjunkt felbontása ($C_j \neq \emptyset$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, $\bigcup_j C_j = O$);

π_M a lehetséges P_M partíciók halmaza.

A fenti jelölésekkel az optimális halmaz-felbontás feladatának (*Optimal Set Partition*, OSP) szokásos megfogalmazása a következő: keresendő az a $P_M \in \pi_M$ felbontás, amely — a $\mathcal{D}$ mátrix által kifejezett értelemben — 'leginkább homogén', illetve 'leginkább diszkriminatív' osztályozást biztosít.

Megjegyezzük, hogy (OSP) számos kritériumfüggvény-variáns által kifejezhető; a problémakör nagyfokú kombinatorikus bonyolultsága szintén ismert. A feladat megoldására olyan GO megközelitést javasolunk, amely a clusterek magpontjainak *(seed point)* pozicióját optimalizálja: az egyes magpont-konfigurációk iteratív megválasztását követően az O halmaz elemeinek osztályozása adott — a $\mathcal{D}$ mátrix definícióját tükröző szabály (pl. a 'legközelebbi magpont') szerint automatikusan adódik. A vázolt módszert néhány száz (kétdimenziós) vektor 3–5 csoportba való sorolásán teszteltük először; azóta nagyobb méretű feladatok megoldására is alkalmaztuk.

Megemlítjük még, hogy ez a megközelítés jóval általánosabb konfigurációtervezési problémák kapcsán is használható; erre a következő alkalmazási feladattípus is példaként szolgál.

Egyeztetett szakértői vélemények optimalizált összegzése

Szakértői becslések és vélemények (poziciók) összegzése sok esetben szükséges és indokolt: példaként időjárás-előrejelzésre, pénzpiacok és tőzsdék mozgásának követésére, természeti erőforrások feltárásával kapcsolatos hozambecslésekre, vagy — egészen más területről — kiszolgálási csomópontok *(service facilities)*, illetve zajos, veszélyes stb. létesítmények egyeztetésen alapuló elhelyezésére utalunk. (Nyilvánvaló e problémakörnek az adatosztályozási feladattal és kiterjesztéseivel való rokonsága is.)

Adott kvantitatív vélemények egyeztetésen alapuló aggregációja matematikailag pl. a következő alakban fogalmazható meg:

$$\min_{x \in D} \|(w_1 d(a_1, a_c), \ldots, w_n d(a_n, a_c))\|, \qquad a_c = T\{a, x\} \in A. \tag{37}$$

Itt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ az adott szakértői poziciók (vektorok, valószínűség-eloszlások stb.) vektora; a_c az $x \in D$ vektorral parametrizált T operátor által definiált (aggregált) és az $a_c \in A$ feltételt kielégítő pozició; $d(\cdot,\cdot)$ a vélemények különbözőségét kifejező függvény; $w_1, \ldots, w_n$ az egyes szakértők 'súlyát' kifejező szorzók; $\|\cdot\|$ pedig adott norma. Ez az általános feladat-megfogalmazás igen sokféleképpen specializálható. Numerikus példákban vektorok és valószínűségeloszlások globálisan optimalizált aggregációját vizsgáltuk (pl. binomiális és Poisson-eloszlások keverékének aggregációját meghatározó LGOP-kat oldva meg).

Termék (keverék) tervezés

A fentiekben röviden bemutatott problémákkal való szoros kapcsolat miatt itt csak megemlítjük, hogy megfelelő keverékek tervezése szintén modellezhető LGOP-ként. (A könyvben leírt numerikus példák gyakorlati hátterét egy mosószergyártási feladat szolgáltatta.) Matematikailag egy adott Lipschitz-folytonos egyenlőtlenségrendszer megengedett megoldásait kerestük egy szimplex-tartományon, amelynek csúcspontjai a gyártási alapanyagokat reprezentálták. Ezek a feladatok még kis méretek (pl. 3–5 gyártási komponens és 5–15 nemlineáris egyenlőtlenség-feltétel) esetén sem feltétlenül egyszerűek: a megengedett megoldások halmazának relatív mértéke ugyanis igen kicsi lehet, és ez a halmaz gyakran 'bonyolult' (konvex és nem-konvex, diszjunkt részhalmazokból is állhat).

Komplex rendszermodellek kalibrációja

Összetett rendszerek modellezése a tudományos és alkalmazott kutatásokban alapvető szerepet játszik. A kvantitatív modellalkotás folyamata a következő fő fázisokra bontható:

- identifikáció: a modellvizsgálat célkitűzéseinek megfogalmazása, a modell alapszerkezetének kiválasztása;
- kalibráció: a modell illesztése (parametrizációja) a rendelkezésre álló információ alapján;
- verifikáció és alkalmazás (elemzés, előrejelzés, szabályozás).

A modellkalibráció feladata matematikai szempontból gyakran egy 'fekete doboz' jellegű nemlineáris approximációs problémához vezet. A témakör irodalmából példaként itt csupán a Beck (1985) által nyújtott (a könyvben ismertetett alkalmazások témájához kapcsolódó) áttekintést, a hazai — globális optimalizációhoz vezető — kutatások közül pedig Csendes (1993) munkáját említjük.

A könyvben (4.5. fejezet) először egy általános iteratív kalibrációs sémát írunk le, és azt a GO témakörének keretébe illesztjük. A kalibrációs feladat megfogalmazását speciális részletek — modell-diszkrétizáció, statisztikus leírásmód, többcélú modell-paraméterezés és a globális optimum meghatározásának szükségessége — tárgyalása követi.

Ezt követően kalibrációs modell-variánsokat és illusztratív gyakorlati példákat elemzünk. Ennek során bevezetjük az l_p-norma fogalmán alapuló illeszkedési kritériumok osztályát, és foglalkozunk a lehetséges *(acceptable)* kalibrációk kérdéskörével is. Példaként a következő esettanulmányokat tárgyaljuk (igen röviden, a könyv 4.6. fejezetének szakaszaiként):

- szélkeltette üledék-felkeveredés sekély tavakban (Balaton);
- mikroszennyezők transzportja, eloszlása és elbomlása tavakban (Ketelmeer, Hollandia);
- egydimenziós (longitudinális) folyami vízállás-vízhozam modell (Noordelijk Deltabekken, Hollandia).

A matematikai modell-leírás általában véve megfelelő közönséges, ill. parciális differenciálegyenletek rendszeréhez vezet; a kalibráció tehát ezek optimált paraméterezését jelenti. A Balatonnal kapcsolatos feladatban a — modell-parametrizációtól függő — numerikus megoldás előállítása viszonylag egyszerű, a másik két modell kiértékelése viszont komolyabb számításigényű. Mindhárom feladat esetében a korábban alkalmazott leírást helyettesítő, számottevő minőségi javulást eredményező modellalakot és paramétereket találtunk GO metodika alkalmazásával. Ezek az eredmények a modellek alkalmazása során közvetlenül hasznosíthatók.

Sekély tavak eutrofizációjának vizsgálata esetén az üledékből kibocsátott tápanyagok elemzése az ökoszisztéma leírása szempontjából nagy fontossággal bír, lásd pl. Somlyódy és van Straten (1986). A SED modell a foszforkibocsátás dinamikáját írja le; a modell illesztését a Veluwe tó (Hollandia) adataira nézve végeztük el (4.7. fejezet). Ennek során részletesen elemeztük a különböző modell-variánsoknak az eredményre gyakorolt hatását, és így a megfelelő kalibrációs modellformák kiválasztásának kérdését is.

A fentiekben említett modellkalibrációs esettanulmányokban az illesztendő paraméterek száma viszonylag kicsi (3-6) volt, kivéve a Noordelijk Deltabekken modell néhány variánsát. A 4.8. fejezetben egy felszín alatti vízvezető réteg *(aquifer)* modelljének paramétereit határozzuk meg, a Wolfville Formation (Nova Scotia, Kanada) esetére alkalmazva. A felszín alatti vízkészletek mozgásának és minőségének nyomon követése során adódó modellillesztési feladatok nehézsége az e területen dolgozó szakemberek körében jól ismert. A nehézségek fő oka — a 'beágyazott' multiextremális paraméterezési problémán túlmenően — az, hogy a parciális differenciálegyenleteken alapuló rendszermodellek numerikus kiértékelése rendkívül számításigényes. (Esettanulmányunkban a modellparaméterek száma 60 felett volt; a *workstation* gépi környezetben végrehajtott kalibrációs futtatások időigénye néhány perctől több óráig terjedt.) Az LGO programrendszer alkalmazása igen számottevően javította a modell mérési adatokhoz való illeszkedését.

Ipari szennyvíztisztító rendszer tervezése és üzemeltetése

A reálisan fenntartható gazdasági fejlődés stratégiájának kialakítása szükségessé teszi a környezetvédelmi szempontok fokozott érvényesítését is. Az ESIS *(Environmentally Sensitive Investment System)* Project (Halifax, Kanada) keretében egy olyan döntéstámogató rendszert dolgoztunk ki, amely lehetővé teszi ipari szennyvízkezelési stratégiák kiértékelését és optimalizálását, adott műszaki feltételek és környezetvédelmi (szennyezőanyag-kibocsátást limitáló) előírások mellett. Ezt a munkát a 4.9. fejezetben ismertetjük. Az ESIS prototípust a kanadai papíripar egy meghatározott szektorára nézve dolgoztuk ki, de a koncepció széles körű (hatósági, ipari, konzulensi és kutatási) alkalmazásának lehetősége — más iparágak kapcsán is — nyilvánvaló.

Az interaktív ESIS programrendszer — amelynek optimalizálási modulja teljes egészében, szennyvíztisztítómű modellje pedig részben saját munkánk — jelenlegi változatában a következő típusú *on-line* alkalmazásokat teszi lehetővé:

- műszaki, gazdasági és környezetvédelmi információ (alapadatok), valamint tisztítómű modell-paraméterek ellenőrzése és módosítása;
- adott (kiválasztott) paraméterézésű szennyvízkezelő rendszerek működésének determinisztikus szimulációja;
- optimalizált paraméterézésű tisztítómű-tervezési és -üzemeltetési variánsok meghatározása.

Matematikai szempontból az utóbbi feladat ismét egy 'fekete doboz' jellegű rendszer globálisan optimalizált paraméterezéséhez vezet (a műszaki rendszermodell számítógépi programja több ezer soros). A döntési változók száma — a vizsgált tisztítómű típusától és a modelltől függően, a jelenlegi programrendszerben — 10 és 20 között változik.

Regionális szennyvíztisztítási stratégia optimalizálása

Hatékony regionális szennyvízkezelési stratégiák kialakítása az utóbbi évtizedekben intenzív kutatások tárgya: lásd pl. Bower (1977), Deininger (1977), Beck (1985), Somlyódy és van Straten (1986), Patry és Chapman (1989). A legtöbb ez irányú vizsgálat lényegileg determinisztikus rendszer-leírásra épített szabályozási modelleken alapszik, bár léteznek fejlettebb — és reálisabb — sztochasztikus modellvariánsok is. A 4.10 fejezetben leírt sztochasztikus döntési modell olyan megközelitésen alapszik, amely a vízminőségi előírásoknak a szokásosnál pontosabb érvényesítését teszi lehetővé; a modell megoldása ismét egy 'fekete doboz' rendszer globális optimalizációjához vezet. A Zala folyó térségére vonatkozó illusztratív esettanulmány optimalizálási feladatát az LGO rendszer egy korábbi változatának felhasználásával oldottuk meg, négy szennyvíztisztítómű egyedi hatásfokának költséghatékony kombinációit határozva meg. Ennek kapcsán parametrikus érzékenységi vizsgálatot is végeztünk, és az eredményeket egyszerűsített determinisztikus approximáción alapuló eredményekkel vetettük össze.

Eutrofizáció szabályozása

A Balaton vízminőségének vizsgálatára és szabályozására irányuló project keretében (korábban) kidolgozott sztochasztikus döntési modelleket írunk le a 4.11. fejezetben. (A project kapcsán végzett kutatásokat illetően lásd pl. a Somlyódy és van Straten (1986) által szerkesztett kötetet.) Az általunk tárgyalt döntési modellekben adott erőforrás-korlátok mellett keressük az elérhető 'legjobb' környezetállapotot, amelynek statisztikusan változó jellegét explicit módon figyelembe vesszük. Így különböző — statisztikai alapokon nyugvó, nem feltétlenül konvex — sztochasztikus modellvariánsokhoz jutunk. Az egyes regionális vízminőségszabályozási stratégiák kiértékelése Monte Carlo szimuláció alapján hajtható végre. Az így nyert 'fekete doboz' modell optimális megoldására (a tanulmány készítésének idején) egy egyszerű — általunk kidolgozott — adaptív véletlen kereső eljárásnak az ismert MINOS nemlineáris programozási rendszerrel (Murtagh és Saunders, 1983) való kombinációját alkalmaztuk.

Baleset jellegű vízszennyezés elhárítása

A baleset jellegű (véletlen) környezetszennyezési események hatékony megelőzése, ill. elhárítása világszerte növekvő fontosságú feladat: gondoljunk pl. olajszállító tankhajók — gyakran igen jelentős negatív következményekkel járó — baleseteire. A könyv 4.12. fejezetében egy illusztratív esettanulmányt írunk le, amelyben a Duna (hipotetikus) baleset jellegű szennyezését, és ennek az ivóvízszolgáltató kútrendszerre gyakorolt potenciális hatását vizsgáljuk. (A Duna baleseti szennyezésének kockázatát és néhány korábbi esetét vizsgálja pl. Benedek (1988) munkája.)

Az esettanulmány kapcsán egy általános sztochasztikus kockázatelemzési döntési modell-keretet specializálunk. Ezt követően elemezzük egy vegyi anyagokat gyártó üzemből tartály-meghibásodás következtében kibocsátott szennyezés útját, a folyóban történő elkeveredését és az ivóvíz kútrendszerbe való bejutását. A baleseti kár elhárításának módját és költségvonzatait az üzemben alkalmazandó ellenőrzési-karbantartási stratégia költségeivel vetjük össze: így lehetővé válik egy megbízható és költséghatékony stratégia megválasztása. Ez a feladattípus matematikai szempontból ismét egy 'fekete doboz' jellegű, sztochasztikus rendszer globálisan optimált bemenő paramétereinek meghatározásához vezet. Az egyszerűsített numerikus példában csak egyetlen modellparamétert optimalizálunk; ez a példa azonban evidens módon terjeszthető ki reálisabb — és jóval bonyolultabb — GO feladatok irányába.

A könyv IV. része további perspektivikus alkalmazások felsorolásával fejeződik be. Az Olvasó tájékozódását segíti a könyv kiterjedt irodalomjegyzéke is (41 oldal terjedelemben). A munkát a legfontosabb tárgyszavak jegyzéke zárja.

Köszönetnyilvánítás

A jelen dolgozat alapjául szolgáló munka témaköre kb. két évtized óta foglalkoztat. Szeretném köszönetemet kifejezni legalább néhány professzoromnak és kutató-kollégámnak, ösztönző hatású munkájukért és gondolatébresztő eszmecserékért. Alfabetikus felsorolásban ezek a személyek a következők:

Blair T. Bower, Ekaterina V. Bulinskaya, Rolf A. Deininger, Forgó Ferenc, Boris V. Gnedenko, Pierre Hansen, Reiner Horst, Brigitte Jaumard, Klafszky Emil, Kovács László Béla, Majthay Antal, Prékopa András, Charles R. Scherer, Somlyódy László, Roman G. Strongin és Szöllősi-Nagy András.

Társszerzőként való közreműködésükért szeretném köszönetemet kifejezni következő kollégáimnak:

Carlijn Bak-Ijsberg, Benedek Pál, Johan G. Boon, C. Fodor János, Roger M. Cooke, Csendes Tibor, Darázs Attila, Willem J. de Lange, Jacques J. B. de Swart, Mort Fels, Russell J. Finley, Sjur D. Flåm, Eligius M. T. Hendrix, David S. Lycon, Dirk J. Meeuwig, Jay W. Meeuwig, Pesti Géza, Mysore G. Satish, Somlyódy László, Walter J.H. Stortelder, Szabó János, Dorien ten Hulscher, Diederik T. van der Molen, Johan van Zetten és Leo Voogt.

Munkámat elsősorban a következő intézmények támogatták (ahol hoszszabb vagy rövidebb ideig dolgoztam a könyvben tárgyalt problémákon):

- Egyetemi Számitóközpont, Budapest
- Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest
- Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest
- Kaliforniai Egyetem (UCLA); és számos más amerikai egyetem, ill. kutatóintézet
- Moszkvai Állami (Lomonoszov) Egyetem
- Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Központ (VITUKI), Budapest
- Delfti Műszaki Egyetem
- Vízgazdálkodási és Szennyvízkezelési Kutatóintézet (RIZA), Lelystad
- Dalhousie Egyetem, Halifax
- Atlanti Ipari Kutatóintézet (AIRI), Halifax
- Nova Scotia-i Műszaki Egyetem (TUNS), Halifax

- Matematikai és Számitástudományi Kutatóintézet (CWI), Amsterdam
- Agrártudományi Egyetem, Bogor
- Sriwijaya Egyetem, Palembang

Itt szeretném megköszönni az Országos Tudományos Kutatási Alap (OTKA), a Holland Kutatási Alapítvány (STW), és a Német Kutatási Társulat (DFG) támogatását; valamint néhány — az irodalomjegyzékben felsorolt — kutató kollégától és software-fejlesztő intézménytől kapott információt és támogatást is.

Köszönöm John Martindale-nek és a Kluwer Akadémiai Kiadónak a könyv-project kezdeményezését, valamint a munka elkészítése során nyújtott támogatást.

A könyv alapjául szolgáló anyagok, illetve egyes fejezetek átnézésével és nagyszámú konstruktív megjegyzéssel elsősorban Ray Côtè, Csendes Tibor, Fülöp János, Eldon Gunn, Eligius Hendrix, Reiner Horst, Don Jones, Walter Stortelder és Terlaky Tamás segítette munkámat. Természetesen hasonló értelmű köszönet illeti társszerzőimet is. Csendes Tibor és Fülöp János a jelen dolgozat anyagát is szívesek voltak átnézni.

Megkülönböztetett köszönettel tartozom Leslie Stockhausen-nek a könyv elkészítése során végzett rendkívül gondos szövegszerkesztői munkájáért, és minden határon túlmenő segítőkészségéért.

Végül — de nem utolsó sorban — szeretném köszönetemet kifejezni Susannak és Jocinak, a Pintér és Pitman családtagoknak, közeli és távoli barátaimnak.

Irodalom

I. A dolgozat témaköréhez kapcsolódó munkák (más szerzőktől)

1. Bachem, A., Grötschel, M., and Korte, B., eds. (1983) *Mathematical Programming: The State of the Art.* Springer, Berlin.
2. Beck, M.B. (1985) *Water Quality Management: A Review of the Development and Application of Mathematical Models. Lecture Notes in Engineering 11.* Springer, Berlin.
3. Benedek, P. (1988) River Danube pollution and its risk assessment. In: *Risk Assessment of Chemicals in the Environment.*, (ed. M. L. Richardson). The Royal Society of Chemistry, London.
4. Berger, J. O. (1985) *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* (2nd edn.) Springer, Berlin.
5. Boender, C. G. E. (1984) The generalized multinomial distribution: A Bayesian analysis and applications. Ph.D. Dissertation. Erasmus University, Rotterdam.

6. Boender, C. G. E., and Romeijn, E. H. (1995) Stochastic methods. In: *Handbook of Global Optimization* (ed. R. Horst and P. M. Pardalos), pp. 829–869. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
7. Bower, B. T., ed. (1977) *Regional Residuals Environmental Quality Management.* Johns Hopkins University Press, Baltimore.
8. Brooke, A., Kendrick, D., and Meeraus, A. (1988) *GAMS: A User's Guide.* Scientific Press, Palo Alto.
9. Csendes, T. (1993) A paraméterbecslési feladat néhány számítógépes eljárása. Kandidátusi értekezés, József Attila Tudományegyetem, Szeged.
10. Deininger, R. A., ed. (1977) *Systems Analysis for Water Quality Management.* University of Michigan Press, Ann Arbor.
11. Dempster, M. A. H., ed. (1980) *Stochastic Programming.* Academic Press, London.
12. Diener, I. (1990) *Einführung in die Methoden der globalen Optimierung* (2nd edn.) Lecture Notes, Institute for Applied Math., University of Göttingen.
13. Dixon, L. C. W., and Szegő, G. P., eds. (1975, 1978) *Towards Global Optimisation.* Vols. 1–2. North-Holland, Amsterdam.
14. Ermoliev, Yu. M., and Wets, R. J.-B., eds. (1988) *Numerical Techniques for Stochastic Optimization.* Springer, Berlin.
15. Evtushenko, Yu. G. (1985) *Numerical Optimization Techniques.* Springer, Berlin.
16. Fedorov, V. V., ed. (1985) *Problems of Cybernetics: Models and Methods in Global Optimization.* USSR Academy of Sciences, Moscow. (Orosz nyelven.)
17. Fletcher, R. (1983) Penalty functions. In: *Mathematical Programming: The State of the Art,* (ed. A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte), pp. 87–114. Springer, Berlin.
18. Floudas, Ch. A., and Pardalos, P. M., eds. (1992) *Recent Advances in Global Optimization.* Princeton University Press.
19. Forgó, F. (1988) *Nonconvex Programming.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
20. Fourer, R., Gay, D. M., and Kernighan, B. W. (1993) *AMPL: A Modelling Language for Mathematical Programming.* The Scientific Press, San Francisco.
21. Hansen, E. R. (1992) *Global Optimization Using Interval Analysis.* Marcel Dekker, New York.
22. Hansen, P., and Jaumard, B. (1995) Lipschitz optimization. In: *Handbook of Global Optimization,* (ed. R. Horst and P. M. Pardalos), pp. 407–493. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
23. Heckert, A. and Filliben, J. J. (1995) *DATAPLOT Reference Manual.* US National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg.
24. Hillier, F. S., and Lieberman, G. J. (1986) *Introduction to Operations Research* (4th edn.). Holden Day, Oakland.
25. Horst, R., and Pardalos, P. M., eds. (1995) *Handbook of Global Optimization.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

26. Horst, R., and Tuy, H. (1990) *Global Optimization – Deterministic Approaches.* Springer, Berlin.

27. Kushner, H. J. (1964) A new method of locating the maximum point of an arbitrary multipeak curve in the presence of noise. *Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering* 86, 97–105.

28. Kushner, H. J., and Dupuis, P. G. (1992) *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time.* Springer, New York.

29. Lahey Computer Systems, Inc. (1994) *Fortran 90 – User's Guide.* Incline Village, Nevada.

30. MathWorks, Inc. (The) (1995) *MATLAB - High Performance Numeric Computation and Visualization Software. User's Guide.* Natick.

31. Mockus, J. (1967) *Multiextremal Problems in Design.* Nauka, Moscow. (Orosz nyelven.)

32. Mockus, J. (1989) *Bayesian Approach to Global Optimization.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

33. Mockus, J., Tiesis, V., and Žilinskas, A. (1978) The application of Bayesian methods for seeking the extremum. In: *Towards Global Optimisation,* Vol. 2, (ed. L. C. W. Dixon and G. P. Szegő), pp. 117–129. North-Holland, Amsterdam.

34. Moore, R. E. (1962) Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computation. Ph.D. Dissertation, Stanford University.

35. Moré, J. J., and Wright, S. J. (1993) *Optimization Software Guide.* SIAM, Philadelphia.

36. Murtagh, B. A., and Saunders, M. A. (1983) MINOS 5.1. User's Guide. Report SOL 83-20R, Stanford University.

37. Neimark, J., and Strongin, R. G. (1969) Informational approach to the problem of search for the extremum of a function. *Engineering Cybernetics* 4, 17–26. (Orosz nyelven.)

38. Pardalos, P. M., and Rosen, J. B. (1987) *Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications. Lecture Notes in Computer Science* 268. Springer, Berlin.

39. Patry, G. G., and Chapman, D. T., eds. (1989) *Dynamic Modelling and Expert Systems in Wastewater Engineering.* Lewis, Chelsea.

40. Piyavskii, S. A. (1967) An algorithm for finding the absolute minimum. In: *Theory of Optimal Solutions*, pp. 13–24. Institute of Cybernetics (IK AN USSR), Kiev. (Orosz nyelven.)

41. Powell, M. J. D. (1992) A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation. *Numerical Analysis Report DAMTP 1992/NA 5*, University of Cambridge.

42. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. (1992) *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.

43. Prékopa, A. (1995) *Stochastic Programming.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; és Akadémiai Kiadó, Budapest.

44. Ratschek, H., and Rokne, J. G. (1988) *New Computer Methods for Global Optimization.* Ellis Horwood, Chichester.

45. Reinhardt, R. (1995) *ISYTOP: Interactive System for Teaching Optimization.* Institute for Mathematics, Technical University of Ilmenau.

46. Rinnooy Kan, A. H. G., and Timmer, G. T. (1989) Global optimization: A survey. In: *Handbooks of Operations Research,* Vol. 1. *Optimization,* (eds. G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, and M. J. Todd), pp. 631–662. North-Holland, Amsterdam.

47. Schittkowski, K. (1995) *Parameter Estimation in Dynamical Systems with EASY-FIT. User's Guide.* Institute for Mathematics, University of Bayreuth.

48. Schrage, L. (1991) *User's Manual for LINGO.* LINDO Systems Inc., Chicago.

49. Shubert, B. O. (1972) A sequential method seeking the global maximum of a function. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 9, 379-388.

50. Somlyódy, L., and van Straten G., eds. (1986) *Modeling and Managing Shallow Lake Eutrophication.* Springer, Berlin.

51. Strongin, R. G. (1978) *Numerical Methods for Multiextremal Problems.* Nauka, Moscow. (Orosz nyelven.)

52. Törn, A. A., and Žilinskas, A. (1989) *Global Optimization. Lecture Notes in Computer Science* 350. Springer, Berlin.

53. Tuy, H. (1964) Concave programming under linear constraints. *Soviet Mathematics Doklady* 5, 1437–1440. (Orosz nyelven.)

54. van Laarhoven, P. J. M., and Aarts, E. H. L. (1987) *Simulated Annealing: Theory and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

55. Wilde, D. J. (1978) *Globally Optimal Design.* Wiley Interscience, New York.

56. Winston, W. L. (1994) *Operations Research: Applications and Algorithms* (3rd edn.). Wadsworth, Belmont.

57. Wolfram, S. (1991) *Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer.* (2nd edn.) Addison-Wesley, Redwood City.

58. Zhigljavsky, A. A. (1991) *Theory of Global Random Search,* (ed. J. Pintér). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

59. Zhigljavsky, A. A., and Žilinskas, A. (1991) *Methods for Searching the Global Extremum.* Nauka, Moscow. (Orosz nyelven.)

60. Zielinski, R., and Neumann, P. (1983) *Stochastische Verfahren zur Suche nach dem Minimum einer Funktion.* Akademie–Verlag, Berlin.

61. Žilinskas, A. (1981) Two algorithms for one-dimensional multimodal minimization. *Optimization* 12, 53–63.

62. Žilinskas, A. (1986) *Global Optimization.* Mokslas, Vilnius. (Orosz nyelven.)

II. A dolgozatban összegzett – önálló, ill. társszerzőkkel készített – munkák

1. Pintér, J. (1981) Sztochasztikus módszerek optimalizálási feladatok megoldására. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 7, 217-252.
2. Pintér, J. (1982) *Sztochasztikus eljárások nem-differenciálható, sztochasztikus szerkezetű, globális optimalizálási feladatok megoldására.* Kandidátusi értekezés. Moszkvai Állami (Lomonoszov) Egyetem. (Orosz nyelven.)
3. Pintér, J. (1982) Hibrid algoritmusok többextrémumú, nem-differenciálható, sztochasztikus programozási feladatok megoldására. *Vestnik MGU, Ser. VMK* 1982 No. 1, 39-49. (Orosz nyelven; angol fordításban: *Bulletin of the Moscow University Ser. 15 Computational Mathematics and Cybernetics* 1982, No.1.)
4. Pintér, J. (1983) A unified approach to globally convergent one-dimensional optimization algorithms. *Research Report IAMI-83.5, Istituto per le Applicazioni della Matematica e dell'Informatica CNR*, Milano, Italy.
5. Pintér, J. (1984) Stochastic optimization methods for solving mathematical programming problems. In: *Statistics and Probability*, (ed. J. Mogyoródi, I. Vincze, and W. Wertz), pp. 271–282. Akadémiai Kiadó, Budapest.
6. Pintér, J. (1984) Convergence properties of stochastic optimization procedures. *Optimization* 15, 405–427.
7. Flåm, S. D., and Pintér, J. (1985) Selecting oil exploration strategies: Some stochastic programming formulations and solution methods. *Research Report CMI 852611-1, Christian Michelsen Institute*, Fantoft, Norway.
8. Pintér, J. (1985) A modified Bernstein-technique for estimating noise-perturbed function values. *Calcolo* 22, 241-247.
9. Pintér, J. (1986a) Globally convergent methods for n-dimensional multiextremal optimization. *Optimization* 17, 187–202.
10. Pintér, J. (1986b) Extended univariate algorithms for n-dimensional global optimization. *Computing* 36, 91–103.
11. Pintér, J. (1986c) Global optimization on convex sets. *OR Spektrum* 8, 197–202.
12. Pintér, J., Szabó, J., and Somlyódy, L. (1986) Multiextremal optimization for calibrating environmental models. *Environmental Software* 1, 98-105.
13. Somlyódy, L., and Pintér, J. (1986) Water quality management: Methodology and applications. *Foundations of Control Engineering* 11, 177-189.
14. Pintér, J. (1987a) A conceptual optimization framework for regional acidification control. *Systems Analysis, Modelling and Simulation* 4, 213-226.
15. Pintér, J. (1987b) Convergence qualification of partition algorithms in global optimization. *Research Report 87-61, Faculty of Mathematics and Informatics, Delft University of Technology*, The Netherlands.
16. Pintér, J., and Somlyódy, L. (1987) Optimization of regional water quality monitoring strategies. *Water Science and Technology* 19, 721-727.

17. Somlyódy, L., and Pintér, J. (1987) Optimization models in water quality control. In: *Systems Analysis in Water Quality Management,* (ed. M.B. Beck), pp. 201-210. Pergamon Press, Oxford.

18. C. Fodor, J., and Pintér, J. (1988) Extreme order statistics applied for optimum estimation in 'hard' MP problems. In: *Transactions of the Tenth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, and Random Processes*, pp. 321-328. Academia Publishing House of the Czechoslovakian Academy of Sciences, Prague.

19. Pintér, J. (1988) Branch-and-bound algorithms for solving global optimization problems with Lipschitzian structure. *Optimization* 19, 101-110.

20. Boon, J. G., Pintér, J., and Somlyódy, L. (1989) A new stochastic approach for controlling point source river pollution. International Association for Hydrologic Sciences (London); *IAHS Publication* No. 180, 241-249.

21. Pintér, J. (1989) Deterministic approximations of probability inequalities. *ZOR - Methods and Models of Operations Research, Ser. Theory* 33, 219–239.

22. Cooke, R., and Pintér, J. (1989) Optimization in risk management. *Civil Engineering Systems* 6, 122–128.

23. Pintér, J. (1990a) Solving nonlinear equation systems via global partition and search: Some experimental results. *Computing* 43, 309–323.

24. Pintér, J. (1990b) On the convergence of adaptive partition algorithms in global optimization. *Optimization* 21, 231–235.

25. Pintér, J. (1990c) Globally optimized calibration of environmental models. *Annals of Operations Research* 25, 211–222.

26. Pintér, J. (1990d) Model calibration: Problem statement, solution method and implementation manual. *Research Report 90.024, National Institute for Inland Water Management and Wastewater Treatment,* Lelystad, The Netherlands.

27. Pintér, J. (1990e) Simplicial partition strategies for Lipschitzian global optimization. *Working Paper, National Institute for Inland Water Management and Wastewater Treatment*, Lelystad.

28. Pintér, J. (1990f) Stochastic decision models for risk analysis and management: A brief methodological overview. *Research Report 90.068, National Institute for Inland Water Management and Wastewater Treatment*, Lelystad.

29. Pintér, J., Benedek, P., and Darázs, A. (1990) Risk management of accidental water pollution: An illustrative application. *Water Science and Technology* 22, 265–274.

30. Pintér, J. (1991a) Stochastic modelling and optimization for environmental management. *Annals of Operations Research* 31, 527-544.

31. Pintér, J. (1991b) Global convergence revisited: Reply to A. Žilinskas. *Computing* 47, 87-91.

32. Pintér, J. (1991c) Adaptív partíciós módszerek globális optimalizálási feladatok megoldására. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 15, 329-352.

33. ten Hulscher, D., Bak-Eijsberg, C., and Pintér, J. (1991) Calibration of the model system DELWAQ-IMPAQT for the lake Ketelmeer. *Research Report 91.001, National Institute for Inland Water Management and Wastewater Treatment*, Lelystad.

34. Voogt, L., van Zetten, J., Bak-Eijsberg, C., and Pintér, J. (1991) Calibration of the one-dimensional flow model ZWENDL in the Noordelijk Deltabekken region: Some illustrative results. *Research Report 91.028, National Institute for Inland Water Management and Wastewater Treatment*, Lelystad.

35. de Lange, W. J., and Pintér, J. (1991) Groundwater quality assessment and management: Illustrative numerical results. *Research Report 91.031, National Institute for Inland Water Management and Wastewater Treatment*, Lelystad.

36. Hendrix. E. M. T., and Pintér, J. (1991) An application of Lipschitzian global optimization to product design. *Journal of Global Optimization* 1, 389–401.

37. Pintér, J., and Pesti, G. (1991) Set partition by globally optimized cluster seed points. *European Journal of Operational Research* 51, 127–135.

38. Pintér, J. (1992a) Convergence qualification of partition algorithms in global optimization. *Mathematical Programming* 56, 343–360.

39. Pintér, J. (1992b) Lipschitzian global optimization: Some prospective applications. In: *Recent Advances in Global Optimization* (ed. C. A. Floudas and P. M. Pardalos), pp. 399-432. Princeton University Press.

40. Pintér, J. (1993) *Environmentally Sensitive Investment System (ESIS) Project: Final Report.* School for Resource and Environmental Studies, and School of Business Administration, Dalhousie University, Halifax, Canada. (185 pp.)

41. Csendes, T., and Pintér, J. (1993a) The impact of accelerating tools on the interval subdivision algorithm for global optimization. *European Journal of Operational Research* 65, 314–320.

42. Csendes, T., and Pintér, J. (1993b) A new interval method for locating the boundary of level sets. *International Journal of Computer Mathematics* 49, 53–59.

43. van der Molen, D. T., and Pintér, J. (1993) Environmental model calibration under different problem specifications: An application to the model SED. *Ecological Modelling* 68, 1–19.

44. Finley, J. R., Pintér, J., and Satish, M. (1994) Aquifer model calibration applying global optimization. *Research Report 94-05, Department of Industrial Engineering, Technical University of Nova Scotia*, Halifax. (Appeared in modified form in: Proc. 3rd IASTED Conf. Reliability, Control, and Risk Assessment, Washington, D.C., Oct. 1994.)

45. Pintér, J., and Cooke, R. (1994) Combining negotiated expert opinions: A global optimization approach. *Working Paper, Department of Industrial Engineering, Technical University of Nova Scotia; and Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology.* (Közlésre benyújtva.)

46. Fels, M., Pintér, J. and Lycon, D. S. (1994) Optimized design of wastewater treatment systems: Application to the mechanical pulp and paper industry. *The Canadian Journal of Chemical Engineering.* (Megjelenés alatt.)
47. Pintér, J., Fels, M., Lycon, D. S., Meeuwig, J. W., and Meeuwig, D. J. (1995) An intelligent decision support system for assisting industrial waste management. *Annals of Operations Research* 58, 455–477.
48. Pintér, J. (1995a) *Environmental Studies Centers Development in Indonesia (ESCDI) Project. End of Assignment Report (Work at Sriwijaya University, Palembang, South Sumatra).* PPPSL Jakarta, and ESCDI Project, Dalhousie University, Halifax. (74 pp.)
49. Pintér, J. (1995b) *Global Optimization in Action. (Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications.)* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (508 pp.)
50. Pintér, J. (1995c) LGO: An implementation of a Lipschitzian global optimization procedure — User's guide. *Research Report NM-R9522, Department of Numerical Mathematics, National Research Institute for Mathematics and Computer Science (CWI),* Amsterdam.
51. Pintér, J., Stortelder, W. J. H., and de Swart, J. J. B. (1996) Numerical approximation of elliptic Fekete point sets applying LGO and DAE solvers: A global optimization approach. *Research Report, Department of Numerical Mathematics, National Research Institute for Mathematics and Computer Science (CWI),* Amsterdam. (Megjelenés alatt.)
52. Pintér, J. (1996a) LGO — A program system for continuous and Lipschitz global optimization. In: *Developments in Global Optimization,* (ed. I. M. Bomze, T. Csendes, R. Horst and P. M. Pardalos), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. (Megjelenés alatt.)
53. Pintér, J. (1996b) *LGO — A Program System for Continuous and Lipschitz Global Optimization. User's Guide.* Pintér Consulting Ser., Halifax. (43 pp.)
54. Pintér, J. (1996c) Continuous global optimization software: A brief review. Optima (Megjelenés alatt.)

CONTINUOUS AND LIPSCHITZ-CONTINUOUS GLOBAL OPTIMIZATION: ALGORITHMS AND APPLICATIONS

This paper reviews the subject of continuous and Lipschitz-continuous global (multiextremal) optimization. The essentials of globally convergent adaptive partition algorithms — basic concepts and main results — are summarized. Implementation aspects and extensions are also discussed. Finally, several case studies are highlighted. The paper is based upon the research monograph Pintér (1995b). For details, the interested Reader is referred to that book, and to the extensive list of references. *Keywords:* Continuous and Lipschitz-continuous global optimization; globally convergent adaptive partition algorithms; implementation aspects; the LGO integrated model development and solver system; application case studies.

TOVÁBBI MEGJEGYZÉSEK FORGÓ FERENC EGY PROBLÉMÁJÁHOZ[1]

SZIDAROVSZKY FERENC
Arizonai Egyetem, Rendszer- és Iparmérnöki Tanszék

Forgó egy korábbi dolgozatában kimutatta, hogy alkalmas feltételek mellett a hatékony és racionális ösztönzés akkor és csak akkor esik egybe, ha az f jövedelemfüggvény kielégíti az

$$f(a) \cdot \nabla f(a) = \int_0^1 \nabla f(ta)dt \cdot \nabla f(a)a$$

egyenletet, ahol ∇f az f gradiensvektora. Dolgozatunkban az egyenlet megoldásainak pontos leírását adjuk meg, kimutatva, hogy egy n-változós, valós értékű függvény alkalmas differenciálhatósági feltételek és pozitív elsőrendű parciális deriváltak mellett akkor és csak akkor elégíti ki az egyenletet egy K kúpon ($K \subset \mathbf{R}^n_+$), ha az elsőrendű parciális deriváltak hányadosai valamennyien konstansok és $f(0) = 0$.

1. Bevezetés

Forgó [1] dolgozatában egy n tagból álló gazdasági egységet vizsgál. Jelölje $x_i \in [0, 1]$ az i-edik tag intenzitását, ahol $x_i = 0$ a kiinduló szintnek, $x_i = 1$ pedig a maximális intenzitásnak felel meg. Az egység jövedelme az intenzitások f függvénye. Az f függvény értelmezéséből következik, hogy növekvő minden változójában. Forgó kimutatja, hogy a hatékony és racionális ösztönzés egy a intenzitásvektor esetén akkor és csak akkor esik egybe, ha

$$f(a) \cdot \nabla f(a) = \int_0^1 \nabla f(ta)dt \cdot \nabla f(a)a. \tag{1}$$

Goldner és Vízvári [2] cikkükben kimutatják hogy, ha f nem azonosan zérus, μ-edrendű ($\mu > 1$) homogén függvény, akkor tetszőleges a mellett kielégíti az (1) egyenletet. Dolgozatukban azt a sejtést is közlik, hogy f homogenitása szükséges feltétel is. Könnyen láthatjuk, hogy ez a sejtés nem igaz, amint azt az $f(a_1, a_2) = \exp(a_1 + a_2) - 1$ függvény esete mutatja.

[1] Beérkezett 1996. június 9.

Dolgozatunkban alkalmas (és a Forgó modellnek megfelelő) feltételek mellett az (1) egyenletet kielégítő függvények teljes jellemzését adjuk meg.

2. A megoldások jellemzése

A dolgozat fő eredménye a következő tétel.

TÉTEL. Legyen $D \subset \mathbf{R}^n$ egy nyílt halmaz, és $K \subset \mathbf{R}^n_+$ egy kúp. Tegyük fel, hogy $K \subset D$, és az $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonosan differenciálható és az elsőrendű parciális deriváltak valamennyien pozitívak a K kúpon. Egy f függvény a fenti feltételek mellett akkor és csak akkor elégíti ki az (1) egyenletet a K kúpon, ha $f(0) = 0$ és az $f_k(a)/f_\ell(a)$ hányadosok valamennyien konstansok, ahol $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jelöli az elsőrendű parciális deriváltakat.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f kielégíti a fenti feltételeket és az (1) egyenletet. Az $a = 0$ helyettesítés azonnal mutatja, hogy $f(0) = 0$. Legyen μ egy valós szám ($\mu \geq 0$) és helyettesítsük μa-t az (1) egyenletbe:

$$f(\mu a) \bigtriangledown f(\mu a) = \int_0^1 \bigtriangledown f(t\mu a)dt \cdot \bigtriangledown f(\mu a)\mu a\,. \qquad (2)$$

Vezessük be az $u = t\mu$ új változót az integrálban, akkor azt kapjuk, hogy $du = \mu dt$ és

$$\int_0^1 \bigtriangledown f(t\mu a)dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\mu \bigtriangledown f(ua)du\,.$$

A (2) egyenletet ez alapján átírhatjuk a következőképpen:

$$\frac{\bigtriangledown f(\mu a)a}{f(\mu a)} = \frac{f_k(\mu a)}{\int_0^\mu f_k(ua)du} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol csak azt kell feltennünk, hogy $\mu a \neq 0$, hiszen (1) alapján $f(a) > 0$ $a \neq 0$ esetén. Minthogy mindkét oldalon a számláló a nevező μ-szerinti deriváltja,

$$\ln f(\mu a) = \ln \int_0^\mu f_k(ua)du + \ln g_k(a)\,,$$

ahol $g_k(a)$ csak a-tól függ és μ-től független. Vagyis,

$$f(\mu a) = g_k(a) \int_0^\mu f_k(ua)du\,.$$

Deriválva μ szerint

$$\bigtriangledown f(\mu a)a = g_k(a) \cdot f_k(\mu a)\,,$$

azaz a

$$\frac{\nabla f(\mu a)a}{f_k(\mu a)}$$

függvény nem függ μ-től. Ha felírjuk ezt a kifejezést k valamennyi értékére és elosztjuk egymással, akkor azonnal látható, hogy valamennyi k és ℓ esetén az

$$\frac{f_k(\mu a)}{f_\ell(\mu a)}$$

hányadosok is függetlenek μ-től ($\mu a \neq 0$). Az elsőrendű parciális deriváltak folytonosságából adódóan a $\mu \longrightarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\frac{f_k(\mu a)}{f_\ell(\mu a)} = \frac{f_k(0)}{f_\ell(0)}$$

tetszőleges $a \in K$, $\mu \geq 0$ esetén. Tehát az elsőrendű parciális deriváltak hányadosai valamennyien konstansok.

Tegyük fel ezután, hogy egy f függvényre $f(0) = 0$ és $f_k(a)/f_\ell(a) = A_{k\ell}$ tetszőleges $a \in K$ mellett. Ekkor (1) baloldalának k-adik komponense:

$$f(a)f_k(a),$$

és (1) jobboldalának k-adik komponense:

$$\int_0^1 f_k(ta)dt \sum_{\ell=1}^n f_\ell(a)a_\ell = \int_0^1 f_k(ta)dt \left(a_k + \sum_{\ell \neq k} a_\ell A_{\ell k} \right) f_k(a)$$

$$= \int_0^1 f_k(ta) \left(a_k + \sum_{\ell \neq k} a_\ell A_{\ell k} \right) dt f_k(a) = \int_0^1 \left(\sum_\ell f_\ell(ta)a_\ell \right) dt f_k(a)$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(ta) dt f_k(a) = (f(a) - f(0))\, f_k(a) = f(a)f_k(a).$$

Tehát f kielégíti az (1) egyenletet. ∎

3. Megjegyzés

Egy látszólagos ellentmondás van a fenti tétel és a Goldner–Vízvári cikk [2] 3. Tétele között, ugyanis μ-edrendű ($\mu > 1$) homogén függvények nem feltétlenül elégítik ki a fenti tétel feltételeit. Például

$$f(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$$

2-rendű homogén függvény, de az

$$\frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{2a_1}{2a_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

hányados nem konstans. A probléma abból adódik, hogy $\mu > 1$ esetén a μ-edrendű homogén függvények elsőrendű parciális deriváltjai nem pozitívak. Ugyanis

$$\nabla f(ta) = t^{\mu-1} \nabla f(a),$$

és ∇f folytonossága esetén $t = 0$ helyettesítéssel láthatjuk, hogy $\nabla f(0) = 0$, így a függvény nem elégíti ki a dolgozat egyik alapfeltevését.

Irodalom

1. Forgó F., A hatékony és racionális elosztás (in)konzisztenciája: egy axiomatikus megközelítés, Szigma, XXIII (1992), 1–2. sz., 1–6.
2. Goldner G.–Vízvári B., Megjegyzések Forgó Ferenc egy problémájához. Szigma, XXV (1994), 4.sz., 203–206.

INFORMÁCIÓELMÉLETI MÓDSZEREK A BIZTOSÍTÁSBAN[1]

KOMÁROMI ÉVA
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

Az információtartalom, entrópia, információdivergencia információelméleti fogalmak, de széles körű alkalmazással bírnak ezek a fogalmak a fizikában, biológiában, orvostudományban, mezőgazdaságban, regionális tervezésben, alakfelismerésben és természetesen a közgazdaságtan, pénzügy, biztosítás területén is. A szolgáltatások és díjak, tartalék, függőkár, megtartás stb. számításához elengedhetetlen a statisztikai módszerek alkalmazása, a számítógépek jelenléte egyben lehetővé és természetessé is teszi az aktuárius számára a rendszeres statisztikai kiértékelést. Ebben a dolgozatban a statisztika egyik olyan területével foglalkozunk, amelyben a feltételek melletti optimalizálás kiemelt jelentőséggel bír. Eleinte a használt fogalmakat tisztázzuk, a matematikai apparátust mutatjuk be, majd az alkalmazás lehetőségét három példán illusztráljuk.

1. Információtartalom

Tegyük fel, hogy ismerjük egy E esemény p bekövetkezési valószínűségét. Tegyük fel, hogy egy későbbi időpontban határozott és megbízható hírt kapunk arról, hogy E valóban bekövetkezett. Ha $p = 0,99$, ez a hír nem lep meg, vagyis a hír információtartalma igen kicsi, ha p értéke 1-hez közel van. Ha azonban 0-hoz közeli, például $p = 0,01$, akkor a hír meglepő lesz, hiszen gyakorlatilag bizonyos volt, hogy az esemény nem következik be, vagyis ekkor a hír információtartalma nagy. Az információtartalom tehát a valószínűség csökkenő függvénye. E természetes követelménynek, továbbá annak a követelménynek is, hogy független események esetében additív legyen, eleget tesz az *információtartalom* mérésére általában használt $h(p) = \ln \frac{1}{p} = -\ln p$ függvény. Megjegyezzük, hogy az információtartalom axiomatikus megalapozásával itt nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasó ezt megtalálja például H. Theil könyvében [1].

Legyenek most egy kísérlet n lehetséges kimenetelének valószínűségei sorra $p_1, p_2, \ldots, p_n : p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum p_i = 1$. Ha egy határozott és meg-

[1] Beérkezett 1996. október 3.

bízható hírt veszünk arról, hogy az i. esemény bekövetkezett, akkor ennek a hírnek az infomációtartalma $h(p_i) = -\ln p_i$. Mielőtt a hír megérkezett, nem tudhattuk, mekkora lesz az információtartalma, hiszen a $h(p_1), \dots, h(p_n)$ számok bármelyike lehet. A hír megérkezése előtt is van azonban támpontunk: kiszámíthatjuk az érkező hír *várható információtartalmát*, azaz a

$$H(P) = H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i h(p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

értéket. A várható információtartalom egyúttal a szóban forgó valószínűség-eloszlásban bennefoglalt bizonytalanság, rendezetlenség egyik alkalmazható mértéke is. A $H(P)$ függvény a bizonytalanság *Shannon* által bevezetett mértéke.

2. A valószínűségeloszlásban megjelenő bizonytalanság mértéke: az entrópia

Ésszerű feltételezés, hogy egy kísérlet lehetséges kimeneteleit illető bizonytalanság H mértéke eleget tegyen a következő kívánalmaknak:

(i) H a lehetséges kimenetelek valószínűségeinek függvénye:

$$H = H_n(P) = H_n(p_1, \dots, p_n) .$$

(ii) A $p_1, p_2, \dots, p_n$ valószínűségeknek folytonos függvénye: ezek kis változásai H_n kis változását idézik elő.

(iii) Nem változik, ha a lehetetlen kimenetelt hozzávesszük a valószínűségi sémához:

$$H_{n+1}(p_1, \dots, p_n, 0) = H_n(p_1, \dots, p_n) .$$

(iv) Nem változik, ha a lehetséges kimenetelek sorrendjét megváltoztatjuk, azaz H_n az argumentumainak szimmetrikus függvénye.

(v) Minimális (zéró) értékű, ha a kimenetelt illetően nincs bizonytalanság:

$$H_n(p_1, \dots, p_n) = 0, \quad \text{ha} \quad p_i = 1 \qquad (i = 1, \dots, n) .$$

(vi) Maximális értékű, ha az összes kimenetel egyenlően valószínű, azaz a valószínűségek nem adnak támpontot, teljes a bizonytalanság azt illetően, hogy milyen esemény következik be: H_n felveszi a maximumát, ha

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n} .$$

(vii) H_n maximális értéke n értékével növekszik.

(viii) Két független valószínűségi eloszlás esetén, ha $A_1, \ldots, A_n$ illetve $B_1, \ldots,$ B_m jelölnek lehetséges kimeneteleket és $p_1, \ldots, p_n$ illetve $q_1, \ldots, q_m$ a kapcsolódó valószínűségeket, akkor az A_iB_j lehetséges kimenetelekkel és p_iq_j valószínűségekkel bíró kísérlet ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$) bizonytalanságát mérő $H_{n+m}(P \cup Q)$ függvényre fennáll, hogy

$$H_{nm}(P \cup Q) = H_n(P) + H_m(Q).$$

Egy valószínűségeloszlás bizonytalanságának a mértékét *az eloszlás entrópiájának* nevezzük. Itt az "entrópia" kifejezés információelméleti és nem termodinamikai eredetű.

A bizonytalanság Shannon által bevezetett (várható információtartalom) függvénye kielégíti a felsorolt nyolc tulajdonságot: folytonos és szimmetrikus függvény, és ha a $0 \ln 0 = 0$ konvenciót alkalmazzuk, akkor teljesíti a (iii) tulajdonságot. Mivel $-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ konkáv függvény, ezért lokális maximumhelye: $p_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$ egyúttal globális is, és maximális értéke $\ln n$. Maximális értéke n növekedésével nő. Ha a valószínűségek egyike 1, akkor $H_n = 0$, ez tehát a nemnegatív H függvény minimuma. Végül, független valószínűségi változók esetén

$$\begin{aligned}
H_{nm}(P \cup Q) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(p_iq_j)\ln(p_iq_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p_i \left[\sum_{j=1}^{m} q_j \ln q_j\right] - \sum_{j=1}^{m} q_j \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i H_m(Q) + \sum_{j=1}^{m} q_j H_n(P).
\end{aligned}$$

Az információelméletben nem a felsorolt nyolc követelmény alkotja az egyetlen axiómarendszert a bizonytalanság mértékét illetően, ennek megfelelően nem a Shannon-féle entrópia az egyetlen entrópia-függvény. Más axiómarendszernek más függvények tesznek eleget, erre vonatkozó utalásokat ld. pl. Mathai és Rathie [3] illetve Kapur [2] könyvében. A különböző típusú entrópiák közötti összefüggést és az entrópiafogalom hírközlésben való alkalmazását F. M. Reza [4] részletesen tárgyalja.

3. Információ-divergencia

Tegyük fel ismét, hogy van n eseményünk, amelyek teljes eseményrendszert alkotnak és valószínűségeik rendre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Most és a továbbiakban feltesszük, hogy $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ értékeket előzetes vagy *a priori* valószínűségeknek nevezzük. Beérkezik a hír, de nem arról, hogy valamelyik esemény bekövetkezett volna, hanem arról, hogy az esélyek megváltoztak: némelyik esemény valószínűbbé vált, más meg valószínűtlenebbé. A hír az előzetes valószínűségeket a $p_1, p_2, \dots, p_n$ utólagos vagy *a posteriori* valószínűségekké változtatja. Ha egyik p_i értéke 1, a többi 0, akkor a hírben közvetített információ-tartalom $-\ln \alpha_i$. Ha a hír csak az i. eseményre szorítkozik, akkor a hírben közvetített információ az előzetes és az utólagos valószínűségekben foglalt információ-tartalmak különbsége: $\ln \frac{p_i}{\alpha_i}$. A hír azonban nem szorítkozhat egyetlen eseményre, ellenkezőleg, azt állítja, hogy minden eseménynek megvan a saját utólagos valószínűsége. Így a hírben közvetített várható információtartalom: $I_n(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{\alpha_i}$, amelyet *információ divergenciának* vagy *I-divergenciának* neveznek. Jelölésére az $I(\alpha; P)$ is használatos. Felhívjuk az olvasó figyelmét Csiszár dolgozatára [5] az információ divergencia és az optimalizációs problémák közötti kapcsolatról.

Az $I_n(P)$ várható információtartalom nemnegatív. Ez az állítás a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenségből adódik a következőképpen:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\alpha_i}{p_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right)^{p_i}$$

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{\alpha_i}{p_i}, \qquad \text{vagyis} \qquad 0 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{\alpha_i}$$

és egyenlőség áll fenn akkor és csak akkor, ha $p_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$. Megjegyzendő, hogy $I_n(P)$ értéke végtelen nagy is lehet akkor, ha valamely hírre $p_i > 0$ *és* $\alpha_i = 0$. Megjegyzendő továbbá, hogy teljes előzetes bizonytalanság esetén, amikor tehát $\alpha_i = \frac{1}{n}$ minden i indexre, akkor a várható információ: $I_n(P) = \ln n - \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{1}{p_i} = \ln n - H_n(P)$.

4. A maximum-entrópia elv

A várható információ most bevezetett fogalma és jelentése alapján kibővíthetjük az entrópia fogalmát is. A Shannon-féle entrópia maximális értékű, ha valamennyi lehetséges kimenetel egyenlően valószínű. Ha azonban okunk van azt feltételezni, hogy adott egy *a priori* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ eloszlás $(\alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1)$, akkor egy másik entrópiát vezethetünk be a következő összefüggés formájában:

$$B(P) = -\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{\alpha_i}\right] - \ln\left(\min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad p_i \geq 0, \alpha_i \geq 0,$$

amely az $I_n(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{\alpha_i}$ helyettesítéssel

$$B(P) = -I_n(P) - \ln\left(\min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\right)$$

alakban írható. Kapur említett könyvében $B(P)$-t *Bayes-féle entrópiának* nevezi, mivel a kifejezés az *a priori* és *a posteriori* valószínűségeloszlások egy függvénye. Értéke maximális, ha az $I_n(P)$ információ-divergencia minimális és minimális, ha $I_n(P)$ maximális.

Ha csak az előzetes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ valószínűségeloszlást ismerjük, a $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ valószínűségeloszlásról azt kell feltételeznünk, hogy megegyezik az előzetes valószínűségeloszlással, azaz minimalizálja az információ-divergenciát. Ha azonban más információ is rendelkezésünkre áll, például a megjósolandó eloszlás várható értéke vagy szórása, akkor nem választhatjuk az előzetes eloszlást, ha az nem elégíti ki a szóban forgó feltételt. Ekkor olyan P utólagos valószínűségeloszlást kell választanunk, amely az adott feltétel(ek) mellett a "legközelebb áll" az előzetes valószínűségeloszláshoz: minimalizálja az információ-divergenciát, vagyis maximalizálja a Bayes entrópiát. Ez a *"maximum-entrópia elv"*. Azt a valószínűségeloszlást, amelyet a maximum-entrópia elv alkalmazásával számítunk, maximum-entrópia eloszlás, legvalószínűbb eloszlás, legegyenletesebb eloszlás és egyéb neveken is említik.

A Bayes-entrópia a megszámlálhatóan végtelen lehetséges kimenetelt tartalmazó kísérletre a

$$B = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln \frac{p_i}{\alpha_i}$$

formulával adható meg. Hasonlóan, folytonos esetben

$$B = -\int_{\mathrm{supp}\,\alpha}^{\infty} f(x) \ln \frac{f(x)}{\alpha(x)} dx,$$

ahol $f(x)$ és $\alpha(x)$ az utólagos (*a posteriori*) és előzetes (*a priori*) valószínűségi eloszlás sűrűségfüggvénye. Mindkét esetben a minimalizálandó I információ-divergencia a Bayes-entrópia negatívja, a P valószínűségeloszlás ill. $f(x)$ sűrűségfüggvény konvex függvénye. Az információ-divergencia minimalizálása rendszerint loglineáris model, amelynek megoldása konvex programozási eszközökkel történhet.

5. Az I-divergencia minimalizálása, mint konvex programozási feladat

A minimalizációs feladat, amellyel a konvex programozás foglalkozik, a következő:

$$\begin{aligned} \theta(x) &\rightarrow \min \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i=1,\ldots,m; \quad x \in R^n \end{aligned}$$

E feladathoz kapcsolódik a

$$\begin{aligned} \nabla\theta(x)+\sum_{i=1}^{n} u_i \nabla g_i(x) &= 0, \quad u_i \geq 0, \qquad i=1,\ldots,m; \\ \sum_{i=1}^{n} u_i g_i(x) &= 0, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i=1,\ldots,m; \end{aligned}$$

Kuhn-Tucker feladat, amelynek a megfogalmazásában feltételezzük, hogy θ és g_i differenciálható függvények. Az u_i változókat Lagrange-szorzóknak nevezzük, a $\theta(x) + \sum u_i g_i(x)$ függvényt pedig Lagrange függvénynek. A Kuhn-Tucker feladat első n feltétele azt írja elő, hogy a Lagrange függvény parciális deriváltjai legyenek 0 értékűek. A következő m feltétel a Lagrange szorzók nemnegativitását illeti, az utolsó m feltétel a minimalizációs feladat feltételei. A közbülső feltétel az egyensúlyi feltétel: mivel $u_i \geq 0$ és $g_i \leq 0, \quad i=1,\ldots,m$, ezért szorzataik összege nempozitív, és 0 csak akkor, ha az összeg minden tagja 0, azaz, $u_i = 0$ ha $g_i(x) < 0$. Ha egyenlőtlenségi feltételek helyett egyenlőségi feltételek szerepelnek a minimalizációs feladatban, akkor a megfelelő u_i Lagrange szorzók előjelkötetlenek és a megfelelő tagok az egyensúlyi feltételben 0 értékűek. A Kuhn-Tucker feladathoz és az alább bemutatott nyeregpont feladathoz kapcsolódó tételeket, eredményeket ld. pl. Mangasarian [6] könyvében.

Kuhn-Tucker optimalitási tétel: Tegyük fel, hogy a θ és g_i függvények differenciálhatók az $x^\circ \in R^n$ pontban. (1) Tegyük fel, hogy θ és g_i konvexek. Ha (x°, u°) megoldása a Kuhn-Tucker feladatnak, akkor x° optimális megoldása a minimalizációs feladatnak. (2) Tegyük fel, hogy x° optimális megoldása a minimalizációs feladatnak. Tegyük fel, hogy a feladat feltételrendszere kielégíti valamelyik regularitási feltételt. Akkor létezik olyan $u^\circ \in R^m$, hogy (x°, u°) kielégíti a Kuhn-Tucker feladatot.

Ezt a tételt abban az esetben fogjuk alkalmazni, amikor a szóban forgó valószínűség-eloszlás diszkrét. Az I-divergencia konvex függvény. Minimalizálásakor azon feltételek mindig megjelennek, amelyek kikötik, hogy a p_j változók nemnegatívok és összegük 1. A többi feltételek rendszerint valamely momentum értékére, pl. a várható értékre vonatkoznak egyenlőségi feltételek formájában. A tétel egyenlőségi feltételek esetén akkor alkalmazható, ha mind a g_i, mind a $-g_i$ függvények konvexek, azaz g_i a p_j változók lineáris függvénye, amely a felsorolt esetekben fennáll. A regularitási feltételek közül a leggyakrabban alkalmazottak a Slater feltétel, az Arrow-Hurwitz-Uzawa feltétel, a Kuhn-Tucker feltétel és a linearitás. Az általunk itt tárgyalt esetekben a feltételek lineárisak, így a tétel második állítása is alkalmazható.

A minimalizációs problémához kapcsolódik az alábbi, *Kuhn-Tucker nyeregpont feladat* is, amelyben a nyeregfüggvény az említett Lagrange függvény:

Keressünk olyan $x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$ és $u^\circ = (u_1^\circ, \dots, u_m^\circ) \geq 0$ vektorokat, amelyekre fennáll, hogy

$$\theta(x^\circ) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x^\circ) \leq \theta(x^\circ) + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ g_i(x^\circ) \leq \theta(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ g_i(x)$$

minden $u \geq 0$, $u \in R^m$, $x \in R^n$ mellett.

Kuhn-Tucker nyeregpont optimalitási tétel: (1) Ha (x°, u°) megoldása a Kuhn-Tucker nyeregpont feladatnak, akkor x° optimális megoldása a minimalizációs feladatnak. (2) Ha x° optimális megoldása a minimalizációs feladatnak és $\exists \tilde{x} \in R^n$, amelyre $g_i(\tilde{x}) > 0$ ha a g_i függvény nemlineáris, akkor $\exists u^\circ$, hogy (x°, u°) megoldása a Kuhn-Tucker nyeregpont feladatnak.

Ezt a tételt abban az esetben fogjuk alkalmazni, amikor a szóban forgó valószínűség-eloszlás folytonos. Vizsgáljuk először a diszkrét esetet. Feladatunk tehát

$$\begin{aligned} I_n(P) &= \sum_{j=1}^{n} p_j \ln \frac{p_j}{\alpha_j} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ P &= (p_1, \dots, p_n) \geq 0 \end{aligned}$$

alakú, ahol az A $m\times n$ méretű mátrix és a b m-méretű vektor adottak. Mivel a feltételek között a $\sum p_j = 1$ szükségképpen megjelenik, ezért az optimális megoldás (ha létezik) nem változik, ha a célfüggvényből levonjuk $\sum p_j$ -t, amit célszerűségi okokból megteszünk. Célfüggvényünk tehát:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \ln \frac{p_j}{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} p_j \to \min .$$

Ehhez a feladathoz kapcsolódó Kuhn-Tucker feladat a következő: Keresünk olyan $P^\circ = (p_1^\circ, \ldots, p_n^\circ)$ és $u^\circ = (u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ)$ értékeket, amelyek megoldják az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j &= b_i, \quad i = 1, \ldots, m; \\ (p_1, \ldots, p_n) &\geq 0; \\ \ln p_j - \ln \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\ln p_j - \ln \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right) &= 0 \end{aligned}$$

A Kuhn-Tucker optimalitási tétel szerint minimalizációs feladatunknak pontosan akkor van optimális megoldása, ha a leírt kapcsolódó Kuhn-Tucker feladatnak van (P°, u°) megoldása. Alkalmazva a $z_i = -u_i, i = 1, \ldots, m$ helyettesítést, a feladat P megoldását a következő ún. multiplikatív alakban:

$$p_j = \alpha_j e^{\sum z_i a_{ij}} = \alpha_j \prod_{i=1}^{m} \{e^{a_{ij}}\}^{z_i} ,$$

illetve a vele ekvivalens

$$\ln \frac{p_j}{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij}$$

loglineáris alakban keressük, amely a fenti egyensúlyi feltétellel együtt hangsúlyozza az utólagos valószínűség azon tulajdonságát is, hogy valamelyik eleme a valószínűség-eloszlásnak pozitív értékű pontosan akkor, amikor az előzetes valószínűség megfelelő eleme pozitív értékű.

Írjuk most fel a minimalizációs feladatunk *duálisát*, és nézzük meg, mit mond a dualitási tétel a minimalizációs feladat optimális megoldásáról:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \ln \frac{p_j}{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j - b_i\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\ln \frac{p_j}{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \right) \to \max$$

$$\ln \frac{p_j}{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

A feltételek így is felírhatók

$$p_j \geq \alpha_j e^{\sum z_i a_{ij}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Vegyük észre, hogy a maximalizálandó célfüggvény összevonások után a következő:

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} z_i b_i.$$

Vegyük továbbá észre, hogy a feladat optimális megoldására a feltételek egyenlőséggel kell, hogy teljesüljenek. Alakítsuk át a duális feladatot minimalizációs feladattá ez utóbbi észrevétel figyelembevételével. Ekkor az alábbi feltétel nélküli optimalizációs feladatot kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij}} - bz \to \min$$

amely csak a $(z_1, \ldots, z_m)$ duális változók függvénye. A gyenge dualitási tétel értelmében a prímál és duál feladat célfüggvényértékei között fennáll a

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij}} - bz \geq -\sum_{j=1}^{n} p_j \ln \frac{p_j}{\alpha_j} + \sum_{j=1}^{n} p_j$$

egyenlőtlenség, amely egyenlőséggel teljesül, ha $p_j = \alpha_j e^{\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij}}$, $j = 1, \ldots, n$. A dualitási tétel szerint tehát, ha a prímál feladatnak van optimális megoldása, akkor az ezen multiplikatív illetve az ekvivalens loglineáris formában írható fel.

Tekintsük most a folytonos esetet. Feladatunk ekkor

$$\begin{aligned}
\int_{\operatorname{supp}\alpha} f(x) \ln \frac{f(x)}{\alpha(x)} dx &\to \min \\
\int_{\operatorname{supp}\alpha} f(x) dx &= b_1 = 1, \\
f(x) &\geq 0, \\
\int_{\operatorname{supp}\alpha} a_i(x) f(x) dx &= b_i, \quad i = 2, \ldots, m,.
\end{aligned}$$

ahol $\operatorname{supp}\alpha$ az $\alpha(x)$ sűrűségfüggvény tartója (az R azon legszűkebb részhalmaza, amelynek valószínűségi mértéke 1). E feladat Lagrange függvénye:

$$L = \int\limits_{\operatorname{supp}\alpha} f(x)\ln\frac{f(x)}{\alpha(x)}dx + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\int\limits_{\operatorname{supp}\alpha} a_i(x)f(x)dx - b_i \right)$$

ahol alkalmaztuk az $a_1(x) = 1$ jelölést. Rögzített u_i értékek esetén az L függvény az $f(x)$ függvényben minimalizálandó, a minimalizálás szempontjából pedig a $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i b_i$, konstans lévén, elhagyható. Így a minimalizálandó függvény:

$$\begin{aligned}
& \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\ln\frac{f(x)}{\alpha(x)} + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i(x)\right)dx \\
= & \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{\ln\left[\frac{f(x)}{\alpha(x)}e^{\sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_i(x)}\right]\right\}dx \\
\geq & \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{1 - \frac{\alpha(x)}{f(x)}e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_i(x)}\right\}dx
\end{aligned}$$

mivel $\ln Z \leq Z - 1$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $Z = 1$, vagyis amikor

$$f(x) = \alpha(x)e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_i(x)}$$

alakú, azaz, $z_i = -u_i$ helyettesítéssel, amikor

$$f(x) = \alpha(x)\prod_{i=1}^{m}\left(e^{a_i(x)}\right)^{z_i},$$

másként:

$$\ln\frac{f(x)}{\alpha(x)} = \sum_{i=1}^{m} z_i a_i(x)$$

alakú, így az eredményül kapott reprezentáció $f(x)$ számára ismét a multiplikatív, illetve a loglineáris forma.

Megjegyzendő, hogy ha előzetes valószínűségeloszlást nem veszünk számításba, akkor a fenti összefüggésekben az $\alpha_j = 1$, $j = 1, \dots, n$ illetve $\alpha(x) \equiv 1$ helyettesítés alkalmazandó.

6. Entrópia-maximalizálásra épülő biztosításmatematikai modellek

Standard vagy referenciaeloszlásokat, statisztikákat kis biztosítótársaságok, vagy nagy biztosítótársaságok speciális módozataikban, nem mindig alkalmazhatnak rutinszerűen, mert klientúrájuk összetétele nem feltétlenül tükrözi annak a népességnek az összetételét, amelyre a statisztika készült. A probléma ekkor az, hogyan lehet elméletileg megalapozottan összehasonlítani és igazítani a referenciaeloszlást úgy, hogy a létrehozott eloszlás megfeleljen a szóban forgó biztosítótársaság klientúrájának, de a referenciaeloszláshoz a lehető legközelebb legyen. Az alábbi két problémával Brockett [7] illetve Brockett és Cox [8] foglalkoztak, a közölt megoldások tőlük származnak.

Munkaképtelenség időtartamának az eloszlása

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egyetlen feltétel van: a kliens várható munkaképtelenségének az időtartama: $\mu = 21$ nap, szemben a referenciatáblában feltüntetett várható időtartammal. A referenciatábla a $q_1, \dots, q_n$ értékekből áll, ahol q_j annak a valószínűsége, hogy a munkaképtelenség j napig tart. A feladat olyan, a munkaképtelenség időtartamára vonatkozó táblát létrehozni, amely a referenciatáblától a lehető legkisebb mértékben különbözik, de teljesíti a $\mu = 21$ nap feltételt. A probléma megoldása többek között a díjszabás megállapításához is szükséges.

Jelölje q_i annak a valószínűségét, hogy egy ügyfél munkaképtelensége i napon át tart, a referenciatábla szerint. Jelölje p_i az ismeretlen valószínűségét annak, hogy az ügyfél munkaképtelenségének időtartama i nap lesz. A $\{p_i\}$ valószínűségeket az alábbi feladat megoldásaként kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{\omega} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \quad \rightarrow \quad \min$$

$$\sum_{i=1}^{\omega} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{\omega} i p_i = 21, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, \omega.$$

A fentiek szerint ennek a problémának a megoldása a következő alakú:

$$p_i = q_i e^{z_1 + i z_2} = q_i (e^{z_1})(e^{z_2})^i$$

Mivel a célfüggvény szigorúan konvex, ezért a minimalizációs feladatnak egyetlen optimális megoldása van, és így a p_i-re kapott kifejezés behelyettesítése után a feltételeket képviselő két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszernek egyetlen (z_1, z_2) megoldása van, amelyet iterációs eljárással vagy más módszerrel kiszámíthatunk. Brockett számítási eredményeit és az eredményül kapott valószínűség-eloszlást a hivatkozott dolgozata táblázatos formában bemutatja.

A halandósági táblák kiigazítása

Gyakori eset, hogy egy speciális ügyfélre vonatkozóan az aktuáriusnak el kell térnie számításaiban a standard halandósági táblától. Példaként tekintsünk egy 50 éves, bizonytalan egészségi állapotú ügyfelet, aki életbiztosítást is magában foglaló biztosítást kíván kötni. Az aktuárius szükségképpen választ egy standard halandósági táblát, amelyet azonban módosítania kell, ha az orvos az ügyfél hátralévő μ várható életkorát a halandósági táblában szereplő e_{50} értéktől különbözőnek ítéli. Tegyük fel, hogy az orvos szerint $\mu = 9 \neq e_{50}$. Tegyük fel továbbá, hogy emellett az orvos 50% esélyt ad annak, hogy az illető az 55. és 65. születésnapja között hal meg. Hogyan alakítsa az aktuárius a rendelkezésére álló halandósági táblát, hogy az a lehető legkevésbé térjen el a választott standard halandósági táblától, de mégis illeszkedjen az ügyfélnek az orvosi véleményben megfogalmazott halandósági tulajdonságaihoz – ezt fogalmazzuk meg az alábbi modellben, amelyben q_i jelöli a standard halálozási valószínűségeket, p_i pedig a számítandó halálozási valószínűségeket:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\omega} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \quad &\longrightarrow \quad \min \\
\sum_{i=0}^{\omega} p_i \quad &= \quad 1, \qquad \sum_{i=0}^{\omega} i p_i = 9, \\
\sum_{i=5}^{14} p_i \quad &= \quad 0,5, \quad p_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \omega \,.
\end{aligned}
$$

A feladat feltételeit kielégítő p_i értékeket a

$$p_i = q_i e^{z_1 + i z_2 + a(i) z_3}$$

formában keressük, ahol

$$
a(i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i < 5; \\ 1, & \text{ha } 5 \leq i \leq 14 \\ 0, & \text{ha } i > 14 \end{cases}
$$

A feladat megoldása ismét egy háromismeretlenes, 3 egyenletet tartalmazó egyenletrendszer megoldását jelenti. Az eredmény Brockett és Cox [8] dolgozatában az ott közölt halandósági tábla alapján a következő:

$$
p_i = \begin{cases} q_i(1,342125)(0,96353)^i, & \text{ha } i < 5 \\ q_i(1,891812)(0,96353)^i, & \text{ha } 5 \leq i \leq 14 \\ q_i(1,342125)(0,96353)^i, & \text{ha } i > 14 \end{cases}
$$

Egyenlőtlenségi feltételeket is tartalmazó feladatok találhatók még Charnes et al. [9] dolgozatában.

A kárnagyság eloszlásának számítása információelméleti módszerrel

Legyen f(t) a sűrűségfüggvénye az egy bizonyos a érték fölötti kárigény nagyságának. Akkor

$$\int_a^\infty f(t)dt = 1.$$

A szimmetrikustól nagyon eltérő eloszlásnak esetleg nincs véges várható értéke, ezért az

$$\int_a^\infty \ln t f(t)dt = \ln b$$

feltételt támasztjuk. Ekkor az entrópiafüggvény maximalizálása két feltétel mellett történik, az $f(t)$ sűrűségfüggvény alakja a következő:

$$f(t) = e^{z_1 + z_2 \ln t}.$$

Használjuk fel az első feltételt:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_a^\infty e^{z_1 + z_2 \ln t} dt = e^{z_1} \int_a^\infty t^{z_2} dt \\ &= e^{z_1} \frac{a^{z_2+1}}{-z_2 - 1}, \quad \text{ahol} \quad z_2 < -1 \,. \end{aligned}$$

Alkalmazva az $\alpha = -z_2$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy $e^{z_1} = (\alpha - 1)e^{\alpha - 1}$. Az eljárás tehát az

$$f(t) = (\alpha - 1)a^{\alpha - 1}t^{-\alpha}, t \geq a, \alpha > 1$$

sűrűségfüggvényhez vezet, ami a *Pareto* eloszlás sűrűségfüggvénye. Ha $\alpha < 2$, akkor a kárnagyság várható értéke nem véges, de a $\ln t$ várható értéke véges. Ha $\alpha > 2$, akkor mindkét várható érték véges.

Irodalom

1. Theil, H.: Közgazdaságtan és információelmélet, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest (1970).
2. Kapur, J. N.: Maximum-Entropy Models in Science and Engineering, John Wiley & Sons, Inc., New York (1989).

3. Mathai A. M., Rathie P. N.: Basic Concepts in Information Theory and Statistics, Wiley Eastern Limited, New Delhi (1975).
4. Reza, F. M.: Bevezetés az információelméletbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1966).
5. Csiszár, I.: I-Divergence Geometry of Probability Distribution and Minimization Problems, Annals of Probability 3 (1975), pp. 146-158.
6. Mangasarian, O. L.: Nonlinear Programming, McGraw-Hill Book Company, New York (1969).
7. Brockett, P. L.: Information Theoretic Approach to Actuarial Science: a Unification and Extension of Relevant Theory and Applications, TSA 43 (1991), pp. 73–113.
8. Brockett, P. L. és Cox, S.: Statistical Adjustment of Mortality Tables to Reflect Known Information, TSA 36(1984), pp. 63–71.
9. Charnes, A., Cooper, W. W. és Tyssedal, J.: Khinchine-Kullback-Leibler Estimation with Inequality Constraints, Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization 14 (1983), pp. 1–4.

INFORMATION THEORY IN ACTUARIAL SCIENCE

The paper deals with a branch of statistics in which optimization plays an important role. It presents the maximum entropy approach for incorporating prior information into the determination of probability distributions. First, the concept of 'information' and 'uncertainty' and their appropriate measures are introduced. Next, the maximum entropy methodology is presented in the form of a mathematical programming model, and duality statements are applied to develop the formula for its situation. Finally, the method is shown to be useful in several areas in actuarial modeling.

A KAMAT, A JELENÉRTÉK ÉS A KÖLCSÖNTÖRLESZTÉS OPTIMALIZÁLÁSA[1]

SOMOGYI LÁSZLÓ
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

A kamattól elvárjuk, hogy ekvivalenssé tegye egy jelenbeli összeg és egy helyette felkínált jövőbeli pénzáram jelenértékét. Meglepő, de rávilágítunk, hogy napjaink kamatszámításának gyakorlata – elvárásunk ellenére – lehetőséget nyújt a kölcsönügyletek jelenértékével való manipulálásra (ezt ne a kifejezés negatív jelentésével értsük)! Megmutatjuk, hogy léteznek olyan egzakt és meghatározható paraméterek, melyek figyelembevételével egy kölcsönügylet nem-zéró összegű játszmaként tekinthető, így a törlesztés ütemezésének helyes megválasztása által lehetségessé válik, hogy annak jelenértéke mind a kölcsönt adó, mind a kölcsönt felvevő számára egyidőben pozitív és optimális legyen! Röviden bemutatásra kerül egy algoritmus, mely a vázolt optimalizálási lehetőséget – az ismertetett modell feltételrendszerének általános eset felé való továbbfejlesztésével– a kölcsönből finanszírozott lízingbeadás példáján szemlélteti.

Bevezetés

Kölcsönnyújtási gyakorlatunk rákényszerül, hogy integráljon olyan jelenségeket, mint a kamat és tőketörlesztések*egymástól eltérő* időpontokban való felszámítása, vagy *változó hosszúságú* törlesztési periódusok kezelése.

Új jelenségek új, és néha a megszokott elvek helyességét megkérdőjelező következtetéseket vonnak maguk után. Az egyik ilyen elv, hogy mind a kölcsönt adónak, mind a kölcsön felvevőjének ésszerű a kölcsön mielőbbi visszafizetésére való törekvése.

Felülvizsgáljuk, hogy valóban így van-e. Kiindulópontunk, hogy *meg kell különböztetni azt a két szemléletet, mellyel a kölcsönt adó illetve a kölcsönt felvevő minősíti a pénzt*: Ennek alapját a számukra eltérő hozamtermő képessége jelenti, melyet – *egyelőre a felek megkülönböztetése nélkül* – nevezzünk kamatnak (kamatlábnak).

[1] Beérkezett 1995. november 11.

A kamat egyik tulajdonsága, hogy közömbössé teszi a jelenbeli X és a jövőbeli $X(1+i)$ pénzmennyiségek közötti választást (i legyen most *pontosan az adott periódusra eső* kamatláb): A tulajdonos a birtokában lévő X összegről hajlandó lemondani, ha helyette a jövőben $X + Xi$ összeget, vagy ennél többet kap, és nem hajlandó lemondani, ha X pénzéért a jövőben felkínált az előbbi határ értékénél kevesebb. Így elmondhatjuk, hogy a tulajdonos számára a jövőbeli $X(1+i)$ összeg a jelenben X összeget ér, és megfordítva.

Egy prognosztizált pénzáram értékének becslésekor az egyik legfontosabb figyelembe veendő tényező – elfogadhatóságának akár döntési kritériuma is - annak jelenbeli értéke.

Ha a kamat valóban kiegyenlíti egy jelenbeli összeg, és a helyette felkínált jövőbeli pénzáram jelenértékét, akkor nincs értelme annak, hogy egy kölcsön törlesztő részleteinek optimalizálásáról beszéljünk, hiszen a törlesztő részletek jelenértéken – a kamat révén – ekvivalensek a kölcsönadott összeggel.

Be fogjuk látni, hogy a helyzet nem ez, és igenis tud – bizonyos esetekben akár explicit formában kifejezhető – optimális törlesztési ütemezést választani mind a kölcsönt adó, mind a kölcsön felvevője! Meglepő, de ki fog derülni, hogy – amennyiben az ütemezések értékelése a jelenérték kritérium alapján történik – létezhet olyan ütemezés, mely egyidőben optimális mindkét fél számára!

Tekintsünk el attól, hogy ma a kölcsönt adók a jövőre vonatkozó kalkulációk bizonytalansága miatt mielőbb pénzükhöz szeretnének jutni, és tegyük fel a továbbiakban, hogy a kölcsönt adók kamatlába és inflációs várakozása stabil, legalább a kölcsönügylet által érintett időintervallum folyamán (nevezzük ezt a továbbiakban stabilitási feltételnek)! Tegyük fel azt is, hogy tranzakciós költségek nincsenek, vagyis a kamatlábban megfogalmazódó értékszemlélet tranzakciós költségekre vonatkozó fedezete zérus! *Vegyük majd észre a számítások átgondolása után, hogy ez utóbbi feltételezés az állításainkra vonatkozóan nem jelent megszorítást*, mert – bár a számítások összetettebbekké válnának – azok igazsága méginkább nyilvánvaló lenne!

E feltételezések mellett a következő kérdésre keressük a választ: X összeget kölcsönadva, a *helyette felkínált tőketörlesztések $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kamatos* pénzáramának ($X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$; $X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0$) milyen ütemezése mellett nyeri a kölcsönt adó jelenértéken a legmagasabb összeget, és a kölcsön felvevője számára az előbbi pénzáram jelenértéken mikor lesz úgyszintén maximális?

A kamatszámítás lehetőségei

Különböztessük meg a kamat felszámításának alábbi – *akár csak elméletileg is lehetséges* – módjait, és figyeljük a törlesztési pénzáram jelenértékét (melyet most *ugyanazon kamatláb által meghatározott diszkonttényezővel* tekintünk)!

1. Ha a *kamat felszámítása folyamatos*, akkor bármilyen, kamatokkal számított törlesztési pénzáram jelenértéke pontosan a kölcsönadott összeg.

2. Ha a törlesztés periódusai *azonos hosszúságúak*, *i pontosan az egy periódusra eső kamat*, a *törlesztések periódusonként történnek tőke + kamat* formájában, akkor a törlesztési pénzáram jelenértéke megint pontosan a kölcsönadott összeg, a kamatot akár mindig az éppen kint lévő tőkére, akár – mint elméleti lehetőség! – mindig az éppen aktuális törlesztő részletre számítottuk fel.

3. Gyakoribb eset, mikor a kamat éves szinten van meghatározva, és több törlesztés is történik az éves periódus alatt. Ha – mint elméleti lehetőség! – a kamat felszámítása most mindig az aktuális törlesztő részletre történik, úgy a kamat újra teljesíti, hogy a törlesztési pénzáram jelenértéke pontosan a kölcsönadott összeg.

A sorolt esetek egyikében sincs tehát hatással az ütemezés a kölcsönügylet pénzáramának jelenértékére. Azonban létezik a soroltaktól eltérő gyakorlat is!

4. A kamat éves szinten van meghatározva, és több törlesztés is történik az éves periódus alatt. A kamat felszámítása mindig az aktuálisan kint lévő tőkére történik, a *kamat és tőketörlesztések akár eltérő és változó tartamú időszakonként kerülhetnek felszámításra, és a kamatszámítási periódus hossza nem feltétlenül kell hogy megegyezzen egyik törlesztési időszak hosszával sem!*

Foglaljuk össze e szándékosan utolsónak hagyott eset feltételeit, a könnyebb kezelhetőség végett egyszerűsítve a probléma megfogalmazásán:

X összeg kölcsönéről van szó; *i éves szintű* kamatláb; két törlesztő részletet tekintünk, $X = X_1 + X_2$ ahol $X_1, X_2 \geq 0$; a törlesztések egyenlő időközönként történnek, mégpedig t és $2t$ időpontokban, ahol t a napok számát jelöli úgy, hogy $2t < 365$; a kamatot mindig az éppen kint lévő tőke után számítjuk fel (és nem az éppen törlesztett tőkére, mint – elméleti lehetőség! – tettük azt a 3. esetben!).

(Megint nem jelenti az általánosság korlátozását, de az ütemezési lehetőségek közül részletes elemzéssel az X összeg X_1 és X_2 megosztásának azt a két szélsőséges esetét tekintjük, mikor $X_1 = X$ és $X_2 = 0$, illetve $X_1 = 0$ és $X_2 = X$, vagyis a teljes tőkét az első periódus végén, illetve a teljes tőkét a második periódus végén törlesztjük. Hogy ez nem megszorítás, mert az állítások e két részlet tetszőleges értékmegosztására is igazak, az a számítások követésével nyilvánvaló lesz.)

Megjegyzés: Jelen gyakorlat szerint i éves szintű kamatlábbal felszámított kamatok az évek során kamatos kamatként, hatványozódva keletkeznek, év közbeni törlesztésekre i éves szintű kamatláb esetén lineáris a kamat felszámítása. – Ez a gondolat azért került kiemelésre, mert az eredmények lényeges részét képezi. – Itt jegyezzük meg, hogy a továbbiakban közölt számítások, bár néha hosszadalmasak, de egyszerűek. Csak azok az eredmények kerülnek közlésre, melyek a gondolatmenet gerincének vázolását szolgálják, mivel e tanulmány célja nem elsődlegesen számolási gyakorlat prezentálása. Kérem az Olvasót, hogy a közölt eredmények köztes számításait – a megadott instrukciók szerint – maga is végezze el, ily módon kerülve közelebb az ismertetett modellhez. *A közölt eredmények valódisága végett a tanulmány számításai a MATHEMATICA for WINDOWS 2.0 változatával kerültek ellenőrzésre.*

Végezzük vizsgálódásunkat először a kölcsönt adó szemszögéből!

Így célunk az X_1 és X_2 összegek olyan megválasztása, hogy a kölcsönügylet pénzáramának jelenértéke maximális legyen.

Az ügylet pénzárama:

0. időpont: X összeget kölcsön adunk. Ennek jelenértéke: $-X$.

t. időpont: X_1 tőkét és $X\frac{i}{365}t$ kamatot visszakapunk. Ennek jelenértéke:

$$\frac{X_1 + X\frac{i}{365}t}{1+\frac{i}{365}t}.$$

$2t$. időpont: X_2 tőkét és $(X-X_1)\frac{i}{365}t = X_2\frac{i}{365}t$ kamatot visszakapunk. Ennek jelenértéke:

$$\frac{X_2(1+\frac{i}{365}t)}{1+\frac{i}{365}2t}.$$

A teljes pénzáram jelenértéke összevonások után:

$$PV_a(X_1) = -X + \frac{X\left(1+3\frac{i}{365}t+3\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2\right) - X_1\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}{1+3\frac{i}{365}t+2\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}.$$

(Az a index a kölcsönt adóra utal.) Látható, hogy a jelenérték függ a törlesztés ütemezésének megválasztásától (mivel most csak két törlesztő részlet van, ezért csak az elsőtől)!

A jelenérték minimális, ha az első részlet maximális, vagyis $X_1 = X$. Minimumának értéke ekkor:

$$PV_{\min} = 0.$$

A jelenérték maximális, ha az első részlet minimális, vagyis $X_1 = 0$. Maximumának értéke ekkor:

$$PV_{\max} = X\left(-1 + \frac{1 + 3\frac{i}{365}t + 3\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}{1 + 3\frac{i}{365}t + 2\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

Ez az érték az

$$\frac{\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}{1 + 3\frac{i}{365}t + 2\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2}$$

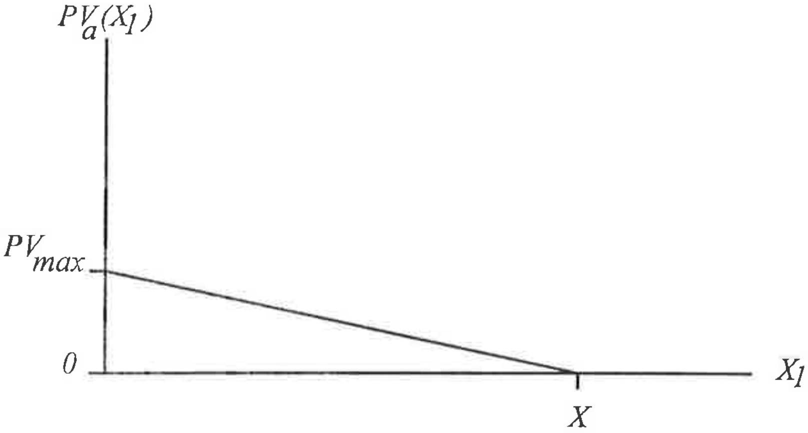
szorzótényező által meghatározott mértékkel nagyobb, mint az eredetileg kölcsönadott összeg (és mivel e növekmény számlálója és nevezője pozitív, így $PV_{\max}$-ban X szorzótényezője nagyobb 0-nál), vagyis az ütemezés helyes megválasztása által többletnyereséget realizáltunk! Mivel a jelenérték az első törlesztő részlet (X_1) lineáris függvénye, az elmondottakból nyilvánvaló, hogy az X_1 összeg tetszőleges választása esetén a $PV_a(X_1)$ jelenértékre

$$0 = PV_{\min} \leq PV_a(X_1) \leq PV_{\max}$$

teljesül.

Összefoglalva a kölcsönt adó szemszögéből végzett vizsgálat eredményeit: Ha feltesszük, hogy a pénz minden értéket jelentő tulajdonsága valamint kockázata megfogalmazódik az általa felszámított éves szintű kamatban, akkor a *stabilitási feltétellel* élve azt mondhatjuk, hogy az iménti speciális, két periódusú esetben *a kölcsönt adó akkor nyeri jelenértéken mérve a legtöbb hasznot, ha a kölcsönügylet során minél később kapja vissza a kölcsönadott tőke törlesztő részleteit*! (A tranzakciós költségek figyelembe vétele abban nyilvánulna meg, hogy a jelenérték számításakor az i által meghatározottnál kisebb tényezővel diszkontálunk: Ez a jelenértékre emelő hatással van, így a kapott eredmény még inkább igazzá válna.)

Foglaljuk össze ábrán is az elmondottakat (1. ábra)!



1. ábra. Lehetőségek a kölcsönt adó pénzáramának jelenértékére

Végezzük vizsgálódásunkat most a kölcsönt felvevő szemszögéből!

Így célunk újra az X_1 és X_2 összegek olyan megválasztása, hogy a kölcsönügylet pénzáramának jelenértéke maximális legyen. Azonban míg az előbb joggal feltételeztük, hogy a kölcsönt adó számára a pénz értékét az i kamatláb fejezi ki, ezért ő a jelenértéket is az általa meghatározott diszkonttényezővel számítja, *most különböztessük meg a jelenérték számításához használt diszkonttényezőt az előbbitől*!

Jelölje r azt az éves szintű, *kamatláb jellegű tényezőt, mely kifejezi, hogy a kölcsönt felvevő számára a jelenbeli X összeg t idő múlva $X(1+\frac{r}{365}t)$ összeggel ér fel! (r lehet például a kölcsönt felvevő t időtávra kalkulált belső megtérülési rátájának éves szintű kivetítése.)* (Ne feledkezzünk meg a t-re tett feltételezésünkről: $2t < 365$.)

Megjegyzés: r-nek ez a fajta bevezetése és az i-től való megkülönböztetése ad alapot törlesztési optimalizálási lehetőségre: *Egyszerűen arról a tényről van szó, hogy különböző cégek működhetnek eltérő piaci megtérülésekkel, így van alapja megtérülési rátáik megkülönböztetésének.* Most a két "cég" a kölcsönt adó, illetve a kölcsön felvevője!

Az ügylet pénzárama:

0. időpont: X összeget kölcsönveszünk. Ennek jelenértéke: X.

t. időpont: X_1 tőkét és $X\frac{i}{365}t$ kamatot visszatérítünk. Ennek jelenértéke

$$\frac{X_1 + X\frac{i}{365}t}{1+\frac{r}{365}t},$$

hiszen az előbbi összeget pontosan

$$\frac{X_1 + X\frac{i}{365}t}{1+\frac{r}{365}t},$$

nagyságú 0. időpontbeli összeggel fogjuk majd törleszteni, mivel "a mi cégünk ilyen megtérüléssel forgatja a pénzt".

$2t$. időpont: X_2 tőkét és $(X - X_1)\frac{i}{365}t = X_2\frac{i}{365}t$ kamatot visszatérítünk. Ennek jelenértéke

$$\frac{X_2\left(1+\frac{i}{365}t\right)}{1+\frac{r}{365}2t},$$

hiszen az előbbi összeget pontosan

$$\frac{X_2\left(1+\frac{i}{365}t\right)}{1+\frac{r}{365}2t},$$

0. időpontbeli összeggel fogjuk majd törleszteni.

A teljes pénzáram jelenértékére összevonások után

$$PV_f(X_1, r) =$$

$$X - \frac{X\left(1+2\frac{i}{365}t+\frac{r}{365}t+3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right)+X_1\left(\frac{r}{365}t-\frac{i}{365}t-\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right)}{1+3\frac{r}{365}t+2\left(\frac{r}{365}\right)^2t^2}$$

adódik. (Az f index a kölcsönt felvevőre utal). *Ha $r = i$, a formula pontosan a kölcsönt adó szemszögéből végzett vizsgálatnál levezetett jelenérték formula -1-szeresével azonos!* Látható, hogy a jelenérték újra függ a törlesztés ütemezésének megválasztásától! Mivel a függés jellegét most az

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2$$

számlálóbeli X_1 szorzótényezőjének előjele dönti el, ezért vizsgáljuk a következő eseteket:

I. eset

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2 = 0,$$

vagyis az r és az i kamatlábak között az

$$r = \frac{i}{1 - \frac{i}{365}t}$$

összefüggés áll fenn. Ekkor a jelenérték a kölcsönt felvevő számára *pozitív, állandó összeg, amely független a törlesztés ütemezésétől, mivel az X_1 első részlet szorzótényezője a $PV_f(X_1, r)$ tört számlálójában zérus.* A kölcsönt felvevő értékszemléletét kifejező r kamatláb most vizsgált kritikus értékének *(kritikus, mert tőle függ az X_1 szorzótényezőjének előjele, és ily módon a kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke)* a továbbiakban kitüntetett szerep jut, ezért vezessük be rá az r_k jelölést:

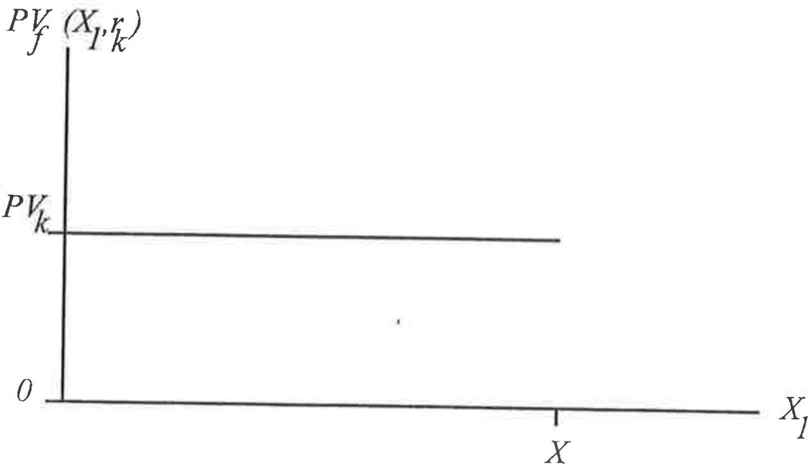
$$r_k = \frac{i}{1 - \frac{i}{365}t}$$

Az ügylet jelenértéke ekkor

$$PV_k = X\left(1 - \frac{1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r_k}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r_k}{365}t^2}{1 + 3\frac{r_k}{365}t + 2\left(\frac{r_k}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

(Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy az X összeg szorzótényezője valóban pozitív.)

Foglaljuk össze ábrán is az elmondottakat (2. ábra)!



2. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $r = r_k$ kamatláb esetén

II. eset

Ha

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2 > 0\,,$$

vagyis $r > r_k$ (a kölcsönt felvevő értékszemléletét kifejező kamatláb meghaladja a kritikus r_k értéket), akkor a $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az r kamatláb adott értéke esetén maximális, ha az X_1 összeg minimális, vagyis $X_1 = 0$. Ha most is feltesszük, hogy a pénz minden értéket jelentő tulajdonsága valamint kockázata a kölcsönt felvevő számára megfogalmazódik az őrá jellemző r kamatlábban, akkor a *stabilitási feltételt rá is kiterjesztve* azt mondhatjuk, hogy e speciális, két periódusú esetben *akkor nyeri jelenértéken mérve a legtöbb hasznot, ha a kölcsönügylet során minél később törleszti a kölcsönvett tőke törlesztő részleteit*!

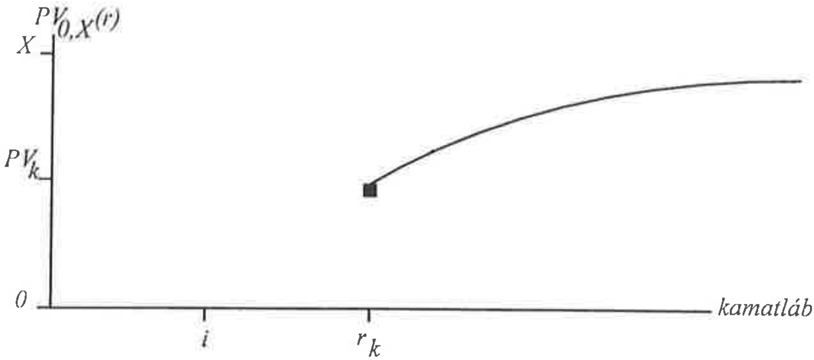
Nyereségének jelenértéke ekkor az r kamatláb függvénye:

$$PV_{0,X}(r) = X\left(1 - \frac{1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

(Az index az ütemezés jellegére utal.) Vizsgáljuk meg a függvényt! (Újra az olvasóra bízzuk az állítások belátását.) E függvény első deriváltja az $(r_k; \infty)$ intervallumon határozottan pozitív, tehát a függvény maga szigorúan monoton növekvő. Határértékére

$$\lim_{r\to\infty} PV_{0,X}(r) = \lim_{r\to\infty} X\left(1 - \frac{1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right) = X$$

adódik, vagyis az r kamatláb növekedésével a jelenérték aszimptotikusan közelíti a kölcsön kapott X összeg értékét. Mivel $r = r_k$ kamatláb esetén a jelenérték pontosan PV_k, így összefoglalhatjuk ábrán is az elmondottakat (3. ábra):



3. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $r > r_k$ kamatláb esetén, $X_1 = 0$, $X_2 = X$ összegű ütemezéssel

Mi történik, ha $r > r_k$ kamatláb esetén mégsem az $X_1 = 0$, $X_2 = X$ optimálisnak tekintett ütemezést választjuk? Vizsgáljuk ennek szélsőséges eseteként az $X_1 = X$, $X_2 = 0$ esetet (a teljes kölcsönt az első periódus végén visszafizetjük)! A jelenértékre, mint az r kamatláb függvényére most

$$PV_{X,0}(r) = X\left(1 - \frac{1 + \frac{i}{365}t + 2\frac{r}{365}t + 2\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right)$$

adódik. E függvényről a $PV_{0,X}(r)$-nél tett megállapításokhoz hasonlóakat lehet elmondani: Első deriváltja a tekintett intervallumon határozottan pozitív (így a függvény szigorúan monoton növekvő), határértéke végtelenben X (a kölcsönvett összeg), $PV_{X,0}(r_k) = PV_k$. *Az eltérést a két jelenérték függvény között értékeik különbözősége adja, ugyanis belátható, hogy bármely $r > r_k$ kamatlábat választva*

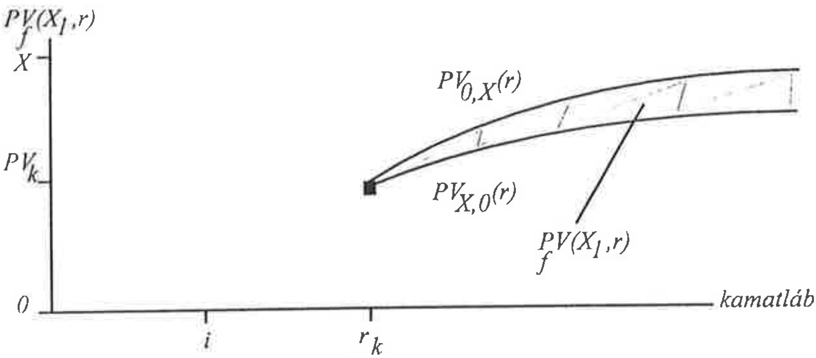
$$PV_{X,0}(r) < PV_{0,X}(r)\ !$$

(Ami persze az $X_1 = 0$, $X_2 = X$ optimális ütemezésből nyilvánvalóan következik.) Mivel $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az első törlesztő részlet (X_1) lineáris függvénye, ezért úgyszintén nyilvánvaló, hogy

$$PV_k < PV_{X,0}(r) \leq PV_f(X_1, r) \leq PV_{0,X}(r) < X\ ,$$

vagyis adott $r > r_k$ kamatláb esetén az X_1 összeg értékét nem specializálva a kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke az adott korlátok közé esik.

Szemléltessük ábrán az elmondottakat (4. ábra)!



4. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $r > r_k$ kamatláb esetén

III. eset

Ha

$$\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2 < 0\,,$$

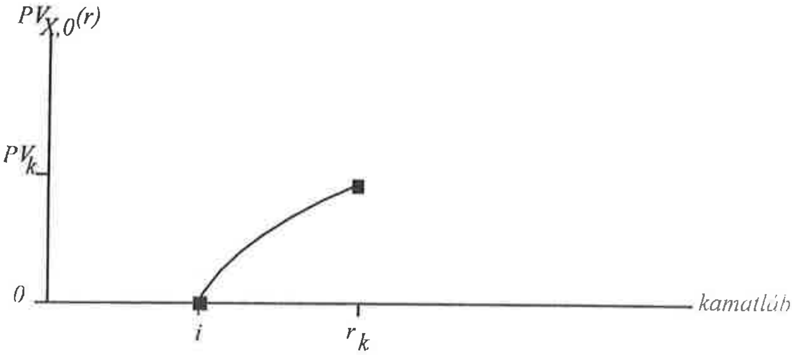
vagyis $i \leq r < r_k$ (a kölcsönt felvevő értékszemléletét kifejező kamatláb alatta marad a kritikus r_k értéknek és természetesen nagyobb mint a kölcsönhöz jutás i kamatlába), akkor a $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az r kamatláb adott értéke esetén maximális, ha az X_1 összeg maximális, vagyis $X_1 = X$. Most azt mondhatjuk, hogy e speciális, két periódusú esetben a kölcsönt felvevő *akkor nyeri jelenértéken mérve a legtöbb hasznot, ha a kölcsönügylet során minél gyorsabban törleszti a kölcsönvett tőke törlesztő részleteit*! Nyereségének jelenértéke ekkor az r kamatláb függvénye:

$$PV_{X,0}(r) = X\left(1 - \frac{1 + \frac{i}{365}t + 2\frac{r}{365}t + 2\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right)$$

(Az index most is az ütemezés jellegére utal.) Vizsgáljuk meg a függvényt! (Újra az olvasóra bízzuk az állítások belátását!) E függvény első deriváltja az $[i; r_k)$ intervallumon határozottan pozitív, tehát a függvény maga szigorúan monoton növekvő. Határértékére

$$\lim_{r\to i} PV_{X,0}(r) = \lim_{r\to i} X\left(1 - \frac{1+\frac{i}{365}t + 2\frac{r}{365}t + 2\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1+3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right) = 0$$

adódik, vagyis az r kamatláb csökkenésével a jelenérték zérushoz közelít, és $r = i$ kamatláb esetén nulla lesz. Mivel $r = r_k$ kamatláb esetén a jelenérték pontosan PV_k, így összefoglalhatjuk ábrán is az elmondottakat (5. ábra):



5. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $i \le r < r_k$ kamatláb esetén, $X_1 = X$, $X_2 = 0$ összegű ütemezéssel

Mi történik, ha most mégsem az $X_1 = X$, $X_2 = 0$ optimálisnak tekintett ütemezést választjuk? Vizsgáljuk ennek szélsőséges eseteként az $X_1 = 0$ $X_2 = X$ ütemezést (a teljes kölcsönt a második periódus végén fizetjük vissza)! A jelenértékre, mint az r kamatláb függvényére most

$$PV_{0,X}(r) = X\left(1 - \frac{1+2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{1+3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2}\right).$$

adódik. E függvény első deriváltja a tekintett intervallumon határozottan pozitív (így a függvény szigorúan monoton növekvő), $PV_{0,X}(r_k) = PV_k$ és $PV_{0,X}(i) = -PV_{\max}$, *vagyis pontosan a kölcsönt adó által elérhető jelenérték maximumának -1-szerese!*

Belátható, hogy most

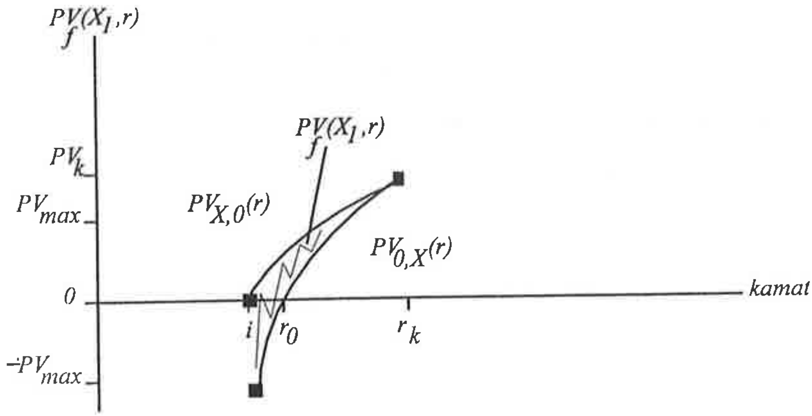
$$-PV_{\max} \le PV_{0,X}(r) < PV_{X,0}(r) < PV_k .$$

(Ami persze az optimális ütemezésből megint csak következik.) Mivel a $PV_f(X_1, r)$ jelenérték függvény az első törlesztő részlet (X_1) lineáris függvénye, ezért $i \le r < r_k$ kamatláb esetén nyilvánvaló, hogy

$$PV_{0,X}(r) \le PV_f(X_1, r) \le PV_{X,0}(r) ,$$

vagyis adott $i \le r < r_k$ kamatláb esetén az X_1 összeg értékét nem specializálva a kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke az adott korlátok közé esik.

Szemléltessük ábrán az elmondottakat (6. ábra)!



6. ábra. A kölcsönt felvevő pénzáramának jelenértéke $i \le r < r_k$ kamatláb esetén

Az r_0 kamatláb, ahol az X_1 összeg megválasztásának függvényében a jelenérték nullává válik a $PV_f(X_1, r) = 0$, vagyis az

$$X - \frac{X\left(1 + 2\frac{i}{365}t + \frac{r}{365}t + 3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right) + X_1\left(\frac{r}{365}t - \frac{i}{365}t - \frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2\right)}{1 + 3\frac{r}{365}t + 2\left(\frac{r}{365}\right)^2 t^2} = 0$$

egyenletből számolható. Ez r-re nézve másodfokú egyenlet, melynek $i \le r < r_k$ esetén egy pozitív gyöke van, tehát

$$r_0 = 365\frac{\frac{i}{365}t(3X+X_1)-(2X-X_1)}{4Xt}+$$

$$365\frac{\sqrt{\left(\frac{i}{365}\right)^2 t^2(3X+X_1)^2-\frac{i}{365}t(2X-x_1)(14X+2X_1)+(2X-X_1)^2}}{4Xt}$$

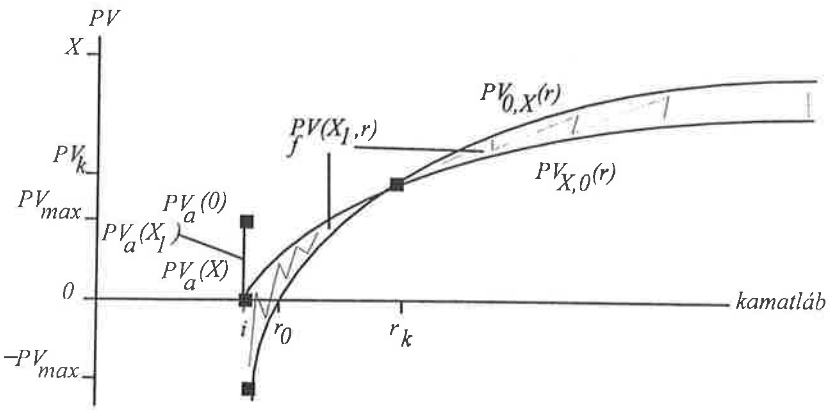
A kérdés fordítva is megfogalmazható: Ha adott az r kamatláb értéke ($i \leq r < r_k$), akkor az ütemezés (két periódusú esetünkben konkrétan az X_1 első részlet) milyen megválasztása esetén lesz a jelenérték nulla? Erre az előbbi egyenlet X_1-re való rendezésével megint csak explicit formula adható:

$$X_{1_k} = X\frac{2\frac{r}{365}t+2\left(\frac{r}{365}\right)^2t^2-2\frac{i}{365}t-3\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}{\frac{r}{365}t-\frac{i}{365}t-\frac{i}{365}\frac{r}{365}t^2}.$$

Ha az X_{1_k} összegre megoldásként negatív számot kapunk, az azt jelenti, hogy az r kamatláb mellet az $X_1 = 0$, $X_2 = X$ – ez esetben legkedvezőtlenebbnek tekinthető – ütemezéssel is pozitív a pénzáram jelenértéke!

Foglaljuk össze eredményeinket!

Vizsgáljuk meg ehhez először a 7. ábrát!



7. ábra. Jelenérték lehetőségek az ütemezés és az r kamatláb függvényében a kölcsönt adó és a kölcsönt felvevő számára

A 7. ábráról a következők olvashatók le: Ha a kölcsönt felvevő pénzértéket kifejező kamatlábának kritikus értéke r_k, akkor e feletti r kamatláb esetén a kölcsönt felvevő minél később igyekszik törleszteni a felvett összeg tőkerészleteit, és mind ő, mind a kölcsönt adó méltán érzi úgy, hogy a jelenérték kritérium szerint optimálisan választott! (Saját szemszögéből értékelve mindkét fél jelenértéken a lehető legnagyobb pozitív hozamot érte el.)

Az i és r_k közé eső r kamatláb esetén megalapozott a kölcsön felvevőjének igyekezete a részletek mielőbbi törlesztésére, hogy pénzáramának jelenértéke az ő szemszögéből az elérhető maximális legyen. A kölcsönt adó ekkor – megint csak saját szemszögéből ítélve – határesetként jelenértéken 0 hasznot realizál.

Amennyiben az ütemezés a felvevő számára itt optimálisnak tekinthetőtől eltér, úgy az eltérés racionálisan megengedhető mértékét az ekkor pontosan számítható r_0 kamatlábérték és az ő r kamatlábának összevetése határozza meg. (Mint jeleztük, a kérdés megfordítható, és az r kamatlábból is kiszámítható az ütemezés még racionálisnak tekinthető határesete – az X_1 első részlet olyan X_1kkritikus értéke, melynél a jelenérték a kölcsönt felvevő számára nullává válik.)

Ha a kölcsönt felvevő pénzértéket kifejező kamatlába pontosan r_k, akkor az ütemezés az ő számára közömbös, azt a kölcsönt adó alkupozíciója fogja meghatározni, így a kölcsönt adónak van esélye a jelenérték saját szemszöge szerinti maximalizálására.

$r < i$ esetén a kölcsönügylet racionális alapon nem jöhet létre.

A fenti vizsgálatok – *mint modell* – az optimalizálási lehetőség talán legegyszerűbb esetét szemléltették.

Azonban a jelenség ennél általánosabb: Tekinthetünk n részletben való törlesztést; *feloldhatjuk az azonos hosszúságú törlesztő időszakok* feltételt; megengedhetjük, hogy a *kamat és a tőke törlesztése eltérő időpontokban* történjen, és természetesen a kölcsönügylet teljes időtartama tetszőleges lehet (meghaladhatja az egy évet).

Az általunk tárgyalt egyszerű eset általános esetre való kiterjesztésére legkézenfekvőbb eszközként a matematikai teljes indukció módszere kínálkozik.

Így bár a jelenséget általánosan igazolhatjuk, az általánosság negatívuma, hogy a kritikus r_k kamatláb érték nem lesz explicit módon meghatározható! *Értékére csak jelentős specializációk után nyerhetünk egzakt formulát.* Minden egyes konkrét "általános esetben" meghatározása iteráció segítségével, *közelítőleg* történhet. (Ugyanez vonatkozik a jelenértéket nullává tevő r_0 kamatláb értékének meghatározhatóságára is.)

Az elemzett *kétperiódusú modellben* a kölcsönnyújtás kamatlábát 35%-nak véve a kölcsönt felvevő pénzértéket kifejező kamatlábának kritikus nagyságára $r_k = 36.03667\%$ adódik; az r_0 jelenértéket nullává tevő kamatláb ekkor 35.49608% (a jelenérték szempontjából legkedvezőtlenebb $X_1 = 0$, $X_2 = X$ összegű ütemezéssel számítva). t értékét 30 napnak feltételeztük.

Ahelyett, hogy további számításokba bocsátkoznánk, nézzünk egy számpéldát a valós életből: Kölcsönből finanszírozott lízingbeadás esetén a lízingbe vevőtől beáramló lízingdíjak kell, hogy szigorúan fedezetül szolgáljanak a kölcsönt adónak törlesztendő tőke és kamat együttes összegére. A kölcsön törlesztő részleteit tehát a *beáramló lízingdíjak korlátja alatt* mozgathatjuk csak előre, illetve hátra. A *példa teljesen általános* abban az értelemben, hogy a *lízingdíjak, a kamattörlesztés és a tőketörlesztés időpontjai között semmiféle összefüggést nem követelünk meg, és nem teszünk megszorító feltételt az egyes időszakok hosszára sem. (Erre külön felhívjuk a figyelmet!)* (A program, mely a számításokat végzi, egy meglehetősen összetett, több irányú iterációt tartalmazó algoritmus.) Figyeljük meg a jelenérték változásának az ütemezéstől és a diszkontáláshoz használt kamatlábtól való függését!

Lásd: Melléklet!

Vizsgálódásunk befejezéseként a következőt mondhatjuk: Ha elfogadjuk a jelenértéket domináns döntési kritériumként, akkor – amint azt sikerült belátni – érdemes felülvizsgálni kölcsönnyújtási gyakorlatunk elveit: Egy kölcsönügylet során egyik fél számára sem elegendő annak megállapítása, hogy a kölcsönt felvevő belső megtérülési rátája meghaladja a kölcsönhöz jutás kamatlábát, így a törlesztésnek elvileg nem lehet akadálya! Fontos annak meghatározása is, hogy a kölcsönt felvevő r belső megtérülési rátája adott ütemezés esetén milyen viszonyban van az ütemezéshez tartozó r_0 és r_k értékekkel, mert a jelenértéken mért hozam az ütemezés helyes megválasztása által így optimalizálható mindkét fél számára!

Megjegyzések

E megjegyzések közlésével a valós gyakorlat és az ismertetett modell – mint elméleti konstrukció – közötti, számomra érdekes kapcsolat bemutatása a szándékom:

Maga a modell egy elméleti konstrukció volt, pontosan rögzített feltételrendszerrel. Maga az említett algoritmus egy rendkívül rugalmas kamat- és tőketörlesztés számítást lehetővé tevő *program*:

1. A kamatfizetések és tőketörlesztések időpontjaira nem tartalmaz semmiféle megszorítást, azok időpontjait *tetszőlegesen* adhatjuk meg akár egymástól függetlenül.

2. Extra lehetősége az egyes törlesztő részletek *kívánt értékeinek* beállíthatósága (természetesen csak értelmezhető határok között).

3. Azt is előírhatjuk feltételekként, hogy milyen várható *fedezeti korlátokkal* vagyunk képesek fizetni az egyes részleteket. (Lásd: Melléklet.)

(Utóbbi kettőt természetesen a kölcsönt adóval való egyeztetés, és saját bevételi forrásaink alapján állítjuk össze.)

Az optimalizálást a fizetendő pénzáram jelenértékének állandó figyelésén, és maximalizálásán alapuló többszörösen egymásba ágyazott iteráció végzi beállíthatóan tetszőleges számolási pontosságig, mely iteráció a mondott feltételeket is tekintetbe veszi.

Ezen tulajdonságai *rendkívül rugalmas számolási lehetőségeket biztosítanak,* és élesen megkülönböztetik az általam ismert piacon található törlesztést számoló segédprogramoktól (kivétel nélkül mind előre rögzítendő periódushosszat és egybeeső kamat- és tőketörlesztési időpontokat képes csak kezelni).

Azt, hogy a jelenérték milyen érdekesen mozog az ütemezések korlátainak változtatásakor, pontosan az algoritmus rugalmas használati tulajdonságai miatt vehettem csak észre.

Az algoritmus azért került kifejlesztésre, mert hitelnyújtói igény volt a kamat- és tőkefizetési időpontok – akár egymástól is eltérő – tetszőleges előírhatósága! Az általa mutatott ütemezéstől függő mozgást a jelenértékben – mint e tanulmány mutatja – sikerült tisztáznom, megmagyaráznom.

Az, hogy a leírt jelenség több periódusra is igaz, matematikai indukcióval *elméletileg* belátható, mint arra utaltunk is. Létezését azonban a gyakorlat is igazolja. A cégek, melyek számára az algoritmus kifejlesztésre került rövid távú (7-8 hónap, de legfeljebb másfél év), nagy összegű (10-50 millió forint) lízingkonstrukciókra specializálódtak. A banki finanszírozási kölcsönök törlesztésére fordítandó részletek mozgatásával a jelenértékben mérhető változás nem egy esetben milliós nagyságrendet ért el.

Az, hogy az iménti jelenértékben kapott haszonmaximalizálás tekinthető-e konkrét, kézzelfogható jövedelemtöbbletnek, nézőpont kérdése. Az én véleményem az, hogy igen: A jelenértéken kinyert, törlesztési pénzáramból előre tudhatóan felszabaduló összeg máshol, más befektetéssel hozamtermésre fogható.

Melléklet: Számpélda egy kölcsönből finanszírozott lízingbeadás esetből

Kölcsön adott összeg: 5 000 000 Ft.
Felvételének dátuma: 1995.11.1.

A lízingbe adónak a kölcsöntörlesztés fedezetéül szolgáló pénzárama minden esetben a következő (a kölcsöntörlesztés ütemezésének változtatása tehát csak ezek korlátja alatt történhet):

Dátum	Fedezeti összeg
95.12.01	300 000
95.12.15	500 000
96.01.08	2 000 000
96.01.19	2 000 000
96.02.04	500 000
96.02.07	500 000
96.02.10	500 000

Két szélsőséges ütemezést tekintünk:

I. A törlesztő részletek fizetése a fedezeti összegek adta határokon belül a leggyorsabb. A törlesztés pénzárama ekkor:

Kamat		Tőke		Tőke+Kamat	
dátum	összeg	dátum	összeg	dátum	összeg
95.12.12	208 082	95.12.05	300 000	95.12.05	300 000
95.12.26	47 841	95.12.17	200 935	95.12.15	208 082
96.01.05	43 142	95.12.29	0	95.12.17	200 935
96.03.01	61 813	96.01.10	2 000 000	95.12.26	47 841
Összesen	*360 878*	96.01.22	2 000 000	96.01.05	43 142
		96.02.03	0	96.01.10	2 000 000
		96.02.15	499 065	96.01.22	2 000 000
		Összesen	*5 000 000*	96.02.15	499 065
				96.03.01	61 813
				Összesen	*5 360 878*

II. A tőke egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal kerül visszafizetésre. A törlesztés pénzárama ekkor:

Kamat		Tőke		Tőke+Kamat	
dátum	összeg	dátum	összeg	dátum	összeg
95.12.15	210 959	95.12.05	0	95.12.15	210 959
95.12.26	52 740	95.12.17	0	95.12.26	52 740
96.01.05	47 945	95.12.29	0	96.01.05	47 945
96.03.01	196 575	96.01.10	0	96.02.15	5 000 000
Összesen	*508 219*	96.01.22	0	96.03.01	196 575
		96.02.03	0	*Összesen*	5 508 219
		96.02.15	5 000 000		
		Összesen	*5 000 000*		

A kölcsönt adó szemszögéből vizsgálva

A kölcsön nyújtás kamata (i) évi 35%.

I. A törlesztő részleteket a lehető leggyorsabban megkapjuk. A Tőke + Kamat pénzáram – Kölcsönadott összeg jelenértéke = 5 494 Ft.

II. A tőkét egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal kapjuk vissza (optimális eset). A Tőke + Kamat pénzáram – Kölcsönadott összeg jelenértéke = 12 459 Ft.

A kölcsönt felvevő szemszögéből vizsgálva

A kölcsönhöz jutás kamata (i) évi (35%). Az r_k kamatláb, melynél az ügylet jelenértéke független az ütemezéstől: évi 37.0535%. Az r_0 kamatláb, melynél az ügylet jelenértéke nulla, évi 35.97055%. (Az utóbbi a legkedvezőtlenebb esetre meghatározva: egy összegben, későn törlesztünk.)

r = 40%

I. A törlesztő részleteket a fedezeti összegek adta korláton belül a lehető leggyorsabban törlesztjük. A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 41 280 Ft.

II. A tőkét egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal törlesztjük (optimális eset). A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 51 059 Ft.

r = 36, 5%

I. A törlesztő részleteket a fedezeti összegek adta korláton belül a lehető leggyorsabban törlesztjük (optimális eset). A Kölcsönbe vett összeg – (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 8 635 Ft.

II. A tőkét egy összegben, a legutolsó tőkefizetési dátummal törlesztjük. A Kölcsönbe vett összeg − (Tőke + Kamat) pénzáram jelenértéke = 6 770 Ft.

Irodalom

1. Bélyácz Iván: Tőkeberuházási és finanszírozási döntések. JPTE, 1995.
2. Bélyácz Iván: Vállalati tőkefinanszírozás. JPTE, 1991.
3. Cheng F. Lee: Financial Analysis and Planning. Addison-Wesley, 1985.
4. Gellért Andor: Banküzletek. KJK, 1993.
5. Gellért Andor: Külgazdasági pénzügyek. KJK, 1993.
6. Gerard Debreu: Közgazdaságtan axiomatikus módszerrel. KJK, 1987.
7. SALDO kiadó: Pénzügytan. 1993.

INTEREST, PRESENT VALUE AND OPTIMISATION OF INSTALMENTS OF A LOAN TRANSACTION

We expect the interest have to make equivalent the value of a present amount of money and the present value of future amounts of money offered instead of it. Surprising, but we prove that despite of our expectation today's practice of lending has a chance for us to manipulate (this is not the negative shade) the present value of a loan transaction. We show there exist exact and determinable parameters, which we can consider a loan transaction with, as a non-zero-sum game, and we can make it's present value definitely positive and optimal for both of the parties at the same time through the proper selection of instalments! We introduce an algorithm which will show the chance for the optimisation through a sample taken from the practice of a loan based leasing construction. This algorithm extends the simplicity of the constraints of this model towards the general case.

OKTATÁS

EGY ÁLLAMI EGYETEM FINANSZÍROZÁSI STRUKTÚRÁJA – AZ INDIANA UNIVERSITY PÉLDÁJA[1]

CZAKÓ ERZSÉBET
BKE Vállalatgazdaságtan Tanszék

Az alábbi írás célja, hogy rendszerében felvázolja, hogy (i) hogyan áll össze egy egyesült államokbeli állami egyetem finanszírozási rendszere, és (ii) a "fund raising" (adománygyűjtési) tevékenység hogyan valósul meg egy amerikai állami egyetemen. Az írás nézőpontja gyakorlat-orinetált felsővezetői nézőpont, amiből következően sok olyan részletet nem tartalmaz, amelyek a megvalósítás során akár holnaptól adaptálhatók. Ennek legfőbb oka, hogy meggyőződésem szerint, újra át kell gondolni a magyar egyetemek finanszírozási struktúráját – ezt megelőzően pedig tevékenységüket – ahhoz, hogy új finanszírozási források után lehessen nézni.(1) A "fund raising" tevékenység ismertetésekor elsősorban azokra az ismeretekre támaszkodom, amelyeket az Indiana University (USA) e területen dologzó munkatársaival lefolytatott 25 beszélgetésből, illetve a tőlük kapott írásos anyagokból származnak.(2)

Az Indiana University

Indiana State (állam) területe kb. megegyezik Magyarország területével, míg lakosainak száma kb. harmada. Az egyetemet Indiana állam törvényhozása alapította 1820-ban Bloomingtonban azért, hogy az átfogó felsőfokú állami közoktatás alapjait megteremtse. Az USA-ban a 1990-es évek elején készült felmérések szerint Indiana állam nem tartozik a megfelelően iskolázott népességgel rendelkező államok közé, amiből eredően a felsőoktatás kiterjesztése jelenleg is kiemelt állami feladatnak számít.

Az egyetem állami (state) egyetem, ami abban jelenik meg, hogy (i) az egyetem legfelsőbb irányító testületében – a Board of Trustees-ban – a tagok 2/3-át Indiana állam kormányzója nevezi ki, (ii) a finanszírozásban az állami támogatásokból származó összegek csökkenő arányban, de a fenntartásra

[1] Beérkezett 1996. szeptember 28.

és a bérekre elegendő nagyságban jelen vannak, (iii) az Indiana államból származó hallgatók oktatását preferálja, mivel tandíjaik alacsonyabbak – átlagban mintegy harmada –, mint a nem Indiana-ban lakók tandíjai.

Az Indiana University-n belül 8 kampuszon folyik oktatás, és a nyolc kampuszon mintegy 94 000 hallgatót oktatnak. A két legjelentősebb kampusz az Bloomington-i (az egyetem központi kapmusza, ahol évente 11 school-ban kb. 32 000 hallgató tanul, ebből kb. 22 000 nappali tagozaton) és az Indianapolis-i (ahol kb. 28 000 hallgatót oktatnak 14 school-ban). (Lásd az 1. táblázatot.)

1. táblázat: Az Indiana University kampuszai

	Alapítás éve	Hallgatók száma	Programok száma	Oktatók száma	Admin. állomány
IU Bloomington	1820[1]	35 594	313	1 531	4 837
IU Southeast	1941	5 584[3]	44[3]	136	192
IU Kokomo	1945	3 620[3]	32[3]	90	135
IU North-West	1959	5 639	56	191	225
IUPU2	1964	10 836[3]	111[3]	329	455
IU South Bend	1966	7 922[3]	861[3]	205	239
IUPU	1969	26 766[3]	179[3]	1 396	6 853[4]
IU East	1970	2 521[3]	27[3]	69	104
Összesen		*98 482*	*848*	*3 950*	*13 040*

Megjegyzések: [1] Az Unio-ba éppen hogy fölvett Indiana State törvényhozása rögzíti, hogy az átfogó állami közoktatás érdekében amilyen hamar lehet, létre kell hozni egy egyetemet is. Ennek eredményeként az állami felsőfokú oktatás 1820-ban kezdődik meg Bloomington-ban.

[2] Az Indiana University és a Perdue University közös kampusza. Igazgatásilag az Indiana University-hez tartozik.

[3] A Perdue University-vel közös programokat is beszámítva.

[4] Ennek kb. 55%-a az egyetemhez tartozó oktatási célokat is szolgáló klinikákon dolgozik.

Az egyetem finanszírozási struktúrája

A működéshez szükséges bevételek három fő forrásból származnak: (1) a hallgatók tandíjai, (2) az állami támogatás (helyi állami (state) és szövetségi kormányzattól (government) származó bevételek), (3) magán adományok és támogatások ("private grants and gifts"). Az Indiana University összköltségvetésében éves szinten ez a három forrás nagyjából megegyező arányt képvisel. Az egyetem kétéves költségvetést készít, ami azt jelenti, hogy két évre előre ismeri az állami támogatások nagyságát, és minimum két évre előre tervezi az egyéb bevételeit is és kiadásait is.

1. Állami támogatás (State Assistance) Az állami támogatás "state assistance"-nak hívták, következetesen kijavítva a "state support"-ot, mivel a kapott összeg arányaiban folyamatosan csökkenő tendenciát mutat. Az állami támogatások csökkenő tendenciájának oka abban is keresendő, hogy az egyetem összköltségvetésébe végső soron beszámított nagyobb beruházásokat (pl. egy szépművészeti múzeum felépítése vagy egy meglévő kórház bővítése, az oktatási termek átalakítása, vagy számítógépes kabinet kialakítása) jórészét (50-90%) magánadományokból finanszírozzák. Az állami támogatás az egyetem működtetéséhez legszükségesebb kiadásokra elegendő (bérek és rezsi) alapvetően, valamint lehetővé teszi azt is, hogy egy-egy nagyobb fejlesztési projekt kapcsán a magán adomány gyűjtés elkezdődhessen.

Az állami pénzek felhasználása igen kötött. Semmilyen forgalmi/fogyasztási adó nem terheli azokat az egyetemi vásárlásokat, amelyek állami pénzek terhére történnek. Az összköltségvetésben az állami és kormányzati támogatások aránya kb. 1/3. (Az állami vagy kormányzati forrásokból érkező kutatási forrásokat is ide szokták sorolni, tekintettel arra, hogy ezek is közpénzekből származnak.)

2. Tandíjak (Tuition) Összességükben az éves bevételek mintegy harmadát adják a tandíjakból származó bevételek. A tandíjak (enrollment fees) különböznek (i) a szerint, hogy a hallgató honnan származik (Indiana, más USA állam, külföld), (iii) képzési szint (undergraduate, graduate, postgraduate), (iv) szakmák (pl. business, law, dentistry) és (v) melyik kampuszról van szó. A tandíjak mellett ide tartoznak a hallgatók mindenféle ügyeinek intézéséhez kapcsolódó díjak (administrative fees), amelyek a felvételi díjak kivételével egységesek, azonban kampuszonként eltérő nagyságúak.

Becslések szerint minimum a bevételekkel megegyező összeget a hallgatók közvetlenül vissza is kapnak az egyetem költségvetéséből. Minden kampuszon megtalálhatók azok az intézmények, amelyek a hallgatók támogatásáról bővebb felvilágosítást adnak. A hallgatók támogatása alapvetően két megfontolás alapján történhet: szociális és tanulmányi előmenteli alapon. A kettőt határozottan elválasztják egymástól.

3. Kutatási támogatások (Research Grants) A kutatási támogatások meghatározott kutatási projektek finanszírozására szolgálnak. Ebben az esetben a kutatási támogatások valamilyen konkrét célfeladat teljesítésére és meghatározott időszakra érkeznek az egyetemhez.

A támogatások forrása lehet mind "public" (pl. szövetségi kormányzat) mind pedig "private" (különböző alapítványok és vállalatok). Eredhet pályázatból és szakmai eredmények alapján felkérésből. A kutatási támogatások a szűken vett kutatási infrastruktúra megteremtésére (pl. labor berendezések, számítógépek és szoftverek, könyvek), a kutatáshoz szükséges segéderő finanaszírozására (pl. asszistensek alkalmazása), a kutatás eredményeinek publikálására (pl. konferencia részvétel költségei), és ritkán bérjellegű kifizetésekre szolgálnak.

Az egyetemnek külön részlege foglalkozik a kutatási támogatások kezelésével (adminisztrálásával): pl. meghatározott elveket érvényesítenek, nyilvántartják a kutatási projekteket. A nem állami kutatási támogatások pénzügyi kezelője sok esetben a magán adományok gyűjtésére hivatott Indiana University Foundation.

4. Magánadományok (Private gifts) A magánadományok körébe tartozik miden olyan adomány, amely magánszemélyektől és magánvállalkozásoktól származik. Gyakorlatilag minden olyan nem állami és nem kormányzati adományt ideértenek, amely a tágan értelmezett egyetemi oktatás színvonalának az emelését szolgálja. Az Indiana University esetében a magánadományokból származó bevétel adta az egyetemi költségvetés harmadát.

Az adományok gyűjtését sorolják a "fund raising" fogalomkörébe. Az egyetemtől független, de az egyetem érdekében tevékenykedő non-profit alapítvány, az Indiana University Foudation szervezi, gyűjti, kezeli és gyarapítja az egyetem magánadományokból származó bevételeit. A non-profit alapítvány azt jelenti, hogy (i) az alapítvány tevékenységét valamint pénzügyi és számviteli nyilvántartásait ötévente felülvizsgálják, hogy megfelel-e a vonatkozó non-profit jogszabályok előírásainak; (ii) nem fizet semmilyen forgalmi/fogyasztási adót az alapítványi bevételek terhére vásárolt termékek után, (iii) az adományozók az adomány értéke után adókedvezményeket vehetnek igénybe.

A nem állami forrásokból érkező kutatási támogatások és a magán adományok együttes aránya jelenti az egyetemi működés éves összköltségvetésnek kb. 1/3-át. Az összeg fele kutatási célra érkezik ("reserach grant", azaz a teljes egyetemi kötlségvetés kb. 1/6-a; az összeg az 1994/95. tanévben 61,3 m USD volt), míg a másik fele magánadományokként nyilvántartott adomány gyűjtés eredménye (a teljes egyetemi költségvetés kb. 1/6-a ez az összeg, és 48,4 m USD volt az 1994/95. tanévben).

Az adománygyűjtés (fund raising)

Az egyetemi adománygyűjtés (fund raising) non-profit jellegű, és társadalmi célok ("social purpose", "social benefit") megvalósítását szolgáló adománygyűjtés. Az adománygyűjtésnek professzionálisnak és etikusnak (professional & ethical) kell lennie, és e kettő kívánalomnak szorosan együtt kell megfelelni.

Profeszionális hozzáálás: ez alatt az értendő, hogy az adománygyűjtés mindazon ismeret alkalmazását igényli, amelyet szervezetek irányítása és működtetése igényel. Jelenti a mire? kitől? milyen időintervallumon belül? milyen költséggel? lehet-e adományt gyűjteni? hogyan lehet azt a leggazdaságosabban felhasználni? kérdések megválaszolását, valamint az adományozókkal való kapcsolatfelvétel és kapcsolattartás megvalósítását. Két működési terület gyakorlatbani megvalósítása kiemelt fontosságú: a marketing (különösen a szolgáltatás marketing) és a pénzügyek.

Etikus magatartás: az adományozókkal szemben és az adományok kezelését illetően a legkorrektebb és legetikusabb magatartás váratik el az adomány gyűjtése és kezelése kapcsán. Pl. az adományt gyűjtők személyesen nem részesedhetnek azon adományokból, amelyeket egy meghatározott célra összegyűjtöttek (nincs jutalék, ez ugyanis nem ügynökösködés!), vagy pl. az adományozóknak joguk van tudni, hogy adományaikat mire és kik költik el.

Tekintettel arra, hogy 1963. óta évente az Egyesült Államok GDP-jének kb. 2%-át jelentő (ez az összeg 1994-ben a 129 milliárd USD volt) "adomány tortáért" egyre több intézmény verseng, e két elvárást igen komolyan veszik, és a gyakorlatban az ezzel a tevékenységgel foglalkozó alkalmazottak magatartásukban érvényre is juttatják.

A Foundation szerepe

Az Indina University 1870-ben hozott létre alapítványt az egyetem számára érkező magán adományok kezelésére. Az Indiana University Foundation 1936-ban az egyetemtől független non-profit alapítvánnyá alakult át. Az alapítványnak az egyetemtől független saját kuratóriuma van, és az alapítványi pénzek nyilvántartása és kezelése is teljesen elkülönül az egyetemi egyéb forrásoktól. Az alapítvány azonban az egyetem érdekében tevékenykedik, ami azt jelenti a gyakorlatban, hogy az alapítványi működés legfontosabb elveit és az adomány gyűjtési prioritásokat az egyetem legfőbb döntéshozó fóruma jelöli ki.

Az alapítvány legfontosabb feladatai

(i) az egyetem "school"-jai adomány gyűjtési akcióinak koordinálása,

(ii) az alapítvány vagyonának megőrzése és gyarapítása (befektetések kezelése ill. a befektethető vagyon növelése),

(iii) együttműködés a "school"-okkal pl. az adománygyűjtési akcióik lebonyolításában és hatékonnyá tételében,

(iv) az alapítványi számlák kezelése: pl. bevételek beérkezésének figyelemmel kísérése, a kedvezményezett "school" kérésének megfelelő kifizetések teljesítése (48 órán belüli kifizetés teljesítés a norma).

Az alapítvány kuratóriuma különböző bizottságokat működtet, amelyeknek a school-ok vezető tisztségviselői – pl. dékánjai – tagjai. Az alapítványnak viszonylag kis létszámú főfoglalkozásúakból álló stábja van. Minden kampuszon és jónéhány school-nál ott vannak azonban azok az alkalmazottak, akik az alapítványi alkalmazottakkal együttműködve az adomány gyűjtés érdekében tevékenykednek (a school-ok általában maguk finanszírozzák az ilyen ügyekért felelős alkalmazottaikat).

Az egyetemi alapítvány hatékonyságát folyamatosan figyelemmel kísérik: minden egyes programnál meg tudják mondani, hogy mennyibe került 1 USD adomány megszerzése, és év végén azzal is tisztában vannak, hogy mennyibe kerül az alapítvány működése és ez a ráfordítás mennyi alapítványi bevételt eredményezett.

Milyen célra?

Az adománygyűjtés általában meghatározott célra, meghatározott programok megvalósítására szolgál. Nagyobb programok (projektek) esetén előzetesen tesztelik azt, hogy milyen eséllyel léphet fel az egyetem az adott pénzösszeg megszerzése érdekében. A leggyakoribb adomány gyűjtési célok a következők:

1. Szabadon felhasználható adományok

Az idetartozó adományok felhasználását az adományozók nem kötik ki, az egyetem alapítványa bármilyen célra fodíthatja azt. Ez az összeg az Indiana University esetében az egy éven belül megszerzett adományoknak 3-5%-át jelenti.

2. Címzett adományok

Az egyetem esetében az legtöbb adományt címzett adományként, azaz valamilyen meghatározott célra adták és gyűjtötték. A leggyakoribb célok a következők:

2.1. "School" vagy tanszék támogatására szolgáló adományok A megcímzett adományok általában valamilyen "school"-hoz vagy tanszékhez rendeltek; ennek megfelelően pl. a School of Music-nak (amit az zenei előadóművészet legjobb felsőoktatási intézményének tartanak az USA-ban) címzett adomány felhasználásáról a School of Music döntéshozó testülete dönt. Változó, hogy ezen belül az adományozó megjelöl-e további célt.

2.2. Egyetemi státusz finanszírozása (professorship/endowed chair) Az ilyen típusu adományok egy-egy hírneves oktató-kutató elcsábítását ill. megtartását szolgálják. Az ilyen státuszok presztízs értéke igen magas. Állami egyetemen főként a professzor oktatási és kutatási tevékenységének támogatását jelenti (pl. pénzügyi keret tanársegéd (teaching assistant), asszistens (assistant), titkárnő (secretary) foglalkoztatására, kutatáshoz szükséges könyvek, eszközök beszerzésére, szakmai utak finanszírozására), és kevésbé jelenti a személyi jövedelem kiegészítését. (Meg kell itt jegyezni, hogy ez magánegyetemeken másként működik.) Az oktatói státusz finanszírozása szólhat határozatlan időszakra is, és meghatározott időszakra is az adományozó és a kedvezményezett "school" vagy tanszék megegyezésének függvényében.

2.3. Előadások, előadássorozat Egy-egy szakterület kiemelkedő művelőjének néhány hetes, hónapos meghívása egy meghatározott témakörben előadások tartására. Az adott időtartam alatt az előadó minden költségének – így pl. utazás, szállás, tiszteletdíj, elhangzott előadások publikálása – finanszírozására szolgál.

2.4. Hallgatói támogatások A hallgatók egyéni támogatása történhet egyrészt jövedelmi rászorultság alapján szociális helyzet függvényében, másrészt érdemeik, tanulmányi előmenetelük alapján. A szociális támogatás a legritkább esetben jelenik meg odaadott készpénzként. Jellemzőbb, hogy valamit tenni kell a támogatásért cserébe: pl. megjelenhet részfoglalkoztatásban, aminek díjazásához ingyenes kurzus látogatás is társulhat. Itt jelenik meg a különböző hallgatói szervezetek – különösen az "undergraduate" hallgatók öntevékeny csoportjainak – tevékenységéhez, programjaihoz való hozzájárulás is. A tanulmányi előmenetelt a teljesített kreditekkel és azok eredményeivel mérik a tanulmányi ösztöndíjaknál, valamint e mellett kiírt feltételek megpályázásával is szerezhetők tanulmányi ösztöndíjak.

2.5. Kutatásokat támogató adományok Az előző pontban említett kutatási támogatás (research grant) mellett az adományozók egy meghatározott szakmai-tudományos probléma megoldására létrejött kutatási projekt támogatására is címezhetik adományaikat. A legjellemzőbb a különböző betegségek leküzdését célzó programok támogatása, így pl. egy meghatározott egyetemen folyó rákkutatátás támogatása.

Kitől? — az adományozók

Az adománygyűjtési programok elkezdését általában megelőzi egy előzetes felmérés és becslés arra vonatkozóan, hogy kiket érdemes megkeresni, milyen költséggel jár a megkeresés, és hogy milyen adomány nyerhető a megkeresés által. Vannak területek, ahol pénzügyi szempontból a fedezeti pont elérése – azaz a bevételek fedezzék az adománygyűjtés költségeit – a cél. Az egyetem arra törekszik, hogy sok adományozója legyen, ui. ezáltal is azt hivatott bizonyítani, hogy az a tevékenység, amelynek érdekében adományokat gyűjtenek, társadalmilag hasznos (az Indiana Unviersity-nek az 1994/95. pénzügyi évben 86 357 adományozója volt). A legfontosabb adományozói csoportok a következők:

Volt hallgatók (alumni) Az egyetem volt hallgatói a legfontosabb tényleges és pontenciális adományozók; a velük való kapcsolattartás lényegében arra irányul, hogy a volt hallgatókban kialakuljon ill. fennmaradjon az alma materhez való olyan kötődés, amely hosszú távon az öreg diákok támogató hálózatát jelenti az egyetem számára. Az alapítványhoz érkezett adományok 32%-a származott a volt hallgatóktól az 1994/95 pénzügyi évben. (A pénzügyi év az Indiana egyetem esetében a tanévek logikájához kapcsolódóan, július 1-jén kezdődik, és június 30-án végződik.)

Pártolók Egy-egy tevékenységhez vagy school-hoz kapcsolódnak; olyan, az egyetemhez közvetlenül nem kapcsolódó adományozók közül kerülnek ki, akik valamilyen ügy szolgálatára ajánlják fel meghatározott pénzösszeg feletti támogatásukat. Az alapítványi bevételek 27%-a származott ettől a körtől.

Vállalatok Az egyetem vonzáskörzetében lévő vállalkozások és vállalatok, valamint az adományozók munkaadói közül kerülnek ki. Indiana államban létezik egy olyan rendszer, amely szerint ha az alkalmazott egy meghatározott összeggel támogat valamilyen non-profit szervezetet, akkor arra kérheti munkaadóját, hogy a vállalata a jótékonykodásra szánt összegből az alkalmazott befizetésével megegyző összeget adományozzon az alkalmazott által megjelöl non-profit szervezetnek A vállalati támogatásokból és adományokból származó bevételek az éves alapítványi bevételek kb. negyedét jelentették.

Egyéb Pl. a nappali tagozatos hallgatók szüleinek támogatásai. A hallgatói támogatásokra címzett adományok nagymértékben az egyetemisták szüleinek vagy hozzátartozóinak adományaiból tevődnek össze. Ettől a körtől származott az adományok 9%-a.

Alapítványok Más alapítványokkal kötött megállapodás, vagy azok kiírt pályázatainak elnyerésével alapítványok is az adományozók körébe kerülhetnek. Pl. az Indianapolis-i kampus egyik jelentős támogatója a Lilly Endowment, amely a Lilly család (az Eli Lilly multinacionális gyógyszeripari vállalat alapítói) magánalapítványa, és azokat az egyetemi törekvéseket támogatja, amelyek a saját küldetésével összhangban vannak. Az Indiana Egyetem esetében az alapítványoktól származó összegek az éves adományok 8%-át tették ki az 1994/95. pénzügyi évben.

Hogyan? — Pénzszerzési formák

Az adományok gyűjtésével foglalkozó szervezeti egységeket "Development Office"-nak nevezik. Ezek a szervezeti egységek megtalálhatók a school-oknál is és az alapítványnál is. Az alábbiakban azokat a fontosabb pénzszerzési formákat vesszük sorra, amelyek az adománygyűjtés és az adományok értékének (alapítványi vagyon) megőrzése szempontjából fontosak. Az adomány gyűjtési kampányok szolgálhatnak rövid, egy éven belüli felhasználásra szóló adomány gyűjtésére is, és hosszú, egy éven túli felhasználásra szolgáló adományok gyűjtésére is. Ez utóbbiak részben a több éven keresztül megvalósítandó programok finanszírozására szolgálnak, részben pedig az alapítvány vagyonának növelése a cél.

1. Éves adomány gyűjtés (annual giving) Éves rendszerességgel megszervezett leveleken keresztüli adomány gyűjtési akció. Megkeresett adományozói elsősorban azok, akik 25-250 dollárral támogatták már az alapítványt. Az elsődleges cél az, hogy kis összegű adományokat gyűjtsenek sok adományozótól. Az adományokat fel lehet felhasználási cél meghatározása nélkül ajánlani, valamint az alapítvány által felsorolt 2 cél érdekében ill. egyéb, az adományozó által megnevezett cél érdekében. A fő feladat a likvid, azaz az egy éven belül felhasználható pénzbeli adományok megszerzése. Az adományozók számának növelése mellett ez az adomány gyűjtési forma szolgál arra is, hogy a megkeresettek rendszeres adományozókká váljanak. Pénzügyi szempontból ennél a formánál arra törekszenek, hogy az adománygyűjtés költségei megtérüljenek.

2. Telefonos adománygyűjtés (telefund) A telefonos marketing (telemarketing) azon formája, amely célja a telefonon keresztül történő adomány gyűjtése: felhívják a potenciális adományozókat – a hívók nappali tagozatos egyetemisták –, majd az egyetemi legfrissebb hírek ismertetése után megkérdik a felhívott leendő adományozót, hogy nem akarna-e az egyetem számára egy kisebb összegű támogatást felajánlani. A felhívottak lehetnek pl. egy kijelölt évfolyam volt hallgatói, vagy azok, akik nem adtak még adományt, attól függően, hogy vagy az alapítvány vagy valamelyik school kiket kíván megkeresni. Az előző formához hasonlóan itt is kis összegű, likvid adományok gyűjtéséről van szó. Ez a forma általában olcsóbb – egy dollár felhasználható adomány kevesebbe kerül –, mint az éves adomány gyűjtés (annual giving), azonban az adománygyűjtés mellett az is fontos, hogy a felhívottak rendszeres adományozókká váljanak.

3. Pénzalap gyűjtés (capital campaing) Ezeknél az akcióknál egy-egy kiemelt – főként beruházási – projekt érdekében kezdenek adomány gyűjtésbe. Az Indiana University pl. szeretne egy nagyobb színházat felépíteni a meglévő mellé, aminek a kivitelelezése x millió USD-be kerül, azonban rendelkezésre álló z millió USD ehhez nem elegendő. A kérdés az, hogy a különböség előteremthető-e? Amennyiben az alapítvány megvalósíthatósági tanulmányai és tesztejei azt mutatják, hogy igen, a pénzalap gyűjtési akció a meglévő rendszeres pénzgyűjtési programok mellett elkezdődik. Ilyen típusú adománygyűjtés történt az Indianapolisi kampusz könyvtárának felépítésére és berendezésére, benne a multimédiás könyvtár alapjainak kialakítására, melynek eredményeként az új könyvtár 30%-ban Indiana állam forrásaival, 70%-ban magánadományokból elkészült.

4. Tervezett adományok (planned giving) Ezek az adományok olyan idősebb korú adományozóktól származnak, akik az alapítvány javára végrendelkeznek, azaz meghatározott feltételekkel az alapítványra hagyják ingó és ingatlan vagyonukat, ill. az alapítvány javára kötnek életbiztosítást. Az így megszerzett adomány tehát előre tervezhető bevételt eredményez az alapítvány számra. A célzott adományozók jómódú idős emberek.

5. A saját vagyon gyarapítása és a befektetések Az alapítvány az adott évben befolyt és felhasználható pénzbeli adományok gyarapítása mellett arra is törekszik, hogy növelje az alapítvány azon befektethető vagyonát, amelynek a hozadéka (kamatai) hosszú távon felhasználhatók. Ez a hosszabb időszakra szóló nagyobb összegű adományok megszerzése mellett (az alapítvány vagyonának 90%-a az adományozók 10%-ától származik, akikkel külön is foglalkoznak, de a "planned giving" egy része is ide sorolható), komoly pénzügyi befektetői feladatokat is ró az alapítványra. (Az alapítvány hatékonyságának egyik mércéje az, hogy az alapítványi vagyon után egy év alatt milyen hozamot tudtak realizálni. A viszonyítási alapot a Standard & Poor 500-as indexe jelenti az Indiana University esetén, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy az alapítvány befektetéseit az 500 legnagyobb vállalatba történő befektetések megtérüléseihez viszonyítják, ily módon a non-profit alapítvány elé az üzleti életben elérhető eredményességet állítják mérceként.)

A pénzügyek kezelése

Az alapítványon belül a pénzügyek kezelése három nagy feladatcsoportra bontható:

1. Befektetések kezelése (investments and real estate) Az alapítványi vagyon befektetési politikájának kialakítása, a befektetési portfólió (részvények, kötvények konkrét típusai, ingatlan befektetések) alakítása és menedzselése.

2. Pénzügyi menedzsment Idetartozik a számvitel, a befektetésekel kapcsolatos műveletek rögzítése, a likviditás megteremtése, és a pénzügyi beszámolók készítése. Fontos a működésre vonatkozó törvényi előírások (nonprofit törtvény és számviteli elvek) valamint a adományozási szerződésben vállaltak betartatása, és az alapítvány likviditásának hatékony biztosítása.

3. A pénzügyek kezelése (administration) A célok megvalósítását szolgáló tevékenységekhez kapcsolódó pénzügyi tranzakciók lebonyolítása a feladat pl. figyelemmel kísérik, hogy a várt pénzek beérkeztek-e, vagy hogy a kedvezményezettek (pl. schoolok) megbízásai alapján kifizetéseket és átutalásokat teljesítenek. Az alapítványon belül mintegy 300 alszámlát (egymástól különböző projektet) kezelnek. Nyilvántartják, hogy (i) a különböző adományozó csoportokon belül kitől mire mennyi pénz érkezett be; (ii) napi bontásban mennyi pénz áll rendelkezésre (mennyi pénz érkezett, mennyi használható fel, mennyi fektethető be), továbbá (iii) elkészítik az alapítvány működéséről a vezetői tájékoztatókat pl. az alapítvány egészére az alapítvány felső vezetése számára, kampuszokra, vagy school-okra vonatkozó kimutatások az illetékes egyetemi vezetők számára.

A "school"-ok szerepe az adományok gyűjtésében

Mint arról már korábban szó esett, a school-oknak fontos szerepe van az adománygyűjtésben. Az, hogy egy school-hoz milyen összegű adomány érkezik be, nagymértékben függ attól, hogy a school dékánja mennyire tartja fontosnak a magán pénzeszközök gyűjtését. Az, hogy pl. van-e és milyen a volt hallgatókkal az intézményes kapcsolat, a school-okon múlik, tekintettel arra, hogy a volt hallgatók zöme valamilyen school-hoz kötődik. Vagy azt, hogy milyen célokra kíván a school adományt gyűjteni, az adott school határozza meg, azaz sok esetben az adománygyűjtés kezdeményezése a school-ok kezében van.

A jelentősebb adománygyűjtési programoknak összhangban kell állniuk az egyetem prioritásaival. Az adománygyűjtési program előteszteléséhez, az adománygyűjtési akció lebonyolításához, valamint a megszerzett adományok pénzügyi kezeléséhez a school-ok komoly támogatást kapnak az alapítványtól.

Az alapítvány a school-okkal szemben szolgáltató intézményként jelenik meg, amely a megszerzett összeg 10% alatti részéért (az alapítványi munkatársak szerint 7%, a school-ok szerint 9-10%) cserébe végzi szolgáltatásait a school-ok felé. A 48 órán belüli pénzkifizetések mellett naprakész információjuk van arról, hogy a school-ok egyes programjaira mennyi adomány érkezett, s abból mennyit költöttek. Elég meggyőzőnek hatottak az alapítvány munkatársai, amikor azt mondogatták, hogy ők azért vannak, mert vannak school-ok. A school-ok képviselői korrekt együttműködésként jellemezték az alapítvány munkatársaival való együttműködésüket.

Összességében úgy tűnt, hogy egészséges munkamegosztás működik az alapítvány és a school-ok között: a school-ok tudják, hogy mire lehet adományt gyűjteni, s ötleteik is vannak, hogy kitől, míg az alapítvány rendelkezik azokkal a praktikus ismeretekkel, amelyek ahhoz szükségesek, hogy a magán forrásokat meg tudják szerezni és hatékonyan tudják kezelni.

Összefoglalás

A felsőoktatási intézmények számára rendelkezésre álló egyre szűkülő költségvetési keretek szükségessé teszik, hogy a hazai intézmények is lépéseket tegyenek kiegészítő pénzügyi források megszerzésére. A tanulmányban vázoltak ötleteket adhatnak arra, hogy milyen "házon belül megtehető" lépésekre kerülhet sor. Recept nincs, viszont a recept hozzávalóit tudják nyújtani a külföldi példák, és ki kell gondolnia minden felsőoktatási intézménynek, hogy hogyan és mit akar, tud és képes a tapasztalatokból hasznosítani. Az, hogy hol és mi valósul meg, nagymértékben a felsőoktatási intézmények vezetőin múlik. De nem csak rajtuk. Jónéhány olyan e tanulmány keretei között csak érintett, ill. meg sem említett intézményi feltétel megteremtésére is szükség lenne a megismert példák adaptálásához, az ötletek átvételéhez, ami a felsőoktatási intézmények hatókörén kívül esik. Fel kell hívni a figyelmet továbbá arra is, hogy a működéshez szükséges költségvetési pénzek kiegészítése nem csak intézmény finanszírozási kérdés, és nem csupán az egyes felsőoktatási intézmények éves feladata. Mint ahogyan a felsőoktatás finanszírozása általában sem csak költségvetési kérdés, még akkor sem, ha időnként csak ebben a köntösben jelenik meg. Több beszélgető partnerünk úgy vélte, hogy a magyar felsőokatás abban a szerencsés de igen nehéz helyzetben van, hogy jelentős változásokat lehet és kell e téren végrehajtani. A változások rendszerben történő átgondolása elvezethet oda, hogy kialakításra kerüljön egy olyan, a magyar felsőoktatási rendszer sajátosságait is figyelembe vevő finanszírozási rendszer, amely a felsőoktatási intézmények hosszú távú sikeres működésének financiális kereteit adhatja. Benyomásaik szerint erre a magyar felsőoktatás intézményeinek jó esélye van.

Megjegyzések

(1) Az alábbi íráshoz a Magyar Rektori Konferencia által lebonyolított "Higher Education in Hungary. A Project for Developing New Resources" projekt keretében, 1996 júniusában az Indiana University-n tett tanulmányút adott alapot. A program életrehívásában és megszervezésében jelentős támogatást nyújtott U.S. Treasury Department-től Richard Bartholomew és Mark Wolf. A tanulmányutakat és az azokhoz kapcsolódó Rektori Konferencia lebonyolításában US Agency for International Development (USAID), British Know How Fund, Electronic Data System (EDS), Microsoft, Procter and Gamble, Academy for Educational Development, Charles Stuart Mott Foundation, és az Avonmore járult hozzá.

A szóban forgó projektben több egyetemről vettek részt kollégák. A velük folytatott beszélgetések nagyvonalakban összecsengnek azokkal a tapasztalatokkal, amit Vörös Józseffel az Indiana University-n szereztünk. A projektben az alábbi kollégák vettek még részt, zárójelben megjelölve azon intézményt is, ahol az adománygyűjtést tanulmányozták:

Boros László, Dékánhelyettes, ELTE Jogi kar (Holy Cross College, Massachusetts, US); *Kenesei István* JATE Angol nyelvi tanszék, Szeged (Cornell/SUNY Industrial Labor Relations School, US); *Keresztes Péter,* Főigazgató-helyettes, Széchenyi István Főiskola (Cornell/SUNY Industrial Labor Relations School, US); *Kormos János,* Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen (Oxford University – University of Greenwich, UK); *Molnár István,* Főigazgató, Szolnoki Kereskedelmi és Gazdasági Főiskola (Maricopa County System, Phoenix, US); *Rohács József,* Dékánhelyettes, BME Közlekedésmérnöki kar (Holy Cross College, Massachusetts, US); *Szabó Gábor,* Szegedi Élelmiszeripari Főiskola (Maricopa County System, Phoenix, US); *Szendrődi László,* Soproni Erdészeti és Faipari Egyetem (Oxford University – University of Greenwich, UK); *Vörös József,* JPTE Közgzadaságtudományi kar (Indiana University, Bloomington-Indianapolis, US); *Czakó Erzsébet,* BKE Gazdálkodási kar (Indiana University, Bloomington-Indianapolis, US).

(2) Külön köszönettel tartozunk Patricia Eoyang-nak, az Indiana University (IU) Business School-jának és Giles Hoyt-nak, az IU Indianapolis-i kampuszának nemzetközi ügyekért felelős igazgatóinak a beszélgetések megszervezéséért, továbbá az IU azon munkatársainak, akik a lehető legtöbb ismerettel igyekeztek bennünket felvértezni.

FINANCING A STATE UNIVERSITY — LESSONS OF THE INDIANA UNIVERSITY

The study is to show the financing structure of the Indiana University. The study describes the financing structure of the Indiana University, and discuss the fund raising techniques. It emphasises those elements that can be implemented at Hungarian universities. The study is based on experience of a study trip to Indiana (US) this year, and 25 interviews with professors and professionals at the Indiana University and in the Indiana University Foundation. The study trip was part of the „Higher Education in Hungary. A Project for Developing New Resources" project within that other US and European universities were also studied by Hungarian scholars. The project was initiated by the US Department of Treasury and the Hungarian Rectors' Conference.