TOVÁBBI MEGJEGYZÉSEK FORGÓ FERENC EGY PROBLÉMÁJÁHOZ[1]

SZIDAROVSZKY FERENC
Arizonai Egyetem, Rendszer- és Iparmérnöki Tanszék

Forgó egy korábbi dolgozatában kimutatta, hogy alkalmas feltételek mellett a hatékony és racionális ösztönzés akkor és csak akkor esik egybe, ha az f jövedelemfüggvény kielégíti az

$$f(a) \cdot \nabla f(a) = \int_0^1 \nabla f(ta)dt \cdot \nabla f(a)a$$

egyenletet, ahol ∇f az f gradiensvektora. Dolgozatunkban az egyenlet megoldásainak pontos leírását adjuk meg, kimutatva, hogy egy n-változós, valós értékű függvény alkalmas differenciálhatósági feltételek és pozitív elsőrendű parciális deriváltak mellett akkor és csak akkor elégíti ki az egyenletet egy K kúpon ($K \subset \mathbf{R}^n_+$), ha az elsőrendű parciális deriváltak hányadosai valamennyien konstansok és $f(0) = 0$.

1. Bevezetés

Forgó [1] dolgozatában egy n tagból álló gazdasági egységet vizsgál. Jelölje $x_i \in [0, 1]$ az i-edik tag intenzitását, ahol $x_i = 0$ a kiinduló szintnek, $x_i = 1$ pedig a maximális intenzitásnak felel meg. Az egység jövedelme az intenzitások f függvénye. Az f függvény értelmezéséből következik, hogy növekvő minden változójában. Forgó kimutatja, hogy a hatékony és racionális ösztönzés egy a intenzitásvektor esetén akkor és csak akkor esik egybe, ha

$$f(a) \cdot \nabla f(a) = \int_0^1 \nabla f(ta)dt \cdot \nabla f(a)a\,. \tag{1}$$

Goldner és Vízvári [2] cikkükben kimutatják hogy, ha f nem azonosan zérus, μ-edrendű ($\mu > 1$) homogén függvény, akkor tetszőleges a mellett kielégíti az (1) egyenletet. Dolgozatukban azt a sejtést is közlik, hogy f homogenitása szükséges feltétel is. Könnyen láthatjuk, hogy ez a sejtés nem igaz, amint azt az $f(a_1, a_2) = \exp(a_1 + a_2) - 1$ függvény esete mutatja.

[1] **Beérkezett 1996. június 9.**

Dolgozatunkban alkalmas (és a Forgó modellnek megfelelő) feltételek mellett az (1) egyenletet kielégítő függvények teljes jellemzését adjuk meg.

2. A megoldások jellemzése

A dolgozat fő eredménye a következő tétel.

TÉTEL. Legyen $D \subset \mathbf{R}^n$ egy nyílt halmaz, és $K \subset \mathbf{R}^n_+$ egy kúp. Tegyük fel, hogy $K \subset D$, és az $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonosan differenciálható és az elsőrendű parciális deriváltak valamennyien pozitívak a K kúpon. Egy f függvény a fenti feltételek mellett akkor és csak akkor elégíti ki az (1) egyenletet a K kúpon, ha $f(0) = 0$ és az $f_k(a)/f_\ell(a)$ hányadosok valamennyien konstansok, ahol $f_1, f_2, \dots, f_n$ jelöli az elsőrendű parciális deriváltakat.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f kielégíti a fenti feltételeket és az (1) egyenletet. Az $a = 0$ helyettesítés azonnal mutatja, hogy $f(0) = 0$. Legyen μ egy valós szám ($\mu \geq 0$) és helyettesítsük μa-t az (1) egyenletbe:

$$f(\mu a) \bigtriangledown f(\mu a) = \int_0^1 \bigtriangledown f(t\mu a) dt \cdot \bigtriangledown f(\mu a)\mu a \,. \tag{2}$$

Vezessük be az $u = t\mu$ új változót az integrálban, akkor azt kapjuk, hogy $du = \mu dt$ és

$$\int_0^1 \bigtriangledown f(t\mu a)dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\mu \bigtriangledown f(ua)du \,.$$

A (2) egyenletet ez alapján átírhatjuk a következőképpen:

$$\frac{\bigtriangledown f(\mu a)a}{f(\mu a)} = \frac{f_k(\mu a)}{\int_0^\mu f_k(ua)du} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ahol csak azt kell feltennünk, hogy $\mu a \neq 0$, hiszen (1) alapján $f(a) > 0$ $a \neq 0$ esetén. Minthogy mindkét oldalon a számláló a nevező μ-szerinti deriváltja,

$$\ln f(\mu a) = \ln \int_0^\mu f_k(ua)du + \ln g_k(a) \,,$$

ahol $g_k(a)$ csak a-tól függ és μ-től független. Vagyis,

$$f(\mu a) = g_k(a) \int_0^\mu f_k(ua)du \,.$$

Deriválva μ szerint

$$\bigtriangledown f(\mu a)a = g_k(a) \cdot f_k(\mu a) \,,$$

azaz a

$$\frac{\nabla f(\mu a)a}{f_k(\mu a)}$$

függvény nem függ μ-től. Ha felírjuk ezt a kifejezést k valamennyi értékére és elosztjuk egymással, akkor azonnal látható, hogy valamennyi k és ℓ esetén az

$$\frac{f_k(\mu a)}{f_\ell(\mu a)}$$

hányadosok is függetlenek μ-től ($\mu a \neq 0$). Az elsőrendű parciális deriváltak folytonosságából adódóan a $\mu \longrightarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\frac{f_k(\mu a)}{f_\ell(\mu a)} = \frac{f_k(0)}{f_\ell(0)}$$

tetszőleges $a \in K$, $\mu \geq 0$ esetén. Tehát az elsőrendű parciális deriváltak hányadosai valamennyien konstansok.

Tegyük fel ezután, hogy egy f függvényre $f(0) = 0$ és $f_k(a)/f_\ell(a) = A_{k\ell}$ tetszőleges $a \in K$ mellett. Ekkor (1) baloldalának k-adik komponense:

$$f(a)f_k(a)\,,$$

és (1) jobboldalának k-adik komponense:

$$\int_0^1 f_k(ta)dt \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell(a)a_\ell = \int_0^1 f_k(ta)dt \left(a_k + \sum_{\ell\neq k} a_\ell A_{\ell k} \right) f_k(a)$$

$$= \int_0^1 f_k(ta) \left(a_k + \sum_{\ell\neq k} a_\ell A_{\ell k} \right) dt f_k(a) = \int_0^1 \left(\sum_{\ell} f_\ell(ta)a_\ell \right) dt f_k(a)$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(ta)dt f_k(a) = (f(a) - f(0))\, f_k(a) = f(a)f_k(a).$$

Tehát f kielégíti az (1) egyenletet. ■

3. Megjegyzés

Egy látszólagos ellentmondás van a fenti tétel és a Goldner–Vízvári cikk [2] 3. Tétele között, ugyanis μ-edrendű ($\mu > 1$) homogén függvények nem feltétlenül elégítik ki a fenti tétel feltételeit. Például

$$f(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$$

2-rendű homogén függvény, de az

$$\frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{2a_1}{2a_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

hányados nem konstans. A probléma abból adódik, hogy $\mu > 1$ esetén a μ-edrendű homogén függvények elsőrendű parciális deriváltjai nem pozitívak. Ugyanis

$$\nabla f(ta) = t^{\mu-1} \nabla f(a),$$

és ∇f folytonossága esetén $t = 0$ helyettesítéssel láthatjuk, hogy $\nabla f(0) = 0$, így a függvény nem elégíti ki a dolgozat egyik alapfeltevését.

Irodalom

1. Forgó F., A hatékony és racionális elosztás (in)konzisztenciája: egy axiomatikus megközelítés, Szigma, XXIII (1992), 1–2. sz., 1–6.
2. Goldner G.–Vízvári B., Megjegyzések Forgó Ferenc egy problémájához. Szigma, XXV (1994), 4.sz., 203–206.