

A PARETO HIPOTÉZIS VIZSGÁLATA — ÉRTÉKPAPÍR-PIACI HOZAMOK ÉS AZ EXTREMÁLIS HOZAMOK ELOSZLÁSA¹

(Német részvényhozamok és a tőzsdeindex empirikus elemzése)

THOMAS LUX – VARGA JÓZSEF

Otto Friedrich Universität Bamberg – JPTE KTK, Pécs

A tanulmányban a DAX tőzsdeindex kialakításában szerepet játszó 30 részvény napi hozamai vizsgálatának néhány eredményét ismertetjük, továbbá vizsgáljuk a tőzsdeindex statisztikai tulajdonságait. A stabil eloszlások paramétereinek becslési eredményei és standard illeszkedési próbák alapján a Pareto hipotézis elfogadhatónak tűnik. Az eloszlások határai (farokrészei) tulajdonságainak vizsgálatára kifejlesztett szemiparametrikus módszer (a Hill-féle farokindex esztimátor felhasználásán alapuló módszer) alkalmazásával nyert eredmények azonban nem kompatibilisek a stabil eloszlástörvényekkel, így ez a Pareto hipotézis elvetését indokolja minden megvizsgált részvény esetében. A fentiek mellett erőteljes hasonlóság észlelhető a vizsgált idősorok extrémális viselkedésében, így nem vethető el az a feltevés, hogy az extrémális értékek eloszlástulajdonságai megegyeznek.

1. Bevezetés

Tanulmányunkban a DAX tőzsdeindex kialakításában szerepet játszó 30 leggyakrabban vásárolt német részvény árfolyamának statisztikai eloszlását, extrémális tulajdonságait, továbbá a tőzsdeindex statisztikai tulajdonságait vizsgáljuk.² Az elemzésben felhasznált adatok az 1988. január 1. és 1994. szeptember 9. közötti periódusból valók, ahol a kezdő időpont megegyezik a DAX megformálásának és publikálásának kezdő időpontjával.

Elemzésünk kiindulópontja annak vizsgálata, hogy a stabil eloszlás család (más elnevezéssel a Pareto eloszlások) alkalmasak-e a tőzsdei hozamok modellezésére. Az irodalomban a pénz- és tőkepiaci adatok modellezésére ajánlott eloszlások között hosszú időszakban meghatározó szerepet játszottak az ún. stabil eloszlások. Meg kell jegyeznünk, hogy nem minden ok nélkül, hiszen

¹Beérkezett 1996. szeptember 24.

²A tanulmány MKM és OTKA támogatással készült. (MKM 751 sz. és OTKA T 020451 sz. pályázat).

csak a stabil Pareto eloszlások lehetnek független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. Ebben az eloszlásosztályban a normális eloszlás az $\alpha_s = 2$ speciális eset, ahol α_s az ún. karakterisztikus kitevő. Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei eloszlásának a normális eloszláshoz konvergálását a klasszikus központi határeloszlási tétel állítja, feltéve, hogy a valószínűségi változók varianciája létezik. Ha azonban a másodrendű momentumokra vonatkozó feltétel nem teljesül, akkor az összegek határeloszlásai $\alpha_s < 2$ exponenssel jellemzett, a Gauss eloszlástól különböző eloszlások. A normalitás egyértelmű elvetése, továbbá azok a vizsgálatok, amelyek a másodrendű empirikus momentumok nem konvergens voltát támasztották alá azt eredményezték, hogy Mandelbrot (1963) és Fama (1963) az $\alpha_s < 2$ paraméterű stabil eloszlásokat ajánlották a tőkepiaci hozamok releváns modelljeként. A normális eloszlástól különböző stabil eloszlások a fentiek mellett megtartják az adatokban megfigyelt olyan fontos tulajdonságokat, mint a jelentős farokrész és a magas csúcsok a várható értéknél, továbbá az adatok aggregálásakor, vagyis a napi, heti stb. adatok összevonásakor megmutatkozó stabilitás. Az indoklás — amelyet itt nem részletezünk — annyira meggyőzőnek tűnt, hogy a témával foglalkozó kutatók evidenciaként fogadták el az $\alpha_s < 2$ exponensű stabil Pareto eloszlást, mellőzve az illeszkedés-vizsgálatokat. Az irodalomban előforduló számos példából csak néhányat említettünk meg: Teichmoeller (1971), Simkowitz és Beedles (1980) részvényhozamokat vizsgálva, McFarland, Pettit és Sung (1980), valamint So (1987a) a devizaárfolyamok vizsgálata során, Cornew, Town és Crowson (1984), továbbá So (1987b) pedig a határidős hozamok vizsgálatakor alkalmaztak Pareto eloszlást, mellőzve a szükséges illeszkedés-vizsgálatok elvégzését. Ugyanakkor más szerzők az adatok aggregációjával szembeni stabilitás elfogadhatatlanságára utaló jeleket vélték felfedezni, amelyek a napi, heti stb. megfigyelések esetében abban jutottak kifejezésre, hogy az α nem maradt állandó a fent említett különböző szintű aggregációk során. Egyes kutatók ezek alapján megkérdőjelezték a stabil eloszlások alkalmazhatóságát a pénzügyi idősorok területén. (Pl.: Hsu, Miller és Wichern (1974), Upton és Shannon (1979), Friedman és Bandersteel (1982), valamint Hall, Brorsen és Irwin (1984).) Azt a gyakorlatot, amely a karakterisztikus kitevőt helyezte a vizsgálatok középpontjába (és a paraméter becslését egy stabil eloszlás feltételezése mellett javasolta végrehajtani) Du Mouchel (1983) bírálta. Ugyancsak ő javasolta szemiparametrikus becslési eljárást alkalmazását a megfigyelések csökkenési arányának vizsgálatára az empirikus eloszlás farokrészében a stabil és más lehetséges eloszlások megkülönböztethetősége érdekében. Amint azt a későbbiekben bemutatjuk, az extrémális események határtulajdonságai jól jellemezhetők a farokindex fogalmának bevezetésével. A stabil eloszlások esetében a farokindex egybeesik az α karakterisztikus kitevővel. Ha azonban

a valódi eloszlás nem stabil eloszlás, akkor a stabil eloszlás α_s paraméterének felhasználása a határtulajdonságok vizsgálatában félrevezető következtetéseket eredményezhet. Ez különösen abban az esetben fordulhat elő, ha az α_s karakterisztikus kitevő értéke a $(0, 2]$ intervallumban van, mert ekkor a farokindexek bármely pozitív értéket felvehetnek. A szemiparametrikus farokindex esztimátor alkalmazásának legfőbb előnye, hogy lehetővé teszi olyan "beágyazott teszt" alkalmazását a különböző eloszlás-alternatívák vizsgálatára, amely alternatívák elkülönítése a farokrész viselkedésének különbözőségén alapul.

A dolgozat további részében azt vizsgáljuk, hogy a stabil eloszlások alkalmasak-e a német részvényhozamok vizsgálatára. Először a stabil eloszlásfüggvény paramétereinek becslésével foglalkozunk, és az illeszkedés jóságát vizsgáljuk χ^2 -próba segítségével. Második lépésként szemiparametrikus farokindex esztimátort alkalmazunk az eredmények más módszerrel történő ellenőrzésére. A vizsgálatok eredményei szerint a stabil eloszlás egyértelműen visszautasítható minden vizsgált részvény, továbbá a DAX index esetében is. A farokindexet is vizsgáltuk az alsó és felső farokrész megegyezősége tekintetében, továbbá elemeztük a különböző részvények között is a határtulajdonságok megegyezőségét.

A következő szakaszban az alkalmazott statisztikai módszereket ismertetjük, a harmadik szakaszban bemutatjuk az elemzések eredményeit, végül a negyedik szakaszban az elemzés alapján levonható következtetésekről szólnunk.

2. Az elemzésben alkalmazott módszerek

A stabil eloszlásosztály csak karakterisztikus függvényével adható meg, amely a következő alakban írható fel:

$$\log E(e^{ixt}) = \begin{cases} i\delta t - |ct|^{\alpha_s} \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha_s}{2}\right) \right] & \text{ha } \alpha_s = 1; \\ i\delta t - |ct| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \log|t| \right] & \text{ha } \alpha_s = 1. \end{cases} \quad (1)$$

A megoldás zárt alakban csak néhány esetben ismert, például a Gauss-eloszlás ($\alpha_s = 2$), vagy a Cauchy-eloszlás ($\alpha_s = 1, \beta = 0$) esetében. Az α_s, β, c és δ paraméterek az eloszlás alakját határozzák meg; az $\alpha_s \in (0, 2]$ karakterisztikus kitevő az eloszlás farokrésze mértékét, illetve a farokrészekre eső megfigyelések számának fogyatkozási arányát mutatja meg. Alacsonyabb α érték jelentősebb farokrészt és egyúttal az eloszlás középpontjában magasabb csúcsokat jelez; a $\beta \in [-1, 1]$ paraméter az eloszlás ferdeségét határozza meg; $\beta > 0$ jobb oldali, $\beta < 0$ pedig bal oldali ferdeségre utal. Végül c és δ rendre az ún. skálaparaméter, illetve a várható érték. Megjegyezzük, hogy másodvagy annál magasabb rendű momentumok csak az $\alpha = 2$ (Gauss-eloszlás)

határesetben léteznek. Az $\alpha_s \in (1, 2)$ esetben a várható érték létezik és meg-
egyezik az eloszlás δ paraméterével, magasabb rendű momentumok azonban
nem léteznek. Az $\alpha_s < 1$ esetben azonban még a várható érték sem létezik. A
pénzügyi gazdaságtan területén eddig végzett vizsgálatok szerint az α értéke
csaknem minden esetben az $(1, 2)$ intervallumba esett. Az a lehetőség, hogy
bizonyos stabil eloszlások esetében a variancia nem létezik, gondosabb elem-
zést tett szükségessé a hatékony részvényportfóliók kiválasztása területén is.

Az eloszlás négy paraméterének becslésére azt a finomított fraktálmódszert
alkalmaztuk, amelyet McCulloch (1986) dolgozott ki, és amely alkalmas a
paraméterek konzisztens becslésére a minta 5%, 25%, 50%, 75% és 95%
-os fraktálisaiból. Illeszkedés-vizsgálatra pedig a stabil eloszlásokra alkal-
mazható Du Mouchet-féle táblázatokat alkalmaztuk. A paraméterbecslést
és az illeszkedés-vizsgálatot egy integrált számítógépes program segítségével
végeztük el.

Az eloszlások farokrészei elemzésének elméleti hátterét az extrémális ér-
tékek elmélete szolgáltatja. (Ennek leírása megtalálható például Leadbet-
ter, Lindgren, Rootzen (1983) könyvének 1-3. fejezeteiben.) A további
elemzés az alábbi eredményre támaszkodik. Tekintsük az X_1, X_2, \dots, X_n
független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy stacionárius sorozatát,
és definiáljuk az

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2)$$

rendstatisztikát. Megmutatható, hogy M_n határeloszlása alkalmasan skálá-
zott, és az ún. max-stabil eloszlások három típusának egyikéhez konvergál
(ld. Leadbetter és mások 1983. p. 10.).

Mivel nem korlátos valószínűségi változó jelentős farokrészekkel rendelkező
eloszlásai jöhetnek szóba, a megfelelő eloszlástípus

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0; \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

eloszlásfüggvénnyel jellemezhető. Ez azt jelenti, hogy $P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\}$
(gyenge értelemben) konvergál a $G(x)$ eloszlásfüggvényhez, ahol az a_n és b_n
a normáláshoz szükséges állandók.

Már említettük, hogy egy stabil eloszlás karakterisztikus kitevője egy-
beesik a $G(x)$ határeloszlás farokindexével. A farokindex értéke azonban
nem korlátozódik a $(0, 2]$ intervallumra, hanem tetszőleges pozitív szám lehet.
Ebből az következik, hogy a fraktál módszerrel (vagy az irodalomban fel-
lelhető más módszerrel) becsült karakterisztikus kitevő nem feltétlenül esik
egybe a farokindexszel, ha a vizsgált eloszlás nem a stabil eloszláscsaládhoz
tartozik. Példaként említhetjük a Student-féle t -eloszlást, amely jelentős fa-
rokrészt tartalmaz, ugyanakkor olyan extrémális eloszláshoz konvergál, amely-
nek a farokindexe megegyezik a t eloszlás szabadságfokával. Tehát a Student-

eloszláscsalád tagjainak farokindexei az 1, 2, ... számok lehetnek. Másik példaként az ARCH folyamatok említhetők, amelyek szintén kielégíthetik a határeloszlási tétel feltételeit 2-nél nagyobb index érték esetében. De Haan és szerzőtársai (1989) a farokindex és az ARCH folyamat paramétereinek kapcsolatát vizsgálták. Ezek mind a farokbecslési eljárásba beágyazott alternatívák, az adott mintán alapuló becslés pedig lehetővé teszi az egyik vagy a másik kizárását. További információ nyerhető a farokindex és a vizsgált eloszlás létező momentumai száma közötti kapcsolat alapján. Pontosabban szólva ismert, hogy a farokindexnél alacsonyabb rendű összes momentum létezik, míg a magasabb rendű momentumok nem konvergensek.

Az α index becslésére javasolt eljárások összehasonlítása alapján a Hill (1975) által bevezetett esztimátort tekintjük a leghatékonyabbnak (v.ö. Hols és de Vries, 1989 eredményeivel). A Hill-féle eljárás az α reciprokának konzisztens becslését adja az alábbi összefüggés felhasználásával :

$$\gamma_H = \frac{1}{\alpha_H} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n [\log x_{(i)} - \log x_{(m)}] , \quad (4)$$

ahol n a minta elemszáma, m a megfigyelések száma az eloszlás farokrészében, továbbá a minta elemei $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(m)} \geq \dots \geq x_{(n)}$ csökkenő sorba rendezettek.

Megmutatható, hogy $(\gamma_H - \gamma)\sqrt{m}$ aszimptotikusan normális eloszlású zérus várható értékkel és γ^2 varianciával. Ezt a tényt két hipotézis ellenőrzésére használjuk fel. Az egyik a különböző részvények határeloszlás tulajdonságainak megegyezésével, a másik pedig az egyes részvények alsó és felső határeloszlási megegyezésével kapcsolatos. Ezzel, valamint más esztimátorral kapcsolatban is jelentkező probléma az alkalmas farokrész méretének meghatározása, vagyis az α_H számításához felhasznált m elemszám megállapítása. Az m farokméret megválasztása szükségképpen magába foglal az α valódi értékére vonatkozó bizonyos vélekedést. Nyilvánvaló, hogy minél alacsonyabb (magasabb) az α érték, annál vastagabbak (vékonyabbak) a farokrészek, továbbá annál több (kevesebb) elem tartozik a farokrész tartományhoz, ez pedig befolyásolja a határérték reláció teljesülését is. Ha az m értékét túlságosan nagyra választjuk, akkor a faroktartomány olyan elemekkel "szennyeződik", amelyek inkább az eloszlás középső részéhez tartoznak, feltéve, hogy az α valódi értéke viszonylag magas. Abban az esetben pedig, amikor a faroktartományt túlságosan szűkre választjuk, akkor a következtetés ereje szükségtelenül korlátozódik viszonylag alacsony valódi α érték esetében. Összefoglalva: az m megfelelő értéke attól függ, hogy milyen hipotézist kívánunk ellenőrizni. Itt úgy döntöttünk, hogy különböző farokméreteket vizsgálunk annak eldöntésére, hogy a becsült farokindex állandó marad-e. Azt találtuk, hogy az eredmények jó stabilitást mutatnak a különböző farokméretek esetében és biztosítják a

releváns eloszlásfüggvény típus kiválasztását.

Farokindex becslési módszer alkalmazásával foglalkozó dolgozatok csak az utóbbi időben jelentek meg a közgazdasági irodalomban. Ilyen munka például Koedijk, Schafgans és de Vries (1990), valamint Kähler (1993) dolgozata, amelyekben devizaárfolyamok vizsgálatáról számolnak be. Eredményeik oly mértékben különböznek, hogy például Koedijk et al. vizsgálatai alapján nem utasítható el az a feltevés, hogy a farokindex a stabil eloszlásra jellemző tartományban helyezkedik el, míg Kähler elemzése szerint a becslött értékek a (3, 5) intervallumba esnek, ez utóbbi eredmény pedig az $\alpha < 2$ feltevés elutasíthatóságát jelenti. Dewachter és Gielens (1991) megmutatják, hogy a Koedijk et al. dolgozatban ismertetett becslések torzítottak, és közlik a farokindex becslések (felfelé) korrigált értékeit. A devizapiacokkal kapcsolatos alkalmazásról számol be Koedijk és Kool (1993) a kelet-európai fizetőeszközök és az amerikai dollár közötti devizaárfolyamokat vizsgálva 2 és 3 közötti α értékeket kapnak. Akgiray, Booth és Seifert (1988), és Koedijk, Stork és de Vries (1992) a latin-amerikai feketepiac devizaárfolyamait vizsgálták. Az első szerzőcsoport kevésbé hatékony maximum-likelihood esztimátort alkalmazott, és 0.5 és 7 közötti értékeket kapott, a másodikként említett dolgozatban ugyanazokat az adatokat elemezték, mint az elsőben, de a Hill esztimátort alkalmazták, és egy jóval szűkebb intervallumot (1.2 és 3.2 közötti értékeket) kaptak. Amerikai és német tőzsdei árfolyam hozamok elemzése található Akgiray, Booth (1988), valamint Akgiray, Booth és Loistl (1988) dolgozataiban. Az utóbbi tanulmányokban szintén maximum-likelihood módszer alkalmazásáról számolnak be, a kapott α értékek 3 és ∞ , illetve 3 és 13 közöttiek. Végül Jansen és de Vries (1991) 10 amerikai részvény napi hozamait vizsgálták, a kapott α értékek 3.2 és 5.2 közötti intervallumba esnek.

3. Számítási eredmények

Az 1. táblázatban a 30 legfontosabb német részvény hozamának néhány statisztikai jellemzőjét, valamint a DAX tőzsdeindex fontosabb jellemzőit mutatjuk be.³

A hozamokat a Frankfurter Wertpapierbörse napi záróárai logaritmusainak felhasználásával számoltuk az egyes részvények 1 675 megfigyelt értéke alapján.

³A DAX tőzsdeindex kompozíciója nem volt állandó a vizsgált időperiódusban. Nevezetesen a Feldmühle és a Nixdorf árfolyamait (amelyek itt az elemzésben nem szerepelnek) a Metallgesellschaft és a Preussag árfolyamai váltották fel 1990 szeptemberében. Emellett többször megváltoztak az egyes részvények súlyai is a DAX-ot előállító lineáris kombinációban. Ezeket a változásokat azonban figyelembe vettük a DAX értékeiben, ezért ezek hatását szükségtelen külön is vizsgálni.

(Pontosan a

$$\Delta \log x_t = \log x_t - \log x_{t-1} = \log \frac{x_t}{x_{t-1}} \approx \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta x_t}{x_{t-1}}$$

összefüggés alapján történt az árfolyam-hozam számítása). A táblázatból kiolvasható, hogy kis mértékű baloldali ferdeséget mutat mindegyik minta. A csúcosság értéke is minden esetben a normális eloszlásra jellemző érték feletti. A normalitás feltevés itt is, mint csaknem minden pénzüpiaci idősor esetében, határozottan elutasítható. (A normalitás vizsgálat eredményének ismertetését mellőzzük.)

A 2. táblázat a stabil eloszlás paramétereinek becsült értékeit és az illeszkedés-vizsgálatok eredményeit foglalja össze. A karakterisztikus kitevő 1.423 és 1.748 között változik, míg az eloszlás ferdeségére jellemző β paraméter a -0.05 és 0.22 értékek közé esik. Az a tény, hogy a β értéke a 31-ből 28 esetben pozitív, ellentmondani látszik az 1. táblázatból kiolvasható, és valamennyi mintára jellemző ferdeségnek. Ennek a feltűnő eltérésnek a részletesebb elemzése arra enged következtetni, hogy azt az 1989. októberi "mini tőzsdekrach" következtében adódó negatív harmadrendű momentumok okozták. Ezt támasztja alá, hogy a fenti eseménnyel kapcsolatos adatok eltávolítása után a ferdeség a legtöbb esetben pozitívvá válik. Mivel a fraktál módszer az átlagtól leginkább eltérő adatokat nem veszi figyelembe, ezért az empirikus eloszlás középső részében csekély pozitív ferdeség mutatkozik.

Az empirikus eloszlások illeszkedés-vizsgálatára 10 és 25 cellás χ^2 próbát alkalmaztunk.⁴ A 25 cellás próba szerint 12, illetve 16 esetben visszautasítható a Pareto-eloszlásra vonatkozó hipotézis 1%, illetve 5% szignifikancia szinten. A DAX tőzsdeindex esetében azonban ez a feltevés nem utasítható el. A 10 cellás próba még további 8 esetben a hipotézis elvetését támasztja alá 1%, illetve 5% szignifikancia szinten, és ugyanilyen szinten elutasítható a stabil eloszlás feltételezése a DAX esetében is. A 10 cellás próba végrehajtásakor néhány elutasítást eredményező eset a δ paraméter becslési hibájának a következménye lehet. Ezért a 25 cellás változat alkalmasabbnak látszik következtetések levonására.

Az eredmények értelmezése ennél a standard próbánál eléggé bizonytalan: egyrészt az összes eset több mint egyharmadában 1% szinten elvethető a stabil eloszlással kapcsolatos hipotézis, amely eredmény értelmezhető rossz

⁴Az a szabály, amely szerint a fokszámot csökkenteni kell a becsült paraméterek számával, itt nem alkalmazható, mert a becsléseknek a χ^2 minimumbecslésekkel való aszimptotikus megegyezése feltétel nem teljesül (bővebben ld. Moore, 1986). Az egzakt kritikus pontok például a 25 cellás próba esetében $\chi^2(24)$ és $\chi^2(20)$ közé esnek. Mivel becsléses illeszkedés-vizsgálatot végeztünk, amely az elméleti eloszlás szabadságfokát módosítja, ezért 5, illetve 20 szabadságfokkal számoltunk.

hírként is a Pareto-eloszlás feltételezését támogatók számára, másrésztől viszont úgy is értelmezhető ez az eredmény, hogy az empirikus eloszlások egy jelentős része egészen jól leírható stabil eloszlásként. A 2. táblázatban összefoglalt eredmények tehát megerősítik azt az egyébként több más tanulmányból is kirajzolódó képet, amely szerint: (1) van bizonyos általános hasonlóság az empirikus eloszlások és a Pareto-eloszlások alakja között; (2) a becslült karakterisztikus kitevők az 1.5 érték körüli viszonylag szűk intervallumba esnek.

1. táblázat Német tőzsdei hozamok néhány statisztikai jellemzője

Tőzszeindex, részvények	Átlag $\cdot 10^2$	Szórás $\cdot 10^2$	Ferdeség	Csúcsosság
DAX	0.047	1.201	-0.974	15.990
Allianz	0.046	1.579	-0.166	12.801
BASF	0.015	1.361	-0.551	7.326
Bayer	0.021	1.326	-0.041	4.672
Bayr. Hypobank	0.013	1.479	-1.233	14.175
Bayr. Vereinsbank	0.021	1.511	-0.659	11.350
Commerzbank	0.026	1.473	-0.959	10.436
Continental	0.009	1.773	-0.112	3.173
Daimler	0.023	1.589	-0.421	9.245
Dt. Babcock	0.029	2.090	-1.252	24.801
Deutsche Bank	0.038	1.372	-0.544	9.980
Degussa	0.026	1.692	-0.846	19.227
Dresdner Bank	0.034	1.377	-0.535	6.929
Henkel	0.013	1.320	-1.548	30.991
Hoechst	0.020	1.401	-0.248	6.099
Karstadt	0.023	1.596	-1.170	24.786
Kaufhof	0.013	1.654	-0.466	8.344
Lufthansa	0.022	2.218	-0.123	4.499
Linde	0.035	1.248	-1.119	15.152
MAN	0.067	1.818	-1.186	23.720
Metallges.	-0.009	2.335	-1.002	16.268
Mannesmann	0.087	1.808	-0.622	12.728
Preussag	0.086	1.805	-0.947	12.125
RWE	0.048	1.423	-0.753	13.089
Schering	0.059	1.333	-0.004	4.689
Siemens	0.039	1.302	-0.426	8.882
VEBA	0.044	1.364	-1.096	22.268
VIAG	0.064	1.484	-1.330	24.844
VW	0.047	1.767	-0.627	10.869

A számítások alapját képező adatok az 1988.04.01–1994.09.09. periódusbeli napi hozamok, minden esetben 1 675 adat.

2. táblázat A Pareto-eloszlás paramétereit és az illeszkedés-vizsgálat eredményeit

Tőzsdeindex, részvények	α_S	β	$c \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^2$	χ^2 -próba	
					10	25
					cellás	
DAX	1.737	-0.181	0.651	0.024	19.60**	27.70
Allianz	1.632	0.107	0.807	0.039	6.09	35.07*
BASF	1.663	0.079	0.735	0.023	8.89	29.43
Bayer	1.561	-0.043	0.708	-0.018	4.65	28.18
Bayr. Hypobank	1.589	0.116	0.753	0.046	14.12*	55.31**
BMW	1.623	0.096	0.789	0.035	10.58	31.40
Bayr. Vereinsbank	1.602	0.039	0.812	0.016	28.23**	37.10*
Commerzbank	1.632	-0.010	0.795	-0.003	42.49**	58.66**
Continental	1.640	0.066	1.006	0.029	30.34**	29.85
Daimler	1.549	0.083	0.827	0.043	6.84	31.22
Dt. Babcock	1.580	0.120	1.053	0.069	50.71**	67.55**
Deutsche Bank	1.515	0.013	0.692	0.006	20.92**	43.04**
Degussa	1.550	0.183	0.865	0.098	49.59**	54.27**
Dresdner Bank	1.585	0.054	0.732	0.021	21.53**	27.58
Henkel	1.624	0.147	0.664	0.045	36.87**	56.12**
Hoechst	1.566	0.139	0.723	0.025	7.73	27.64
Karstadt	1.748	0.136	0.871	0.032	18.39**	27.01
Kaufhof	1.561	0.085	0.893	0.045	18.76**	28.54
Lufthansa	1.514	0.119	1.175	0.098	43.29**	101.37**
Linde	1.628	0.179	0.663	0.054	35.44**	68.03**
MAN	1.624	0.219	0.931	0.094	13.46*	11.79
Metallges.	1.501	0.089	1.071	0.070	22.89**	32.60
Mannesm.	1.677	0.184	0.977	0.067	21.66**	23.34
Preussag	1.507	0.224	0.906	0.146	32.96**	45.88**
RWE	1.423	0.066	0.658	0.044	17.07**	42.12**
Schering	1.500	0.046	0.674	0.023	30.50**	35.13*
Siemens	1.626	0.083	0.703	0.058	12.53*	36.69*
Thyssen	1.663	0.102	0.939	0.081	17.19**	42.80**
VEBA	1.521	0.010	0.645	0.042	11.38*	56.06**
Viag	1.501	0.202	0.716	0.106	9.40	29.82
VW	1.716	0.145	0.994	0.045	23.90**	26.33

Megjegyzés: * és ** a feltevés elutasítását jelöli 5%, illetve 1% szinten. A χ^2 eloszlás kritikus értékei: $\chi_{95\%}^2(5) = 11.1$, $\chi_{99\%}^2(5) = 15.1$ az 5 szabadságfok esetén, és $\chi_{95\%}^2(20) = 31.4$, $\chi_{99\%}^2(20) = 37.6$ a 20 szabadságfok esetén.

Ellenpróbaként megvizsgáljuk az empirikus eloszlások farokrészeit. Ha a stabil eloszlások alkalmasak az empirikus eloszlások leírására, akkor ez a feltevés a farokindex becslések alapján megerősíthető. Először azt vizsgáljuk,

hogy az eloszlások alsó illetve felső farokrészei megegyező határtulajdonságokat mutatnak-e. Ebben az esetben ugyanis a két farokrészből származó megfigyelések egyesíthetők az abszolút értékeik segítségével, és ilyen módon megnövelhető a becslésekhez felhasználható megfigyelések m száma. (Egy baloldali farokrészben megfigyelt mintaelem abszolút értéke egy a jobboldali farokrészben megfigyelt értékek tekinthető, és értelemszerűen járhatunk el a jobboldali farokrészben megfigyelt hozamértékekkel.) A farokrészek eloszlása tekintetében megmutatkozó aszimmetria természetesen alapot szolgáltathat arra, hogy a stabil-eloszlás feltételezést visszautasítsuk, hiszen ezek az eloszlások a farokrészekben azonos határtulajdonságot mutatnak. Annak eldöntésére, hogy a felső, illetve az alsó farokrészek statisztikai szempontból megegyezőknek tekinthetők-e, a Hill-esztimátort alkalmaztuk a megfigyelések legalsó, illetve legfelső 5%-ára. Az α^+ és α^- ($\alpha^+ = 1/\gamma^+$ és $\alpha^- = 1/\gamma^-$) pontbecsléseit a 3. táblázat tartalmazza. Az $\alpha^+ = \alpha^-$ hipotézis ellenőrzésekor azt használjuk fel, hogy az $1/\gamma_H$ közelítőleg normális eloszlású. Ebből következőleg

$$Q = \left(\frac{\gamma^+ - \gamma}{\sigma_\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\gamma^- - \gamma}{\sigma_\gamma} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha^+} - 1 \right)^2 m + \left(\frac{\alpha}{\alpha^-} - 1 \right)^2 m$$

összeg 2 szabadságfokú χ^2 eloszlású ($\sigma_\gamma^2 = \gamma^2/m$).

A táblázat utolsó oszlopából leolvasható, hogy mindegyik vizsgált esetben megadható az α értékek olyan széles tartománya, amelyre az $\alpha^+ = \alpha^-$ hipotézis 1% szinten nem utasítható el. A bal- és jobboldali farokrészek azonos eloszlása feltételezhetőségével kapcsolatos kétségeket ébreszthet az, hogy 30-ból 25 esetben $\alpha^+ > \alpha^-$ figyelhető meg. Miután az $\alpha^+ = \alpha^-$ feltevés maga után vonja $P(\alpha^+ > \alpha^-) = P(\alpha^+ < \alpha^-) = 0.5$ teljesülését, egyszerű szimmetriapróba alkalmazható: feltéve, hogy $\alpha^+ = \alpha^-$, azoknak a megfigyeléseknek a k száma, amelyekre $\alpha^+ > \alpha^-$ teljesül, binomiális eloszlású $n = 30$ és $p = 0.5$ paraméterekkel, ahol 30 a vizsgálatban szereplő részvények száma, a DAX tőzsdeindexet természetesen nem vizsgáljuk, hiszen az őt alkotó részvényárfolyamok lineáris kombinációjaként áll elő. Annak valószínűsége, hogy $k \geq 25$ vagy $k \leq 5$ 0.003-mal egyenlő. Ennélfogva, annak ellenére, hogy az egyedi részvények esetében nem utasítjuk el az $\alpha^+ = \alpha^-$ feltevést, a harminc részvény egészét tekintve jelentős aszimmetria mutatkozik az alsó, illetve felső farokindexekben. Ennek magyarázatát keresve, a korábban már említett 1989. októberi "mini krach" tekinthető az aszimmetria okozójának. A megfelelő adatokat eltávolítva és újraszámolva az alsó és felső 5%-os farokindexeket, az aszimmetria csökken, így a 30-ból már csak 20 esetben áll fenn az $\alpha^+ > \alpha^-$ egyenlőtlenség, ami statisztikailag nem szignifikáns. Az aszimmetriát tehát egy olyan extrém esemény okozta, amely mindegyik részvényre hatott és a hatása is többnyire ugyanolyan volt.

(A DAX zuhanása 13%-os, míg az egyes részvényárfolyamok csökkenése 6 és 25% közötti volt az említett napon. Ezért arra a következtetésre jutottunk, hogy nincsen szisztematikus eltérés a két farokrész extrémális viselkedésében.) Az alsó és felső farokrészeket együtt vizsgáljuk úgy, hogy a hozam megfigyelt értékéből kivonjuk a várható értékét és a különbség abszolút értékét vesszük.

3. táblázat Az eloszlások alsó és felső farokrészeinek összehasonlítása

Tőzsdeindex, részvények	a^+	a^-	a^+ és a^- megegyezé- sének intervallumai
DAX	2.744	2.693	(2.078, 3.358)
Allianz	2.855	2.507	(2.055, 3.262)
BASF	3.011	2.351	(2.073, 3.129)
Bayer	2.983	2.834	(2.224, 3.585)
Bayr.Hypobank	2.931	2.301	(2.022, 3.061)
BMW	2.543	2.607	(1.969, 3.180)
Bayr.Vereinsbank	3.299	2.981	(2.404, 3.844)
Commerzbank	3.284	2.785	(2.330, 3.657)
Continental	3.313	2.887	(2.377, 3.765)
Daimler	3.282	2.902	(2.370, 3.768)
Dt.Babcock	2.919	2.737	(2.163, 3.481)
Deutsche Bank	2.870	3.050	(2.264, 3.645)
Degussa	3.454	2.857	(2.427, 3.772)
Dresdner Bank	3.068	2.612	(2.181, 3.427)
Henkel	3.119	2.807	(2.269, 3.624)
Hoechst	2.733	2.717	(2.099, 3.390)
Karstadt	2.566	2.922	(2.103, 3.339)
Kaufhof	3.820	3.121	(2.672, 4.129)
Lufthansa	3.464	2.911	(2.449, 3.830)
Linde	2.969	2.662	(2.156, 3.441)
MAN	2.927	2.817	(2.196, 3.544)
Metallges.	2.964	2.258	(2.025, 3.009)
Mannesm.	2.743	3.009	(2.202, 3.526)
Preussag	3.177	2.564	(2.212, 3.399)
RWE	3.154	2.707	(2.249, 3.544)
Schering	2.862	2.824	(2.173, 3.512)
Siemens	3.030	2.832	(2.242, 3.606)
Thyssen	3.515	2.562	(2.373, 3.412)
VEBA	2.889	2.579	(2.094, 3.339)
Viag	3.260	2.681	(2.286, 3.543)
VW	3.187	3.016	(2.372, 3.821)
Mintaelemszám	83	83	

Megjegyzés: a harmadik oszlopban azok az intervallumok találhatóak, amelyekben az $a^+ = a^-$ feltevés 1%-os szinten nem utasítható vissza.

A pontbecslések előállítása, valamint annak megvizsgálása, hogy ezek a becslések hogyan változnak a minta elemszámával, a kétoldalú Hill-esztimátor segítségével történt, valamennyi részvény és a DAX index esetében 15%, 10%, 5% és 2.5% farokrész méretek (vagyis 15%, 10%, 5% és 2.5%-os kvantilisek) mellett. (Ha a megfelelő százalékpont nem egész szám, akkor az egészrészét vesszük.) A számítási eredményeket a 4. táblázat foglalja össze. A témával foglalkozó más szerzők Monte Carlo szimulációs eredményeit figyelembe véve, hozzávetőleg a 15%-os kvantilis méret látszik alkalmasnak a stabil eloszlás-család azon tagjai esetében, amelyek karakterisztikus kitevője az (1, 2) intervallumba esik, míg a vékonyabb farokrészek a 3 és 5 közötti szabadságfokú Student-féle t -eloszlás esetében megfelelőek. A számítási eredmények azt mutatják, hogy a pontbecslések nem változnak a farokrészbeli megfigyelések számának változásával, vagy ha igen, akkor csekély mértékű növekedést mutatnak. Tekintettel az utóbbi esetre, nem zárható ki, hogy a valódi farokindek még nagyobbak, mint a 4. táblázatbeli becslött értékek. Nyilvánvaló azonban, hogy a pontbecslések minden esetben a Pareto-eloszlás családra jellemző tartományon kívül esnek. A hipotézis-ellenőrzés eredményei alapján az alábbi következtetések vonhatók le a vizsgált eloszlások természetét illetően:

A 10% és 5% farokrészeket tekintve, a becslések alapján kizárható a Pareto-eloszlások érvényessége valamennyi részvény, valamint a DAX tőzsdeindex esetében is. Ennek belátása céljából a pontbecslések körüli $x\%$ -os megbízhatóságú konfidenciaintervallumokat határoztunk meg az $\alpha_H \pm f_{x\%} \alpha_H / \sqrt{m}$ formulával, ahol $f_{x\%}$ a normális eloszlás $x\%$ -os kvantilise. (Felhasználjuk, hogy az $1/\alpha_H$ közelítőleg normális eloszlású). Az $\alpha < 2$ feltevés egyértelmű visszautasíthatóságát támasztja alá a 4. táblázatban található farokindek becslések 95%-os megbízhatóságú konfidencia-intervallumainak vizsgálata 10%-os és 5%-os farokrész méretek esetében. Egyetlen esetben sem tartalmazzák ezek az intervallumok a stabil eloszlások tartományát, vagyis az $\alpha < 2$ hipotézis egyértelműen visszautasítható 5% és 10% méretek esetében. Kevésbé meggyőzőek az eredmények, amikor a kisebb (2.5%) vagy nagyobb (15%) farokrész méreteket tekintjük. Az utóbbi esetben csak egy részvény (Preussag) konfidencia-intervalluma terjed ki a stabil eloszlás tartományára, míg a vékony (2.5%) farokrészt vizsgálva a Pareto eloszlás család néhány tagja a 95%-os megbízhatóságú konfidencia-intervallumba kerül 7 részvény és a DAX tőzsdeindex esetében. Az utóbbi eredmény természetesen annak a következménye, hogy a redukált farokméret következtében erősen csökken a megfigyelések száma és ezért növekszik a konfidencia-intervallum.

A 4. táblázatbeli pontbecslések és konfidencia-intervallumok erős érvként szolgálnak ugyan a stabil eloszlások érvényességének elutasítása mellett, hasznosnak látszik azonban azt is megvizsgálni, hogy a különböző farokrész mé-

retek megválasztása megfelelő-e. Ez pedig ekvivalens annak ellenőrzésével, hogy a vizsgált farokrészek a (3)-ban leírt extrémális érték eloszlást követik-e. A feladat végrehajtását megkönnyíti Hill egy eredményének felhasználása (Hill, 1975), amely szerint a (3) eloszlás érvényességének feltételezése mellett a

$$v_i = \alpha \cdot i \log \frac{x_{(i+1)}}{x_{(i)}}$$

változó 1 paraméterű exponenciális eloszlást követ, vagyis eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 1 - \exp(-x), & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

$x_{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) az m legnagyobb megfigyelt értéket jelöli, tehát

$$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(m)}.$$

Ha az m értékét elegendően kicsire választjuk, a v_i változó egy egységnyi várható értékű és szórású exponenciális eloszlásból vett véletlen mintaelemnek tekinthető. A farokrész méret megválasztásának helyessége a v_i illeszkedésvizsgálatával ellenőrizhető. Ha nem fogadható el a v_i exponencialitására vonatkozó feltételezés, akkor ez maga után vonja annak elutasítását, hogy a vizsgált farokrész méret esetében a minta eloszlása a (3) eloszláshoz közelít. Ezt a vizsgálatot 20, 16, 10 és 8 cellás standard χ^2 -próba alkalmazásával hajtottuk végre 15%, 10%, 5% és 2.5% farokrész méretekre. A 4. táblázatban * és ** jelöli azokat az eredményeket, amelyek a hipotézis elutasítását jelentik 5, illetve 1% szinten. Amint az a táblázatból látható, csak néhány esetben vethető el az exponenciális eloszlásra vonatkozó feltevés. A próba eredményének részletes elemzése valóban azt mutatja, hogy az egyes cellafrekvenciák nagyon közel esnek a hipotetikus értékekhez mindegyik vizsgált farokrész méret esetében. Az extrémális érték eloszlására javasolt közelítés tehát elfogadhatónak mondható.⁵

⁵Kísérletet végeztünk farokindex becslésre 3 szabadságfokú Student-féle t -eloszlásból származó véletlen mintákon. Az eredmények nagyon hasonlóak voltak a megfigyelt adatokból nyert eredményekhez. Először is 20, egyenként 1 675 elemű mintában csak néhány esetben volt elutasítható a faroktartományok konvergenciájára vonatkozó feltevés becslült α értéket alkalmazva. (A 20 esetből csak egy volt szignifikáns 5% szinten 15% és 10% farokrészek mellett, egy sem volt szignifikáns a vékonyabb 5% és 2.5% farokrészek esetében). Másodsor, a farokindexek általában szintén növekednek a farokrész méretek csökkenésével: az α_H átlaga a 20 mintában 2.277-től (15% farokrész), 2.484-en (10%) és 2.734-en (5%) keresztül 2.927-ig (2.5%) változik. Megjegyezzük, hogy annak ellenére, hogy az extrémális érték eloszláshoz való illeszkedés nem utasítható el, a farokindexek általában alulbecsültek minden vizsgált farokrész méret esetében.

4. táblázat. A farokindex becsült értékei

Részvények	$\alpha_{15\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_5\%$	$\alpha_{2.5\%}$
DAX	2.654 (2.326, 2.982)	2.723 (2.310, 3.137)	2.964 (2.327, 3.602)	2.622 (1.819, 3.425)
Allianz	2.601 (2.279, 2.923)	2.746 (2.330, 3.163)	2.766 (2.171, 3.137)	2.446 (1.697, 3.194)
BASF	2.508 (2.198, 2.819)	2.641 (2.241, 3.042)	2.670 (2.119, 3.281)	2.961 (2.055, 3.868)
Bayer	2.571 (2.253, 2.889)	2.845 (2.413, 3.276)	3.320 (2.606, 4.034)	2.879 (1.998, 3.760)
B. Hypobank	2.456* (2.153, 2.760)	2.598** (2.204, 2.993)	3.266 (2.563, 3.968)	3.696 (2.565, 4.828)
BMW	2.494 (2.186, 2.803)	2.501 (2.122, 2.881)	2.753 (2.161, 3.346)	2.784 (1.932, 3.636)
B. Vereinsbank	2.602 (2.280, 2.924)	3.101 (2.631, 3.571)	3.380 (2.653, 4.107)	2.852 (1.979, 3.726)
Commerzbank	2.849 (2.497, 3.202)	2.996 (2.541, 3.450)	3.018 (2.369, 3.667)	2.896 (2.010, 3.783)
Continental	2.829 (2.479, 3.179)	3.062 (2.598, 3.527)	3.312 (2.599, 4.024)	3.565 (2.474, 4.656)
Daimler	2.732* (2.394, 3.070)	3.094 (2.625, 3.563)	2.882 (2.262, 3.502)	3.099 (2.150, 4.047)
Dt. Babcock	2.622 (2.298, 2.946)	2.848 (2.416, 3.279)	3.211 (2.520, 3.902)	3.141 (2.179, 4.102)
Deutsche Bank	2.698 (2.365, 3.032)	2.917 (2.474, 3.359)	3.132 (2.458, 3.806)	3.096 (2.148, 4.044)
Degussa	2.836 (2.485, 3.187)	3.119 (2.646, 3.592)	3.294 (2.585, 4.002)	3.131 (2.173, 4.090)
Dresdner Bank	2.450 (2.191, 2.809)	2.818 (2.390, 3.245)	2.786* (2.186, 3.385)	3.625 (2.515, 4.734)
Henkel	2.699 (2.339, 2.999)	2.899 (2.459, 3.338)	3.113 (2.443, 3.783)	2.768 (1.921, 3.616)
Hoechst	2.544 (2.229, 2.858)	2.832 (2.403, 3.262)	2.708 (2.125, 3.291)	3.777 (2.621, 4.933)
Karstadt	2.647 (2.320, 2.975)	2.772 (2.351, 3.192)	2.830 (2.221, 3.439)	3.365 (2.335, 4.395)
Kaufhof	2.887 (2.529, 3.243)	3.374** (2.823, 4.370)	3.597 (2.823, 4.370)	3.852 (2.673, 5.031)
Lufthansa	2.503 (2.194, 2.813)	3.073 (2.607, 3.539)	3.335 (2.617, 4.052)	4.011 (2.783, 5.238)
Linde	2.652 (2.324, 2.980)	2.845 (2.414, 3.277)	3.941 (3.093, 4.789)	3.510 (2.435, 4.584)
MAN	2.691 (2.358, 3.024)	2.913 (2.471, 3.355)	3.054 (2.397, 3.711)	3.136 (2.176, 4.096)

Részvények	$\alpha_{15\%}$	$\alpha_{10\%}$	$\alpha_{5\%}$	$\alpha_{2.5\%}$
Metallges.	2.371 (2.078, 2.664)	2.682 (2.275, 3.089)	2.563 (2.011, 3.114)	2.422 (1.680, 3.163)
Mannesm.	2.654 (2.326, 2.983)	2.865 (2.430, 3.299)	2.858 (2.243, 3.472)	2.756 (1.193, 3.600)
Preussag	2.207 (1.934, 2.480)	2.753 (2.335, 3.170)	3.210 (2.519, 3.900)	3.462 (2.402, 4.522)
RWE	2.526 (2.213, 2.838)	2.829 (2.400, 3.259)	3.044 (2.389, 3.699)	3.286 (2.280, 4.292)
Schering	2.495 (2.187, 2.804)	2.819 (2.391, 3.246)	3.094 (2.429, 3.760)	3.891 (2.700, 5.082)
Siemens	2.450 (2.147, 2.753)	2.947 (2.450, 3.394)	2.901 (2.277, 3.525)	3.031 (2.103, 3.959)
Thyssen	2.805 (2.458, 3.152)	3.006 (2.550, 3.462)	3.365 (2.641, 4.089)	3.524 (2.445, 4.602)
VEBA	2.550 (2.235, 2.865)	2.707 (2.297, 3.118)	2.842 (2.230, 3.453)	3.140 (2.179, 4.102)
Viag	2.460 (2.156, 2.765)	2.789 (2.366, 3.212)	3.179 (2.495, 3.863)	3.274 (2.272, 4.276)
VW	3.033 (2.658, 3.409)	3.016 (2.559, 3.474)	3.121 (2.450, 3.792)	3.160 (2.193, 4.128)
Mintaelem- szám a farok- részben	251	167	83	41

A * és ** a (3) extrémális érték eloszlás hipotézisének elutasítását jelzi 5%, illetve 1% szinten.

Ami pedig azokat az eseteket illeti, amelyekben az 5% farokrész méretnél a stabil eloszlások tartományába került néhány egyed, a fenti próba eredményei alapján megengedhető, hogy a nagyobb farokrészekből levonható erősebb következtetésre hivatkozzunk. Így tehát határozottan állítható, hogy az adatok egyértelműen ellentmondanak a Pareto-hipotézisnek mindegyik vizsgált részvény és a DAX tőzszeindex esetében. A McCulloch (1986) fraktál algoritmusával számított hipotetikus karakterisztikus kitevők minden esetben a 95%-os megbízhatóságú konfidencia-intervallumokon kívülre esnek. Az $\alpha < 2$ feltevés elutasítása — a korábban említettek alapján — maga után vonja, hogy 5% szinten állítható a másodrendű momentumok létezése.

A szélsőséges események előrejelzésében megmutatkozó különbségek megvilágítására kiszámítottuk annak valószínűségeit, hogy a hozamok abszolút értékei bizonyos küszöbértékeket meghaladnak egy egyéves időtartam alatt. Az említett valószínűségeket a stabil eloszlás feltételezésével és a szemiparametrikus farokindex becslések felhasználásával is meghatároztuk. Az 5. táb-

lázatban a DAX indexszel kapcsolatos néhány eredmény található, amelyeket az $\alpha_S = 1.737$ becslt stabil eloszlás paraméter, a 2. táblázatbeli $c = 0.651$ paraméterérték, valamint a 4. táblázatban található 2.5% és 5%-os farokindex becslések, $\alpha_{2.5\%} = 2.622$ és $a_{5\%} = 2.964$ felhasználásával nyertünk. (Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy $\beta = 0$ az eloszlás szimmetriája céljából, valamint azért, hogy az eredmények összehasonlíthatók legyenek a szimmetria feltételezésével vizsgált többi esettel). A stabil eloszlás esetében annak valószínűségét, hogy legalább egy szélsőséges esemény bekövetkezik, vagyis, hogy legalább egyszer a hozam abszolút értéke meghalad egy bizonyos küszöbértéket, a Du Mouchel (1971) táblázatból interpolációval számítottuk. A táblázat szerint annak valószínűsége, hogy például a hozam abszolút értéke nagyobb 0.006-nál, 0.0056. Ennélfogva annak valószínűsége, hogy legalább egy ilyen esemény előfordul egy év alatt, $1 - 0.9944^{250} = 0.6595$, ahol 250 az egy év alatti nyitvatartási napok átlagos száma a részvényt piacokon. A szemiparametrikus farokindex becslésekkel kapcsolatban a felső kvantilisek konzisztens esztimátora (Deckers és Haan, 1989) alkalmazható a nagy hozamok valószínűségének becslésére. Ezt az esztimátort a következő összefüggés írja le:

$$x_p = \frac{\left(\frac{k \cdot m}{2 \cdot p \cdot n}\right)^{\gamma_H} - 1}{1 - 2^{-\gamma_H}} \left(x_{(n-m/2)} - x_{(n-m)}\right) + x_{(n-m/2)}, \quad (5)$$

k a megfigyelések száma (itt $k = 250$, vagyis az évenkénti nyitvatartási napok átlagos száma a pénzpiacokon), n és m pedig rendre a vizsgált empirikus időszakok elemeinek számát, illetve a faroktartománybeli megfigyelések számát jelöli. γ_H az α_H farokindex reciproka. Adott x_p mellett annak valószínűsége, hogy a hozam ezt a küszöböt meghaladja az (5) egyenletből meghatározható.

Az 5. táblázatból jelentős eltérések olvashatók ki az extrémális események értékelését illetően. Ezek az eltérések közvetlen következményei annak, hogy az α_S stabil eloszlás paraméter alacsonyabb csillapodási arányt implikál, mint a Hill-módszerrel becslt, jóval magasabb farokindex értékek. Sokkal fontosabb azonban az, hogy mindkét módszer lehetővé teszi a valószínűségeloszlások közelítését a vizsgált időintervallumban megfigyelt, az átlagostól leginkább eltérő eseményekkel kapcsolatos értékekre (vagyis az $|r| > 0.15$ feltételt kielégítő esetekre), de rendkívül eltérő eredmények adódnak a két módszerrel a még nem észlelt hozamszintekkel kapcsolatban.

Például, annak valószínűsége, hogy a hozam abszolút értéke meghaladja a 0.20 értéket, 0.1479 a stabil eloszlás esetében. (Emlékeztetőül: az illeszkedésvizsgálat alapján ez a modell nem utasítható el). Az $\alpha_{2.5\%} = 2.622$ farokindex becslés alkalmazásával kapott megfelelő valószínűség 0.0396, míg az $\alpha_{5\%} = 2.964$ mellett csak 0.0135. A Pareto-hipotézis elfogadása esetében ilyen magnitúdójú hozamokra az a következtetés adódik, hogy várhatóan hat-hét évente egyszer fordul elő ilyen extrémális hozam, míg a Hill-indexek alapján számí-

tott előrejelzés szerint csak huszonöt évente, vagy még inkább csak hetvenöt évente egyszer várható ilyen esemény bekövetkezése. A stabil eloszlások feltételezésével a nagy hozamok előfordulása gyakoriságával kapcsolatban levonható következtetések nagyon félrevezetőek. Amellett, hogy ez az eredmény megerősíti Du Mouchel (1983) kritikai észrevételeit a farokrészekre vonatkozó valószínűségek stabil eloszlások karakterisztikus exponensei alapján történő meghatározásával kapcsolatban, érdemes azt is megjegyezni, hogy az adott hozamszintek meghaladásának valószínűségei a farokrész becslések felhasználásával számítva, különösen pedig a 2.5% farokrész méret esetében egészen jó megegyezést mutatnak az 1988 és 1994 közötti periódus megfigyelt értékeivel.

Ugyancsak meglepő eredmény, hogy a 4. táblázatbeli pontbecslések adott farokrész méret és különböző részvények esetében mind egy viszonylag szűk tartományba esnek. Ez felveti azt a kérdést, hogy van-e egyáltalán szignifikáns eltérés ezen részvények extrémális hozamértékeinek eloszlásában. Nyilvánvaló, hogy az *extrémális hozamok valószínűségeinek homogenitásával vagy heterogenitásával kapcsolatos bármiféle következtetés rendkívüli jelentőségű a kockázatértékelésben és a portfólió kiválasztásban.*

Formálisan fogalmazva, ellenőrizni kellene az $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{30} = \alpha$ hipotézist. Az $1/\alpha_H$ normalitásának felhasználásával a következő próbastatisztika alkalmazható:⁶

$$Q = \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{H,i}} - 1 \right)^2 \cdot m,$$

amely közelítőleg χ^2 eloszlású 30 szabadságfokkal, az α_i ($i = 1, 2, \dots, 30$) értékek megegyezésének nullhipotézise mellett. A táblázatba foglalt eredmények azt mutatják, hogy az extrémális értékek eloszlásának azonossága nem utasítható el 5% szinten, függetlenül a farokrészbeli megfigyelések számától. A 6. táblázatban megadott alsó és felső korlátok azok a feltételezett közös farokindex értékek, amelyek mellett az extrémális értékek eloszlásának megegyése még nem utasítható el.

Megfigyelhető, hogy a potenciálisan azonos farokindexek intervallumai szélesednek a farokrész méretek csökkenésével, ami annak a következménye, hogy a rendelkezésre álló megfigyelések száma csökken. A hozam folyamat nagy (pozitív vagy negatív) realizációinak gyakoriságai ezért nem mutatnak lényeges eltérést a vizsgált 30 részvény között. Az extrémális értékek eloszlásával kapcsolatos vizsgálataink alapján az is kijelenthető, hogy nincsenek

⁶Ez megköveteli a részvényárfolyamok függetlenségét, ami természetesen szigorúan nem teljesülő feltétel, hiszen a megfigyelések szerint az árfolyam emelkedések és a krachok minden részvényre hatással vannak. Figyelembe kell vennünk ugyanakkor azt is, hogy az alsó és felső farokrészek szimmetriájának vizsgálatát a részvénypiacok volatilitási klasztereinek létezése meghiúsítja.

olyan részvények, amelyek kifejezetten nagyobb hajlandóságot mutatnak az átlagostól jelentősen eltérő változásokra. Ez pedig arra enged következtetni, hogy a cégek hasonló kockázati tényezőkkel állnak szemben, például a makrogazdasági megrázkódtatások a hozamaik alakulására hasonlóan hatnak. Másrészt a mintába került cégek közötti intenzív gazdasági és intézményi kapcsolatok az egyébként cégspecifikus kockázati tényezők széles körű szétosztódásához vezethetnek.

5. táblázat Adott szintet meghaladó hozam abszolút érték előfordulási valószínűségei

	$\alpha_{5\%} = 2.964$	$\alpha_{2.5\%} = 2.622$	Stabil eloszlás $\alpha_S = 1.737$	Mintaelemek száma
$ r > 0.006$	0.5254	0.8734	0.7544	6
$ r > 0.10$	0.1101	0.2372	0.4405	1
$ r > 0.15$	0.0323	0.0834	0.2329	0
$ r > 0.20$	0.0136	0.0396	0.1479	0

Megjegyzés: Az adott szintet meghaladó hozam abszolút értékek előfordulásának valószínűségeit a becült farokindexek felhasználásával a Deckers és de Haan-féle felső kvantilis becslő formulával számítottuk, míg a stabil eloszlás feltételezésével adódó valószínűségeket Du Mouchel táblázatából interpolációval határoztuk meg a 2. táblázatbeli $c = 0.651$ paraméter értékkel, és az összehasonlíthatóság biztosítása érdekében $\beta = 0$ választásával.

6. táblázat Az eloszlások határainak megegyezésére vonatkozó próba eredménye

Farokrész méret	15%	10%	5%	2.5%
Alsó korlát	2.460	2.629	2.699	2.618
Felső korlát	2.722	3.089	3.364	3.610

Az alsó és felső korlátok az α azon intervallumainak végpontjai, amelyekre az $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{30}$ feltevés 1% szinten nem utasítható el.

7. táblázat A v_i változó illeszkedés-vizsgálata χ^2 -próbával

	15% (20 cella)	10% (16 cella)	5% (10 cella)	2.5% (8 cella)
DAX	16.49	12.83	11.34	2.90
Allianz	24.94	16.09	6.04	4.07
BASF	22.39	8.62	8.20	4.85
Bayer	19.20	16.66	5.07	4.07
Bayr. Hypobank	32.11	30.65	10.13	6.02
BMW	17.92	20.88	11.10	4.46
Bayr. Vereinsbank	17.76	13.98	6.04	4.85
Commerzbank	18.40	14.75	4.35	1.73
Continental	21.43	19.16	11.58	8.76
Daimler	31.95	22.80	16.88	6.41
Dt.Babcock	16.81	19.16	7.24	7.20
Deutsche Bank	19.36	19.92	6.28	6.02
Degussa	19.20	11.49	9.41	6.02
Dresdner Bank	15.37	12.45	17.36	7.20
Henkel	16.17	11.11	2.96	2.90
Hoechst	14.10	12.83	4.59	4.85
Karstadt	24.78	12.26	10.37	5.24
Kaufhof	23.98	34.10	13.99	6.80
Lufthansa	9.96	13.60	10.13	8.76
Linde	10.91	17.43	5.80	6.02
MAN	12.67	15.71	10.31	11.10
Metallges.	25.89	8.81	7.48	7.20
Mannesmann	17.45	13.02	11.82	4.07
Preussag	15.69	14.37	9.17	3.68
RWE	13.94	15.90	6.04	4.85
Schering	4.22	11.11	4.35	1.73
Siemens	14.42	9.00	6.52	3.68
Thyssen	17.92	13.98	11.10	4.46
VEBA	26.21	12.26	9.41	7.98
VIAG	12.98	6.51	12.30	11.10
VW	10.27	12.64	10.86	2.12
95%	30.14	25.00	16.92	14.07
99%	36.19	30.58	21.67	18.48

4. A következtetések összefoglalása

Tanulmányunkban azt vizsgáltuk, hogy a leggyakrabban vásárolt német részvények hozamainak eloszlása közelíthető-e a stabil eloszlásokkal. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a részvények fele-kétharmada esetében úgy

tűnik, hogy standard próbákat alkalmazva a stabil eloszlás feltételezése elfogadható. Ha azonban ellenpróbát végzünk az extrémális értékek eloszlásának szemiparametrikus vizsgálatával, akkor a Pareto-hipotézis a vizsgált esetek többségében határozottan visszautasítható. Ez az eredmény megerősíti azt a korábbi szakirodalom alapján kirajzolódó képet, amely szerint a részvény hozamok empirikus eloszlásának az alakja első pillantásra nagyon hasonlít a stabil eloszlásokéra, az elemzés finomabb módszereinek alkalmazásával azonban kitűnik, hogy ezt a feltételezést el kell vetni. Arra következtethetünk, hogy más típusú eloszlások, mint például a Student-féle t -eloszlás, vagy az ARCH folyamatok alkalmasabbak a pénzügyi adatok leírására. Mások (ld. például Lux, 1994a) a hozamok eloszlásának származtatására spekulatív folyamatok nemlineáris determinisztikus modelljeit ajánlják, amelyekkel megmagyarázhatók az adatok olyan ismert jellemzői, mint a leptokurtózis. Továbbá, mivel az extrémális értékek eloszlása megegyezésének hipotézise a vizsgált részvények esetében nem vethető el, arra következtethetünk, hogy a DAX megformálásában részt vevő cégek integrációja nagyon magas fokú.

A vizsgálatunk eredményét összevetve a német tőzsdei hozamok korábbi, az 1973 és 1982 közötti periódus vizsgálatának eredményeivel (Akgiray, Booth és Loistl, 1989) azt látjuk, hogy a farokindex becsléseink egy szűkebb intervallumba esnek, neveztesen a (2, 4) intervallumba, míg Akgiray et al. arról számolnak be, hogy a farokindex becsléseik tartománya a (3, 13) intervallum. Ennek az eltérésnek a legvalószínűbb oka, hogy az általuk alkalmazott maximum likelihood esztimátor kevésbé hatékony.

Ha az itt bemutatott eredményeket olyan részvénypiaci vizsgálatokkal vetjük össze, amelyekben szintén farokindex becslést alkalmaztak, akkor megállapíthatjuk, hogy azok nagyon közel állnak egymáshoz. Megemlítjük, hogy az USA részvénypiacát (Jansen és de Vries, 1991) vagy devizapiacát vizsgálva (Koedijk et al., 1990; Dewachter és Gielens, 1991; Kähler, 1993; Koedijk és Kool, 1993) szintén 2 és 4 közötti értékeket találtak. A határtulajdonságok megegyezése nem csak a német részvényhozamok esetében fogadható el, hanem általános jelenségnek tűnik. Felvetődik ezért a kérdés, hogy léteznek-e olyan közös részvénypiaci jellemzők, amelyek inkább az empirikus eloszlások extrémális részeinek viselkedésében, mintsem az eloszlás általános alakjában jutnak kifejezésre. A farokrészek megegyező viselkedése okainak tisztázása további vizsgálatokat igényel.

Irodalom

1. AKGIRAY, V., G. G. BOOTH, 1988: The Stable-Law Model of Stock Returns, *Journal of Business & Economics* 6, pp. 51–57
2. AKGIRAY, V., G. G. BOOTH, B. SEIFERT, 1988: Distribution Properties of Latin American Black Market Exchange Rates, *Journal of International Money & Finance* 7, pp. 37–48
3. AKGIRAY, V., G. G. BOOTH, O. LOISTL, 1989: Stable Laws are Inappropriate for Describing German Stock Returns, *Allgemeines Statistisches Archiv* 73, pp. 115–121
4. CORNEW, R. W., D. E. TOWN, L. D. CROWSON, 1984: Stable Distributions, Futures Prices, and the Measurement of Trading Performance, *Journal of Futures Markets* 4, pp. 531–557
5. de HAAN, L., S. I. RESNICK, H. ROOTZEN, C. G. de VRIES, 1989: External Behaviour of Solutions to a Stochastic Difference Equation with Applications to ARCH Processes, *Stochastic Processes and their Applications* 32, pp. 213–224
6. DEKKERS, A. L. M., L. de HAAN, 1989: On the Estimation of the Extreme-Value Index and Large Quantile Estimation, *Annals of Statistics* 17, pp. 1795–1832
7. DEWACHTER, H., G. GIELENS: A note on the Sum-Stability of Exchange Rate Returns. Catholic University of Leuven: mimeo
8. DuMOUCHEL, W., 1971: Stable Distributions in Statistical Inference, Ph. D. Thesis: Yale University
9. DuMOUCHEL, W., 1983: Estimating the Stable Index α in Order to Measure Tail Thickness: A Critique, *Annals of Statistics* 11, pp. 1019–31
10. FAMA, E. F., 1963: Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business* 35, pp. 420–429
11. FRIEDMAN, D., S. VANMIDERSTEEL, 1982: Short-run Fluctuations in Foreign Exchange Rates, *Journal of International Economics* 13, pp. 171–186
12. HALL, J. A., B. W. BRORSEN, S. H. IRWIN, 1989: The Distribution of Futures Prices: A Test of the Stable Paretian and Mixture of Normal Hypotheses, *Journal of Financial & Quantitative Analysis* 24, pp. 105–116
13. HILL, B. M., 1975: A Simple General Approach to Interference About the Tail of a Distribution, *Annals of Statistics* 3, pp. 1163–73
14. HOLS, M. C. A. B., C. G. de VRIES, 1991: The Limiting Distribution of External Exchange Rate Returns, *Journals of Applied Econometrics* 6, pp. 287–302
15. HSU, D.-A., R. B. MILLER, D. W. WICHERN, 1974: On the Stable Paretian Behavior of Stock Market Prices, *Journal of the American Statistical Association* 69, pp. 1008–13

16. JANSEN, D. W., C. G. de VRIES, 1991: On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective, *Review of Economics & Statistics* 73, pp. 18-24
17. KÄHLER, J., 1993: On the Modelling of Speculative Prices by Stable Paretian Distributions and Regularly Varying Tails. ZEW University of Mannheim: mimeo
18. KOEDIJK, K. G., C. J. M. KOOL, 1983: Tail Estimates of East-European Exchange Rates, *Journal of Business & Economics Statistics* 10, pp. 83-96
19. KOEDIJK, K. G., P. A. STORK, C. G. de VRIES, 1992: Differences between Foreign Exchange Rate Regimes: The View from the Tails, *Journal of International Money & Finance* 11, pp. 462-473
20. LEADBETTER, R. G. LINDGREN, H. ROOTZEN, 1983: *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Process*. Berlin: Springer
21. LUX, T., 1994a: Herd Behaviour, Bubbles and Crashes, University of Bamberg: mimeo
22. LUX, T., 1994b: Endogenous Noise in Speculative Markets. University of Bamberg: mimeo
23. MANDELBROT, B., 1963: The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business* 35, pp. 394-419
24. McCULLOCH, J. H., 1986: Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters, *Communications in Statistics: Simulation* 15, pp. 1109-32
25. McFARLAND, J. W., R. R. PETTIT, S. K. SUNG, 1980: The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement, *Journal of Finance* 37, pp. 693-715
26. MOORE, D. S., 1986: Tests of Chi-Squared Type, Chap. 3 in D'Agostino, R. B., M. A. Stephens, eds., *Goodness-of-Fit Techniques*. New York: Marcel Dekker Inc.
27. SIMKOWITZ, M. A., W. L. BEEDLES, 1980: Asymmetric Stable Distributed Security Returns, *Journal of the American Statistical Association* 75, pp. 306-312
28. SO, J. C., 1987a: The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement – A Comment, *Journal of Finance* 42, pp. 181-188
29. SO, J. C., 1987b: The Sub-Gaussian Distribution of Currency Futures: Stable Paretian or Nonstationary? *Review of Economics & Statistics* 69, pp. 100-107
30. TEICHMOELLER, J., 1971: A Note on the Distribution of Stock Price Changes, *Journal of the American Statistical Association* 66, pp. 282-284
31. UPTON, D. E., D. S. SHANNON, 1979: The Stable Paretian Distribution, Subordinated Stochastic Process and Asymptotic Lognormality: An Empirical Investigation, *Journal of Finance* 34, pp. 131-139
32. VARGA, J., 1996: Tests for Randomness in Multiple Financial Time Series, in: *Modelling Techniques for Financial Markets and Bank Management*, Physical Verlag, Heidelberg, eds. M. Bertocchi, E. Cavalli, S. Kornlösi, pp. 259-271.

**THE STABLE PARETIAN HYPOTHESIS AND THE FREQUENCY
OF LARGE RETURNS: AN EMPIRICAL INVESTIGATION**

This paper provides an analysis of daily returns for thirty German stocks forming the DAX share index as well as the DAX itself during the period 1988 to 1994. Estimating the parameters of the stable laws and performing standard tests for fit some evidence in favor of the stable Paretian hypothesis can be found. However, application of a more recently developed semi-parametric technique for analysis of the behaviour in tails of a distribution (Hill's tail index estimator) gives results incompatible with the stable laws and leads to the rejection of the Paretian hypothesis for all stocks considered. Furthermore, strong similarity in the extremal behaviour of the thirty series is found and the hypothesis of identical limit laws of their extreme value distribution can not be rejected.

HÁBORÚ A YIN ÉS A YANG KÖZÖTT¹

(Fuzzy matematika versus valószínűségelmélet
a döntéshozatalban)

PAULER GÁBOR
JPTE-KTK PhD-hallgató

A tanulmányban kísérletet teszünk a fuzzy elmélet és a valószínűségi számítás közti határ definiálására a döntési problémáknál jelentkező bizonytalanság két alapvető típusának megkülönböztetése révén: elkülönítjük az események bekövetkezésének bizonytalanságát az események pontatlan definiálása jelentette bizonytalanságtól. Ezután megvizsgáljuk a két fajta bizonytalanság egy elméleten belüli ábrázolásának lehetőségeit.

Kulcsszavak: a kompatibilitás foka, az ellentmondásmentesség törvényének elvetése, az események definiálásának bizonytalansága, az események bekövetkezésének bizonytalansága, fuzzy valószínűség.

1. Bevezetés

Bár a fuzzy elmélet jelentős fejlődésen ment keresztül a hatvanas évek vége óta, és a fuzzy technológiát hasznosító különféle termékek a kilencvenes évek elején kereskedelmi forgalomban is megjelentek, sok ember számára a fuzzy még mindig 'fekete mágia'. Az előítéletek abban a jelentős különbségben gyökereznek, ami a távol-keleti filozófiákhoz hasonló fuzzy gondolkodás és az Arisztotelész által megalapozott hagyományos, bivalens logikára épülő elméletek közt fennáll. Ráadásul a fuzzy elmélet létrejötté óta igen erőteljes a rivalizálás a klasszikus és szubjektív valószínűségelmélettel. Az elméletekkel foglalkozók közt igen eltérő nézetek kaptak lábra a fuzzy és a valószínűségelmélet alkalmazhatóságának határával kapcsolatban. A különböző elméleti iskolák közt két évtizede szakadatlanul folyik a háború, a végleges győzelem vagy akár konszenzus reménye nélkül. Jelen tanulmány célja, hogy segítsen tisztázni a fuzzy és a valószínűségelmélet módszerei és tárgya közti különbségről kialakult képet. Kifejezésre kívánjuk juttatni, hogy értelmetlennek tartjuk a két oldal közti csatározást, mert a fuzzy és a valószínűségelmélet

¹Beérkezett 1996. szeptember 24.

viszonya sokkal inkább komplementer, mint kompetitív. Ez az oka, hogy a Yinről és Yangról szóló példázatot választottuk a tanulmány címéül.

Mielőtt belekezdénénk a fuzzy és a valószínűségelmélet viszonyának taglalásába, röviden felidézünk néhány alapvető definíciót [Zadeh, 1965], amelyekre a későbbiekben gyakran hivatkozunk:

1. Fuzzy halmaz: *olyan halmaz, amelynek elemei különböző mértékben tartoznak a halmazhoz.*

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\} \quad (1.1)$$

ahol:

A - fuzzy halmaz

x - alaphalmaz elem

$\mu_A(x)$ - az adott alaphalmaz elem tagságfüggvénye

X - az alaphalmaz univerzuma

2. Normalizált fuzzy halmaz: *a tagságfüggvény értéke nem haladhatja meg az egyet*

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1. \quad (1.2)$$

3. Fuzzy halmaz supportja: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb, mint 0*

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}. \quad (1.3)$$

4. Fuzzy halmaz α -szintű halmaza: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb (nem szigorú esetben nagyobb vagy egyenlő), mint α .*

Szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \quad (1.4)$$

Nem szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (1.5)$$

5. Fuzzy halmaz kardinalitása: *a tagságfüggvény alatti terület. Folytonos esetben:*

$$|A| = \int_X \mu_A(x) dx. \quad (1.6)$$

Diszkrét esetben:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x). \quad (1.7)$$

6. Fuzzy halmazok metszete:

$$C = (A \cap B) \mid \mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad \forall x \in X. \quad (1.8)$$

7. Fuzzy halmazok uniója:

$$C = (A \cup B) \mid \mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad \forall x \in X. \quad (1.9)$$

8. Fuzzy halmaz relatív kardinalitása: a fuzzy halmaz kardinalitása és az alaphalmazának kardinalitása közti arány:

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|}. \quad (1.10)$$

9. Fuzzy halmaz komplementere:

$$\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (1.11)$$

2. A fuzzy és a valószínűségelmélet ellentmondásos kapcsolata

2.1. Axiomatikus elkülönítés

1. TÉTEL *A fuzzy teljesen független, különálló elmélet, nem a valószínűségelmélet elkorcsosult, vagy leegyszerűsített változata.*

A tétel bizonyítása előtt vizsgáljuk meg, sokak számára miért nem evidens ez a megállapítás. A zavar egyik forrása, hogy a tagságfüggvény és a sűrűségfüggvény első ránézésre meglehetősen hasonló. Normalizált fuzzy halmazok esetén mindkét függvény $[0,1]$ intervallumba történő leképezést jelent. Így a legtöbb ember, aki ismeri a valószínűségelméletet, először találkozáva fuzzy halmazzal azt mondja: "Ez majdnem olyan, mint egy sűrűségfüggvény, eltekintve attól, hogy a fuzzy halmaz a legmagasabb csúcsánál fogva normalizált egyhez, míg a sűrűségfüggvény integráljában normalizált." Igaz lenne tehát, hogy a különbség csak a normalizálásban van? A későbbiekben megmutatjuk, hogy a fuzzy halmaz teljesen más, mint a sűrűségfüggvény, nem egy 'módosított verzió'. Ezenkívül, komoly viták folytak a szakirodalomban a két elmélet alkalmazhatóságának határaitól:

- A Bayes-i statisztikai iskola különböző tagjai [Jaynes 1979], [Cox 1946], [Lindley 1987] kifejtették, hogy a valószínűség mindenféle bizonytalanság egyetlen helyes mércéje, mivel mind objektív frekvenciák, mind szubjektív kognitív állapotok mérésére alkalmas, így a fuzzy csak a szubjektív valószínűségelmélet más terminológiával történő újradefiniálása.
- Bart Kosko, a kaliforniai MIT Fuzzy Tanszékének vezetője [Kosko 1992, 286. p.] megpróbálta bebizonyítani, hogy a valószínűségelmélet csak egy speciális esete a fuzzy-nak. Gondolatmenetét a későbbiekben még részletesen megvizsgáljuk.

A szakirodalomból úgy tűnik, hogy a két elmélet közt nagyon éles a verseny, és néhány radikális szerző egyszerűen 'meg akarja ölni' a másik elméletet. Mi igyekeznénk megmutatni, hogy a két elmélet inkább kiegészíti, mint kiküszöböli egymást. Elsőként, igazoljuk a fenti tételt.

1. BIZONYÍTÁS. A fuzzy elmélet nem fogadja el a következő alapvető axiómákat, amikre a valószínűségelmélet (és minden más, bivalens logikát használó elmélet is) épül:

1. Az ellentmondás-mentesség törvénye, melyet először Arisztotelész definiált, kimondja, hogy bármely halmaz komplementer halmazával alkotott metszete üres halmaz:

$$A \cap A^c = \emptyset. \quad (2.1)$$

A fuzzy halmazokra az ellentmondás-mentesség törvénye nem érvényes (lásd az 1. ábrát – a metszet és unió fuzzy halmazok kardinalitásait is feltüntettük, hogy kihangsúlyozzuk az üres halmaztól, illetve a teljes eseménytértől való eltérést).

$$A \cap -A = \emptyset. \quad (2.2)$$

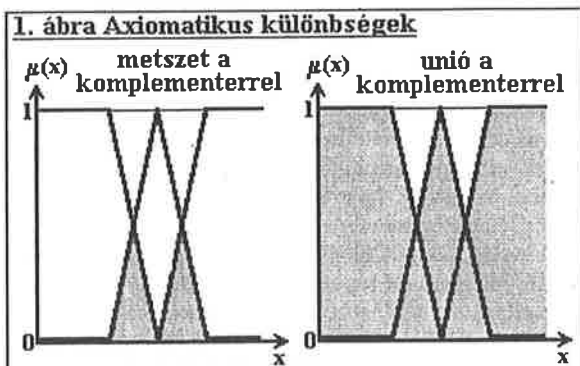
2. A kizárt közepek törvénye kimondja, hogy bármely halmaz komplementerével alkotott uniója megegyezik a teljes eseménnyel (U):

$$A \cup A^c = U. \quad (2.3)$$

A fuzzy halmazokra ez szintén nem érvényes (lásd 1. ábra):

$$A \cup -A \subset U. \quad (2.4)$$

Így a fuzzy elmélet nem lehet a valószínűségelmélet variánsa, mert eltérő axiómákra épül. q.e.d.



A fentiek miatt a fuzzy elméletben egyszerűen megoldható a bivalens logika számos olyan dilemmája, amely az ellentmondás-mentesség törvényére épül, de a fuzzy teljesen más gondolkodásmódot igényel, mint a bivalens elméletek.

1. PÉLDA *Az ellentmondás-mentesség törvényén alapuló dilemmák:*

1. *Russel borbélya: egy kisvárosban élő borbély a következő táblát tette ki üzletére: 'Én borotválók minden embert a városban, kivéve azokat, akik saját maguk borotválkoznak.' Ki borotválja a borbélyt?*

2. *A krétai hazudozó azt mondta az athéniaknak: 'Minden krétai mindig hazudik.' Igaz ez, vagy nem?*

3. *A fél pohár víz félig üres, vagy félig tele van?*

4. *A vádlott azt mondja a bíróságon: 'Vigyázat, hazudok!' Igaz ez, vagy nem?*

2.2. A bizonytalanság két arca

Az előző részben bizonyítottuk, hogy a fuzzy elméletnek eltér az axiomatikus alapja a valószínűségelmélettől. Most a két elmélet tárgya közti különbséget vizsgáljuk meg. Mindkét elmélet valamiféle bizonytalansággal foglalkozik. Alapvető feltételezésünk, hogy a valós döntési helyzetek bizonytalanságát két részre lehet felosztani:

2. TÉTEL *A fuzzy és a valószínűségelmélet a döntési probléma bizonytalanságának két különböző oldalát írják le. A valószínűségelmélet az események*

bekövetkezésének bizonytalanságával foglalkozik, míg a fuzzy az események pontatlan definiálásából származó bizonytalansággal.

A tételt a következő részben indirekt módon fogjuk bizonyítani (lásd 3.10, 3.11, 3.12 illetve 3.13, 3.14). Most körülírjuk a fennálló különbség jellegét:

– A valószínűség pontosan definiált, éles, absztrakt események (lásd 3.10, 3.11, 3.12) bekövetkezésének objektív frekvenciáját méri. Vagy, szubjektív valószínűség esetén, pontosan definiált, absztrakt események szubjektív frekvenciáját. A valószínűségelméletben feltesszük, hogy az eseménytérben szereplő események mindig pontosan definiálhatók, az események bekövetkezése pedig sztochasztikus jellegű. Igen érdekes kérdés, hogy a valószínűségelmélet miért alapul kizárólag éles eseményeken, amikor ezek oly ritkák a valós döntési környezetben. 'Az ég kék', 'a fű zöld', 'a Microsoft egy dinamikus cég' és az ezekhez hasonló, mindennapi tapasztalatokra alapuló tények nagyrészt pontatlanul megfogalmazott állítások, az '1+1=2' típusú matematikai állítások absztrakt világával szemben. J. A. Anderson a Brown Egyetem Kognitív és Nyelvészeti Tudományok Tanszékéről [Kosko, 1992, XXII. p.] igen tanulságos magyarázatot adott erre kérdésre. A klasszikus valószínűségelmélet a szerencsejátékok környezetében alakult ki, ahol a pontosan definiált játékszabályoknak alapvető fontossága van. Pontos, előre rögzített szabályok nélkül szerencsejáték nem is létezhet (ettől eltérő esetek már a büntetőjog területéhez tartoznak). Ez a környezet arra inspirálta a valószínűségelmélet korai művelőit, hogy figyelmüket kizárólag az események sztochasztikus bekövetkezésére koncentrálják, mert az események mindig pontosan definiáltak voltak. Érdemes elgondolkozni azon, hogyan fejlődött volna a valószínűségelmélet, ha például az időjárás- előrejelzés területén kezdik el először alkalmazni.

– A fuzzy elmélet pontatlanul definiált, determinisztikus bekövetkezési eseményekkel foglalkozik. Az 'esemény' itt egy komplex, sokjellemezős objektumot jelent. A fuzzy filozófiájának alapfeltevése, hogy mindig van néhány rejtett jellemző, vagy olyan változó, amelynek értéke nem határozható meg a mérési módszerek és az emberi érzékelés pontatlansága, korlátai miatt, így az események nem definiálhatók pontosan. A tagságfüggvény az alaphalmaz adott elemének egy eseményhez viszonyított kompatibilitási fokát méri. A kompatibilitás foka általában nem határozható meg objektív módon, hiszen egy halmazelemnek egy pontatlanul definiált és igen összetett objektumhoz történő hasonlításból származik. Lássunk mindennek illusztrálására egy példát.

2. PÉLDA *Mi a különbség a következő alternatívák közt?*

1. *Egy fél pizza van a mikrosütőben.*

2. *50% az esélye, hogy van egy pizza a mikrosütőben.*

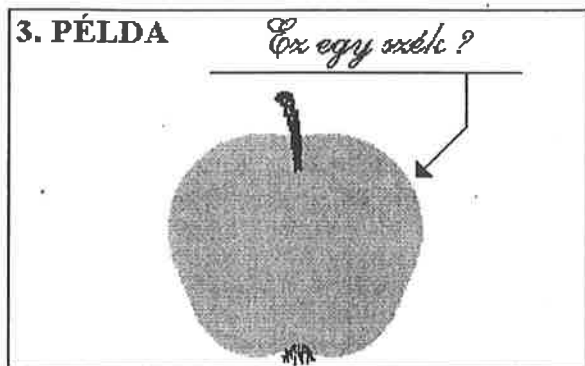
Melyik pizzát választaná, ha éhes? Mindkét esetben fellép valamilyen bizonytalanság:

1. Az első esetben, amely fuzzy esemény ír le, biztos, hogy van valami a mikróban. A baj csak az, hogy egy pizza a valóságban igen bonyolult objektum, sok jellemzővel: íz, hozzávalók, szín, illat, energiatartalom, súly stb. Nem mondhatjuk azt, hogy 'fél pizza az $0.5 \times$ egy pizza'. Lehetetlen egy pizzát pontosan két egyforma részre vágni, az egyik felén több sajt lesz, a másik felén több ketchup. Ahelyett, hogy megpróbálnánk egy igen bonyolult, sokváltozós formulát alkotni a ' $0.5 \times$ pizza' pontos definiálására, rendeljünk hozzá a mikrosütőben fekvő objektumhoz egy $[0,1]$ intervallumbeli skalárt, amellyel kifejezzük a köztudatban pizzaként szereplő objektumhoz mért kompatibilitási fokát. Ezen a módon erősen lecsökkentettük a probléma dimenziószámát, a 'köztudat' információs bázisára támaszkodva. (Ezt a jelenséget később még részletesen tárgyaljuk).

2. A második, valószínűségelméleti esetben, nem biztos, hogy egyáltalán van valami a mikrosütőben. Mint fentebb megjegyeztük, itt az esemény pontosan definiált, de bekövetkezése bizonytalan. Ebben az esetben egy absztrakt pizza-definíciót alkotunk a legfontosabb döntési változók és a rájuk vonatkozó feltételek felhasználásával. Ha egy mikrosütőben megfigyelt objektum kielégíti az összes feltételt, 'pizza' eseményként regisztráljuk, ellenkező esetben 'nem pizza'-ként, vagyis a döntés bivalens. Még a szubjektív valószínűségelmélet is feltételezi, hogy az egyedek képesek bármilyen esemény felől bivalens módon dönteni, csak a döntések változnak az egyedek közt sztochasztikus módon:

Folytatván példánkat, feltesszük, hogy ha egy teljesen elszenesedett, fekete, korong alakú, mikrosütőben fekvő tárgyat mutatunk megfigyelők egy csoportjának, mindenki egyértelműen el tudja dönteni, hogy ez pizza vagy nem pizza, de a döntés a megfigyelők körében szubjektív módon váltakozik.

Vizsgáljunk meg a fuzzy és a valószínűségelmélet közti néhány további különbséget. A fuzzy erősen támaszkodik az emberi agynak azon képességére, hogy a 'köztudatban' szereplő bonyolult, soktényezős objektumok közt kompatibilitási mértéket képes becsülni. Nagyon nehéz dolog viszont pontosan definiálni, mit jelent a köztudat. Elsőként, lássunk egy példát a hatásáról:



A legtöbb ember, aki meglátja ezt a képet, azt fogja mondani 'Nem, ez nem szék, hanem egy alma.'. Vagyis, egy bonyolult, komplex objektumot igen nagy biztonsággal ismernek fel egy primitív reprezentációból. Agyuk mintafelismerő képességét és tudásbázisukat használják minden nehézség nélkül. Ezzel szemben, meglehetősen bonyolult dolog az 'alma' objektumot analitikusan definiálni: a szín-, forma-, illatváltozatok száma igen magas. Sőt, ha feltesszük, hogy sikerül analitikus formulával definiálni az almát, ez bivalens döntéseket jelent (alma vagy nem) a megfigyelt objektumokról, a fuzzy megközelítés finom árnyalatai helyett. Bonyolult objektumok esetében ez a rugalmatlanság, darabosság nem túlságosan hasznos dolog. A fent leírtak együttesen azt eredményezik, hogy a fuzzy – amely első ránézésre igen primitív elméletnek tűnik a valószínűségelmélettel összehasonlítva – igen jó eredményeket produkálhat valós döntési helyzetekben. Bár, a problémaméret csökkentéséért és a rugalmasságért nagy árat kell fizetni. Az emberi szubjektivitás nagy szerepet kap fuzzy rendszerek esetén. Míg a standard normális eloszlás Kínától Kanadáig standard normális eloszlás marad, a fuzzy halmazok és fuzzy változók sokkal inkább alkalmazásfüggők, és igen veszélyes más alkalmazásokba átvinni őket. A fuzzy és a valószínűségelmélet az elméleti rész és az alkalmazás szempontjából inverz viszonyban állnak egymással. A fuzzy elméleti része elég kicsi és inkább az alkalmazás területén jeleskedik. A valószínűségelmélet nagyon konzisztens elméleti rendszer, ahol 'tíz tizedesjegy pontossággal' definiálhatunk dolgokat, de nagyon komoly problémák vannak az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazásával bizonyos területeken.

Még egy érdekes különbség van a fuzzy és a valószínűségelmélet közt.

A valószínűség időben eltűnik, még a fuzziság nem. Vizsgáljuk meg a 4. példát alább. A jövő héten már igen pontosan és biztosan tudni fogjuk, hány százalékkal változott meg a részvényárfolyam. De a 'kismértékű növekedés' esemény akkor is pontatlanul definiált marad, mert bizonytalansága az emberi érzékelés és felismerés különbözőségein alapul.

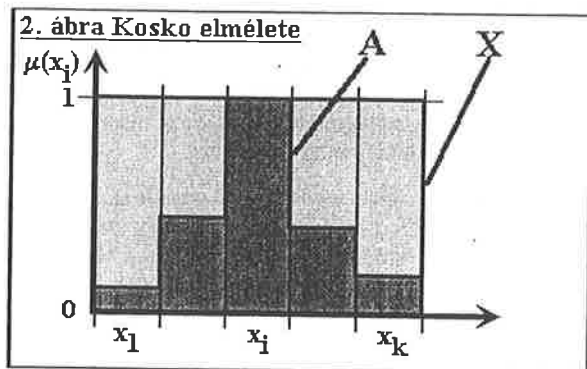
Mindkét elméletben skaláris mértékeket használunk, teljesen eltérő típusú bizonytalanság kifejezésére. Már említettük, hogy ez félreértésekre adhat okot. A zavar másik fő forrása, hogy a fuzziság és a valószínűség a legtöbb valós döntési problémában együttesen jelentkezik.

4. PÉLDA *Részvényárfolyam becslés. — A részvényár a jövő héten valószínűleg kismértékben emelkedni fog — mondta a bróker.*

A fenti állítás mindkét fajta bizonytalanságot tartalmazza. Egyrészt, van egy (gyakran ismeretlen) sűrűségfüggvény a részvényárfolyam egyes százalékpontos változásainak valószínűségéről. Másrészt, mint fentebb megjegyeztük, bizonytalan, hogy mit jelent a 'kismértékű növekedés' százalékpontban az adott bróker, papír és piac esetén, így fuzziság is megjelenik. A következő két részben azt vizsgáljuk, lehetséges-e a két fajta bizonytalanságot egy elmélet keretein belül kezelni.

3. Visszavezethető-e a fuzziság a valószínűségre?

Ebben a részben kísérletet teszünk a fuzzy valószínűségre történő visszavezetésére Bart Kosko munkáinak felhasználásával [Kosko 1992, 286.p.]. Ez egy kicsit meglepő lehet az érdeklődő olvasók számára, hiszen ő eredetileg az ellenkező dolgot igyekezett bizonyítani. Koskonál a valószínűségelmélet a fuzzynak csak egy speciális esete, bár koncepciója sokkal inkább a fuzzy valószínűségi terminológiával történő újradefiniálásának tűnik. Először megvizsgáljuk elméletét, eltekintve az általa alkalmazott terminológiától, amely a fuzzy halmazokat n -dimenziós egység hiperkockaként értelmezi és hiperkockageometria segítségével bizonyít tételeket. Az egyszerűség kedvéért, 'hagyományos' diszkrét fuzzy halmazokon mutatjuk be nézeteit. Második lépésben, meg fogjuk mutatni, hogy megközelítése ellentmondást hordoz. Korrigáljuk elméletét és megkíséreljük a fuzziságot valószínűségre visszavezetni. Végül megmutatjuk, hogy a fuzzy valószínűségre redukálása félrevezető.



3.1. Kosko elmélete

1. Tételezzük fel, hogy a fuzzy halmazok alaphalmazai diszkrét, megszámlálható, véges halmazok.

2. Egy fuzzy halmaz univerzuma egy speciális fuzzy halmaz, amelynek tagságfüggvénye 1 minden alaphalmaz elem fölött (lásd 2. ábra).

3. A fuzzy halmaz alhalmazsága B fuzzy halmazban:

$$S(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A|}. \quad (3.1)$$

Egy fuzzy halmaz univerzumához mért alhalmazsága megegyezik az univerzumához mért relatív kardinalitásával:

$$S(X, A) = \frac{|X \cap A|}{|X|} = \frac{|A|}{|X|} = \|A\|. \quad (3.2)$$

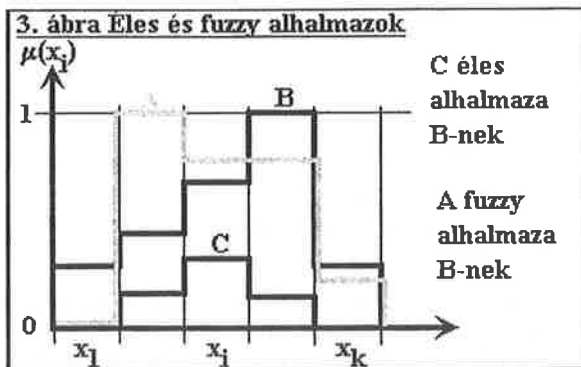
4. Minden fuzzy halmazhoz hozzá lehet rendelni egy relatív frekvenciát (valószínűséget): ez megegyezik az univerzumhoz mért relatív kardinalitással, vagy alhalmazsággal:

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \|A\| = \frac{|A|}{|X|}, \quad (3.3)$$

ahol:

P_A – az A fuzzy halmaz által leírt komplex objektum, esemény valószínűsége

N_A – azon megfigyelések száma, ahol a megfigyelő felismerte az eseményt
 N – az összes megfigyelés száma.



5.1. C fuzzy halmaz éles alhalmaza B fuzzy halmaznak (lásd 3. ábra),
 ha:

$$C \cap B = C. \quad (3.4)$$

5.2. A fuzzy halmaz fuzzy alhalmaza B fuzzy halmaznak (lásd 3. ábra),
 ha:

$$A \cap B = A. \quad (3.5)$$

Összefoglalván a fenti feltevéseket és definíciókat, Kosko kijelentette, hogy a fuzzy halmazok éles alhalmazsága mindenféle valószínűséget ki tud fejezni, még a valószínűség nem tudja kifejezni fuzzy halmazok fuzzy alhalmazságát. Például, valószínűséggel nem lehet kifejezni A kapcsolatát B -hez. Így a valószínűség a fuzziáságnak csak egy speciális esete.

3.2. Kritika

Nem értünk egyet Kosko fenti következtetésével, mert megközelítése ellentmondást hordoz. Először vegyük szemügyre a negyedik feltételezést, amely implicit módon további két feltételezést tartalmaz:

4.1. A megfigyelők mindig egyértelműen el tudják dönteni, hogy az aktuálisan megfigyelt alaphalmaz elem A eseményre vonatkozik vagy nem, de ez a döntés eseményként sztochasztikusan változik (ez naevon hasonlít a sub-

4.2. Minden x_i alaphalmaz elem feletti tagságfüggvény érték kifejezhető relatív frekvenciaként:

$$\mu_A(x_i) = \frac{n_{Ai}}{n_i} \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^k n_{Ai} = N_A, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^k n_i = N, \quad (3.8)$$

ahol:

n_{Ai} – az egyedi döntések száma, ahol x_i megfelel A -nak'

n_i – az x_i -re vonatkozó megfigyelések száma

x_i – alaphalmaz elemek

4.2.-ben csak annyit feltételeztünk, hogy N_A -t és N -t lehetséges n_{Ai} , illetve n_i részekre darabolni, aszerint, hogy a megfigyelések mely alaphalmaz elemre vonatkoznak. A 4. feltételezés és 4.2 implicit feltételezés összevetésével viszont ellentmondást kapunk:

$$P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k n_{Ai}}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{n_{Ai}}{n_i} \right)}{k} = \frac{|A|}{|X|} = \|A\|. \quad (3.9)$$

3.3. Korrigált megközelítés

Kosko elmélete azért vezetett ellentmondásra, mert figyelmen kívül hagyta, hogy a fuzzy halmazok univerzuma is hordozhat bizonytalanságot. Az alaphalmaz elemei közt sok esetben egy bekövetkezéssel kapcsolatos valószínűség-eloszlás is fennállhat, mindenféle fuzzy halmaztól függetlenül. Illusztrációképpen, lássuk a korábbi 4. példát sokkal részletesebben. Mint azt már említettük, a kijelentés kétfajta bizonytalanságot hordoz:

– Egyrészt van egy valószínűségeloszlás a részvényárfolyam változásának lehetséges értékei közt. Tételezzük fel, hogy D sűrűségfüggvény ismert (lásd 4. ábra). Diszkrét árfolyamváltozás százalékpontokra értelmezett sűrűségfüggvényt tételezzük fel az egyszerűség kedvéért. A százalékpontok -2 -től $+3$ -ig egyszerű, közvetlenül megfigyelhető események. Ugyanazon eseménytérően osztoznak, metszetük nincs (lásd a tortadiagrammot a 4. ábrán):

$$U = \bigcup_{i=1}^k x_i \quad (3.10)$$

$$x_i \cap x_j = \emptyset \quad i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j \quad (3.11)$$

$$p(U) = \sum_{i=1}^k p(x_i) = 1. \quad (3.12)$$

– Másrészt, van egy pontatlanul definiált, komplex eseményünk – 'kis mértékű növekedés a részvényárban' – amit F fuzzy halmazzal írunk le. Feltételezzük, hogy a tagságfüggvényt korábbi piaci tapasztalatok alapján alkották meg. A fuzzy halmazoknak a sűrűségfüggvényektől teljesen eltérő belső struktúrája van. Minden x_i alaphalmaz elem felett egy U_{x_i} szeparált eseménytér helyezkedik el, amelyet az aktuális $\mu_F(x_i)$ tagságfüggvény érték csak a komplementer fuzzy halmaz megfelelő $\mu_{-F}(x_i)$ tagságfüggvény értékével oszt meg (lásd a 3 feletti eseményteret a 4. ábrán):

$$U_{x_i} = 1 = \mu_F(x_i) + \mu_{-F}(x_i), \quad (3.13)$$

$$1 \geq \mu_F(x_i), \mu_{-F}(x_i) \geq 0. \quad (3.13)$$

Így egy adott alaphalmaz elem feletti tagságfüggvény értéket nem korlátoznak más tagságfüggvény értékek. A +2% elem tagsága 1, még a +3% elem tagsága 0.5. A sűrűségfüggvény esetén ez (3.12) miatt nem lehetséges. Láthatjuk, hogy a tagságfüggvény és a sűrűségfüggvény közti különbség nem egyszerűen normalizálás kérdése. A következő részben majd megmutatjuk, hogy a sűrűségfüggvények és a tagságfüggvények kezelése is eltérő operátorokat igényel.

Mindezek után az a kérdés, hogyan kombinálható a két fajta bizonytalanság a valószínűségelmélet keretein belül. Ehhez felhasználjuk a 4.1 és 4.2 implicit feltételezéseket, amelyeket a koskoi elmélet kritikájánál definiáltunk. Szorozzuk össze minden alaphalmaz elem felett a tagságfüggvény és a sűrűségfüggvény értékét (lásd a sötét színű oszlopokat az $F \times D$ oszlopdiagrammon a 4. ábrán):

$$f_{F \times D}(x_i) = p(x_i) \times \mu_F(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, k. \quad (3.15)$$

Könnyebben érthető ez a művelet, ha elképzeljük, hogy el akarjuk különíteni azokat az eseteket, amikor a megfigyelők felismerték x_i alaphalmaz elemből F komplex eseményt. (Pl. Hány ember mondta a megfigyelők közül a 3%-os növekedésre, hogy ez 'kis mértékű növekedés'?) Mivel a sűrűségfüggvény alatti terület az összes megfigyelést jelenti, az előbbi művelettel ennek egy részét definiáltuk. Vegyük szemügyre az $F \times D$ oszlopdiagrammot: a szürke négyzetek olyan megfigyelés-adagokat jelentenek, ahol a megfigyelő nem ismerte fel F komplex eseményt, a fekete négyzetek olyan megfigyelés csomagokat jelentenek, ahol a felismerés megtörtént. (3.6), (3.7), (3.8) alapján

$F \times D$ kardinalitása kifejezhető relatív frekvenciaként, vagyis valószínűségként:

$$P_F = \frac{N_F}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k n_{Fi}}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{|F \times D|}{|D|} = \frac{|F \times D|}{1} = |F \times D|, \quad (3.16)$$

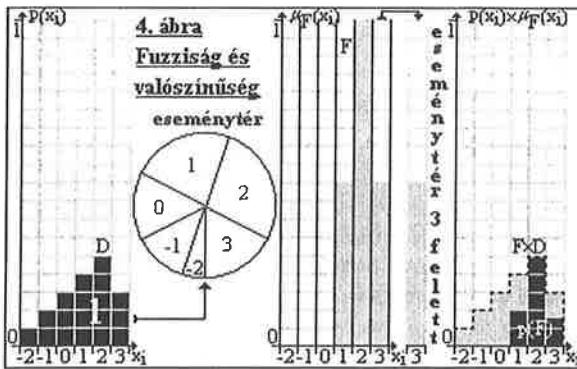
ahol:

n_{Fi} – az egyedi döntések száma, ahol ' x_i megfelel F -nek';

n_i – az x_i -re vonatkozó megfigyelések száma;

x_i – alaphalmaz elemek;

$F \times D$ relatív kardinalitása D sűrűségfüggvényhez és $F \times D$ abszolút kardinalitása megegyeznek, mert a sűrűségfüggvény kardinalitása mindig 1.



Így sikerült leírni a 4. példában szereplő kijelentés hordozta mindkét fajta bizonytalanságot egyetlen valószínűségi skalárral. Ezen a ponton úgy tűnik, 'megöltük' a fuzzy elméletet, visszavezetve azt a valószínűségelméletre.

3.4. Miért nem működik a dolog?

Mielőtt a fenti, lehenylerlő győzelmet arattuk a fuzzy felett, felhasználtuk 4.1 és 4.2 implicit feltételeket. A probléma az, hogy ezek arányskálaként értelmezik a tagságfüggvény értéket: azon megfigyelők arányát fejezi ki, akik felismerték a komplex eseményt, így a skálának van abszolút 0 pontja (senki nem ismerte fel). Valójában a tagságfüggvény inkább intervallum skála. Ezt illusztrálandó, képzeljük el, hogy a lovakat, mint komplex objektumokból álló osztályt fuzzy halmazok segítségével kívánjuk definiálni, különféle változók, mint alaphalmazok felhasználásával. A baj az, hogy nem tudjuk definiálni

az 'abszolút ló' és 'abszolút nem ló' objektumokat, mert különféle inverz hatások állnak fent a változók közt, sőt nem biztos, hogy minden változót ismerünk, a megfigyelők érzékelése pontatlan, kognitív kapacitása korlátozott stb. Az ideál és antiideál hiánya megakadályozza, hogy olyan módszereket alkalmazzunk a tagságfüggvény érték megállapításánál, amelyek az ideáltól és antiideáltól mért Hamming-, euklideszi-, vagy más távolságokon alapulnak (pl. TOPSIS soktényezős döntéshozatali módszer [Chen-Ching-Hwang 1992, 38. p.]). Így különböző alaphalmaz-elemek komplex eseménytől mért távolsága nem mérhető arányskálán, sőt az intervallum skála végpontjai is bizonytalanok, változóról változóra változnak. Ezért a tagságfüggvény érték semmiképpen sem értelmezhető relatív frekvenciaként, amint azt a 4.1-nél és 4.2-nél feltételeztük.

Ezen a ponton felvetődik egy fontos kérdés. Ha egy fuzzy halmaz egyik tagságfüggvény értékét nem tudjuk pontosan összehasonlítani egy másik fuzzy halmaz tagságfüggvény értékeivel, amelynek eltérő az alaphalmaza, hogyan fogjuk a két fuzzy halmazt mint operanduszokat használni egy fuzzy műveletnél? A későbbiekben látni fogjuk, hogy óvatosan kiválasztott fuzzy operátorokat használó fuzzy rendszerek jól tolerálják ezt a nehézséget.

4. Visszavezethető-e a valószínűség fuzziására?

Ebben a részben azokat a módszereket tesszük vizsgálat tárgyává, amelyek egy valós döntési problémánál felmerülő mindkét fajta bizonytalanságot a fuzzy elmélet keretein belül kívánják ábrázolni.

4.1. Tagságfüggvények sűrűségfüggvényekből?

Amint azt korábban említettük, a fuzzy halmazok és a sűrűségfüggvények első ránézésre nagyon hasonlóak. Nagy a csábítás, hogy egyszerűen átnormalizáljunk egy sűrűségfüggvényt a legmagasabb csúcánál fogva egyhez és azt mondjuk: 'Ez a tagsági érték azon állítás igazságának foka, hogy az adott alaphalmaz elem, mint egyszerű esemény bekövetkezésének a legnagyobb a valószínűsége.'. Sőt, egyes szerzők [Cox 1994, 75. p.] kísérletet tettek a Gauss-féle görbe (4.1) tagságfüggvényként történő felhasználására. Úgy gondoljuk, hogy ezek a próbálkozások nagyon veszélyesek és zavaróak három okból kifolyólag:

1. Amint az az előző részben kifejtettük, a fuzzy halmazoknak és a sűrűségfüggvényeknek teljesen eltérő a belső struktúrája. Az átnormalizálás eltünteti ezt a különbséget, ami erősen félrevezető lépés.
2. Amíg a valószínűség arány skálán mért, a tagság intervallum skálán.

Nagyon veszélyes vállalkozás egy fuzzy rendszer eredmény fuzzy halmazát egyszerűen visszakonvertálni sűrűségé.

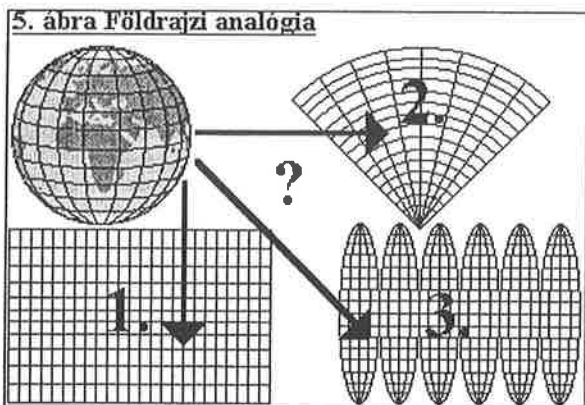
3. Az előző két probléma egyre fenyegetőbb lesz, ha számos műveletet végzünk az átkonvertálásból származó fuzzy halmazokkal, mert másfajta operátorok illeszkednek a fuzzy halmazok mint a sűrűségfüggvények kezeléséhez. A különbség eredete az, hogy a fuzzy halmazok inkább a profiljukban hordozzák az információt, míg a sűrűségfüggvények integráljukban. Példaként hozható fel a normális eloszlás sűrűségfüggvénye (4.2), amely a Gauss-féle görbén (4.1) alapul. A függvény formája minden egyes szórási értéknél más és más, az integrálja viszont mindig egy marad.

$$y = e^{-k(x-m)^2} \quad (4.1)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.2)$$

A valószínűségelmélet operációi a sűrűség-integrálok konzisztens megőrzésére törekednek, de ez a profilok nagy torzulásával jár. A legtöbb fuzzy operátor viszont (pl. maxmin kompozíció) nagyon érzékeny a fuzzy operandusok profiljaira, viszont erősen torzítanak a kardinalitásokat illetően. Az eredmény fuzzy halmaz kardinalitása elég semmitmondó lesz néhány művelet után.

5. PÉLDA *Földrajzi analógia.* Hasonló jellegű problémával találkozunk a térképészetben: a Föld gömbfelületét lehetetlen torzió nélkül síkba kiteríteni. Különböző leképezési technikák léteznek (lásd 5. ábra), amelyeknek kölcsönös előnyök és hátrányaik vannak.



Az 1. módszer megőrzi a kontinensek formáját, de nagyon torzítja a területeket. A 2. módszer a területeket őrzi meg a formával szemben. A 3. kompromisszumos módszer a gyakorlatban diszkontinuitása miatt nem használható.

A fentiekből nyilvánvaló, hogy ha fuzzy operátorokkal kezelnénk átnormalizált sűrűségfüggvényeket, azok néhány művelet után minden valószínűségi jellegüket elvesztenék. Felvetődik a kérdés, miért nem használhatunk a valószínűséghez illeszkedő operátor fajtákat (pl. szorzat-összeg kompozíció) ezen fuzzy halmazok kezelésére? Ezen megoldás hatékonyságának illesztésére kitérőt kell tennünk a fuzzy aritmetika irányába, amely az extenziós alapelvre épül.

Az extenziós alapelvet L. A. Zadeh vezette be [Zadeh, 1973], éles aritmetikai operátorok fuzzyvá konvertálása céljából. Az egyszerűség kedvéért diszkrét fuzzy számokon és csak két operandusz esetén mutatjuk be működését. Az érdeklődők könnyen általánosíthatják ezt több operandusz esetére.

- Tételezzük fel, hogy A és B két fuzzy operandusz, alaphalmazai univerzuma U_a , illetve U_b .

- $x_{a1}, \dots, x_{an} \in U_a$ és $x_{b1}, \dots, x_{bn} \in U_b$ a két fuzzy halmaz alaphalmazának diszkrét értékei.

- Legyen Z a művelet eredményeként létrejövő fuzzy szám, U_z alaphalmaz-univerzummal és z_1, \dots, z_k diszkrét alaphalmaz értékekkel.

- Legyen f egy függvény, ami $U_a \times U_b$ -t U_z -be képezi le, vagyis $z = f(x_a, x_b)$. Ez az éles aritmetikai operátor, amit fuzziifikálni akarunk.

- A és B Cartesian szorzata legyen:

$$C = \{(x_{ai}, x_{bj}), \min[\mu_{\bar{A}}(x_{ai}), \mu_{\bar{B}}(x_{bj})]\} \quad (4.3)$$

$$\forall x_{ai}, x_{bj}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

- Z eredmény fuzzy halmazt a következőképpen kaphatjuk meg A -ból és B -ből:

$$Z = \{[Z_1, \mu_{\bar{Z}}(Z_1)] \mid Z_1 = f(x_{ai}, x_{bj}), x_{ai} \in U_a, x_{bj} \in U_b\} \quad (4.4)$$

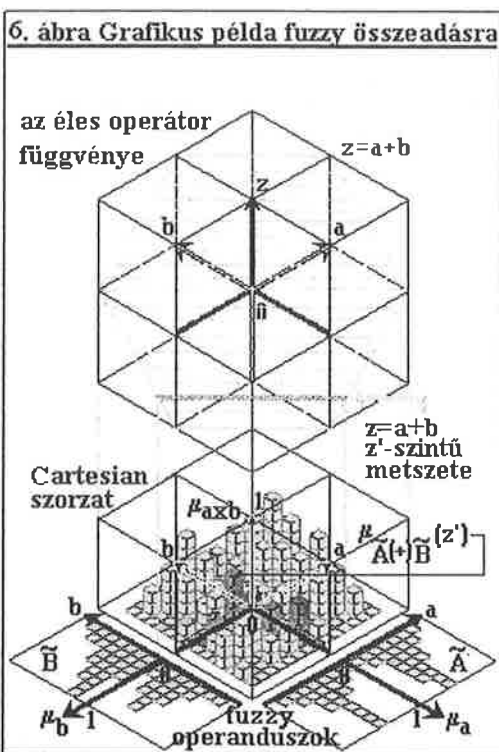
ahol

$$\mu_{\bar{Z}}(Z_1) = \begin{cases} \max \min_{Z_1=f(x_{ai}, x_{bj})} [\mu_{\bar{A}}(x_{ai}), \mu_{\bar{B}}(x_{bj})] & \text{ha } f^{-1}(z_1) = 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

6. PÉLDA *Fuzzy összeadás.* A könnyebb érthetőség kedvéért, lássunk egy grafikus példát két operandusz összeadására (lásd 6. ábra). A kérdés, hogy hogyan határozzuk meg az eredmény fuzzy halmaz alaphalmazának egy egyedi z' értékéhez rendelt tagságfüggvény-értéket. Kiinduláskor az éles operátort jelentő függvényt ($z = x_a + x_b$), valamint A és B halmazok Cartesian szorzatát

ismerjük. A következő lépésben meghatározzuk az éles függvény z' -szintű met-szetét (olyan (x_{a_i}, x_{b_j}) párokat keresünk, ahol $x_{a_i} + x_{b_j} = z'$). A Cartesian szorzatban is megkeressük ezeket a párokat (lásd a sötétebb oszlopokat a Carte-sian szorzat oszlopdiagrammjában). Harmadik lépésben a maximumát vesszük az elhatárolt elemek tagságfüggvény értékeinek, ez lesz z' tagságfüggvény ér-téke az eredmény fuzzy halmazban. Ezt a három lépést minden z értékre meg kell ismételniünk.

Az extenziós elv legnagyobb problémája, hogy nem alkalmazható köz-vetlenül a gyakorlatban, mert nagyon sok gépidőt fogyasztó probléma az éles függvény z' szintű metszetét meghatározni, főként ha sok operandusz van, folytonos közelítés szükséges és az operátorfüggvény bonyolult. Ezért különböző szerzők [Jain 1976], [Mizumoto & Tanaka 1976], [Baas & Kwak-ernak 1977], [Dubois & Prade 1980] egyszerűsített módszereket vezettek be, amelyek mind az extenziós elven alapulnak.

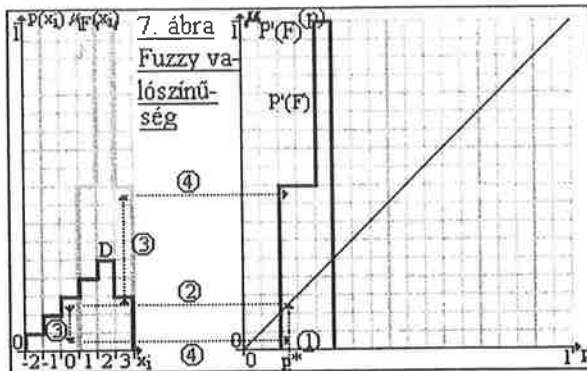


Visszatérve a fuzzy és a valószínűségi operátorok közti különbségre, ha a az extenziós elvben maxmin kompozíció helyett szorzat-összeg kompozíciót alkalmaznánk, ez nagyon komoly analitikus problémát jelentene, amelynek rendkívül magas a számítási igénye, és nincs lehetőség egyszerűsítő módszerek bevezetésére. Még ennél is súlyosabb probléma, hogy az eredmény fuzzy halmazok harang-görbe felé konvergálnak, ez a jelenség már egy művelet után is erőteljesen jelentkezik. A szorzat-összeg kompozíció egyszerűen 'kimossa' az eredményből a többszörös csúcsokat. Ez előnyös lehet a defuzzifikációnál [Kosko, 1992 32. p.], de óriási információvesztést jelent, mert egy fontos döntési információ, az eredmény többértékűsége, elvész.

4.2. Fuzzy valószínűség

Az előző részben láthattuk, hogy a sűrűségek átvitele egy fuzzy rendszerbe egyszerű átnormalizálás révén mennyire félrevezető megközelítés. A fuzzy valószínűség alapötlete teljesen más. Mivel a fuzzy halmaz egy komplex objektum adott jellemzőjének sokértékű reprezentációja, a hozzá kapcsolódó valószínűségnek is sokértékűnek kell lennie. Egy pontatlanul definiált, komplex esemény valószínűségét egy olyan speciális fuzzy halmazzal próbáljuk jellemezni, amelynek alaphalmaza a $[0,1]$ valószínűségi intervallum. Mindezt illusztrálандó, nézzük meg ismét kedvenc 4. példánkat:

Ismét feltételezzük, hogy D , az árváltozás százalékpontok sűrűségfüggvénye és a kismértékű növekedést leíró F fuzzy halmaz ismertek (lásd 7. ábra).



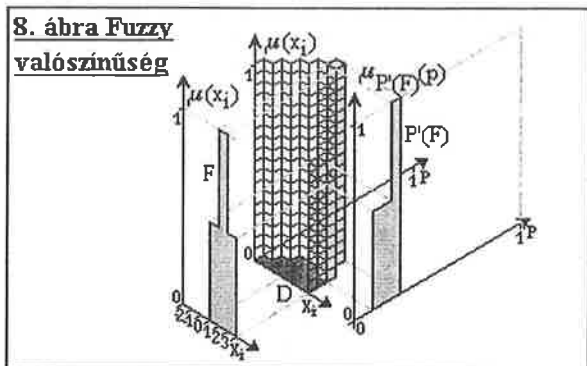
Kiválasztunk egy adott p^* valószínűségi értéket és megpróbáljuk meghatározni a kompatibilitási fokát a 'kismértékű növekedés a részvényárban' komplex eseménnyel.

Először olyan alaphalmaz elemeket keresünk, amelyeknek valószínűsége p^* (lásd az 1. és 2. lépést). Ezután meghatározzuk az ilyen alaphalmaz elemekhez tartozó tagságfüggvény értékeket, majd ezek közül kiválasztjuk a maximális tagságfüggvény értéket (lásd 3. és 4. lépés). Ez lesz p^* tagsági értéke. Formálisan:

$$\mu_{P'(F)}(p^*) = \max_{x_i \in X} [\mu_F(x_i) \mid p(x_i) = p^*] \quad (4.6)$$

ahol: $P'(F)$ – F fuzzy valószínűsége (egy fuzzy halmaz a valószínűségi intervallum felett).

A 8. ábrán látszik, hogy $P'(F)$ olyan fuzzy halmaz, amely F fuzzy halmaz D sűrűségfüggvény inverzén keresztül történő leképezésével keletkezik.



Ezen megközelítés fő előnye, hogy a döntési probléma mindkét fajta bizonytalansága egy fuzzy halmazba van sűrítve, de a valószínűségi és a fuzzy operátorok elkülöníthetők. Ha fuzzy aritmetikai műveletet végzünk fuzzy valószínűségi halmazokon, az éles operátor (lásd 6. ábra) reprezentálhatja a valószínűségszámítás előírt műveletet, míg az aktuális fuzzy rendszer által előírt fuzzy művelet a Cartesian szorzatban jeleníthető meg.

A módszer fő hátránya, hogy a gyakorlatban használatos, egyszerűsített fuzzy aritmetikai módszerek nem pontosak, csak közelítő megoldást adnak az extenziós alapelv által előírt elméleti eredményhez képest.

5. Néhány szó a fuzzy döntési rendszerekről

Az előző részekben áttekintettük a valószínűségelmélet és a fuzzy kapcsolatát, valamint a kísérleteket, amelyek a két fajta bizonytalanság egy elméleten belüli ábrázolását célozzák. De eddig még nem mondtunk semmit arról, hogyan lehet a fuzzy halmazokat a döntéstámogatásban felhasználni. A részletes válasz messze meghaladná ennek a tanulmánynak a kereteit, ezért csak egy rövid grafikus példára szorítkozunk (lásd 7. példa), amelyet gyakran idéznek fel a szakirodalomban [Kosko, 1991 32.p.], [Cox, 1994 14.p.], és ennek kapcsán foglalkozunk a valószínűségen alapuló, illetve fuzzy döntési rendszerek közti különbséggel.

A fuzzy döntési rendszerek nagy részének az a célja, hogy az éles változók alkotta input-output térben lévő hiperfelületet (egyszerűbb esetben sokváltozós függvényt) szimulálja. Az input (hőmérséklet, nyomás) és az output (szelep pozíció) változók fuzzy nyelvi változóként vannak jelen a rendszerben. A fuzzy nyelvi változó közös alaphalmazzal rendelkező, általában egymást átlapoló fuzzy halmazok csoportja (pl. a 'fagyott', 'alacsony', 'OK.', 'meleg', 'forró' fuzzy halmazok alaphalmaza a Celsius-skála). A különböző fuzzy halmazok a fuzzy nyelvi változó értékei. A fuzzy következtetési szabályok az input fuzzy nyelvi változók bizonyos értékeit kapcsolják össze az output fuzzy nyelvi változók bizonyos értékeivel. A fuzzy nyelvi változókat és a fuzzy következtetési szabályokat az adott szakterület szakértői definiálják fuzzy rendszerelméleti szakemberek segítségével. A definiálás során dönteni kell:

- az adott fuzzy nyelvi változóban szereplő fuzzy halmazok számáról (általában 3 és 9 közt)
- a fuzzy halmazok formájáról (trianguláris, trapezoidális, harang-görbe)
- a fuzzy halmazok közti átlapolás mértékéről (általában 50%).

Igen érdekes kérdés, hogyan lehet megtalálni a megfelelő beállításokat, mivel nincs pontos algoritmus, az adott szakterület 'köztudata' és hüvelykujj-szabályai dominálnak. Szerencsére, a fuzzy rendszerek meglehetősen toleránsak a tagságfüggvény formák és az átlapolásban elkövetett hibák iránt. Sőt, lehetőség nyílik a rendszer fuzzisági fokának befolyásolására az átlapolás megváltoztatásával. A fuzzy rendszer lényegét a fuzzy következtetési szabályok adják. Ha a fuzzy nyelvi változók jól lefedik az adott szakterület terminológiáját, sokkal könnyebb a tudást fuzzy következtetési szabályok formájába konvertálni, mint analitikus formulákba. Különösen igaz ez látenszen jelenlévő tudás esetén: a szakértő könnyebben tudja sejtéseit, intuícióit verbálisan kifejezni, mert nem bátortalanítja el az egzakt formalizálás követelménye.

A fuzzy rendszereket gyakran azzal vádolják, hogy csak parciális közelítésre képesek, mert nem kezelnek sokváltozós függvényeket analitikus módon, mint a valószínűségelmélet. Szilárd meggyőződésünk, hogy jól kiválasztott fuzzy következtetési szabályok hatékonyabbak lehetnek bármely analitikus becslési formulánál nagy bonyolultságú, sok konkrét elemet tartalmazó hiperfelületek becslése esetén. A fuzzy következtetési mechanizmus két nagy részből áll, a kompozícióból és a dekompozícióból:

1. A kompozíciónál éles input változók adott vektorából indulunk ki. Ezek a változóértékek különböző mértékben kompatibilisek egy adott fuzzy következtetési szabályban szereplő fuzzy nyelvi változó értékekkel (lásd 1. lépés). Az egy szabály esetén jelentkező kompatibilitások minimumát vesszük, és a szabályban szereplő output fuzzy nyelvi változó értéket ezen a szinten vágjuk el (lásd a 2. lépést, a megmaradó részt szürke színezéssel jelöltük). A fentieket minden fuzzy következtetési szabály esetén megismételjük, majd a csontolt output fuzzy halmazok unióját vesszük (lásd 3. lépés). Ezen a módon egy összetett eredmény fuzzy halmazt kapunk. Az itt leírt maxmin kompozíció helyett, másfajta (pl. minimum-összeg, szorzat-maximum) kompozíciók is alkalmazhatók.

2. A dekompozíciónál először defuzzifikáljuk az eredmény fuzzy halmazt, alaphalmazának egyetlen értékére történő leképezés révén. A defuzzifikációnak különböző módszerei ismertek, a legegyszerűbb a centroid momentum módszer, amikor a tagságfüggvény alatti terület súlypontját számítjuk ki (lásd 4. lépés). Az ehhez tartozó alaphalmaz érték lesz a rendszer éles outputja.

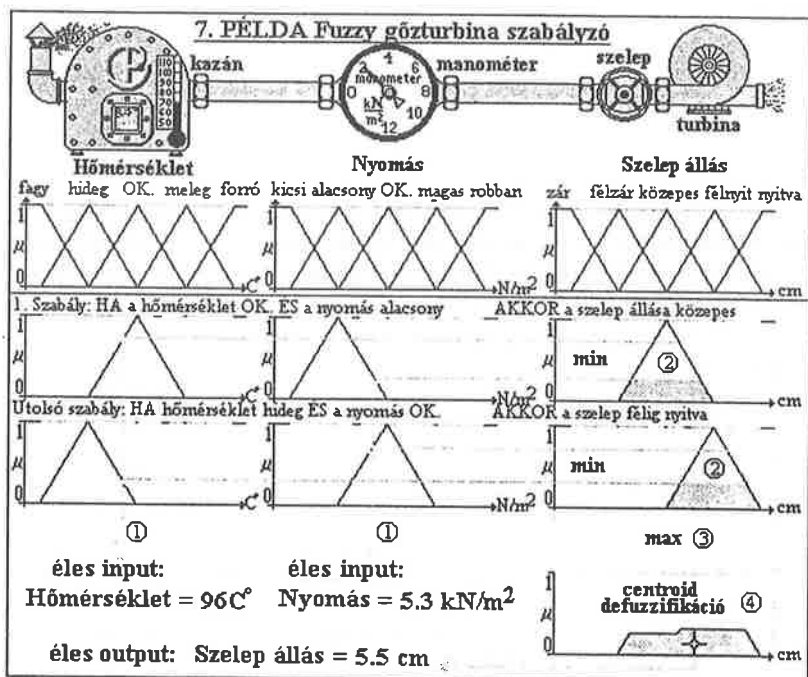
A fuzzy döntési rendszereknek van néhány alapvető előnye azon szakértői rendszerekkel szemben, amelyek konfidencia intervallumokat, vagy valószínűségi faktorokat használnak a bizonytalanság megjelenítésére:

1. Számszerű megközelítés szimbolikus helyett. A fuzzy rendszer könnyedén kezel folytonos kvantitatív változókat, míg a szakértői rendszerek erre sok esetben nem képesek.
2. Hatékonyság komplex, messze nem lineáris problémák modellezésében.
3. A fuzzy rendszer egymásnak ellentmondó szakértői vélemények, következtetési szabályok kezelésére is képes. Ez megoldhatatlan feladat a szakértői rendszerek számára, mert megkövetelik a tudásbázis teljes konzisztenciáját, ami sokszor irreális követelmény.
4. Az intuíciók, látens tudás felhasználása.
5. Gyorsabb következtetési mechanizmus. A fuzzy rendszerekben minden szabály egyszerre 'tüzel', szemben a szakértői rendszerek lassú és bonyolult döntési mechanizmusával, amely döntési fákot jár be, folytonosan

ellenőrizve az inkonzisztencia és a gráf-körök felbukkanását a döntési fában.

6. Ugyanazon probléma kevesebb szabállyal leírható fuzzy rendszerekben a rugalmasság és az átlapolás miatt.

A fuzzy rendszerek fő hátránya, hogy a defuzzifikáció rendszerint igen komoly információvesztést jelent, mert elmossa az eredmény többértékűségét.



6. Összegzés

A fuzzy és a valószínűségelmélet közti 'hadiállapot' lényegét a következőképpen összegezhettük (lásd 9. ábra):

9. ábra Végkövetkeztetés

Valós döntési probléma bizonytalansága

ESEMÉNY

		éles	pontatlan
ESE- MÉNY	determi- nisztikus	'1+1=2'	Fuzzy
BEKÖ- VETKE- ZÉSE	szto- chaszti- kus	Valószínű- ség	A VALÓ- SÁG !!!!!

Láttuk, hogy a fuzzy és a valószínűségelmélet egy valós döntési probléma bizonytalanságának csak egy-egy oldalát írják le, még a két fajta bizonytalanság mindig keveredik a valószínűségben. Ez az oka a fuzzy és a valószínűségelmélet elhatárolása körüli zavaroknak és a rivalizációnak. A kompromisszumos megközelítés, amely mindkét fajta bizonytalanságot megfelelő pontossággal ábrázolja, további kutatások tárgya.

Irodalom

1. Baas, S. M.–Kwakernak, H.: Rating and ranking of multiple aspect alternative using fuzzy sets. *Automatica*, vol. 13, 47–58, 1977.
2. Chen, S. J.–Ching, L. H.–Hwang, F. P.: *Fuzzy MADM*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
3. Cox, E.: *The Fuzzy Systems Handbook*. Academic Press, Boston-London, 1994.
4. Cox, R. T.: Probability, Frequency, and Reasonable Expectations. *American Journal of Physics*, vol. 14, no. 1, 1–13, January/February 1946.
5. Dubois, D.–Prade, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York 1980.
6. Jain, R.: Decision making in the presence of fuzzy variables. *IEEE Trans. On systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-6, 698–703, 1976.
7. Jaynes, E. T.: Where Do We Stand on Maximum Entropy? *Maximum Entropy Formalism*, Levine and Tribus (eds.), M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1979.
8. Kosko, B.: *Neural Networks and Fuzzy Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1992.

9. Lindley, D. V.: The Probability Approach to the Treatment of Uncertainty in Artificial Intelligence and Expert Systems. *Statistical Science*, vol. 2, no. 1, 17-24, February 1987.
10. Mizumoto, M.-Tanaka, K.: Algebraic properties of fuzzy numbers. *IEEE International Conference of Cybernetics an Society*, 559-563. 1976.
11. Rescher, N.: *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill, New York, 1969.
12. Zadeh, L. A.: Fuzzy Sets. *Information and Control*, vol. 8, 338-353, 1965.
13. Zadeh, L. A.: Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-2, 28-44, 1973.

WAR BETWEEN YIN AND YANG

In this paper, we try to outline the border between Fuzzy and Probability theories, distincting two basic types of uncertainty in a decision problem: the uncertainty of the events and uncertainty of the occourences. We also examine the possibilities to describe the overall uncertainty using single theory.

Key words: Degree of compatibility, rejecting the law of noncontradiction, uncertainty of the events, uncertainty of the occourences, fuzzy probability

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

TÁRSADALOMBIZTOSÍTÁSI NYUGDÍJRENDSZEREK LEHETSÉGES FINANSZÍROZÁSI MODELLJEIRŐL¹

BOD PÉTER

BKE Operációkutatói Tanszék

A hazai nyugdíjreformhoz kapcsolódó szakmai viták hangosak a „felosztó-kirovó” rendszerű finanszírozás kontra „tőkefedezeti” elven nyugvó finanszírozás érveitől és ellenérveitől. Ebben a cikkben arra hívjuk fel a figyelmet, hogy a vitákban a kérdést rosszul teszik fel. A Nyugdíjbiztosítási Önkormányzat reformkonceptiója jelentős kiegészítő tőkefelhalmozás mellett működő felosztó-kirovó rendszerű finanszírozásra alapítaná az új munkanyugdíjrendszert. A tervezet ellenzői ezzel a „klasszikus” felosztó-kirovó rendszerrel szembeni közismert kifogásaikat hangoztatják. Eközben a Pénzügyminisztérium szakértői az általuk népszerűsített tőkefedezettel bíró pillér mellett pontosan egy ilyen első pillért szándékoznak fenntartani. Bemutatunk egy olyan általános nyugdíjfinanszírozási modellt, amelynek egyik extrémális esete a „felosztó-kirovó” rendszer, másik extrémális esete az örök időken át azonos járulékkulccsal és szolgáltatási szabályokkal működő várományfedezeti típusú finanszírozás. A két szélsőséges megoldás között a lehetséges finanszírozási modelleknek a mindenkori gazdasági és demográfiai feltételektől függően vezérelhető családja található.

Néhány szükséges fogalom

A cikk megértése feltételez bizonyos aktuáriusi ismereteket. Minthogy ezeknek az ismereteknek az oktatása nálunk csak az utóbbi években indult meg és a magyar nyelven hozzáférhető szakirodalom elsősorban az alapvető megközelítéseket ismerteti, a szóban lévő modellek bemutatása érdekében szükséges van bizonyos kevésbé ismert fogalmak előre bocsátására.

Ismeretes, hogy minden életbiztosítással kapcsolatos aktuáriusi modell két kiinduló számítási alapra támaszkodik: a technikai kamattal kapcsolatos

¹Beérkezett 1996. szeptember 9.

műveletekre és az ún. „halandósági táblára”.

A halandósági tábla magja egy olyan számsorozat, amely nemenként elkülönítve megmutatja, hogy 100'000 újszülöttből hányan élnek meg az első, a második, ..., hatvanadik stb. születésnapjukat. Minden halandósági táblához tartozik egy ún. határelétkor, amit már senki sem ér el: ω

A halandósági tábla leírható egy

$$l_0, l_1, \dots, l_x, l_{x+1}, \dots, l_{\omega-1}, l_{\omega}, \quad l_{\omega} = 0$$

alakú számsorozattal. Ha bevezetjük a $d_x = l_x - l_{x-1}$ jelölést, megkapjuk az x éves korban elhalálozók számát.

A halandósági tábla konkrét példája egy általánosabb fogalomnak, amit kiválási rendnek nevezünk.

Legyen $\{l_x\}$ egynemű személyek közösségéből történő kiválasztásokat ábrázoló számsorozat, ahol $x_0 \leq x \leq \omega$, x_0 -nak $t_0 = 0$ felel meg és x -nek $t = x - x_0$.

A kiválási rendet egyszerűnek mondjuk, ha egyetlen ok miatt lépnek ki a közösségből, és összetettnek, ha több kiválási ok hat egyszerre.

A kiválási rend zárt, ha csak kilépéseket ismer, és nyitott, ha belépések is lehetségesek.

A nyugdíjrendszerekben alapvető szerepe van az aktív biztosítottak kiválási rendjének. Ebben a rendben három fontos kiválási ok is hat: megrokkulás, munkanélkülivé válás és elhalálozás. Az aktívak rendje tehát összetett. Amennyiben nem veszünk számításba visszalépést az aktívak sorába: zárt renddel van dolgunk. Amennyiben a rokkantak rehabilitálódását és a munkanélküliek újbóli munkába állását is ábrázoljuk: az aktívak rendje nyitott. Még inkább nyitott a rend, ha nem csak a jelenleg biztosítottak állományát tekintjük a vizsgált közösségnek, hanem a jövőben munkába lépő generációkat is.

A nyugdíjrendszerek vizsgálatánál számos egyszerű és összetett, zárt és nyílt kiválási renddel találkozunk.

Minden kiválási rendhez kétféle, ún. kommutációs függvénycsaládot szokás rendelni. Az egyik a közösségben való bentmaradáshoz kapcsolódó eseményekhez kötődik, a másik a kiválasztásokhoz kapcsolódik.

Tekintsük az élők egyszerű, zárt kiválási rendjét. Ha a közösség minden tagja, aki eléri az x -ik születésnapját, kap 1 pénzegységet, akkor ezeknek a kifizetéseknek a $t = 0$ kori értéke:

$$l_x \cdot v^{x-x_0}$$

Ez az l_{x_0} közösségbe belépő személy ún. várománya arra az életben létező kötétt jövedelemre, amit x éves korukban kapnak azok, akik ezt a kort elérik.

A váromány egy belépő személyre eső hányada:

$$\frac{l_x v^{x-x_0}}{l_{x_0}} = \frac{l_x v^x}{l_{x_0} v^{x_0}} = \frac{D_x}{D_{x_0}}$$

A bevezetett jelöléssel definiáltuk az x éves kort megélők születési korokra diszkontált értékét, más szóval az élők diszkontált értékét.

$$D_x = l_x v^x \quad x_0 \leq x \leq \omega.$$

A D_x függvényt az l_x függvény elsőrendű kommutációjának nevezzük. Legyen:

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + \dots + D_{\omega-1}$$

és

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t} = N_x + N_{x+1} + \dots + N_{\omega-1}$$

N az ún. másodrendű, S az ún. harmadrendű kommutáció. Analóg módon definiálhatunk tetszőleges rendű kommutációkat is.

Ha l_x a kor folytonos függvénye, akkor az elsőrendű kommutáció:

$$\overline{D}_x = l_x v^x.$$

A magasabb rendű kommutációkat értelemszerűen a következő formában definiáljuk:

$$\overline{N}_x = \int_x^{\omega} \overline{D}_\xi d\xi \quad \overline{S}_x = \int_x^{\omega} \overline{N}_\xi d\xi.$$

A nyugdíjrendszerekben gyakoriak az olyan szolgáltatások, amelyek a közösségből való kiváláskor esedékesek. Például: az aktív biztosított vagy a nyugdíjas halálakor temetési segílyt fizetnek. Más esetekben a kiválás járadékra való jogosultságot eredményez. Például a megrokkulás miatti kiváláskor rokkantnyugdíj indul. Vagy a biztosított halála nyomán hátramaradotti ellátást kell fizetni.

Legyen $\{l_x\}$ adott kiválási rend, és annak a valószínűsége, hogy valaki x és $x+1$ éves kora között kilép: s_x és járjon ez az esemény 1 pénzegység kifizetésével. Ha feltesszük, hogy a kiválások az év folyamán egyenletesen oszlanak el, akkor a kilépetteknek járó kifizetések váróánya a születési korokra diszkontáltan:

$$C_x = l_x s_x v^{x+\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} D_x s_x.$$

Ezt nevezzük a kilépők elsőrendű kommutációjának. Az előbbiekhöz hasonlóan definiáljuk a megfelelő magasabb rendű kommutációkat:

$$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t},$$

$$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}.$$

A kommutációk felfoghatók, mint sajátos operátorok, amelyeket időfüggvényeken értelmezünk. Vegyük észre, hogy maga az élők diszkontált száma is időfüggvény, hiszen:

$$D_x = D_{x_0+t}$$

A nyugdíjbiztosítási folyamatok modellezésében ezeket az operátorokat igen bonyolult, összetett kapcsolatok ábrázolására lehet használni. Ilyenek például a rokkantnyugdíjak és a hátramaradotti nyugdíjak várományai.

De érdemes a kommutációkat még általánosabban kiterjeszteni tetszőleges időfüggvényekre, amelyek a nyugdíjrendszerek leírásakor fellépnek. Ilyenek a rendszer összes járulékbévétele, a teljes nyugdíjteher, a rendszer tartalékainak értéke, mint az idő függvényei.

Tekintsünk ennek megfelelően egy tetszőleges

$$D_t^{(1)} \quad 0 \leq t \leq \omega$$

($\omega = \infty$ lehetséges) függvényét az időnek. Ezt nevezzük elsőrendű kommutációnak. $D_t^{(1)}$ lehet csak $t = 0, 1, 2, \dots$ egész számokra értelmezve, vagy a $[0, \omega]$ intervallum minden pontjára. Utóbbi esetben $\overline{D}_t^{(1)}$ -vel jelöljük és feltételezzük, hogy t -ben folytonos.

A k -ad rendű kommutációkat rekurzívan definiáljuk: Diszkrét esetben:

$$D_t^{(k)} = \sum_{\tau=t}^{\omega} D_{\tau}^{(k-1)} \quad (\tau \in N).$$

Folytonos esetben:

$$\overline{D}_t^{(k)} = \int_{\tau}^{\omega} \overline{D}_{\tau}^{(k-1)} d\tau.$$

Az aktuáriusi alkalmazásokban maga az elsőrendű kommutáció valamilyen $F(t)$ időfüggvény diszkontált értéke. Ha az $F(t)$ függvényt $t = 0$ időpontra diszkontáljuk, akkor:

$$\overline{D}_t^{(1)} = F(t) e^{-\int_0^t \delta(\tau) d\tau},$$

vagy, ha a kamatintenzitás az időtől független: $\delta(\tau) = \delta$,

$$\overline{D}_t^{(1)} = F(t)e^{-\delta t}.$$

Ez az $F(t)$ függvény elsőrendű kommutációja:

$$\overline{D}_t^{(1)} = \overline{D}_t[F],$$

ami írható

$$\overline{D}[F(t)]$$

alakban is. A magasabb rendű kommutációk jele:

$$\overline{D}_t^{(k)}[F].$$

A másod-, harmad- és negyedrendű kommutációkra használatosak az alábbi szimbólumok:

$$\overline{N}_t[F] = \overline{D}_t^{(2)}[F]$$

$$\overline{S}_t[F] = \overline{D}_t^{(3)}[F]$$

$$\overline{T}_t[F] = \overline{D}_t^{(4)}[F]$$

A nyugdíjrendszerek, mint kockázati közösségek

Minden nyugdíjrendszer az időskori megélhetésre való takarékoskodás eszköze, de nem minden időskorra történő takarékoskodási intézmény nevezhető jó szívvel nyugdíjrendszernek. A magunk részéről nem tekintjük nyugdíjnak az ún. befizetémeghatározott megtakarítási rendszereket, legyenek azok önkéntesek vagy kötelezőek. Nem tekintjük nyugdíjnak az ún. egyéni megtakarítási számlákra szervezett pénztárákat, különösen, ha a befizető korai elhalálása esetén a számlán felgyűlt összeg átörökíthető. Az ilyen és hasonló intézmények működése hasznos lehet mind a befektetők, mind a tőkepiac számára. Azonban valamennyiből alapjában éppen a biztosítási elem, a kockázat megosztása hiányzik.

Számunkra egy nyugdíjrendszer leglényegesebb és nélkülözhetetlen eleme az, hogy „biztosítja” bizonyos, mindenki számára elkerülhetetlen, de véletlen időpontokban bekövetkező események miatt előálló megélhetési problémák enyhítését. Minden nyugdíjrendszer kockázatközösségeket definiál, amikor működési szabályaiban rögzíti a rendszerben résztvevők jogait és kötelezettségeit. Pontosan ez különbözteti meg az egyéni takarékoskodási rendszerektől.

Ezért tudomásul kell venni, hogy nem létezik olyan nyugdíjrendszer, amelyben az egyének szintjén teljesülne az élvezett juttatások és a teljesített befizetések egyenértékűsége. Az ún. ekvivalencia a dolog lényegéből fakadóan csak a rendszerben definiált kockázatközösségek szintjén valósulhat meg.

Az ekvivalencia általános követelményét az alábbi egyenlettel lehet kifejezni: *a rendelkezésre álló tartalékok + a jövőben várható járulékbefizetések diszkontált összege = a jövőben várható nyugdíjkifizetések diszkontált összege.*

Nyilvánvaló, hogy ez az egyenlet csak akkor értelmezhető, ha a biztosítottak és nyugdíjra jogosultak jól definiált közösségére vonatkozik. A nyugdíjbiztosítás kialakulása során az a gyakorlat vált általánossá, hogy az azonos korú és azonos nemű, a biztosításba egyidejűleg belépők alkotta zárt kockázatközösségekre követték meg az ekvivalencia teljesülését.

Az ilyen elven működő nyugdíjrendszer ún. zárt nyugdíjpénztárt jelent, amely a különböző kockázatközösségeket egymás mellett kezeli. Az ilyen rendszerben az egyes kockázatközösségek tagjai különböző mértékű járulékot fizetnek, vagy azonos befizetések fejében különböző juttatásokban részesülnek. A nyugdíjrendszerek általánossá válásával és különösen a kötelező nyugdíjrendszerek színrelépésével olyan folyamat indult meg, amely a különböző kockázatközösségeket egyre kevesebb és egyre átfogóbb közösségekké vonta össze. Napjainkban a nagy társadalombiztosítási rendszerekre általában az jellemző, hogy a teljes biztosított állományt egyetlen kockázati közösségként kezelik. Számos európai országban a kötelező nyugdíjbiztosítást több, párhuzamosan működő intézmény látja el. Ezek — miközben operatíván önállóak — össztársadalmi szinten definiált kockázatkiegyenlítő alappal számolnak el. Az átlagosnál jobb kockázattal rendelkező intézmények nettó befizetésekkel támogatják a rosszabb kockázatú intézményeket.

A nagy, kötelező, közjogi szabályozás alatt álló társadalombiztosítási nyugdíjrendszerek tapasztalatai alapján az az elméleti felismerés született, hogy célszerű az alapul vett kockázatközösséget nem zárt, hanem nyílt közösségként kezelni. Más szóval ez azt jelenti, hogy az ekvivalenciaelvet nem korlátozzák a biztosításban már bentlévő generációkra, hanem figyelembe veszik a biztosításba mindenképpen belépő új, jövő generációkat is. Világos, hogy itt az az alapkérdés: megszűnhet-e a létező rendszer azáltal, hogy új aktívák már nem csatlakoznak vagy nem csatlakozhatnak. Ha a rendszer megszűnhet: a benne megszerzett jogok védelme érdekében elengedhetetlen a zárt pénztári szemlélet. Hiszen megszűnéskor a tartalékvagyon meg kell hogy feleljen az összes kifizért, jövőben esedékes jogosultság megszűnési időpontra diszkontált értékével.

Más a helyzet, ha a rendszer fennmaradását törvény biztosítja és nincs politikai szándék a törvény megváltoztatására. Ebben az esetben a társadalom mozgási lehetősége kitágul. Az együtt élő nemzedékek között társadalmi szer-

ződés jöhet létre, amely a nyugdíjrendszer juttatásait és az ezek fedezetéhez szükséges terheket eloszthatja a különböző évjáratok és a különböző csoportok között. Azonban célszerű, ha az ilyen típusú társadalmi megállapodásokat aktuáriusi mérlegelések figyelembevételével készítik elő és a rendszerek működését is állandó aktuáriusi elemzés kíséri.

Az általános finanszírozási modell

A korábban definiált fogalmak segítségével megfogalmazhatunk egy tetszőleges szabályokkal működő nyugdíjrendszer egyensúlyát biztosító ekvivalencia-követelményt.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$B(t)$ = a rendszer járulékbévétele a t időpontban.

$$\int_{t_1}^{t_2} B(t) dt$$

a rendszer összes bevétele a $[t_1, t_2]$ időszakban.

$J(t)$ az időegységre jutó járulékalap. Bérékhez kötött rendszerek esetében ez az időegységre eső biztosított bérek összege a t időpontban. Ha rögzített összegű járulékot kell fizetni: $J(t)$ lehet a járulékfizetők száma.

$\pi(t)$ járulékkulcs a t időpontban a járulék alap egységére vetítve. $\pi(t)$ rendszerint egy lépcsősfüggvény. Nyilván:

$$B(t) = \pi(t)J(t)$$

$K(t)$ a rendszer kiadásainak függvénye, $\int_{t_1}^{t_2} K(t) dt$ az összes kiadás a $[t_1, t_2]$ időszakban. Ez lehet a tényleges pénztári kifizetések összege, de lehet a belépő kockázatok nagysága is. $K(t)$ a nyugdíjjogosultságokhoz kapcsolódó terheket méri, így $\pi(t)$ nettó (működési költséget nem tartalmazó) járulékmértéket fejez ki.

$V(t)$ a t időpontbeli tartalék.

$\delta(t)$ a kamatintenzitás.

$$\int_{t_1}^{t_2} V(t)\delta(t) dt$$

a tartalék kamathozama a $[t_1, t_2]$ időszakban. A $B(t)$, $K(t)$ és $V(t)$ függvények általában diszkontált formában jelennek meg. Legyen $t = 0$ a megfigyelés kezdete. Akkor

$$\overline{D}[F(t)] = F(t)e^{-\int_0^t \delta(\tau) d\tau}.$$

Ha $\delta(t) = \delta = \text{állandó}$:

$$\overline{D}[F(t)] = F(t)e^{-\delta t} = F(t)v^t.$$

Az ekvivalenciaegyenlet a $t = 0$ időpontra számítva:

$$V(0) = \int_0^{\infty} \overline{D}[K(\tau) - B(\tau)] d\tau = \overline{N}[K(0) - B(0)].$$

Ezzel szemben tetszőleges $t > 0$ időpontban:

$$\overline{D}[V(t)] = \int_t^{\infty} \overline{D}[K(\tau) - B(\tau)] d\tau = \overline{N}[K(t) - B(t)].$$

Ez a szükséges járuléktartalék nagysága ún. prospektív szemléletben. A kifejezést kissé átalakítva nyerjük:

$$\begin{aligned} \overline{D}[V(t)] &= \int_0^{\infty} \overline{D}[K(\tau) - B(\tau)] d\tau - \int_0^t \overline{D}[K(\tau) - B(\tau)] d\tau \\ \overline{D}[V(t)] &= V(0) - \int_0^t \overline{D}[K(\tau) - B(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Ez viszont a szükséges járuléktartalék nagysága retrospektív szemléletben. Két különböző időpontban szükséges tartalék különbsége ebből kifejezhető.

$$\overline{D}[V(t_2)] - \overline{D}[V(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} \overline{D}[B(\tau) - K(\tau)] d\tau.$$

Viszonylag egyszerű számolgatással felkamatolhatunk $t = 0$ -ról tetszőleges t időpontra és előttünk van a szükséges tartalék explicit értéke prospektív és retrospektív alakban:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^{\infty} (K(\tau) - B(\tau)) e^{\int_{\tau}^t \delta(\lambda) d\lambda} d\tau \\ V(t) &= V(0) e^{\int_0^t \delta(\lambda) d\lambda} + \int_0^t (B(\tau) - K(\tau)) e^{\int_{\tau}^t \delta(\lambda) d\lambda} d\tau. \end{aligned}$$

Az így meghatározott tartalékok mellett teljesül az ekvivalenciaegyenlet. Persze ténylegesen a meglévő tartalék soha nem esik egybe a számítottal. Ugyanakkor a formulák felhasználhatók annak az elemzésére, hogy egy $[t_1, t_2]$ időpontban adott tényleges tartalék hogyan alakul át egy későbbi időpont tényleges tartalékába. Ehhez persze a bevételi és kiadási függvényeket és a kamatintenzitást a tényleges realizálódott értékek szerint kell számba venni.

Az eddigi előkészítés alapján már most azt tűzzük ki célként, hogy egy nagy kötelező rendszer finanszírozási rendszerét modellezzük. A finanszírozási modellel szemben az alábbi követelményeket támasztjuk:

- teljesüljön az ekvivalencia valamilyen meghatározott kockázatközösségre;
- a figyelembe vett kockázatközösség legyen nyitott;
- a járulékkulcs legyen meghatározott, ún. fedezeti időszakokra változatlan;
- a járulékkulcs legyen egységes minden biztosított jövedelemre.

A fenti követelményeknek eleget tevő rendszereket két ismérvvel fogjuk jellemezni:

- a fedezeti szakaszok hosszával és
- az egyes fedezeti szakaszok végén megkövetelt tartalék nagyságával.

Legyen

$$[t_0 = 0, t_1]; [t_1, t_2]; \dots; [t_n, t_{n+1}]; \dots$$

a fedezeti szakaszok adott sorozata. Minden fedezeti szakaszhoz tartozzék egy változatlan járulékmérték. Jelölje π_n a $[t_n, t_{n+1}]$ időszakban érvényes járulékkulcsot. Jelölje $V(t_n)$ a $[t_n, t_{n+1}]$ szakasz elején meglévő tartalék nagyságát és $V(t_{n+1})$ legyen a szakasz végére elvárt tartalék. Alkalmazzuk a két időszak közötti tartalékváltozásra vonatkozó összefüggést:

$$\overline{D}[V(t_{n+1})] = \overline{D}[V(t_n)] + \pi_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{D}[J(\tau)] d\tau - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \overline{D}[K(\tau)] d\tau.$$

Felkamatolva a $t + 1$ -ik év végére:

$$V(t_{n+1}) = V(t_n) e^{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta(\lambda) d\lambda} + \pi_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} J(\tau) e^{\int_{\tau}^{t_{n+1}} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau - \int_{t_n}^{t_{n+1}} K(\tau) e^{\int_{\tau}^{t_{n+1}} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau.$$

Ez az egyenlet, amely az időszak szükséges kamatlábát meghatározza. Könnyen belátható, hogy ha minden időszakra teljesül a fenti feltétel, akkor teljesül az ekvivalenciaegyenlet. Ugyanis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\overline{D}[V(t_{n+1})] - \overline{D}[V(t_n)]) = \overline{D}[V(\infty)] - \overline{D}[V(0)] = \int_0^{\infty} \overline{D}[B(\tau) - K(\tau)] d\tau.$$

Normális gazdasági feltételek mellett ugyanis

$$\overline{D}[V(\infty)] \rightarrow 0,$$

és akkor:

$$\overline{D}[V(0)] = V(0) = \int_0^{\infty} [K(t) - B(t)] d\tau.$$

Az általános modell néhány realizálása

A felosztó-kirovó rendszer

Mint alsó extrémális eset, a fedezeti szakaszok hossza 1-1 év. Feltesszük, hogy a tartalék minden szakasz végén eltűnik.

A t -ik év szükséges járulékkulcsát az alábbi egyenlet határozza meg:

$$\int_t^{t+1} \overline{D}[B(\tau)] d\tau = \int_t^{t+1} \overline{D}[K(\tau)] d\tau = \pi_t \int_t^{t+1} \overline{D}[J(\tau)] d\tau.$$

Amennyiben feltételezzük, hogy a kiadások és a bevételek az év során egyenletesen oszlanak meg: eltekinthetünk a diszkontálás illetve felkamatolás alkalmazásától. Azt nyerjük, hogy:

$$\pi_t = \frac{\text{éves nyugdíjteher}}{\text{az éves járulékalap}}$$

Napjainkban a nagy társadalombiztosítási nyugdíjrendszerek leginkább felosztó-kirovó finanszírozással működnek. Egyes országokban, mint pl. Hollandiában a biztosítónak csak minimális nagyságú likviditási tartaléka van. Nagyjából 1-2 havi nyugdíjkiadásnak megfelelő összeg. A likviditási tartalék szerepe egyfelől az, hogy áthidalja a bevételek és kiadások évközi dinamikája közötti különbséget, másfelől kamathozadéka rendszerint fedezi a működés költségeit. Az ilyen feltételek között működő rendszerek járulékkulcsa évről évre néhány tized százalékkal módosul. Más országokban, mint pl. Ausztriában és az NSZK-ban az állami hozzájárulás különböző formáival igyekeznek a járulékkulcsot több éven át változatlan szinten tartani. A magyar nyugdíjrendszer most már hat éve működik változatlan járulékmértékkel. A hazai járulérendszer elemzése nem tárgya ennek a tanulmánynak.

A „tőkefedezeti” finanszírozás

Ennek a modellnek a történelmileg kialakult elnevezése gyakran okoz félreértést. Hiszen az általános modellben és számos realizációjában is szerepel

tőkefedezet. Márpedig itt egy nagyon sajátos finanszírozási eljárásról van szó. Talán jobb is lenne „nyugdíjak tőkeértékét kirovó” rendszernek nevezni.

A fedezeti időszak hossza itt is egy naptári év. Minden $[t - 1, t]$ időszak végén megköveteljük, hogy rendelkezésre álljon a teljes nyugdíjas állomány követeléseinek erre a napra diszkontált értéke.

Jelölje a t időpontban a nyugdíjasok jövőbeni nyugdíjainak diszkontált értékét: $V_N(t)$. Vagyis a szükséges tartalék a t -ik időszak végén: $V_N(t)$ és a $(t + 1)$ -ik időszak végén $V_N(t + 1)$. Ilyen feltételek között a $(t + 1)$ -ik időszak végén szükséges tartalék explicit formában:

$$V_N(t + 1) =$$

$$V_N(t)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} + \pi \int_t^{t+1} J(\tau)e^{\int_\tau^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau - \int_t^{t+1} K(\tau)e^{\int_\tau^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau.$$

Ha a τ időszakban keletkezett új nyugdíjak tőkeértékét $V_{UN}(\tau)$ -vel jelöljük, írhatjuk, hogy:

$$V_N(t + 1) =$$

$$V_N(t)e^{\int_t^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} - \int_t^{t+1} K(\tau)e^{\int_\tau^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau + \int_t^{t+1} V_{UN}(\tau)e^{\int_\tau^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau.$$

A két egyenlet összevetése alapján:

$$\pi \int_t^{t+1} J(\tau)e^{\int_\tau^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau = \int_t^{t+1} V_{UN}(\tau)e^{\int_\tau^{t+1} \delta(\lambda) d\lambda} d\tau.$$

Ha ismét feltételezzük, hogy az évközi bevételek, az évközi kiadások és az év során történt nyugdíjmegállapítások egyenletesen oszlanak meg az időben, akkor:

$$\pi_t = \frac{\text{az új nyugdíjak tőkeértéke}}{\text{az éves biztosított bérek összege}}.$$

A tőkefedezeti típusú finanszírozást korábban főként az üzemi balesetek és foglalkoztatási ártalmak alapján megállapított életjáradékok fedezésére alkalmazták. Ha a megrokkánások száma nagyjából állandó, akkor ennek a biztosításnak a terhe többé-kevésbé stabil. Egyébként is az ilyen biztosítások teljes terhét rendszerint a megrokkánásért objektíven felelős munkáltatók fizetik.

Az utóbbi időben azonban más területeken is terjed ennek a modellnek az alkalmazása. A rendszer demográfiai érzékenysége kisebb, mint a felosztó-kirovó finanszírozásé. Másfelől az általa indukált tőkefelhalmozás mértéke valószínűleg nem haladja meg a gazdaság normális többlettőkeigényét.

Az általános átlagjárulék módszere

Az általános modell másik extrém változata az, hogy egyetlen fedezeti időszakot definiálunk: a rendszer indításától az idők végtelenségéig. Ami egyben azt is jelenti, hogy a rendszer időben változatlan járulékkulccsal működik.

Erre az általános átlag járulékkulcsra a következő meghatározó egyenlet érvényes:

$$V(0) = \int_0^{\infty} \overline{D}[K(\tau)] d\tau - \pi \int_0^{\infty} \overline{D}[J(\tau)] d\tau.$$

Innen:

$$\pi = \frac{\int_0^{\infty} \overline{D}[K(\tau)] d\tau - V(0)}{\int_0^{\infty} \overline{D}[J(\tau)] d\tau}.$$

Ahhoz, hogy a fenti eredmény értelmezhető legyen, a két improprius integrálnak léteznie kell. Ha a rendszer indítási időpontjára diszkontálunk, az induló tartalék lehet 0 is. Minthogy az átlagos járulékkulcsot kizárólag az induló tartalék, valamint a bevételi és kiadási függvények határozzák meg, a tartalék határértéke felett nem lehet rendelkezni.

A kötelező nyugdíjrendszerek klasszikus finanszírozási modellje hosszú időn át az itt ismertetett modell volt. Ez persze nem azt jelentette, hogy a rendszerek ténylegesen változatlan járulékkulccsal működtek hosszú időn át.

A tényleges biztosítási folyamatok elemzése során mindig kiderült, hogy a kalkulációknál alkalmazott számítási feltételezések nem teljesültek. Ilyenkor megváltoztatták a törvényes szabályokat. Az újraszabályozáskor azonban ismét az idő végtelenségig állandó járulékkulcs feltételezésével éltek.

Az időszakosan változó járulékkulcsok módszere

A két extrémális eset: a felosztó-kirovó eljárás és az átlagjárulékon nyugvó teljes tökefedezettel működő finanszírozási eljárás között található az ún. „időszakok terheinek fedezésére” szolgáló módszerek sokasága. Ezeknek az eljárásoknak az a közös eleme, hogy egy viszonylag hosszabb fedezeti időszakra igyekeznek a járulék mértékét rögzíteni, vagy legfeljebb annak egy előre meghatározott mértékű emelését irányozzák elő. Vegyük észre, hogy itt a felosztó-kirovó finanszírozás olyan kiterjesztéséről van szó, amikor az egyéves fedezeti időszakot megnyújtjuk $t_{n-1} - t_n$ évre.

A kiterjesztés legegyszerűbb formája az, hogy megtartjuk a tartaléktőke időszak végi eltűnésének a követelményét. Az ilyen finanszírozásnál a fedezeti időszak első felében tartalékokat halmoznak fel, amelyeket az időszak második felében felhasználnak annak érdekében, hogy a járulékkulcsot ne kelljen emelni. Ez hasznos megoldás olyan helyzetekben, amikor a demográfiai viszo-

nyok vagy a foglalkoztatási viszonyok előrelátható hullámzásainak a hatását érdemes semlegesíteni.

Ezt a módszert alkalmazza napjainkban az USA társadalombiztosítási nyugdíjrendszere. Ez a rendszer felosztó-kirovó alapon működik. Azonban 1983 óta a járulékkulcs úgy van meghatározva, hogy a bevételek meghaladják a folyó kiadásokat. 1994-ben a rendszernek durván egy évi nyugdíjterhernek megfelelő tartaléka volt, kamatozó állampapírokban elhelyezve. Egy átlagos gazdasági növekedési pályát feltételezve a tartalékok 2005 körül elérik majd az éves nyugdíjkiadások kétszeresét. A tartalékképződés 2013 körül fog tetőzni az éves nyugdíjkiadások 250%-nál. Ezt követően a rendszer 2030-ra feléli a tartalékait, ha nem történik változtatás a rendszerben. Rossz gazdasági konjunktúrát feltételezve a tartalékok kimerülése már 2015-re bekövetkezhet. Az USA rendszerében az említett megoldás célja elsősorban a háború utáni „baby boom” nyugdíjrendszert fenyegető hatásának csökkentése. Ha a fedezeti időszakok végén a tartalékok tervszerűen eltűnnek: nem nagyon lehet igazán hosszú távú befektetési politikát folytatni. A tartalékoknak sokkal likvidebbeknek kell lenni, mint amikor hosszabb időre lekötethők. Ezért van egy olyan közelítése is a fedezeti időszak hosszának meghatározására irányuló megfontolásoknak, hogy az egyszer felgyűlt tartalékok soha se csökkenjenek. Ez annyit jelent, hogy a járulékkulcs addig maradhat változatlan, amíg a járulékbévételek és a tartaléktőke kamatai még fedezik a folyó nyugdíjkiadásokat. Ha ebben a helyzetben nem emelnék a járulék mértékét: sor kerülne tartalékfelhasználásra nyugdíjfizetéshez. Az olyan rendszert, amely nem engedi meg a tartalék csökkenését és ezért a járulék mértékét előre tervezett módon növeli: a fokozatos járulékkulcsok rendszerének mondják.

Az ilyen rendszerekben definiálhatjuk az ún. maximális fedezeti szakasz fogalmát. Egy fedezeti szakaszt, állandó járulékmértékkel akkor nevezünk maximálisnak, ha a végpontjában a tartaléktőke maximális, azonban a szakasz bármilyen kis mértékű — változatlanul hagyott járulékkulcs melletti — meghosszabbítása a tartalék csökkenését eredményezné.

A gyakorlatban persze aligha lehet szó arról, hogy egy nyugdíjrendszer a matematikailag optimális pályán mozogjon. A számított és a tényleges folyamatok eltérésein túl azt is szem előtt kell tartani, hogy egy nyugdíjrendszer szabályainak a módosítása mindig társadalmi érdekeket érint és így politikai kérdés. Nem biztos, hogy az ésszerű mindig meg is valósítható. Az azonban biztos, hogy a vázolt finanszírozási modell-család olyan rugalmas eszköztárat jelent, amelynek alkalmazásakor messzemenően figyelembe lehet venni a változó gazdasági és demográfiai feltételeket. Célszerű lenne, ha a hazai nyugdíjreform folyamatában nagyobb szerepet nyernének az aktuáriusi szempontok. Aktuáriusi megalapozás nélkül mindenféle reformjavaslat hamis illúziókat kelt.

Irodalom

1. Bod Péter (1992): Mennyibe kerül egy társadalombiztosítási nyugdíjrendszer működtetése? I-II. Közgazdasági Szemle, 1992/2. sz. 123-145. oldal, 1992/3. sz. 244-261. oldal.
2. Thullen, Peter (1977): *Mathematische Methoden der Sozialen Sicherheit*. Verlag Versicherungswirtschaft e. V. Karlsruhe. (330+XVI oldal).
3. 1994 Annual Report of the Board of Trustees of the Federal Old Age and Survivors and Disability Insurance Trust Funds. U.S. Government Printing Office, Washington.

ON DIFFERENT FEASIBLE MODELS FOR FINANCING MANDATORY PENSION SCHEMES

The present paper gives a survey of a general model for financing mandatory pension schemes. The general model consists of an infinite series of specific realizations. "Pay as you go" and "fully funded operating with constant contribution rate" are the extreme ones. The intermediate realizations offer opportunities to find appropriate intergeneration distributions of the costs. The lesson of the more general model is that the usual question concerning the alternative: "pay as you go" or "fully funded" is an ill posed question.

OKTATÁS

ÚJJÁÉLELŐ HIVATÁS ÉS KÉPZÉS: AZ AKTUÁRIUS¹

KOVÁCS ERZSÉBET
BKE Operációkutatási Tanszék

A magyar gazdaság átalakulása magával hozta az állami biztosítási rendszer valódi kockázatviselő piaccá való átrendeződését is. Ez a folyamat természetesen megmutatkozott a biztosítási szakmával szembeni követelményekben is. Az utóbbi évek gazdaságmodellezői és operációkutatási konferenciáin mindig volt egy-két előadó, aki biztosításmatematikai problémákról tartott előadást, aktuáriusi munkáról beszélt. Mindezek arra készítettek bennünket, a Budapesti Közgazdaság-tudományi Egyetemen (BKE) dolgozó gazdaságmatematikusokat, hogy a közgazdászok körében idegenül hangzó elnevezést ne csak fogalmilag honosítsuk meg a közgazdasági képzésben, hanem be is építsük abba, annál is inkább, mert a magyar közgazdasági szakképzés hagyományaitól nem idegen az ilyen típusú diszciplínák oktatása. Szakmai, baráti beszélgetések nyomán megfogalmazódott tehát az elhatározás, aktuárius képzést² kell indítani a BKÉ-n.

A tematika összeállítását két alapvető szempont vezérelte: illeszkedjen a magyar biztosítási rendszer (új és felmérhető, várható) szakmai követelményeihez és adaptálja a nemzetközi képzési normákat, nem elfeledkezve a felsőfokú közgazdasági képzés szakmai hagyományairól (biztosításmatematika, tervgazdasági, gazdaságmatematikai szak) sem. A rövidesen megszülető PM-rendelet is — amely az aktuáriust, mint szakképesítést nevezi meg, és mellékletében meghatározza a szakmai és vizsgakövetelményeket — a szakma nemzetközi sztenderdjeit követi, ezért érdemes felvázolni az érdeklődő kollégák számára azt az utat, amely az aktuárius szakképesítés megszerzéséhez vezet.

¹Beérkezett 1996. december 8.

²Az ELTE Valószínűségelméleti és Statisztikai Tanszéke 1986-ban kezdett el biztosításmatematikai tárgyakat oktatni.

Aktuáriusok Európában

Bár az aktuárius, mint elnevezés általánosan használatos, az Európai Unió egyes országaiban többé-kevésbé eltérő módon definiálják az aktuárius szerepét. Egy 1992-es kérdőíves felmérésből megállapíthatjuk, hogy az egyes országok mely aspektusokat emelik ki.

A legtágabb definíció Franciaországban született: az aktuárius olyan szakember, aki matematikai, közgazdasági, jogi, statisztikai és pénzügyi ismeretekkel rendelkezik, amelyekkel képes megoldani biztosítási, nyugdíjalapkezelési, banki, pénzügyi, befektetési és társadalombiztosítási feladatokat.

A németek azt emelik ki, hogy a matematikai, statisztikai és közgazdasági kvantitatív modellek és módszerek biztosítási alkalmazását végzi az aktuárius.

Az Egyesült Királyságban két definíció ismert. Az angolok a pénzügyi és üzleti életben általában előforduló bizonytalan jövőbeni események kezelését emelik ki, míg a skótok a halandóság, a megtakarítások, befektetések, nyugdíjalapok és életbiztosítási pénzügyi kockázatok kezelését említik.

A többiek e megfogalmazások egy-egy elemét használják, a pénzügyi problémák és a biztosítható kockázat szinte minden definícióban szerepel. Az aktuáriusi munkakör nem feltétlenül biztosító társasághoz kötött. Kormányhivatalokban, pénzintézetekben, tanácsadó cégeknél és a felsőoktatásban is dolgoznak aktuáriusok, de természetesen jóval kisebb számban, mint a biztosítóknál és nyugdíjalap-kezelőknél. A szakosodás három fő területe Nyugat-Európában is az életbiztosítás, a nyugdíjalapok, és az általános (nem-élet) biztosítás.

Az aktuáriusok legnagyobb hányada (az Egyesült Királyságban közel 50 %-a) az életbiztosításban dolgozik. A díjkalkuláció és a kötelezettségek értékelése mellett a hosszú távú tervezés, a kockázatkezelés, a viszontbiztosítás az életbiztosítási aktuárius feladata. Az aktuáriusi állások számát tekintve második helyen a nyugdíjalapok állnak. A nyugdíjrendszerek eltéréseinek megfelelően az aktuáriusok feladatai is eltérőek, de az adózási és jogi szabályozás ismeretében a kötelezettségek megállapításáért és az összegyűjtött pénzek befektetéséért az aktuárius minden országban felelős. Az általános biztosításban a korábbi időszakhoz képest egyre növekszik az aktuáriusok száma és felelőssége. Az alkalmazott technikák az időtávok különbözősége miatt különböznek az élet- és a nem-életbiztosításban, de a nem-életbiztosítási aktuárius éppúgy felelős a díjmegállapításért és a biztosító pénzügyi biztonságáért, mint az életbiztosításban dolgozó kollégája. A káralakulások statisztikai elemzése e munkakörben kiemelkedően fontos feladat.

A magyar biztosítási törvény is szétválasztja a munkaterületeket, mivel a jövőben nem alapítható kompozit, azaz élet- és nem-életbiztosítással egyaránt foglalkozó biztosítótársaság.

Az Európai Unió országaiban általában törvény szabályozza azt, mely területeken kell aktuáriust alkalmazni. Az előbb említett feladatokon kívül a biztosítók tartalékainak meghatározását is aktuáriusnak kell elvégeznie, aki aláírásával vállal felelősséget a számítások eredményeiért. Az Egyesült Királyságban és Írországban csak a kinevezett aktuáriusoknak van aláírási joguk. A "kinevezés" nem azonos a cégnél betöltött vezető pozícióval. A legmagasabb szintű szakmai minősítés megszerzése és minimum 3 évnyi szakmai gyakorlat szükséges a cím elnyeréséhez. A franciáknál független aktuárius igazolja aláírásával a számítások helyességét. Az említett országok mindegyikében erős szakmai szervezetek működnek és az aktuárius társasági tagság elengedhetetlen az aktuáriusi munkakör betöltéséhez. Hazánkban a biztosítási törvény definiálja a vezető aktuáriust és előírja feladatait, kötelezettségeit. A minősítés megszerzésére 3 év türelmi időt ad, amelyből egy már letelt. Az említett PM-rendelet (tervezet) kivételes és egyszeri vizsgamentességet ad a biztosítótársaságoknál legalább 3 éve vezető állásban levő aktuáriusoknak, hogy a törvény előírásai teljesülhessenek.

Az aktuáriusok képzése az Európai Unióban

Az aktuáriusi képzés interdiszciplináris jellegéből eredően az alap gondolat közös: egy egyetem elvégzése nem elegendő, a graduális képzést szakmai továbbképzés kell, hogy kövesse.

Ugyanakkor a definícióban tapasztalt eltérések a képzési rendben is észlelhetők. A többség a pénzügyek felől közelít. A kockázatkezelést és befektetést hangsúlyozók a képzésben a közgazdasági, pénzügyi, jogi ismeretek elsődlegességét hangsúlyozzák. Ez az alaptudás egészül ki matematikai, statisztikai, demográfiai, ökonometriai tanulmányokkal. A másik lehetséges út az, hogy a megszerzett matematikai tudást egészíti ki a hallgató közgazdasági, pénzügyi és biztosítási ismeretekkel. Ez a kombinált képzés az EU országaiban nem ütközik akadályokba, a hallgató egy-egy egyetem falain belül találja a teljes tárgykínálatot. Általában önálló tanszék (pl. Aktuárius Tudományok Tanszéke a Heriot-Watt Egyetemen Edinburgban, az Amszterdami Egyetemen vagy Pénzügyi Matematika Tanszék Madridban) felelős az oktatásért, amely 4-8 félévig tart. Az egyetemi diploma birtokában már betölthető aktuáriusi munkakör, de a fiatal diplomás tudja, hogy folytatnia kell a tanulást. Egyes országokban egyetemi posztgraduális képzésben, máshol a többfokozatú vizsgarendszerhez kapcsolódó felkészítésben vehet részt a jelölt. A vizsgák száma is jelentősen eltér, a maximumot az Egyesült Királyság 9 vizsgája jelenti. Ez általában kiegészül a diplomamunka megírásával és szóbeli megvédésével is, mivel a kommunikációs készség fontosságát minden országban elismerik.

A kérdőív az oktatás továbbfejlesztésének irányát is firtatta. A válaszokból kitűnik, hogy a pénzügyi, befektetési és jogi ismeretek kerültek mindenhol előtérbe, és a szakmai gyakorlat szükségessége is említésre került. E változtatások 1992-95 között meg is valósultak.

Aktuárius oktatás a Budapesti Közgazdaság-tudományi Egyetemen

A BKE Biztosítási Oktató és Kutató Csoportja 1990. és 1996. között három csoportban szervezte meg a posztgraduális aktuárius oktatást az Egyesült Királyság Aktuárius Intézetének oktatói, valamint néhány hazai kolléga bevonásával. Alapszintű kurzus kétszer indult, melynek során 8 témakört tanult 25-30, a biztosítási szakmában dolgozó vagy oktató kolléga 1-1 hétig az angol oktatók és tananyagaik segítségével.

A 8 vizgát sikeresen letevő hallgatók számára emelt szintű képzés indult, amely 10 témát ölelt fel. Az e vizsgasorozaton is túljutott 23 hallgató ugyan "diplomat" kapott tanulmányainak elismeréséről, de ennek elismertetése nem megoldott. Nem hoz automatikus szakképesítési elismerést az sem, ha a tanfolyamot elvégző diplomadolgozatot ad be a BKE Posztgraduális Karára, amely megvédése után az egyetem posztgraduális diplomával ismeri el a tanulmányokat.

Időközben a BKE Operációkutatási Tanszéke megszervezte és elindította az Aktuárius fő- és mellékszakirányt. Az egyetemi tanács jóváhagyó döntése után az 1994/95-ös tanévben megindult a kétéves graduális képzés. Az európai tendenciákat és egyetemünk alapozó képzését figyelembe véve a 4. és 5. évfolyamon 4 féléven keresztül folyik a szakirányon az oktatás. Az első három éven folyó alapozó képzésben a hallgatók megszerzik az elengedhetetlen matematikai alapismereteket (analízis, lineáris algebra, valószínűség-számítás és optimumszámítás), statisztikát és számítástechnikát tanulnak, valamint a módszertani tárgyak mellett jelentős óraszámban közgazdasági, pénzügyi és számviteli tárgyakat tanulnak. A harmadik év végén szakirányt választanak a hallgatók. Az aktuárius szakirány két úton vehető fel.

A főszakirányt választó hallgatók egyes tárgyakat magasabb óraszámban és kisebb csoportban tanulnak, mint a mellékszakirányt felvevő társaik. (1. tábla) E második csoport viszont főszakként pl. pénzügyet, marketinget, számvitelt vagy közszolgálati ismereteket tanul, ami nagyon jól egészíti ki a biztosításmatematikai tanulmányokat.

A szakirány elvégzését záróvizsga letétele után igazolja az egyetem. A záróvizsgán a hallgató tudásáról komplex kérdések megválaszolásával ad számot. A főszakirány hallgatói diplomadolgozat megírásával és megvédésével

fejezik be aktuáriusi tanulmányaik első fokozatát. Az 1996-97-es tanévben fog végezni egyetemünkön a második évfolyam. Hallgatóink iránt nagy a kereslet, mert a közgazdasági diploma, a számítógépes ismeretek (pl. EXCEL) és két idegen nyelv birtokában könnyen megtalálják helyüket a biztosítótársaságoknál aktuáriusként és más rokon munkakörökben.

A szakmai továbbképzés stációi most formálódnak. A PM-rendelet (tervezet) lehetővé teszi, hogy az egyetemen letett vizsgák beszámíthatók legyenek a 17 szakmai vizsga egy-egy eleme helyett. A beszámítás egyik útja az, hogy az egyetemünk a tematikák alapján kéri, hogy végzett hallgatói és az előzőkben említett posztgraduális képzésben résztvevő kollégák, miután megszerzik a BKE diplomáját, egyöntetűen vizsgamentességben részesüljenek a PM által kinevezett vizsgabizottság által elfogadott tárgyakból. A másik lehetőség pedig az, hogy személyesen kérvényezi a hallgató a már letett vizsgája alapján a felmentést.

1. tábla A BKE Aktuárius szakirány tantárgystruktúrája

A tantárgy megnevezése (kötelező tárgyak)	7.	8.	9.	10.	Számon- kérés
	félévi összóraszám				
1. Életbiztosítás	48(24)	–	–	–	Koll.
2. Pénzügyi számítások	48(24)	–	–	–	Gy. j.
3. Biztosítástan	–	24(24)	–	–	K
4. Kárstatisztikai elemzés	–	24(0)	–	–	K
5. Nem-életbiztosítás	–	24(24)	–	–	K
6. Vállalati pénzügyek II.	–	–	24(0)	–	K
7. Szakszeminárium	–	–	24(0)	24(0)	A, Gy. j.
8. Viszontbiztosítás	–	–	24(24)	–	K
9. Nyugdíjrendszerek	–	–	–	24(24)	K
10. Eredményelszámolás	–	–	–	12(12)	K
11. Biztosítási jog	–	–	–	12(12)	K
<i>Osszesen</i>	96(48)	72(48)	72(24)	72(48)	

(A főszaak óraszámait zárójelben a mellékszakirányos óraszámok követik.)

A BKÉ-n folyó aktuáriusképzés szerkezete és szervezeti rendje természetesen nem lezárt. Mindenekelőtt elemezni kell végzett hallgatóink szakmai beilleszkedését. Csupán három év telt el azóta, hogy beindítottuk az aktuárius szakirányt, s az 1995-96-ös tanévben kaptak először hallgatók olyan diplomát, amely aktuárius szakirány elvégzését igazolja. Három év nem nagy idő egy szakirány életében. "Perdöntő" tanulságokat levonni az oktatásról aligha lehet, mint ahogy végzett hallgatóink "piacképességét" megítélni még korai lenne, de természetesen folyamatosan értékeljük a tapasztalatokat. Az

eddigiek azonban már mindenképpen igazolják a képzés beindításának indokoltságát. A szakmai tapasztalatok és a már idézett jogszabályi követelmények alapján körvonalazódik a graduális és a posztgraduális aktuáriusképzés összehangolt szerkezete. Egyetemünk nyitott: kész kiszélesíteni és stabilizálni az egyetemközi együttműködést is, a szakmailag indokolt munkamegosztás fenntartása mellett.

Irodalom

1. Mike Shelley: Results of Questionnaire Groupe Consultatif — Workshop in Dublin 3/4 September 1992. (Jegyzet)

A REVIVING PROFESSION AND GRADUATE COURSE — THE ACTUARY

The paper gives a survey on profession and training of actuaries. The word "actuary" has different meaning in Europe according to the results of questionnaire presented in 1992. The French definition is the widest one in Europe: Actuary is a "specialist specifically trained in mathematics, economics, laws, statistics and finance, in order to be able to solve the main technical and management problems encountered in dealing with operations such as: insurance, pension funds, employee benefits, banking, finance, investment, social security." After graduation young actuaries have to continue education and training to pass exams for an actuarial qualification. National associations of actuaries are responsible for the content and level of actuarial training. Hungarian legislation requires appointed actuary for life insurance and pension scheme. The statutory rule of actuaries will be passed this year. The Budapest University of Economic Sciences has introduced actuarial major and minor in 1994. The subjects taught in the fourth and fifth years are adequate to meet European standards. The Department of Operation Research intends to maintain the high education standards necessary for the profession.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Beszámoló a IV. Szakértői Konferenciáról
(Mátrafüred, 1996. október 16-18)

A Konferenciát október 16-án délután 4 órakor Meszéna György, a GMT elnöke nyitotta meg egy rövid történeti áttekintéssel, amelyet két előadás követett.

Az első előadó, Éltető Ödön (KSH) *Nőtt-e a keresetek egyenlőtlensége a rendszerváltás óta?* c. előadásában nagyon is aktuális kérdésre próbált választ adni. Az 1991 január és 1996 május közötti időszakban mért bruttó és nettó havi reálkeresetek alakulását vizsgálta. Kitért több módszertani problémára, és azok megoldásaira. Végül kísérletet tett a meglepő eredmények interpretálására.

Simonovits András (MTA KTI) jól felépített, érdekes előadása Molnár György-Simonovits András *Várakozások, stabilitás és működőképesség az együtt élő korosztályok egy realista modelljében* c. dolgozatára épült. Az előadó megvizsgálta az együtt élő korosztályok (OLC) modelljét, amelyben minden időszakban a különböző korú szereplők előrejelzéseket tesznek az életük végéig bekövetkező kamattényezőkről és a hátralevő fogyasztási pályájuk hasznosságát maximalizálják a zero várható örökség feltevése mellett. A szerzők arra a következtetésre jutottak, hogy racionális várakozás melletti dinamika működésképtelen, míg a naiv várakozások melletti dinamika tág környezetben működőképes.

Második nap hallhattuk Bod Péter (MTA Matematikai Kutató Intézet) nagyon időszerű előadását a *Társadalombiztosítási nyugdíjrendszerek lehetséges finanszírozási modelljeiről*, amellyel kapcsolatban többen tettek fel kérdéseket az előadónak.

A konferencia szervezőbizottsága most először tette lehetővé a PhD képzésben résztvevő felsőbb éves hallgatónak, hogy előadással jelentkezhesenek. A konferencián szereplők többsége talán nem véletlenül pénzügyi modellezéssel foglalkozott.

Katits Etelka (JPTE, Pécs) *Vállalati tőkefinanszírozási modellek*

Morzsa Judit (Magyar Nemzeti Bank) *Nemzetközi tőkepiaci árfolyamok modellje*

Pauler Gábor (JPTE-KTK) *Fuzzy-neurális modellfüggetlen becslési rendszerek használata a banki hitelezés döntéstámogatásánál*

Rappai Gábor (JPTE, Pécs) *Állandó-e a bankok haszna?*

Somogyi Gábor (JPTE, Pécs) *A kamat, a jelenérték és a kölcsöntörlesztés optimalizálása.*

Hasznos volt az ifjú előadók bemutatkozása a szakmai közönség előtt.

A konferencia harmadik napján nagy sikert aratott Tarján Tamás (MTA KTI) előadása *Az OECD országok gazdasági fejlődése a XX. században Jánossy elmélete és Maddison adatai alapján.* Angus Maddison [1995] tanulmánya a modern kapitalizmus gazdasági fejlődését írja le 1820-tól napjainkig. Ezt az időszakot 5 fő időszakra bontva tárgyalja. Földünk 56 országának adatait használja fel, 7 földrajzi régió szerint felosztva azokat. A mind ez ideig páratlan vállalkozás nem foglalkozik a jövő-felvázolásával. Tarján Tamás megvizsgálta a Jánossy trendvonal-elmélet érvényességét a Hetek Csoportjára (G7), az Európai Unió országaira és az OECD országok csoportjára. Azt találta, hogy a Jánossy-féle trendvonalas módszer és annak verifikálásához alkalmazott töröttvonalas illesztés (lásd Tarján [1994]) maga jelöli ki a fordulópontokat a fejlődési pályán.

A konferenciát az SPSS Partner Bt. támogatta. A második napon Basa Magdolna egy számítógéppel szemléltetett előadást tartott az SPSS legújabb programcsomagjairól és azok felhasználási lehetőségeiről.

A jól sikerült konferencia végén Meszéna György, a GMT elnöke az 1997-ben rendezendő Magyar Operációkutatási Konferencián történő viszontlátás reményében búcsúzott el a résztvevőktől.

Horváth Gézáné