Szigma, XXVIII. (1997) 1–2.

A LEONTIEF-MÁTRIXOK MÁSODIK SAJÁTÉRTÉKÉRŐL[1]

BRÓDY ANDRÁS
MTA Közgazdaságtudományi Intézet

1. Bevezetés

Leontief és Neumann modellekkel dolgozva feltűnt, hogy az egyensúlyi pálya kiszámítása nagy rendszerekben kevesebb mátrixszorzást igényel. Ezért vizsgáltam e mátrixok szubdomináns sajátértékét, mivel ez határozza meg a konvergencia sebességét.

Bodewig (1959) az ilyen iterációt elemezve abból indult ki, hogy bármely $\mathbf{v}$ vektor leírható az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorainak lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n \ . \tag{1}$$

A kombinációban az összes sajátvektor egységnyi koefficienssel szerepel, ez a sajátvektorok hosszának szabad megválasztása miatt mindig elérhető. (Feltettük, hogy a mátrix diagonalizálható, azaz szimpla szerkezetű, és a $\mathbf{v}$ vektornak valóban minden sajátvektor irányában van komponense).

Ha most k-szor iterálunk, akkor a szorzat az alábbi alakot ölti

$$\mathbf{A}^k\mathbf{v} = \lambda_1^k\mathbf{x}_1 + \lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n^k\mathbf{x}_n \ , \tag{2}$$

ahol λ a megfelelő vektorhoz tartozó sajátérték. A sajátértékeket abszolút értékben csökkenő nagyságrendben indexeltem, az első index a legnagyobb sajátértékhez tartozik. λ_1 az egyszerű újratermelést leíró Leontief mátrix esetében egységnyi nagyságú. Frobenius tétele alapján ehhez és csak ehhez tartozik teljesen pozitív sajátvektor. Ez szabja meg az egyensúlyi termelés arányait.

Ha növeljük az iterációk számát, akkor a többi sajátérték hatványai egyre jobban eltörpülnek a legnagyobb sajátérték hatványaihoz képest. A többi sajátvektorból származó befolyás egyre kevésbé "zavarja" az egyensúlyi megoldást, amely így egyre pontosabbá válik. Az iteráció aszimptotikusan stabil.

[1] Az OTKA 15.345 szám alatt támogatott kutatása. Köszönetet mondok Kőrösi Gábor, Molnár György és Simonovits András kollégáimnak, valamint az Economic Systems Research két ismeretlen referensének értékes észrevételeikért.

A szükséges iterációk számát nyilván a szubdomináns sajátérték szabja meg, mert ez tűnik el a leglassabban a számítás folyamán.

Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy az iteráció, tehát a

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k \tag{3}$$

művelet annál gyorsabban vezet eredményhez, mennél kisebb a második sajátérték az elsőhöz képest. A konvergencia geometriai és sebességét a geometriai sor quotiense adja meg. Mennél közelebb van ez zérushoz, annál gyorsabb a konvergencia.

Ha például a mátrix rangja 1, tehát ha a mátrix egyetlen diádból áll, akkor az összes "kisebb" sajátérték zérus. Ilyenkor egyetlen szorzás azonnal szabatosan megadja a keresett vektort. Ez a lehető leggyorsabb konvergencia, amit el lehet képzelni. Azt szeretném megmutatni, hogy ha egy pozitív és véletlen számokkal kitöltött mátrix sorainak és oszlopainak száma növekszik, akkor struktúrája határértékben egyetlen diád felé tart, és ezt a diádot a mátrix bal- illetve jobboldali pozitív sajátvektora határozza meg.

2. A két legnagyobb sajátérték viszonya

Tekintsük az $n \times n$ méretű $\mathbf{A}$ mátrix oszlopait olyan n elemű független mintáknak, amik egy nemnegatív és folytonos valószínűségi változó eloszlásából erednek. Legyen a változó várható értéke $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mu$ és szórásnégyzete $\sigma^2 = \mathbf{E}\big((\mathbf{x} - \mu)^2\big)$.

Minden egyes minta (oszlop) szórása $\sigma\sqrt{n}$, az elemek összegének (az oszlop összegének) várható értéke pedig $n\mu$. E két érték hányadosa $\sigma\sqrt{n}/n\mu = \sigma/(\mu\sqrt{n})$. Ez a hányados tehát a mintavétel ismert szabálya szerint n növekedtével zérushoz tart. A minta elemszámát növelve a minta átlaga az eloszlás várható értékéhez konvergál. Ha a minta elemszáma végtelenné válik, akkor teljesen "lefedi" az eloszlást. Ekkor a minta átlaga és az eloszlás várható értéke azonossá válik.

Ha egy nemnegatív mátrix oszlopösszegei egyenlőek, akkor ez az összeg azonos a mátrix legnagyobb sajátértékének nagyságával. Véletlen elemekből álló mátrixunk oszlopösszegei azonban nem egyenlőek egymással, amíg véges nagyságú a mátrix. Várható értékük mégis azonos és $n\mu$ nagyságú. Mivel egy nemnegatív mátrix legnagyobb sajátértéke mindig a legnagyobb és a legkisebb oszlopösszeg között van, ezért ez a várható érték jó becslést ad erre a sajátértékre.

A mátrix n növekedtével egyre nagyobbá válik. Elemeinek összege az $n^2\mu$ értékhez tart, az oszlopösszegek várható értékének n-szereséhez. Ennek az n számú mintából álló "hipermintának" a szórása $n\sigma$. Mindkét érték végtelenné válik, de arányuk most már n "sebességgel" tart zérushoz. Minden oszlopösszeg $\sqrt{n}$ értékével tart saját várható értékéhez, és az oszlopösszegek összege újabb $\sqrt{n}$ "sebességgel" tart a várható $n^2\mu$ értékhez. A legnagyobb sajátérték becslése az oszlopösszegek várható értékével tehát egyre "javul" és a végtelenben teljesen szabatossá válik.

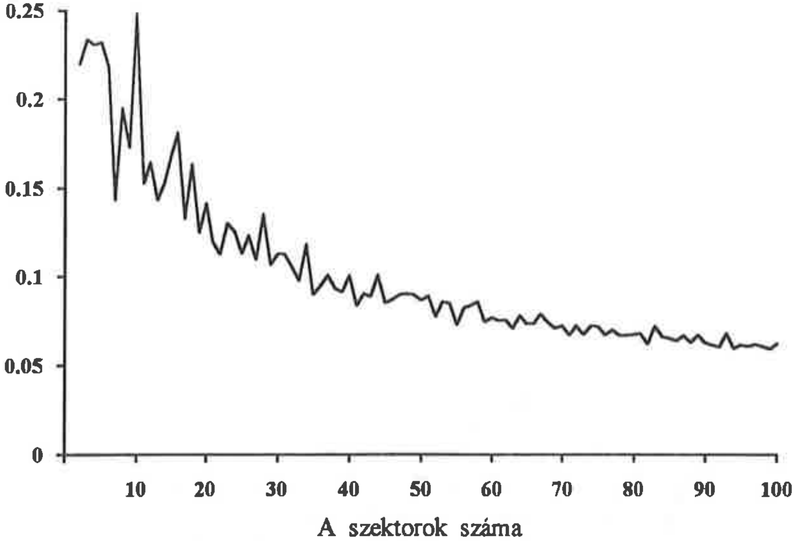
Válasszunk most le az eredeti $\mathbf{A}$ mátrixból egy olyan diádot, amelynek minden eleme egyenlő az alapul vett x valószínűségi változó $E(\mathbf{x}) = \mu$ várható értékével. Ami — negatív és pozitív előjelekkel — megmarad, az nem más, mint a mátrix egyes elemeinek eltérése a várható értéktől. E maradékmátrix legnagyobb sajátértékére (amely az eredeti mátrix szubdomináns sajátértéke) jó becslést ad az egyes oszlopokban található abszolút eltérések összege. A valószínűségi változó ingadozásának ez a mértéke, amelyet Rényi várható eltérésnek nevezett (i. m. 298) általában kisebb, és legfeljebb akkora, mint a változó szórása. A mátrix szubdomináns és domináns sajátértékének *aránya* ezért közel lesz a szórás és a várható érték hányadosához, a $\sigma\sqrt{n}/n\mu = \sigma/(\mu\sqrt{n})$ értékhez. (Mivel a várható eltérés nem haladhatja meg a szórás mértékét, e hányados esetleg valamelyest túlbecsüli a második sajátérték viszonylagos nagyságát.) A két sajátérték aránya ezért a zérushoz tart n növekedtével.

Míg egy kis, mondjuk 3×3 nagyságú mátrix esetében néha 9 - 10 lépésre is szükség lehet négy tizedesnyi pontosság eléréséhez, addig egy $10^3 \times 10^3$ mátrix minden lépésben 1-2 újabb megbízható jegyet ad. A $10^6 \times 10^6$ mátrix, amely már kezdi leképezni a valóságban található termékek és szolgáltatások tényleges bőségét (vagy, ha úgy tetszik, a piac szereplőinek valóságos számát) esetleg már egyetlen szorzás után megadja ezt a pontosságot. Az meglehetősen biztos, hogy a gyakorlatban tapasztalható maximálisan 10-20 százalékos egyensúlyhiányt, "hibát", már egyetlen iteratív lépés is jelentéktelenné és elhanyagolhatóvá tesz.

Ellenőrizzük a következtetést számítógépes szimulációval. Tegyük fel, hogy a mátrix elemeit a $(0, 1)$ intervallumban egyenletesen eloszló valószínűségi változók adják. A mátrix legnagyobb sajátértéke ekkor körülbelül $n/2$, szubdomináns sajátértéke pedig, mivel az eloszlás szórása $1/(2\sqrt{3})$, legfeljebb $\sqrt{n}/(2\sqrt{3})$ lesz. A két érték aránya tehát $1/\sqrt{3n}$. (Ha a véletlen mátrixot egységnyi legnagyobb sajátértékre "normáljuk", mint Leontief-mátrixot, akkor az utóbbi érték ennek szubdomináns sajátértékét adja meg.)

Az 1. ábra mutatja a számítógépi szimuláció adatait. 100×100 mátrixig bezárólag számítottam ki a fenti véletlen mátrix két legnagyobb sajátértékének arányát.

1. ábra: A domináns és szubdomináns sajátérték aránya



Figyeljük meg, hogy a tapasztalt ingadozás az elméleti érték körül szintén csökken, mégpedig (ahogyan azt az elmélet előírja) szintén zérushoz tart $1/\sqrt{n}$ értékével.

Ez talán túlságosan is optimista becslés, mert a Leontief mátrixok koefficienseinek eloszlása nem közelíthető meg jól az egyenletes eloszlással. A gyakorlati mátrixokban igen sok a kicsi, zérushoz közeli elem, és csak szórványosan mutatkozik néhány nagyobb, a tíz százalékot meghaladó koefficiens. A tényleges eloszlást jobban leírják a zérus várható értékű és $1/n$ szórású normális eloszlásból vett és négyzetre emelt változók. E valószínűségi eloszlás várható értéke értelemszerűen $1/n$ (tehát az alapul vett eloszlás szórása) szórása pedig éppen kétakkora. Ez esetben is zérushoz tart a két sajátérték aránya, csak valamivel lassabban. Arányuk elméleti értéke ebben az esetben $2/\sqrt{n}$ lesz.

3. Összefoglalás

A piac ereje méretében van. A nagyobb terjedelmű piac gyorsíthatja a mennyiségi alkalmazkodást. Ennek okát végső fokon a centrális határeloszlás tétele adja meg. Bármilyen eloszlások összege a normális eloszlás felé tart.

Az $\mathbf{x}' = (\mathbf{A} - \mathbf{1})\mathbf{x}$ differenciálegyenlet, ha $\mathbf{A}$ nemnegatív és legnagyobb sajátértéke egységnyi, aszimptotikusan stabil. Minden sajátértéke negatív, a kereslet és kínálat egyensúlyát adó zérus sajátértéken kívül. Ebből azonban hiba volna a piac hasonlóan aszimptotikusan stabil viselkedésére következtetni. A nyereséget leíró $\mathbf{p}(\mathbf{1} - \mathbf{A})$ szorzat például már nem "stabil", mert az $\mathbf{A}$ mátrix lehetséges negatív sajátértéke miatt az $(\mathbf{1} - \mathbf{A})$ mátrixnak egynél nagyobb sajátértéke is lehet, sőt általában szokott is lenni. Ekkor a differenciál- és differencia-egyenlet egyaránt destabilizáló, mert nem az egyensúly felé vezet.

Az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb negatív sajátértékét is vizsgálni kellene. Tapasztalatom szerint az ehhez tartozó vektor a folyó- és a tőkeráfordítások egyenlegét adja meg, ahol a munkaráfordítás is az utóbbiak közé kerül, mintegy emberi tőkeként. Matematikailag itt talán a nagyobb és a kisebb elemek különbsége a döntő.

Valószínűségekről lévén szó, óvatosságra kell inteni. Ha az alapul vett eloszlásnak nincs, vagy nem véges a várható értéke és szórása (mint például a normális eloszlás reciprokának, vagy a Pareto eloszlásnak, bizonyos paramétertartományokon kívül), akkor a fenti gondolatmenet nem alkalmazható. Nem lesz szabatos akkor sem, ha a mátrixnak sajátos és maradandó struktúrája van (például, ha a mátrix ciklikus). Végül pedig, mint minden ilyen következtetés, nem az egyes, hanem nagyobb számú esetre, az előforduló esetek átlagára vonatkozik.

Irodalom

1. BODEWIG, E. (1959) Matrix Calculus. (Amsterdam, North-Holland).
2. FROBENIUS, G. (1908) Über Matrizen aus positiven Elementen. Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik. pp. 417–476.
3. RÉNYI, A. (1954) Valószínűségszámítás. (Budapest, Tankönyvkiadó).

ON THE SECOND LARGEST EIGENVALUE OF LEONTIEF MATRICES

The relation of the dominant and subdominant eigenvalue of nonnegative random matrices is inspected. This relation determines the speed of convergence of the power method, used to compute the equilibrium eigenvector. It is found that the first and second moment of the random distribution (that is: the mean and the dispersion) asymptotically approximate these eigenvalues. Under fairly general conditions this relation tends toward zero if the size of the matrix increases. Therefore the larger the matrix the faster the convergence.

RELATÍV DEPRIVÁCIÓ ÉS SZEGÉNYSÉG

A szegénység depriváltságérzékeny mérése

HAJDU OTTÓ
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

1. Bevezetés

Mivel a szegénység nemcsak az egyének, hanem a társadalom számára is teher, ezért a jövedelmi eloszlás számszerű jellemzése során megkülönböztetett figyelmet kell szentelnünk a szegénység társadalmi szintű mértékének és összetevőinek (kiterjedtségének, intenzitásának, struktúrájának), valamint a szegénység időbeli, területi, társadalmi rétegek, családtípusok stb. szerinti összehasonlításának is. További kérdések, hogy a szegénység jelenléte milyen mértékben csökkenti a társadalmi jólétet, illetve, hogy a szegénység eliminálása mekkora erőfeszítést igényelne a társadalomtól. A szegénység egzakt jellemzése tehát tömör, "beszédes" jelzőszámok használatát is igényli, amely mértékek a szegények létszámaránya és átlagos jövedelmi szintje mellett a jövedelmi eloszlás struktúráját, a jövedelmek szóródását is figyelembe kell, hogy vegyék. Alapvető követelmény, hogy egy ilyen jelzőszám érzékeny legyen a szegények jövedelmeinek az egymáshoz való viszonyában történt elmozdulásokra, s így a szegények által a kevésbé szegények körével szemben érzett relatív depriváltság változására is.[1] Megközelítéstől függően azonban korántsem egyértelmű, hogy a szegények jövedelmi struktúrájának a megváltozása a relatív depriváltságot növelő, vagy csökkentő jellegű. A szerző idézett tanulmányában ugyanis rámutatott, hogy bizonyos helyzetekben a *mindenki máshoz* való viszonylatban értelmezett *egyenlőtlenséget* egyértelműen növelő strukturális változás mellett a társadalmi szintű, de csak egy szűkebb referencia csoporttal szemben értelmezett relatív depriváltság *globális* érzete csökkenhet. Definiálhatunk tehát relatív deprivációs mérőszámot, mely adott szituációban együtt mozog az egyenlőtlenségi mértékkel, és másikat, mely ugyanabban a szituációban — elvileg helyesen — *ellentétesen* alakul. A relatív depriváltságra érzékeny szegénységi index tehát konfliktusba kerülhet az

[1] A relatív depriváció érzete egy referencia csoporttal való összehasonlításban, adott javaktól való megfosztottságból ered. Ismérvei a későbbiekben ismertetésre kerülnek. Fogalmát részletesen lásd Hajdu(1996).

egyenlőtlenségérzékeny követelményekkel attól függően, hogy milyen típusú deprivációs mérőszámot alkalmazunk a szegények jövedelmi szóródásának a jellemzésére. A tanulmány célja, hogy a szegénység számszerűsítését szolgáló statisztikai mérőszámok konstruálásának módszereit, elvi, axiomatikus megalapozását rendszerbe foglalva — a relatív deprivációra való érzékenység újszerű megközelítésére építve — bővítse a rendelkezésre álló mérőszámok körét. Ennek megfelelően a tanulmány elsőként áttekinti a szegénységi mérőszámokkal szemben támasztott általános követelményeket, majd a mutatószámok szerkesztésének elveit keretbe foglalva, egy újszerű axiómából kiindulva néhány újólag bevezetett szegénységi indexet illeszt e keretbe.

2. Az általános szegénységi mérték

A szegénység *átfogó*, társadalmi szintű mérése egy *identifikálási* és egy *aggregálási* lépést foglal magában. Egyrészt ki kell jelölnünk a népességen belül a *szegényeket*, majd az így azonosított személyek egyedi szegénységi jellemzőit aggregálnunk kell egy tömör szegénységi *mérőszámban*.

Tekintsük az $i = 1, 2, \ldots, n$ személyből álló társadalmat, melyben az i egyén $Y_i \geq 0$ jövedelemmel rendelkezik, és a jövedelmekre vonatkozó rögzített k szegénységi küszöb valamennyiükre nézve adottság.[2] A szegények közé sorolunk ekkor minden olyan személyt, akinek a jövedelme nem haladja meg a szegénységi küszöböt. Ha a teljes népesség rendezett Y jövedelmi vektora

$$Y = (Y_1 \leq \ldots \leq Y_i \leq \ldots \leq Y_n)',$$

akkor a szegények körét a $\pi(Y, k)$ halmaz, röviden π, míg a szegények számát p jelöli:

$$i \in \pi(Y, k) \mid Y_i \leq k \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Az *általános* szegénységi mérték a népesség Y jövedelemeloszlásához adott k szegénységi küszöb mellett rendelt $P(Y, k)$ transzformáció, mely a szegénység szintjét egyetlen számértékkel hivatott mérni. Elvárásunk a szegénységi mutatóval szemben, hogy tükrözze a szegénység három fő összetevőjében, nevezetesen: (i) a szegénység *kiterjedtségében*, (ii) a szegénység *intenzitásában* és (iii) a szegények jövedelmi *szóródásában* bekövetkezett változásokat, miközben értéke zérus, ha nincsenek szegények a társadalomban, és 1, mikor a

[2] A szegénységi küszöb meghatározásának módszertani problémáival e tanulmány nem foglalkozik, ezért túllépve e kérdésen az előre rögzített küszöbértéket adottnak feltételezzük. A következőkben tárgyalásra kerülő szegénységi mértékek esetében a szegényeket "objektív" jellegű módon e küszöbérték alapján különítjük el a nem szegényektől. Mindazonáltal leszögezzük, hogy teljesen objektív jellegű elhatárolás nem létezik.

társadalom minden tagjának a jövedelme zérus:

$$0 \leq P(Y,k) = f(p,n,\bar{Y}_\pi,\sigma_\pi) \leq 1 \quad (1)$$

ahol a p/n arány a szegénység kiterjedtségét, a szegények

$$\bar{Y}_\pi = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_i$$

átlagos jövedelme pedig (a küszöbérték viszonylatában) a szegénység intenzitását jellemzi, míg σ_π a szegények jövedelmi eloszlásának a szóródását jellemző paraméter.[3]

A szegénységi mérőszámok viselkedésével szemben támasztott követelményeket *axiómák* formájában rögzítjük. Ezen axiómák olyan ésszerű elvárások, melyek nevezetes jövedelmi változások nyomán *ceteris paribus* a szegénységi mutató konzekvens növekedését, csökkenését, illetve szinten maradását követelik meg. A szakirodalomban kikristályosodott főbb axiómák az alábbiak.[4]

Anonimitási axióma: Ha az X jövedelemeloszlás az Y eloszlás permutációja, akkor $P(X,k) = P(Y,k)$ teljesüljön.

Népesség-szimmetria axióma: Ha két, vagy több azonos népességet egyesítünk, akkor a szegénység mértéke ne változzon.

Függetlenségi axióma:[5] A nem szegények jövedelmeiben történő olyan változások esetében, melyek a szegények körét és jövedelmeit nem érintik, a szegénységi mérőszám értéke ne változzon.

Szegényarány axióma: A szegénységi mérték vegye figyelembe a szegényeknek a népességen belüli részarányát.

Monotonitási axióma: Ceteris paribus, valamely szegény személy jövedelmében bekövetkezett csökkenésnek a szegénység mértékét növelnie kell.

Transzfer axióma: Ceteris paribus, valamely szegény jövedelméből adott nagyságot bármely másik, tőle gazdagabb személyhez átcsoportosítva, a szegénységi mértéknek növekednie kell.

Gyenge transzfer axióma: Ceteris paribus, valamely szegény jövedelméből adott nagyságot egy bármely tőle gazdagabb személyhez átcsoportosítva a szegénységi mértéknek növekednie kell, ha ez a transzfer közben nem csökkenti a szegények számát.

Transzferérzékenységi axióma: Ceteris paribus, valamely szegénytől egy tőle gazdagabbhoz történő, rögzített nagyságú jövedelmi transzfer hatására a

[3] A π alsó index a továbbiakban azt jelzi, hogy az adott jellemző a szegények körére vonatkozik.

[4] Az alábbiakban ismertetésre kerülő axiómák természetesen nem merítik ki az axiómák teljes körét, mivel egy újólag bevezetett szegénységi mérték létjogosultságát általában az adja, hogy valamilyen újszerű axiómának tesz eleget, vagyis axiómatikusan megalapozott.

[5] Eredetileg: "Focus axiom".

szegénységi indexben bekövetkezett növekménynek a transzfert adó jövedelmi szintjének növekedésével csökkennie kell.

Dezaggregálási axióma: Csoportokra bontott népesség esetén a szegénységi mérték a csoporton belüli szegénységi mértékek eredője legyen.

Látható, hogy a szegénységi, a monotonitási, a transzfer és a transzferérzékenységi axiómák az (1) általános követelmények megfelelői.

Annak az igénynek a teljesítését, hogy a P mérőszám egyidejűleg megfeleljen mind a szegényarány-, mind a függetlenségi axiómának, az Y jövedelmi eloszlás alkalmas "korrekciója" teszi lehetővé. E korrigálás két alapvető módja az eloszlás "*csonkolása*", illetve "*cenzorálása*".[6] A szegénységi küszöbnél csonkoltnak mondjuk az Y_π eloszlást, ha az Y_i jövedelmek közül csak a "k" küszöbnél nem nagyobb jövedelmeket vesszük figyelembe: $Y_\pi = (Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_p)'$. Cenzoráltnak mondjuk ezzel szemben az y eloszlást, ha a "k" küszöbnél magasabb jövedelmeket magával a küszöbértékkel *helyettesítjük*:

$$y_i = \min(Y_i, k) \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{2}$$

Az általános P szegénységi mérőszámhoz rendelt konkrét formula vagy a csonkolt, vagy a cenzorált eloszlások használatán alapulhat. A csonkolt eloszlások használata esetén P explicite tartalmazza a szegények arányát, a cenzorált eloszlás viszont ezt implicite magában foglalja.

Míg a szegénység intenzitására való érzékenység követelményét a monotonitási, addig a *szóródásra* való érzékenységét a transzfer és a transzferérzékenységi axiómák rögzítik. Ez utóbbi axiómák ugyanis egy regresszív, tehát az egyenlőtlenséget növelő transzfer eredményeképpen a szegénységi index értékének a növekedését várják el különböző, a transzferben érintettek rangpozícióitól függő mértékben.[7]

3. Szegénység, jólét, depriváció, egyenlőtlenség

Rögzített k szegénységi küszöb mellett, valamely $i \in \pi$ személy jövedelmének a küszöbtől való

$$g_i = k - Y_i$$

eltérését szegénységi résnek nevezzük, amely réseket a rendezett eloszlásra vonatkozóan a $g = (g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_p)'$ vektorba foglaljuk. Mivel egy kiragadott személy szegénységét a küszöbtől való eltérésével — *abszolút* jellegű

[6] Az angol nyelvű terminológiában "truncated" és "censored distribution".

[7] Regresszív a jövedelmi transzfer, ha egy adott pozitív jövedelmi tételt valamely személytől egy másik, tőle gazdagabb egyénhez csoportosítunk át, növelve ezáltal közöttük az egyenlőtlenség mértékét.

deprivációjával — jellemezhetjük a legjobban, ezért g_i a szegénység aggregált mérése során alapvető jelentőséggel bír. Ha az egyedi szegénységi rések összegzése útján képezzük a $\sum_{i=1}^{p} g_i$ *aggregált* szegénységi rést, akkor e mutató arról tájékoztat, hogy mekkora összegű jövedelem szétosztásával lehetne valamennyi szegényt a küszöb szintjére emelni. E jövedelem egy szegényre jutó értékét az *átlagos* szegénységi rés számszerűsíti:

$$\bar{g} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i .$$

Az egyedi, aggregált és átlagos szegénységi rések vizsgálatán túlmenően ugyanakkor az is természetes, hogy valamely személy szegénysége nem ítélhető meg függetlenül attól, hogy mások mennyire szegények. Ugyanis adott szegénységi rés mellett is valakit relatíve szegényebbnek tarthatunk, ha az összes többi szegény az övénél kisebb, és kevésbé szegénynek, ha az övénél nagyobb rést kénytelen elviselni. A szegénység számszerűsítése tehát nemcsak az abszolút, hanem a *relatív* depriváltság figyelembevételét is igényli.[8]

A relatív deprivációs megközelítés lényege, hogy az egyének nem a társadalom egészéhez, hanem inkább valamely *referencia* csoporthoz viszonyítják magukat. Ha a relatív depriváció tárgya magának a jövedelemnek egy szintje, akkor az i személy deprivált minden olyan j egyénnel szemben, aki legalább Y_i jövedelmet birtokol.[9] Ezt a relációt a későbbiekben az

$$i \preceq (j \neq i) \mid Y_i \leq Y_j \tag{3}$$

szimbólum jelöli. A "referencia" csoport rögzítése után a szegények relatív depriváltságának számszerű jellemzésére többféle mód is kínálkozik.

A *jóléti* alapú megközelítés szerint a szegények *aktuális*, aggregált R_π relatív depriváltsága a W_π aggregált jólétüknek – az adott összjövedelmük mellett - *maximálisan* elérhető $W_{\pi_{\max}}$ jóléti szinttől való elmaradása:[10]

$$R_\pi = W_{\pi_{\max}} - W_\pi . \tag{4}$$

A szegények jövedelmi egyenlőtlenségét a *Dalton* nevéhez fűződő

$$D_\pi = 1 - \frac{W_\pi}{W_{\pi_{\max}}} . \tag{5}$$

---

[8] A relatív depriváció az egyenlőtlenségnél tágabb jelenség, melynek érzete adott jószágtól való megfosztottságból fakad. Ennek *Runciman*-féle kritériumai a következők: (1) nem rendelkezik az illető jószággal, (2) más személyeket lát, akik ennek birtokában vannak, (3) birtokolni akarja ezt a jószágot, (4) megvalósíthatónak tartja, hogy e jószág birtokába jusson.

[9] A jelen idejű öndepriváltságot nem értelmezzük, vagyis $i \neq j$, és az azonos jövedelműekkel szembeni depriváltság mértéke zérus.

[10] Ez természetesen egy feltételes maximum, hiszen a szegények által elérhető feltétel nélküli maximális jólétet a minden szegénynek a k küszöbértéket juttató elosztás nyújtja. Az (4) általánosítás az alábbiakban ismertetésre kerülő Yitzhaki-féle mérték kiterjesztése.

mutatóval mérve a szegények relatív depriváltságára

$$R_\pi = W_{\pi_{\max}} D_\pi \tag{6}$$

adódik, ahol az aggregált relatív depriváltságot és jólétet a szegények D_π jövedelmi egyenlőtlenségének a függvényében definiáltuk. Ha az aggregált relatív depriváltságot ily módon származtatjuk, és $W_{\pi_{\max}}$ *invariáns* a regresszív jövedelmi transzferre, akkor valamely szegénytől egy kevésbé szegényhez átcsoportosított $d > 0$ jövedelmi transzfer mindig növeli R_π értékét, hiszen az egyenlőtlenség foka nő.

Tekintsük a $W(Y)$ jóléti függvények azon körét, amelyekre – adott $\sum_{i=1}^{p} Y_i$ összjövedelem mellett – $W(Y_\pi)$ a jövedelmek zérus egyenlőtlensége esetén veszi fel maximumát, vagyis a szegények rendelkezésre álló összjövedelmének egyenletes, mindenkinek az átlagos $\bar{Y}_\pi$ szintet juttató elosztása *maximálja* a szegények aggregált jóléti szintjét.[11]

Fordítsuk figyelmünket elsőként a fenti körbe tartozó

$$W(Y_\pi) = W_\pi = \sum_{i=1}^{p} w_i Y_i$$

Gini-típusú jóléti függvény felé, ahol a jövedelmek nemcsökkenő sorba vannak rendezve, a hozzájuk csatolt w_i súlyok pedig nemnövekvők. Ha ugyanekkor a szegények jövedelmi egyenlőtlenségeit a G_π *Gini*-koefficienssel mérjük, akkor a szegények relatív deprivációjának *Yitzhaki*-féle aggregált mértéke az

$$R_\pi = \bar{Y}_\pi G_\pi$$

formát ölti,[12] ahol

$$0 \le G_\pi = \frac{1}{2\bar{Y}_\pi p^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |Y_i - Y_j| \tag{7}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{p} (2p + 1 - 2i) Y_i}{\bar{Y}_\pi} \le 1 - \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Felhasználva továbbá ezen a ponton, hogy az $\bar{Y}_\pi G_\pi$ kifejezés invariáns a $g = k - Y$ transzformációra, a

$$\bar{g} G(g) = \bar{Y}_\pi G_\pi \tag{9}$$

azonosságot nyerjük, ahol $G(g)$ a szegénységi rések Gini-koefficiense. Mivel rögzített küszöbérték mellett $G(g)$ értékét a jövedelmek egyenlőtlensége és

[11] $W(\bar{Y}_\pi, \bar{Y}_\pi, \ldots, \bar{Y}_\pi) = \max$.

[12] A mérőszám tulajdonságait bővebben lásd Yitzhaki (1979).

az átlagos jövedelem befolyásolja, és egyező irányban, ezért $G(g)$ a relatív depriváció olyan mérőszáma, mely az $\bar{Y}_\pi$ jövedelmi szint növekedésével gyorsabban nő, mint $\bar{Y}_\pi G_\pi$.

Tételezzük fel ezt követően, hogy a szegények *aggregált* jólétét számszerűsítő W függvény a jövedelmek egyéni hasznosságainak az átlaga:

$$W(Y_\pi) = W_\pi = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u(Y_i) \tag{10}$$

ahol $u(.)$ a jövedelem valamennyi szegényre *közös, konkáv*, legalább háromszor differenciálható hasznossági függvénye.[13] Ekkor a Dalton-mutatót *Atkinson* módszerével a *jövedelmi* skálára konvertálhatjuk feltéve, hogy létezik egy a W formulájától függő olyan konstans, *reprezentatív* $\bar{Y}_{W_\pi}$ jövedelmi szint, amelyre a szegények jövedelmi eloszlásának $W(Y_\pi)$ jóléti szintje változatlan marad, ha valamennyi szegény jövedelmét ezzel az értékkel helyettesítjük.[14] Ennek felhasználásával a szegények jövedelmi egyenlőtlenségét mérő Atkinson-mérőszám:

$$A_\pi = 1 - \frac{u^{-1}(W(Y_\pi))}{u^{-1}(u(\bar{Y}_\pi))} = 1 - \frac{\bar{Y}_{W_\pi}}{\bar{Y}_\pi} \tag{11}$$

ahol $u(.)$ konkávitása miatt $\bar{Y}_{W_\pi} \leq \bar{Y}_\pi$ és $\bar{Y}_{W_\pi}$ meghatározása a hasznossági függvény formulájának a definiálását igényli.[15] Természetesen az Atkinson-mutatót is alkalmazhatjuk a szegénységi résekre a relatív depriváltság jellemzése érdekében. Szem előtt tartva, hogy a jólét komplementereként értelmezendő szegénységi rés esetében az alacsonyabb rés preferálandó a magasabbal szemben, *negatív* egyenlőtlenség averzió mellett a relatív depriváció mértéke:

$$-A(g) = \frac{\bar{g}_W}{\bar{g}} - 1$$

ahol $\bar{g}_W \geq \bar{g}$ a reprezentatív szegénységi rés.[16]

A fentiekkel ellentétben, ha a relatív deprivációt egy *másik elv* szerint a

$$\bar{Q}_\pi = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{i \preceq j \in \pi} \left(1 - \frac{Y_i}{Y_j}\right) \tag{12}$$

[13] $u' > 0, u'' < 0, u''' > 0$.

[14] $W(Y_1, Y_2, ...Y_p) = W(\bar{Y}_{W_\pi}, \bar{Y}_{W_\pi}, ..., \bar{Y}_{W_\pi})$.

[15] Bevezetve az egyenlőtlenséggel szembeni averzió ε paraméterét, az egyedi jövedelmek hasznosságának értékelésére Atkinson az $u(Y_i) = \frac{1}{1-\varepsilon} Y_i^{1-\varepsilon}$ függvényt javasolta, amelyből a szegények parametrikus reprezentatív jövedelme: $\bar{Y}_{W_\pi} = \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_i^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. Pozitív ε, vagyis konkáv haszonfüggvény esetében például $\bar{Y}_{W_\pi(\varepsilon=2)} = \bar{Y}_{\pi(harmonikus)}$.

[16] Ha az i szegény deprivációs függvénye $d(g_i) = \frac{1}{1-\varepsilon} g_i^{1-\varepsilon}$, akkor $\bar{g}_W = \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ és $\varepsilon \leq 0$ egyenlőtlenséggel szembeni averzió mellett például $\bar{g}_{W(\varepsilon=-1)} = \bar{g}_{(quadratikus)} \geq \bar{g}_{W(\varepsilon=0)} = \bar{g}$.

deprivációs jövedelmi hányaddal mérjük, akkor $\bar{Q}_\pi$ az aggregált relatív depriváltság *csökkenését* is jelezheti olyan jövedelmi változások mellett, amelyek esetében a deprivációt csökkentő hatások az egyenlőtlenség *növekedése* ellenére túlszárnyalják a depriváltágot növelő hatásokat.[17]

A fentieket összegezve láthatóan eleget teszünk a transzfer axiómának, ha σ_π mérésére valamely, a transzfer axiómát kielégítő E_π egyenlőtlenségi mérőszámot, vagy valamely jóléti alapú (Yitzhaki-típusú) relatív deprivációs mutatót használjuk. Ha azonban a szegények jövedelmi eloszlásában végbement változást kifejezetten a *relatív depriváció* oldaláról kívánjuk jellemezni, akkor sem a monotonitási, sem a transzfer axiómák teljesülésének követelménye nem egyértelmű, mivel a szóródás növekedése ellenére a lecsökkent jövedelemmel szembeni, és a megnövekedett jövedelem által érzett depriváltság csökken, és ez adott körülmények között összességében túlszárnyalhatja az ellentétes hatást.[18] Ha ezt a jelenséget a szegénységi mértékben érvényesíteni akarjuk, akkor olyan R_π relatív deprivációs mérőszámot kell alkalmaznunk σ_π számszerűsítésekor, amely a fenti jelenségre érzékeny.

4. A szegénység aggregált jelzőszámai

A *szegények $H = p/n$ aránya* az össznépességen belül a legegyszerűbb mérőszám, mellyel a szegénység *kiterjedtségét* átfogóan jellemezhetjük.[19] A másik gyakran használt parciális szegénységi mutató a *relatív szegénységi rés*, mely az átlagos rés normált változataként arra ad választ, hogy a szegények jövedelmei átlagosan, a szegénységi küszöb százalékában kifejezve mennyire maradnak el magától a k küszöbértéktől:[20]

$$I = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{g_i}{k} = \frac{\bar{g}}{k} = 1 - \frac{\bar{Y}_\pi}{k} = 1 - \bar{r} \tag{13}$$

ahol

$$\bar{r} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{Y_i}{k} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} r_i \tag{14}$$

és r_i az i szegény *küszöbarányos jövedelme.*

I azt méri tehát, hogy a szegények mennyire szegények, vagyis a szegénység *intenzitásának* egyféle jellemzésére alkalmas.

[17] A mutatónak a relatív depriváció mérésében való bevezetését és e jelenségre való érzékenységének elemzését lásd Hajdu(1996).

[18] A regresszív transzferek problémájának a relatív depriváció oldaláról való közelítését lásd Hajdu(1996).

[19] "Head count ratio"

[20] "Income gap ratio"

A fentiekből kitűnik, hogy I és H olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, amelynek a másik nem felel meg. Kézenfekvőnek látszik tehát a két mértéket valamilyen kombinációban alkalmazni. Abban a speciális esetben támaszkodhatunk pusztán e két mutatóra, ha valamennyi szegény jövedelme *egyenlő*. Ilyenkor az abszolút depriváció jellemzőjeként a szegénység fokmérője lehet önmagában a

$$H \cdot I = \frac{p}{n} \cdot \frac{\bar{g}}{k} \tag{15}$$

normalizált szegénységi rés.[21]

Amennyiben a szegények jövedelmei szóródnak, úgy a szegénység fenti két dimenziója mellett elengedhetetlen a szóródásnak a figyelembevétele is. Ilyen mutatók létrehozásakor — mint arra az előzőekben már utaltunk — a jövedelmi eloszlás kétféle *transzformációjával* biztosíthatjuk, hogy az általános szegénységi index egyidejűleg megfeleljen mind a szegényarány-, mind a függetlenségi axiómának:

- Egyrészt a *csonkolt* jövedelemeloszlás alkalmazásával, ha P csak a szegények szegénységi réseinek és a szegények arányának a függvénye:

$$P = f(H, g_i \mid i = 1, ..., p).$$

- Másrészt a *cenzorált* jövedelemeloszlás alkalmazásával, ha P az egész társadalom cenzorált jövedelmeinek a függvénye:

$$P = f(y_i \mid i = 1, ..., n).$$

Szóródásérzékeny szegénységi mérőszámokat ezután az alábbi főbb elvek alapján konstruálhatunk.

1. A csonkolt jövedelemeloszlásból kiindulva a szegénységi mértéket mint a szegénységi *rések normált, súlyozott összegét* definiáljuk:

$$P_\Sigma = N \sum_{i=1}^{p} w_i f(g_i) \tag{16}$$

   ahol $g_1 \geq g_2 \geq ... \geq g_p$ és N a normálási faktor. Ez az eljárás a Sen-féle *háromlépés-eljárás*, amelynek során rögzíteni kell a w_i súlyrendszert, a szegénységi réseket kiértékelő $f(.)$ függvény formuláját, végül a normálási tényezőt. Mivel e három tényezőt úgy választjuk meg, hogy a

[21] E mutató értelme, hogy azon $n \cdot k$ jövedelemtömegnek, amely éppen elégséges a társadalom minden tagja számára biztosítani a küszöb szintjét, mekkora hányadát kellene a nem szegényektől a szegényekhez átcsoportosítani, hogy valamennyi szegény a küszöb szintjére emelkedjen.

szegénységi index megfeleljen az előre rögzített axiómáknak, ezért az ilyen típusú mutatókat axiómatikusan megalapozott mérőszámoknak nevezzük.

2. A csonkolt jövedelemeloszlásból kiindulva a másik lehetőség a szegénységi mértéket *szóródásérzékeny normalizált szegénységi résként* definiálni, mely akkor szóródásérzékeny, ha a relatív szegénységi rés szóródásérzékeny:[22]

$$P_{HI} = (HI)^{(\sigma)} = H \cdot I^{(\sigma)}. \tag{17}$$

A P_{HI} elv egyféle alkalmazását eredményezi, ha az $I^{(\sigma)}$ szóródásérzékeny relatív szegénységi rés nagysága egy $W(.)$ társadalmi jóléti függvény értékítéletén alapul: bevezetve a szegények által elérhető maximális jóléti szinthez viszonyító, minimális relatív jóléti rést számszerűsítő

$$I^{(W_{\max})} = 1 - \frac{W_{\pi_{\max}}}{u(k)} \tag{18}$$

mutatót, $H \cdot I^{(W_{\max})}$ a szegények relatív jólétében elérhető minimális veszteséget jelenti. A P_{HI} elv egyik alapvető megjelenési formája szerint a szegénységi mérték a H szegénységi aránynak és a $H \cdot I^{(W_{\max})}$ jóléti alapú normalizált szegénységi résnek a súlyozott átlaga, súlyként a szegények jövedelmi egyenlőtlenségének valamely $0 \leq E_\pi \leq 1$ mértékét és annak komplementerét használva:[23]

$$P_{H,HI} = \overline{H_{(E_\pi)}, (H \cdot I^{(W_{\max})})_{(1-E_\pi)}}. \tag{19}$$

Ha ez utóbbi elvben egyenlőtlenségi mértékként a Dalton-mutatót, az átlagoláshoz pedig számtani átlag formulát alkalmazunk, akkor a P_{HI} elv egy másik megjelenési formája szerint az $I^{(\sigma)}$ szóródásérzékeny relatív szegénységi rés nagysága a szegények tényleges relatív jóléti rését méri:

$$\begin{aligned} P_{HI^{(W)}} &= H \cdot D_\pi + H \cdot I^{(W_{\max})}(1 - D_\pi) \qquad (20) \\ &= H\left(1 - \frac{W(Y_\pi)}{u(k)}\right) = H \cdot I^{(W)}. \end{aligned}$$

A $P_{HI^{(W)}}$ elvnek a jövedelmek skáláján értelmezett, a szegények reprezentatív jövedelmi szintjén alapuló megfelelője:

$$P_{HI_W} = H\left(1 - \frac{\bar{Y}_{W_\pi}}{k}\right) = H \cdot A_\pi + (H \cdot I)(1 - A_\pi). \tag{21}$$

[22] A szóródásérzékenységre a (σ) fölső index utal.

[23] Amennyiben az egyenlőtlenség nem a szegények jövedelmeire, hanem pl. a szegénységi résekre, vagy a cenzorált jövedelmekre vonatkozik, úgy ezt $E(.)$ argumentumában föltüntetjük: $E(g)$, illetve $E(y)$. Az átlagforma rögzítése nem szükségszerű, a fölülhúzás pedig az átlagolást jelenti.

A P_{HI} elv harmadik alapvető megjelenési formája szerint a szóródásérzékeny relatív szegénységi rés értékének a relatív szegénységi réséhez való relatív, konstans viszonyát a szegénységi rések egyenlőtlensége fejezi ki:

$$P_{HIg} = H \cdot I \cdot f(E(g)) \tag{22}$$

ahol $f(E(g)) > 1$.

3. A cenzorált jövedelemeloszlásból kiindulva egyrészt definiálhatjuk a szegénységi mértéket mint a *cenzorált jövedelmek egyenlőtlenségi indexét*:

$$P_{E(y)} = E(y). \tag{23}$$

4. Másrészt képezhetjük a szegénységi mutatót, mint a *cenzorált* jövedelmek *szóródásérzékeny relatív szegénységi rését*: (i) egyfelől a jóléti függvény skáláján, (ii) másfelől a jövedelmi skálán értelmezve. A *jóléti skálán* a

$$P_{I(W)} = I^{(W)}(y) = 1 - \frac{W(y)}{u(k)} \tag{24}$$

Dalton-típusú szegénységi indexet definiálhatjuk, mely a (10) típusú jóléti függvényt alkalmazva a

$$P_{I(W)} = I^{(W)}(y) = 1 - \frac{W(y)}{u(k)} = H \sum_{i=1}^{p} \frac{u(k) - u(Y_i)}{p \cdot u(k)}$$

formát ölti, s így a szegénységi aránynak és a szegények átlagos relatív jóléti résének a szorzata.[24] Ebben az értelemben jólétérzékeny normalizált szegénységi résként is interpretálható. A mutató alapgondolata abból fakad, hogy akkor nem beszélhetünk szegénységről, ha a cenzorált eloszlásban mindenkinek a jövedelme a *küszöbértékkel* egyenlő. Ezért a szegények jólétében bekövetkezett relatív *veszteséget* méri. A *jövedelmek skálájára* az *Atkinson* módszerrel áttérve

$$P_{I_W} = 1 - \frac{\bar{y}_W}{k} \tag{25}$$

adódik, ahol $\bar{y}_W$ a teljes cenzorált jövedelemeloszlásra vonatkozó reprezentatív jövedelem.[25] Ebben a megközelítésben tehát a szegénységi

---

[24] Ekkor ugyanis a cenzorált jövedelmekre $W(y) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{p} u(Y_i) + (n-p)u(k)\right]$ — definíció szerint —.

[25] Az egyedi cenzorált jövedelmek hasznosságát $\varepsilon \geq 0, \varepsilon \neq 1$ egyenlőtlenség averzió mellett az $u(Y_i) = \frac{1}{1-\varepsilon}(\min(k, Y_i))^{1-\varepsilon}$ formulával értékelve a szegénységi mértékek egy speciális csoportjához jutunk.

mérték a cenzorált jövedelmek jólétérzékeny relatív szegénységi rése.[26]

5. A Sen-féle szegénységi index

A szegénység mérésére kifejlesztett első komplex jellegű mérőszám, mely a relatív depriváció aspektusából közelíti meg a számszerűsítés problémáját. A Sen-indexet a szegénységi rések normált, súlyozott összegeként definiáljuk az $f(g_i)=g_i$, $w_i=(p+1-i)$ és $N = 2/[nk(p+1)]$ választással:[27]

$$P_{Sen} = \frac{2}{nk(p+1)} \sum_{i=1}^{p} (p+1-i)g_i. \tag{26}$$

ahol $g_1 \geq ... \geq g_i \geq ... \geq g_p$ és p a *legkevésbé szegény* rangszámát jelöli a szegénységi rangsorban. A Sen-index *a "rangsorolt relatív depriváció"* axiómáján nyugszik, miszerint a szegénységi résekhez csatolt súly megegyezik azon szegényeknek a számával, akiknek a jövedelme nem kisebb mint Y_i, vagyis a Runciman-féle referencia csoport számosságával. Az axióma mondanivalója, hogy minél szegényebb egy szegény, annál nagyobb súllyal vegyük számításba, s így a nagyobb súllyal magasabb személyes deprivációt tudunk kifejezésre juttatni. A *nemnövekvő* sorba rendezett g_i résekhez ugyancsak *nemnövekvő* w_i súlyokat rendelő súlyrendszer biztosítja, hogy a j szegénytől az i szegényhez átcsoportosított, a relatív depriváció Yitzhaki-mértékét növelő, de a szegények számát érintetlenül hagyó jövedelmi transzfer esetén P_{Sen} értéke is nő.

A normálási tényező fenti megválasztása biztosítja, hogy ha valamennyi szegény jövedelme egyenlő, akkor $P_{Sen} = H \cdot I$ teljesül. Ekkor ugyanis a szegények közti jövedelemegyenlőtlenség zérus, és a szegénység mértékéről a normalizált szegénységi rés kellően informál.

Fölhasználva a Gini-koefficiens értékét, a Sen-index egyszerű átalakítások után a

$$P_{Sen} = H\left(I + \frac{p(1-I)G_\pi}{p+1}\right) \approx$$

---

[26] Vegyük észre, hogy a cenzorált jövedelmek Atkinson-féle egyenlőtlenségi mértéke $A(y) = 1 - \bar{y}_W/\bar{y}$. A fentiek összevetéséből kiolvasható, hogy míg a P_{I_W} mérőszám a cenzorált reprezentatív jövedelemnek a szegénységi küszöbtől való százalékos elmaradását, addig a cenzorált jövedelmek $A(y)$ egyenlőtlenségi mértéke az átlagos cenzorált jövedelemtől való százalákos elmaradást számszerűsíti.

[27] Bár a Sen-indexet a szegénységi rések normált, súlyozott összegeként definiáljuk, megfelelő átalakítással a fenti elvek többségével levezethető. Mivel a tanulmányban ismertetésre kerülő újszerű indexeket is a Sen-mutató inspirálta, ezért e mérőszámot részletesen bemutatjuk.

$$H\left(I+(1-I)G_\pi\right)=H\left(I(1+\frac{G_\pi}{I}-G_\pi)\right) \tag{27}$$

formát ölti.[28] P_{Sen} utóbbi képletéből kiolvashatjuk, hogy e mutató szerint a szegénység három fő összetevője: a szegények aránya (H), a szegénység intenzitása (I) és a szegények közötti egyenlőtlenség foka (G_π), ezért P_{Sen} (27) képletét ***komponensekre*** bontott formának hívjuk.

A komponensekre bontott forma átrendezésével nyerjük P_{Sen} *átlagformáját*, miszerint a Sen-index a szegénységi aránynak és a normalizált szegénységi résnek a súlyozott számtani átlaga, súlyként a Gini-koefficienst, és annak komplementerét használva:

$$P_{Sen}=(1-G_\pi)HI+G_\pi H.$$

Ebből következően P_{Sen} alsó és felső határai:

$$HI \le P_{Sen} \le H.$$

A Sen-mérőszám a P_{HI} elvnek megfelelően a

$$P_{Sen}=H\cdot I^{(\sigma)}_{Sen}$$

formában is írható, az alábbi módokon.

- Egyrészt a (9) és (27) formulák alapján az

  $$I^{(\sigma)}_{Sen}=I\cdot(1+G(g))$$

  helyettesítéssel a P_{HI_g} elvnek megfelelően

  $$P_{Sen}=H\cdot I\cdot(1+G(g)) \tag{28}$$

  adódik, ahol $G(g)$ a szegénységi résekből számított Gini-koefficiens.[29] Ebben a formulában is szerepet kap természetesen a szegények egyenlőtlensége, számszerűsítésekor azonban nem a jövedelmek, hanem a szegénységi rések között mutatkozó egyenlőtlenséget mérjük. Más megközelítésben tehát a Sen-mérték a relatív depriváció fokát veszi figyelembe harmadik tényezőként a szegények aránya és a szegénység intenzitása mellett, ***multiplikatív*** kapcsolatot teremtve e ***komponensek*** között.[30]

---

[28] Lásd Amartya Sen(1976): 224-225. old.

[29] Egy másik levezetést lásd: Clark-Hemming-Ulph (1981): 519.old.

[30] Vagyis ez a forma is tekinthető komponensekre bontott formulának.

- Másrészt a P_{HI} elv : követve a

$$H \cdot I_{Sen}^{(\sigma)} = H\left(1 - \frac{\bar{Y}_{w_\pi}}{k}\right)$$

formula is a Sen-indexet eredményezi a $P_{HI(w)}$ elv alapján, ha

$$\bar{Y}_{w_\pi} = \frac{\sum_{i=1}^{p} w_i Y_i}{\sum_{i=1}^{p} w_i}.$$

Végül a szegények küszöbarányos $r_i = Y_i/k$ $(i = 1, ..., p)$ jövedelmeinek a felhasználásával, a Sen-index a

$$H \cdot I_{Sen}^{(\sigma)} = H(1 - \bar{r}_w)$$

formában is írható, ahol

$$\bar{r}_w = \frac{\bar{Y}_{w_\pi}}{k}$$

az *egységnyi szegénységi küszöbhöz* viszonyítandó (súlyozott) átlagos jövedelem.

A Sen-index eleget tesz a monotonitási és a *gyenge* transzfer axiómáknak, viszont sérti a transzfer és a transzferérzékenységi axiómákat. A szegénység mérésével foglalkozó nemzetközi irodalomban több kísérlet is történt olyan mutatók kidolgozására, amelyek a Sen-mérték módosítása révén annak valamely hiányosságát hivatottak kiküszöbölni. E mérőszámokat az 1. tábla közli.[31]

Láthatóan a Hagenaars-3 mutatónak a Thon-index speciális esete a $w_i = (n+1-i)/n$ súlyokkal, vagy pl. a Takayama-index a $w_i = (2n - 2i + 1)/n$ választással.

[31] E mutatókkal a tanulmányban nem foglalkozunk. Tulajdonságaikról, jellemzőikről részletesen lásd pl. Hajdu(1997).

1.tábla: Szegénységi mérőszámok

Mutató	Formula	Elv
Anand	$kP_{Sen}/\bar{Y}$	P_Σ
Thon	$\frac{2}{nk(n+1)}\sum_{i=1}^{p}(n+1-i)g_i$	P_Σ
Kakwani$_{(q)}$	$\frac{p}{nk\sum_{i=1}^{p}i^q}\sum_{i=1}^{p}(p+1-i)^q g_i$	P_Σ
robusztus	$H^{G_\pi}(HI)^{1-G_\pi} = HI^{1-G_\pi}$	$P_{H,HI}$
Blackorby et al.	$H(1-\frac{\bar{Y}_{W_\pi}}{k}) = A_\pi H + (1-A_\pi)HI$	P_{HI_W}
Clark et al.-1$_{(\varepsilon)}$	$HI\frac{\bar{g}_W}{\bar{g}} = HI(1-A(g \mid \varepsilon<0))$	P_{HI_g}
Takayama	$G(y) = 1+\frac{1}{n}-\frac{2}{\bar{y}n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i$	$P_{E(y)}$
Foster et al.$_{(\alpha)}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(\frac{g_i}{k})^\alpha = 1-\frac{1}{nk^\alpha}\sum_{i=1}^{n}(k^\alpha-(k-y_i)^\alpha)$	$P_\Sigma, P_{I(W)}$
Clark et al.-2$^*_{(\varepsilon)}$	$1-\frac{1}{k}\left(H(\bar{Y}_{W_\pi})^{1-\varepsilon}+(1-H)k^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$	P_{I_W}
Hagenaars-1**	$1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln y_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln k} = H\left(\frac{\ln k-\ln\bar{Y}_{m_\pi}}{\ln k}\right)$	$P_{I(W)}$
Hagenaars-2**	$1-\frac{1}{k}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right) = 1-\left(\frac{\bar{Y}_{m_\pi}}{k}\right)^H$	P_{I_W}
Hagenaars-3	$1-\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i y_i}{k\sum_{i=1}^{n}w_i}$	$P_{I(W)}$

* $\varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1$

** $\bar{Y}_{m_\pi}$: a szegény jövedelmek mértani átlaga

6. Deprivációérzékeny, újszerű mérőszámok

A deprivációérzékeny szegénységi mértékek is vagy a csonkolt, vagy a cenzorált eloszláson alapulhatnak, miközben a depriváció fokára való érzékenységet *személyes*, illetve *globális* szinten is értelmezhetjük. Axiómatikusan megfogalmazva e követelményeket:

- *A gyorsuló ütemben csökkenő személyes depriváltság* axiómája szerint a jövedelmi szint növekedésével a relatív depriváltság érzetének gyorsuló ütemben kell csökkennie, vagyis egy magasabb, de még reálisan elérhető jövedelmi szint megszerzésével depriváltságunk túlnyomó hányadát el kell vesztenünk.
- A *csökkenő globális depriváltság* axiómája szerint pedig a globális depriváltság csökkenésének csökkentőleg kell hatni a szegénységi index értékére.

Tekintsük elsőként a *csonkolt* eloszlás használatának az esetét. Csonkolt eloszlásra építkezve az új index(ek)et a Sen-féle P_Σ elv alapján vezetjük be. Kiindulásképpen tekintsük a szegénységi rések

$$\Sigma_P = N \sum_{i=1}^{p} w_i g_i \tag{29}$$

normalizált, súlyozott összegét, miközben a súlyozási rendszer és a normalizálási faktor megválasztásakor az alábbi szempontok teljesülését várjuk el.

- A súlyrendszer megválasztása a *gyorsuló ütemben csökkenő személyes depriváltság* axiómáján alapul. E követelmény kielégítésére rögzített i személy esetén - többek között - a g_i szegénységi réshez csatolandó

  $$w_i = \sum_{Y_i \leq Y_j \in \pi} \frac{1}{Y_j} = \frac{1}{Y_i} + \sum_{i \preceq j \in \pi} \frac{1}{Y_j} \tag{30}$$

  súlyrendszer alkalmas, hiszen w_i mindazon szegények jövedelmeinek a súlyozott reciprokösszegét jelenti, akik legalább Y_i jövedelemmel bírnak.[32] Így egyre magasabb jövedelmi szintre kerülve a w_i súly egyre kevesebb, és hiperbolikusan csökkenő tagból áll.

[32] Vegyük észre, hogy a referencia csoport (3) szerinti meghatározásával ellentétben a fenti súlyrendszerben a w_i súly az öndeprivációt is tartalmazza, ezért értékét az i egyén jövedelmének a nagysága is befolyásolja. Ezt az a megfontolás indokolja, hogy a legkevésbé szegény rése pozitív súlyt kapjon akkor is, ha e jövedelmi szinthez csak egyedül ő tartozik.

- A normalizálási faktor meghatározásakor szintén elfogadva Sen normalizálási kritériumát, az új index értéke a normalizált szegénységi réssel egyezik meg akkor, ha valamennyi szegény jövedelme egyenlő. A (30) súlyokat a (29) alapformába írva, és csupa egyenlő jövedelmet feltételezve:[33]

$$\Sigma_P = N\frac{\bar{g}}{\bar{Y}_\pi}\frac{p(p+1)}{2} = HI = H\frac{\bar{g}}{k}$$

amelyből

$$N = H\frac{\bar{Y}_\pi}{S\cdot k} \tag{31}$$

ahol $S = p(p+1)/2$.

A (31) normalizálási tényezőt a (29) alapformába helyettesítve, és felhasználva, hogy $g_i = k - Y_i$ és a küszöbarányos jövedelem $r_i = Y_i/k$, a szegénységi mérték:

$$\Sigma_P = H\frac{\bar{Y}_\pi}{S\cdot k}\left(\sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{k}{Y_j} - \sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{Y_i}{Y_j}\right) = H\frac{\frac{\bar{Y}_\pi}{\bar{r}_{h(+)}} - \bar{Y}_\pi(1-\bar{Q}'_\pi)}{k}$$

ahol

$$\bar{r}_{h(+)} = \frac{S}{\sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{1}{r_j}} = \frac{S}{\sum_{j=1}^{p} j\frac{k}{Y_j}} \tag{32}$$

a szegények küszöbarányos jövedelmeinek súlyozott *harmonikus átlaga*[34], és

$$\bar{Q}'_\pi = 1 - \frac{1}{S}\sum_{Y_i\leq Y_j}\frac{Y_i}{Y_j}$$

a deprivációs jövedelmi hányadnak egy olyan változata, mely a jelen idejű öndepriváltságot is figyelembe veszi. Mivel a relatív depriváltság mérésekor a jelen idejű öndepriváció figyelembevételének nincs tárgyi értelme, ezért a továbbiakban $\bar{Q}'_\pi$ helyén a deprivációs jövedelmi hányadnak a már korábban bevezetett, (12) szerinti $\bar{Q}_\pi$ változatát szerepeltetjük.[35]

Mivel $\bar{r}_{h(+)}$ a küszöbarányos jövedelmek súlyozott harmonikus átlaga, ezért a szegénység intenzitásának egyféle fordított jellegű mutatójaként a *relatív küszöbközeliség* jellemzésére alkalmas. Átörökítve az értéke által képviselt

[33] Mivel a súlyok a jelen idejű öndepriváltságot is tartalmazzák, ezért az összehasonlítások száma: $p(p+1)/2$.

[34] A (+) fölső index arra utal, hogy az átlagoláskor a transzfert kapó kevésbé szegény nagyobb súlyt kap, mint a transzfert adó.

[35] Ez természetesen a (30) súlyrendszer némi módosulását vonja maga után.

arányt a szegények átlagjövedelmének a küszöbhöz való viszonyára, a

$$\tilde{k} = \frac{\bar{Y}_\pi}{\bar{r}_{h(+)}}$$

hányados egy olyan kalkulált, *reprezentatív* szegénységi küszöböt eredményez, mely ugyanezt az arányt reprezentálja a küszöb és a szegények átlagos jövedelme viszonylatában. Hasonlóan, mivel $(1-\bar{Q}_\pi)$ az alacsonyabb jövedelmek által a magasabb jövedelmekkel szemben átlagosan *eliminált* deprivációs hányad, ezért kalkulálhatjuk a legszegényebb szegényeket reprezentáló azon tipikus $\tilde{Y}_a$ jövedelmi szintet is, mely ugyanilyen arányban *eliminált* depriváltságot reprezentál a szegények *átlagos* jövedelmével szemben:

$$\tilde{Y}_a = \bar{Y}_\pi(1-\bar{Q}_\pi).$$

A reprezentatív küszöb és a reprezentatív legszegényebb szegény jövedelme közötti távolság felhasználása ezután az alábbi újszerű szegénységi indexet eredményezi:

$$\tilde{P} = H\frac{\tilde{k}-\tilde{Y}_a}{k} = H\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}} - \frac{\bar{Y}_\pi(1-\bar{Q}_\pi)}{k}\right) = H\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}} - \bar{r}(1-\bar{Q}_\pi)\right) = H\tilde{I}$$

ahol $\bar{r}$ a küszöbarányos jövedelmek (14) szerinti *egyszerű számtani* átlaga. Nyilvánvalóan

$$0 \le \tilde{I} \le \frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}$$

és

$$0 \le \tilde{P} = H\tilde{I} \le H\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}.$$

Láthatóan H értékének növekedésével $\tilde{P}$ is növekszik, továbbá $\tilde{P}$ annál magasabb, minél nagyobb az $\tilde{I}$ relatív rés a reprezentatív szegénységi küszöb és a reprezentatív legszegényebb szegény jövedelme között. Ugyanakkor az is látható, hogy e ralatív rés $\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}$ fölső határa lehet nagyobb is mint 1, és a szegények átlagos jövedelmi szintjének az emelkedésével növekedhet és csökkenhet is attól függően, hogy $\bar{r}$ vagy $\bar{r}_{h(+)}$ növekszik gyorsabban. A reprezentatív legszegényebb szegény $\bar{r}(1-\bar{Q}_\pi)$ jövedelmi szintjére viszont a relatív depriváltság növekedése és az átlagos jövedelmi szint csökkenése is egyértelműen csökkentőleg hat.

Ha ezután az $\tilde{I}$ relatív rést osztjuk lehetséges maximumával, akkor az ily módon (0,1) intervallumra való normálása révén *egyrészt* kiszűrjük a szegénységi indexnek az $\bar{r}/\bar{r}_{h(+)}$ arányra való érzékenységét, *másrészt* magának a szegénységi indexnek is a (0,1) intervallumra normált változatát képezzük:

$$0 \leq P^+ = H\frac{\tilde{I}}{\tilde{I}_{\max}} = H\frac{\bar{I}}{\frac{\bar{r}}{\bar{r}_{h(+)}}} = HI^+$$

$$= H\left(1 - \bar{r}_{h(+)}(1 - \bar{Q}_\pi)\right) \leq 1. \tag{33}$$

A P^+ indexben szereplő I^+ relatív szegénységi rés fölső határa mindig 1, ami az *egységnyi* szegénységi küszöböt reprezentálja. I^+ annál kisebb, minél közelebb vannak relatíve a szegény jövedelmek átlagosan a küszöbhöz, illetve minél alacsonyabb a szegények körében a relatív depriváltság foka.

Kihasználva $\bar{r}_{h(+)}$ és $(1-\bar{Q}_\pi)$ jelentését, a (33) indexet az alábbi módon is interpretálhatjuk. Egyrészt az egységnyi szegénységi küszöb értékéből kiindulva kalkuláljuk a szegényeknek az *egységnyi* küszöbbel szemben reprezentatív $\bar{r}_{h(+)}$ átlagos jövedelmét, majd a vele szemben reprezentatív legszegényebb szegény jövedelmének $\bar{r}_{h(+)}(1 - \bar{Q}_\pi)$ szintjét. Így a P^+ indexben I^+ jelentése nem más, mint az egységnyi szegénységi küszöb és a vele szemben reprezentatív legszegényebb szegény jövedelmének a távolsága.

Vizsgáljuk meg ezután a P^+ mutató értékét alakító, a küszöbközeliséget jellemző $\bar{r}_{h(+)}$ mérőszám (32) súlyrendszerének a struktúráját. Mivel meghatározásakor a legkevésbé szegény r_p küszöbarányos jövedelme p súllyal, a legszegényebb szegény r_1 küszöbarányos jövedelme pedig egységnyi súllyal szerepel, ezért:

- egyrészt a relatív küszöbközeliség globális megítélésekor a legszegényebb szegények helyzete nem kap kellő hangsúlyt, miközben a leggazdagabb szegények helyzete túlhangsúlyozott,
- másrészt nincs biztosítva, hogy egy regresszív transzfer nyomán $\bar{r}_{h(+)}$ értéke mindig csökken.

A regresszív transzfer kérdését vizsgálva kívánatos lenne, hogy a transzfer hatására — ceteris paribus — $\bar{r}_{h(+)}$ értéke mindig csökkenjen, vagyis összességében a küszöbtől való relatív távolodást jelezzen. Tegyük fel, hogy a nemcsökkenő jövedelmi rangsorban $Y_i < Y_j$ és az i személytől egy $0 \leq d \leq Y_i$ nagyságú jövedelmet átcsoportosítunk a $j > i$ egyénhez. Ennek nyomán $\bar{r}_{h(+)}$ (32) szerinti értékében a $k/(Y_i - d)$ arány i súllyal, a $k/(Y_j + d)$ arány pedig j súllyal szerepel, tehát a két érintett személy együttes hatása a relatív küszöbközeliség megítélésekor:

$$\Delta(d) = k\left(i(\frac{1}{Y_i - d} + \frac{1}{Y_j + d}) + (j-i)\frac{1}{Y_j + d}\right) = k\left(\Delta_1(d) + \Delta_2(d)\right)$$

hiszen a regresszív transzfer mindig szegényebbtől kevésbé szegényhez történő átcsoportosítás, és a kevésbé szegények nagyobb súllyal szerepelnek. Látható, hogy $\Delta(d) - \Delta(0)$ előjele tetszőleges lehet attól függően, hogy a mindig pozitív $\Delta_1(d) - \Delta_1(0)$ túlszárnyalja-e a mindig negatív $\Delta_2(d) - \Delta_2(0)$ értékét. Természetesen a küszöbtől való relatív távolság növekedését, vagyis $\bar{r}_{h(+)}$ csökkenését a $\Delta(d) - \Delta(0)$ különbség pozitív volta jelzi. Ez a pozitív előjel annál inkább várható, minél közelebb van egymáshoz a transzfert adó és kapó rangszáma a jövedelmi rangsorban, miközben minél nagyobb a jövedelmeik közötti különbség.

Lényeges tulajdonsága az $\bar{r}_{h(+)}$ mérőszámnak, hogy regresszív transzfer hatására értéke a küszöbközeliség javulását is jelezheti, a transzfert kapó küszöbközeli helyzetének a javulása következtében. Előfordulhat tehát, hogy $\bar{Q}_\pi$ csökkenése *erősíti* $\bar{r}_{h(+)}$ növekedését, de az is lehetséges, hogy $\bar{Q}_\pi$ csökkenése pusztán *tompítja* $\bar{r}_{h(+)}$ csökkenését.

Továbblépve, ha elengedhetetlen kívánalom, akkor a relatív küszöbközeliséget mérő mutatót az

$$\bar{r}_{h(-)} = \frac{S}{\sum_{i=1}^{p}(p-i+1)\frac{k}{Y_i}}$$

formában definiálva kényszeríthetjük arra, hogy egy regresszív transzfer nyomán értéke mindenkor csökkenjen. Ekkor ugyanis a legszegényebbek jövedelmei kapják a legnagyobb hangsúlyt, és így a transzfert adó küszöbarányos jövedelme nagyobb súlyt kap, mint a transzfert kapóé. Ugyanakkor, mivel a transzfert adó jövedelme alacsonyabb a transzfert kapóénál, ezért $\bar{r}_{h(-)}$ értéke a regresszív transzfer nyomán — egyéb feltételek változatlansága esetén — biztosan csökken. Értékét P^+ formulájában $\bar{r}_{h(+)}$ helyére helyettesítve egy alternatív szegénységi indexhez jutunk:

$$P^- = H\left(1 - \bar{r}_{h(-)}(1 - \bar{Q}_\pi)\right). \tag{34}$$

A P^- index értékét a szegények arányának a növekedése, a relatív küszöbközeliség romlása és a relatív depriváltság növekedése egyértelműen növeli. Regresszív transzfer hatására a relatív küszöbközeliség az $\bar{r}_{h(-)}$ mutató szerint mindig romlik, viszont a relatív depriváltság globális érzete a $\bar{Q}_\pi$ index szerint növekedhet, de csökkenhet is attól függően, hogy a transzfert adóval szembeni depriváltság csökkenése összességében túlszárnyalja-e a transzfert kapó által érzett depriváltság csökkenését.[36] Regresszív transzfer hatására a P^- index értékében tehát $\bar{Q}_\pi$ csökkenése csupán ellensúlyozza $\bar{r}_{h(-)}$ csökkenését.

Végül, ha elvárjuk a szegénységi indextől, hogy értéke biztosan csökkenjen ha a regresszív transzfer ellenére csökkent a globális relatív depriváltság

[36] Lásd Hajdu(1996).

érzete, akkor érdemes a szegénységi mértéket a cenzorált jövedelmi eloszlás

$$P^* = \bar{Q}(y)$$

deprivációs arányaként definiálni, hiszen — mint erre már többször utaltunk — e mutató érzékeny a fenti kívánalomra.

7. Modell példa

Az alábbiakban illusztratív céllal, modell példán keresztül számszerűsítjük a tanulmányban szereplő legfontosabb kategóriákat és mérőszámokat. Tételezzünk föl egy populációt amelyben mindig 5 személy kerül a $k = 50$ szegénységi küszöb alá, és így 25% a szegények létszámaránya. Az egyes jövedelemeloszlásokat, illetve azok különböző szegénységi jellemzőit a 2. tábla közli. Az A eredeti eloszlásból a B, C és D eloszlások átlagmegőrző egyedi regresszív transzfer útján származnak, míg az E eloszlás esetében csak a negyedik szegény jövedelmét növeltük az A eloszláshoz képest, tehát ez esetben az átlag is emelkedett.

2.tábla: Jövedelemeloszlások szegénységi jellemzői (H=0.25)

Szegénységi jellemző	Csonkolt jövedelmi eloszlások				
	A	B	C	D	E
$Y_{1\in\pi}$	1	1	1	1	1
$Y_{2\in\pi}$	4	1	4	4	4
$Y_{3\in\pi}$	10	13	10	4	10
$Y_{4\in\pi}$	20	20	10	26	34
$Y_{5\in\pi}$	35	35	45	35	35
$\bar{Y}_\pi$	14	14	14	14	16.8
$\bar{r}_{h(+)}$	0.1400	0.0839	0.1298	0.1178	0.1456
$\bar{r}_{h(-)}$	0.0467	0.0320	0.0460	0.0438	0.0470
$\bar{Q}_\pi$	0.7500	0.7096	0.7194	0.7154	0.7409
$\tilde{P}$	*0.4825*	0.8135	0.5196	0.5743	0.5552
P^+	*0.2412*	0.2439	**0.2409**	0.2416	**0.2406**
P^-	*0.2471*	0.2477	**0.2468**	**0.2469**	**0.2470**
P^*	*0.3237*	**0.3216**	**0.3221**	**0.3219**	**0.3011**
Sen	0.2080	0.2090	0.2113	0.2100	0.1987
Takayama	0.1749	0.1752	0.1761	0.1756	0.1610
$Kakwani_{(q=1)}$	0.2496	0.2508	0.2536	0.2520	0.2384
Blackorby et al.$_{(\varepsilon=2)}$	0.2325	0.2384	0.2330	0.2340	0.2322
Foster et al.$_{(\alpha=2)}$	0.1448	0.1459	0.1548	0.1487	0.1320

A táblában az újszerű szegénységi indexek esetében az eredeti eloszlásra számított értékeikhez viszonyított csökkenésre vastagbetűs szedés hivja fel a figyelmet. Ennek megfelelően a $\tilde{P}$ mutató értéke egyetlen esetben sem csökkent, a P^{+} index értéke a C és az E eloszlások esetében csökkent, a P^{-} mérőszám értéke csak a B eloszlás esetében nem csökkent, míg a P^{*} mutató értéke valamennyi eloszlás esetében csökkent az A eloszláshoz képest.

A fenti tendenciák magyarázata abban rejlik, hogy — 25%-os rögzített szegénységi arány mellett — a szegénységi mérték további komponensei az alábbiak szerint alakultak a módosított eloszlások esetében:

- A relatív küszöbközeliség mindhárom transzferált eloszlás esetében romlott az eredeti A eloszláshoz képest, de a B eloszlás esetében romlott a leginkább, és a C eloszlás esetében a legkevésbé.
- A $\bar{Q}_{\pi}$ deprivációs jövedelmi hányad szerint a relatív depriváltság mértéke valamennyi transzferált eloszlás esetében csökkent a szegények körében az A eloszláshoz viszonyítva, mégpedig a B eloszlás esetében a leginkább, és a C eloszlás esetében a legkevésbé.
- A negyedik szegény jövedelmét növelő E eloszlás esetében a relatív küszöbközeliség javult, viszont a depriváltság mértéke csökkent.

Vegyük észre továbbá, hogy míg $P_{D}^{+} > P_{A}^{+}$, addig $P_{D}^{-} < P_{A}^{-}$, vagyis mikor ugyanazon regresszív transzfer hatására a relatív küszöbközeliség romlik, a relatív depriváltság viszont csökken, e két mutató eltérően jelezheti a szegénység fokának a változását attól függően, hogy melyik hatás erősebb. Mivel $\bar{r}_{h(-)}$ a transzfert adóra helyezi a nagyobb súlyt, és a transzfernek a transzfert adót a küszöbtől távolító k/Y hatása erősebb, mint a transzfert kapót a köszöbhöz közelítő hatása, ezért egy regresszív transzfer esetén P^{-} csökkenése akkor is várható, mikor P^{+} növekszik.

8. Összefoglalás

A tanulmány a szegénységi mérőszámok relatív deprivációra való érzékenysége kapcsán a mérőszámok szerkesztésének újszerű szempontjával, s e szempontnak megfelelő néhány újszerű szegénységi indexszel foglalkozik. A vizsgált szempont szerint a szegénységi index értékére regresszív jövedelmi transzfer esetén is csökkentőleg hat a relatív depriváltság globális érzetének esetleges csökkenése. Ilymódon a szegénységi index értéke akár csökkenhet is egy regresszív jövedelmi transzfer nyomán, sértve ezáltal a klasszikus transzfer axiómákat, viszont eleget téve a csökkenő relatív depriváltság axiómáinak.

A tanulmányban bevezetésre került mutatószámok közül a $\tilde{P}$ index csak egy közbülső lépcső a P^+ és P^- mutatók levezetéséhez. A gyakorlati felhasználást illetően a P^+ indexet akkor érdemes használni, ha a csökkenő *személyes* relatív depriváltság követelményének a kielégítése az elsődleges szempont, a P^- indexet pedig akkor, ha olyan depriváltság-érzékeny mutatót akarunk alkalmazni, melyben a relatív küszöbközeliség biztosan *romlik* egy regresszív transzfer nyomán. Végül a P^* mérőszám használatát arra az esetre javasoljuk, mikor a csökkenő *globális* depriváltság követelményének való megfelelés az alapvető szempont.

Irodalom

1. Anand, S. (1977): Aspects of poverty in Malaysia. Review of Income and Wealth, 23. k., 1. sz., 1–16. old.
2. Atkinson, A. B. (1970): On the measurement of inequality. Journal of Economic Theory, 2., 244–263. old.
3. Atkinson, A. B. (1987): On the measurement of poverty. Econometrica, 55. k., 4. sz., 749–764. old.
4. Atkinson, A. B. (1991): Comparing Poverty Rates Internationally: Lessons from Recent Studies in Developed Countries. World Bank Economic Review, 1. sz., 3–21. old.
5. Atkinson, A. B. (1992): Measuring poverty and differences in family composition. Economica, 233. 1–16. old.
6. Blackorby, C. – Donaldson, D. (1980a): Ethical indices for the measurement of poverty. Econometrica, 48. k., 4. sz., 1053–60. old.
7. Clarck, S. – Hemming, R. – Ulph, D. (1981): On indices for the measurement of poverty. The Economic Journal, 91., 515–526. old.
8. Dalton, H. (1920): The measurement of inequality of incomes. The Economic Journal, Sept., 348–361. old.
9. Éltető, Ö. – Frigyes, E.(1968): New inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning. Econometrica, 36. k., 2. sz., 383-396. old.
10. Foster, J. E. (1984): On economic poverty: A survey of aggregate measures. Advances in Econometrics, 3. k., 215–251. old.
11. Foster, J. E. – Greer, I. – Thorbecke, E. (1984): A class of decomposable poverty measures. Econometrica, 52. k., 3. sz., 761–776. old.
12. Foster, J. E. – Shorrocks, A. F. (1988): Poverty orderings. Econometrica, 56. k., 1. sz. Január, 173–177. old.
13. Foster, J. E. – Shorrocks, A. F. (1987): Transfer sensitive inequality measures. Review of Economic Studies, 54. k., 485–497. old.
14. Gastwirth, J. L. (1973): A new index of income inequality. Proceedings of The International Statistical Institute, Vienna, 437–441. old.

15. Hagenaars, A. (1987): A Class of Poverty Indices. International Economic Review, Vol. 28, No. 3, October, 583-607. old.

16. Hajdu, O. (1990): A szegénység mérhetőségéről. Statisztikai Szemle, 6. sz., 477–494. old.

17. Hajdu, O. (1996): Relatív depriváció és szegénység: A jövedelmi transzfer deprivációs hatása. Szigma, 1-2. sz. 45–66.old.

18. Hajdu, O. (1997): A szegénység mérőszámai. KSH, Budapest, Könyvtár és Dokumentációs Szolgálat, Témadokumentáció.

19. Hamada, K. – Takayama, N. (1978): Censored income distributions and the measurement of poverty. Bulletin of the International Statistical Institute, 47. k., 1. könyv, 617–632. old.

20. Kakwani, N. C. (1980a): On a class of poverty measures. Econometrica, 48.k., 2.sz., 437–446.

21. Kakwani, N. C. (1980b): Income inequality and poverty. Oxford University Press. Published for the World Bank. 398. old.

22. Kakwani, N. C. (1984a): Issues in measuring poverty. Advances in Econometrics, 3. k., 253–282. old.

23. Kakwani, N. C. (1984b): Welfare Ranking of Income Distributions. Advances in Econometrics, 3. k., 191-213. old.

24. Kakwani, N. C. (1993): Statistical inference in the masurement of poverty. Review of Economics and Statistics. 4. sz., 632–639. old.

25. Kerékgyártó Györgyné (1991): Szegénységi küszöbszámok, avagy kik a szegények. Aula, 1. sz, 57–76. old.

26. Kundu, A. – Smith, T. E. (1983): An impossibility theorem on poverty indices. International Economic Review, 24. k., 2. sz., 423–434. old.

27. Runciman, W, E. (1966): Relative deprivation and social justice: A study of attitudes to social inequality in twentieth-century England. Berkely University of California Press. 10. old.

28. Sen, A. (1976): Poverty: an ordinal approach to measurement. Econometrica, 44. k., 2. sz., 219–231. old.

29. Sen, A. (1979): Issues in the measurement of poverty. Scandinavian Journal of Economics, 81., 285–307. old.

30. Sen, P. K. (1986): The Gini coefficient and poverty indexes: Some reconciliations. Journal of the American Statistical Association, 81. k., 396. sz., 1050–57. old.

31. Sheshinski, E. (1972): Relation between a social welfare function and the Gini index of income inequality. Journal of Economic Theory, 4., 98–100. old.

32. Stark, O. – Taylor, J. E. (1989): Relative Deprivation and International Migration. Demography, 26. k., 1. sz., Február. 1–15.old.

33. Stark, O. – Taylor, J. E. – Yitzhaki, S. (1988): Migration, remittances, and inequality. A sensitivity analysis using the extended Gini index. Journal of Development Economics, 28, 309-322.old.

34. Takayama, N. (1979): Poverty, income inequality, and their measures: professor Sen's axiomatic approach reconsidered. Econometrica, 47. k, 3. sz., 747–759. old.

35. Thon, D. (1979): On measuring poverty. Review of Income and Wealth, 25. k., 4. sz., 429–440. old.

36. Yitzhaki, S. (1979): Relative deprivation and the Gini coefficient. The Quarterly Journal of Economics, május, 321–324. old.

37. Yitzhaki, S. (1982): Relative deprivation and economic welfare. European Economic Review, 17. 99–113. old.

RELATIVE DEPRIVATION AND POVERTY: DEPRIVATION SENSITIVE MEASURES OF POVERTY

Considering relative deprivation sensitive poverty indices the paper deals with a newly introduced point of view of constructing such poverty indices. According to this requirement the decrease in the overall degree of relative deprivation must force the poverty index to decrease as well, moreover, allowing its value to decrease due to a regressive transfer despite the increase in the degree of income inequality.

AZ 'ÉLETLEN' HALMAZOK ARITMETIKÁJA NEM 'TÖKÉLETLEN' ARITMETIKA[1]
(A fuzzy aritmetika új megközelítése a döntéstámogatásban)

PAULER GÁBOR
JPTE KTK PhD-hallgató

Jelen tanulmányban elsőként az eddigi fuzzy aritmetikai módszereket értékeljük, majd szakaszonként lineáris tagságfüggvények definálása és a maxmin szkenelési technika alkalmazása révén olyan új fuzzy aritmetikai módszert vezetünk be, amely kiküszöböli a korábbi eljárások egyes hátrányait.

Kulcsszavak: fuzzy számok, fuzzy aritmetika, kiterjesztési alapelv, maxmin konvolúció, szakaszonként lineáris tagságfüggvény, maxmin szkenelés.

1. Bevezetés

A fuzzy elmélet alkalmazása a döntéshozatal egyre újabb területeire tört be az elmúlt két évtizedben. Mégis, sok elméleti és gyakorlati szakember ma is úgy látja, hogy a fuzzy matematika helytelen és zavaros dolgok gyűjteménye, mert ez az elmélet teljesen más gondolkodásmódot igényel mint a hagyományos, kétértékű logikán alapuló teóriák. A kívülállók számára elég nehéz elképzelni, hogy lehet fuzzy számokon aritmetikai műveleteket végezni. Jelen tanulmány célja, hogy az eddigi fuzzy aritmetikai módszerek rövid áttekintésével enyhítsen az előítéleteken, emellett egy hatékonyabb megközelítést vezessen be.

Mielőtt belekezdenénk a fuzzy aritmetika vizsgálatába, röviden felidézünk néhány alapvető definíciót [Zadeh, 1965], amelyekre a későbbiekben gyakran hivatkozunk:

1. Fuzzy halmaz: *olyan halmaz, amelynek elemei különböző mértékben tartoznak a halmazhoz.*

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\} \qquad \mu_A(x) \geq 0 \tag{1.1}$$

ahol:

[1] Beérkezett: 1996. június 29.

A – fuzzy halmaz
x – alaphalmaz elem
$\mu_A(x)$ – az adott alaphalmaz elem tagságfüggvénye
X – az alaphalmaz univerzuma

2. Normalizált fuzzy halmaz: *a tagságfüggvény értéke nem haladhatja meg az egyet*

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1 . \tag{1.2}$$

3. Fuzzy halmaz supportja: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb, mint 0*

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} . \tag{1.3}$$

4. Fuzzy halmaz α-szintű halmaza: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb (nem szigorú esetben nagyobb vagy egyenlő), mint α.*
Szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \tag{1.4}$$

Nem szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{1.5}$$

5. Fuzzy halmaz kardinalitása: *a tagságfüggvény alatti terület.*
Folytonos esetben:

$$|A| = \int_X \mu_A(x)\, dx . \tag{1.6}$$

Diszkrét esetben:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) . \tag{1.7}$$

6. Fuzzy halmazok metszete:

$$C = (A \cap B) \mid \mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in X . \tag{1.8}$$

7. Fuzzy halmazok uniója:

$$C = (A \cup B) \mid \mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in X . \tag{1.9}$$

8. **Fuzzy halmaz relatív kardinalitása:** *a fuzzy halmaz kardinalitása és az alaphalmazának kardinalitása közti arány:*

$$||A|| = \frac{|A|}{|X|} \,. \tag{1.10}$$

9. **Fuzzy halmaz komplementere:**

$$\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x) \,. \tag{1.11}$$

2. Az eddigi fuzzy aritmetikai módszerek áttekintése

Amíg az éles aritmetikai operátorok kívül esnek a kutatók érdeklődési körén — mindenki megtanulhatja őket az általános iskolában — a fuzzy aritmetikai operátorok komoly kihívást jelentenek. Mivel a fuzzy halmazok jóval több információt képesek hordozni, mint az éles döntési változók, a fuzzy aritmetikai operátoroknak jóval magasabb a számítási igénye is. Így ezen operátorok hatékonysága alapvetően befolyásolja a gyakorlatban alkalmazott fuzzy rendszerek sebességét és költségigényét. Mielőtt áttekintenénk a fuzzy aritmetikai módszereket, idézzük fel a fuzzy számok definicióját és az éles aritmetikai műveletek fuzzifikálásának alapelvét.

2.1 A fuzzy számok definíciója

A fuzzy szám bizonytalan, pontatlanul megfogalmazott mennyiségek (pl. "körülbelül 7", "8 és 10 közt" stb.) ábrázolására szolgáló fuzzy halmaz:

$$\tilde{M} = \{[x, \mu_{\tilde{M}}(x)]\} \qquad x \in \mathbb{R} \quad \mu_{\tilde{M}}(x) \in [0,1] \tag{2.1}$$

A tagságfüggvény azon állítás igazsági fokát jelzi, hogy M x értékét veszi fel. Fuzzy szám folytonos és diszkrét alaphalmazon is definiálható.

2.2 A kiterjesztési alapelv

A kiterjesztési alapelvet L. A. Zadeh vezette be [Zadeh, 1973] éles aritmetikai operátorok fuzzy-vá konvertálása céljából. Az egyszerűség kedvéért diszkrét fuzzy számokon, és csak két operandusz esetén mutatjuk be működését. Az érdeklődők könnyen általánosíthatják ezt több operandusz esetére.

- Tételezzük fel, hogy A és B két fuzzy operandusz, alaphalmazaik U_a, illetve U_b.

- $x_{a_1}, \ldots, x_{a_n} \in U_a$ és $x_{b_1}, \ldots, x_{b_n} \in U_b$ a két fuzzy halmaz alaphalmazának diszkrét elemei.
- Legyen Z a művelet eredményeként létrejövő fuzzy szám, U_z alaphalmazzal és $z_1, \ldots, z_k$ diszkrét alaphalmaz elemekkel.
- Legyen f egy függvény, ami $U_a \times U_b$-t U_z-be képezi le, vagyis $z = f(x_a, x_b)$. Ez az éles aritmetikai operátor, amit fuzzifikálni akarunk.
- A és B Descartes szorzata legyen:

$$\begin{aligned} &C = \{(x_{a_i}, x_{b_j}), \min[\mu_{\tilde{A}}(x_{a_i}), \mu_{\tilde{B}}(x_{b_j})]\} \\ &\forall x_{a_i}, x_{b_j},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Z eredmény fuzzy halmazt a következőképpen kaphatjuk meg A-ból és B-ből:

$$Z = \left\{ \left[Z_1, \mu_{\tilde{Z}}(Z_1)\right] \mid Z_1 = f(x_{ai}, x_{bj}),\ x_{ai} \in U_a,\ x_{bj} \in U_b \right\} \tag{2.3}$$

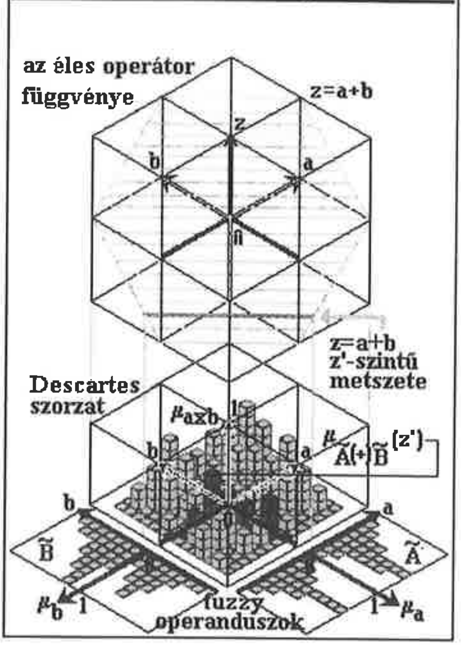
ahol

$$\mu_{\tilde{Z}}(Z_1) = \begin{cases} \max\min_{Z_1 = f(x_{a_i}, x_{b_j})}\left[\mu_{\tilde{A}}(x_{ai}, \mu_{\tilde{B}}(x_{bi})\right] & \text{ha } f^{-1}(Z_1) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A könnyebb érthetőség kedvéért lássunk egy grafikus példát két operandusz összeadására (lásd 1. ábra). A kérdés, hogy hogyan határozzuk meg az eredmény fuzzy halmaz alaphalmazának egy egyedi z' értékéhez rendelt tagságfüggvény értéket. Kiinduláskor az éles operátort jelentő függvényt ($z = x_a + x_b$), valamint A és B halmazok Descartes szorzatát ismerjük. A következő lépésben meghatározzuk az éles függvény z'-szintű metszetét (olyan (x_{ai}, x_{bj}) párokat keresünk, ahol $x_{ai} + x_{bj} = z'$). A Descartes szorzatban is megkeressük ezeket a párokat (lásd a sötétebb oszlopokat a Descartes szorzat oszlopdiagrammjában). Harmadik lépésben az elhatárolt elemek tagságfüggvény értékeinek a maximumát vesszük, ez lesz z' tagságfüggvény értéke az eredmény fuzzy halmazban. Ezt a három lépést minden z értékre meg kell ismételnünk.

A kiterjesztési elv legnagyobb problémája, hogy nem alkalmazható közvetlenül a gyakorlatban, mert nagyon sok gépidőt fogyasztó probléma az éles függvény z' szintű metszetét meghatározni, főként ha sok operandusz van, folytonos közelítés szükséges és az operátorfüggvény bonyolult. Ezért különböző szerzők [Jain 1976], [Mizumoto & Tanaka 1976], [Baas & Kwakernak 1977], [Dubois & Prade 1980] egyszerűsített módszereket vezettek be, amelyek mind a kiterjesztési elven alapulnak.

1. ábra Grafikus példa fuzzy összeadásra



2.3 Fuzzy aritmetikai módszerek

A módszereket a fuzzy operanduszok diszkrét vagy folytonos jellege alapján két nagy csoportra oszthatjuk. A folytonos fuzzy számokat kezelő módszer az α-szinthalmazokon alapul. Egy fuzzy halmaz α-szinthalmaza:

$$M = \{[m, \mu_M(m)] \mid m \in U_M, \mu_M(m) \geq \alpha\} \; . \tag{2.5}$$

Egyszerűsítésként, csak két operandusz esetével foglalkozunk. Folytonos esetben az operanduszok legyenek:

$$M = \{[m, \mu_M(m)] \mid m \in U_M\} \quad \text{és} \quad N = \{[n, \mu_N(n)] \mid n \in U_N\} \tag{2.6}$$

ahol

$$M_\alpha = [m_1, m_2] \quad \text{és} \quad N_\alpha = [n_1, n_2] \tag{2.7}$$

α-szinthalmazai M-nek és N-nek

A diszkrét fuzzy számokat a maxmin konvolúciós módszer kezeli. Diszkrét operanduszokként az előző részben leírt A és B fuzzy számokat használjuk.

2.3.1 Összeadás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(+)\,N_\alpha = [m_1 + n_1, m_2 + n_2] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.8}$$

Diszkrét eset:

$$\mu_{A\,(+)\,B}(z) = \max_{z=x_{ai}+x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2.9}$$

ahol $\cap$ a minimum operátor. Az összeadás tulajdonságai: kommutatív, asszociatív, a neutrális érték 0.

2.3.2 Kivonás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(-)\,N_\alpha = [m_1 - n_2, m_2 + n_1] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.10}$$

Diszkrét eset:

$$\mu_{A\,(-)\,B}(z) = \max_{z=x_{ai}-x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2.11}$$

2.3.3 Szorzás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(\times)\,N_\alpha = [m_1 \times n_1, m_2 \times n_2] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.12}$$

Diszkrét eset: ha az eredmény fuzzy halmaz 'jobb lábánál' tartunk, vagyis $z > z' \mid \mu_{A\,(\times)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(\times)\,B}(z) = \max_{z\leq x_{ai}\times x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2.13}$$

ha az eredmény 'bal lábánál' tartunk, vagyis $z < z' \mid \mu_{A\,(\times)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(\times)\,B}(z) = \max_{z\geq x_{ai}\times x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2.14}$$

A szorzás jellemzői: kommutatív, asszociatív, a neutrális érték 1, disztributív az összeadással és a kivonással.

2.3.4 Osztás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(/)\,N_\alpha = [m_1/n_2, m_2/n_1] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.15}$$

Diszkrét eset: ha az eredmény fuzzy halmaz 'jobb lábánál' tartunk, vagyis $z > z' \mid \mu_{A\,(/)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(/)\,B}(z) = \max_{z \leq x_{ai}/x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{2.16}$$

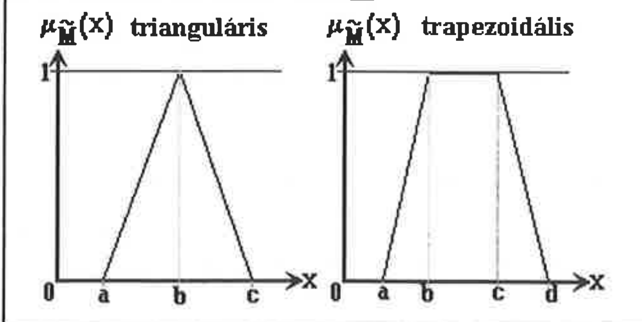
ha az eredmény 'bal lábánál' tartunk, vagyis $z < z' \mid \mu_{A\,(/)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(/)\,B}(z) = \max_{z \geq x_{ai}/x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{2.17}$$

2.3.5 Speciális fuzzy számok aritmetikája

Néhány szerző [Kaufmann & Gupta 1985], [Laarhoven & Pedrycz 1983] speciális fuzzy számokat alkalmazott, hogy jelentős mértékben leegyszerűsítse és felgyorsítsa a fuzzy aritmetikai műveleteket (lásd 2. ábra).

2. ábra Speciális fuzzy számok



Itt csak a trapezoidális fuzzy számok aritmetikáját részletezzük. Az érdeklődők könnyen visszavezethetik ezt trianguláris fuzzy számok esetére. A trapezoidális operandusok legyenek:

$$M = (a_1, b_1, c_1, d_1) \qquad \text{és} \qquad N = (a_2, b_2, c_2, d_2) \tag{2.18}$$

Összeadás:

$$M\,(+)\,N = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \tag{2.19}$$

Kivonás:

$$M\,(-)\,N = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2) \tag{2.20}$$

Szorzás:

ha $M > 0$ és $N > 0$ akkor

$$M\,(\times)\,N = (a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2, d_1 \times d_2) \tag{2.21}$$

ha $M > 0$ és $N < 0$ akkor

$$M\,(\times)\,N = (a_1 \times d_2, b_1 \times c_2, c_1 \times b_2, d_1 \times a_2) \tag{2.22}$$

ha $M < 0$ és $N < 0$ akkor

$$M\,(\times)\,N = (d_1 \times d_2, c_1 \times c_2, b_1 \times b_2, a_1 \times a_2) \tag{2.23}$$

Osztás:

ha $M > 0$ és $N > 0$ akkor

$$M\,(/)\,N = (a_1/d_2, b_1/c_2, c_1/b_2, d_1/a_2) \tag{2.24}$$

ha $M < 0$ és $N > 0$ akkor

$$M\,(/)\,N = (d_1/d_2, c_1/c_2, b_1/b_2, a_1/a_2) \tag{2.25}$$

ha $M < 0$ és $N < 0$ akkor

$$M\,(/)\,N = (d_1/a_2, c_1/b_2, b_1/c_2, a_1/d_2) \tag{2.26}$$

2.4 Az eddigi fuzzy aritmetikai módszerek értékelése

A fuzzy aritmetikának trianguláris és trapezoidális fuzzy számok használata esetén van a legkisebb számítási igénye. Azonban, még viszonylag egyszerű fuzzy rendszerek esetén is előfordulhat, hogy az eredmény fuzzy halmaz tagságfüggvénye igen összetett formájú, ami ezekkel az egyszerűsített aritmetikai módszerekkel nem dolgozható fel tovább.

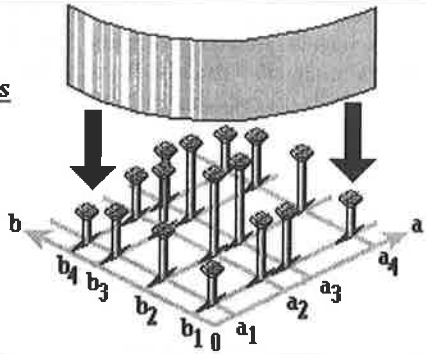
A folytonos, α-szinthalmazokhoz kapcsolódó módszer a tagságfüggvény jóval finomabb felbontását teszi lehetővé, de feltételezi, hogy mind az operanduszok, mind az eredmény fuzzy halmaz egycsúcsú tagságfüggvénnyel rendelkezik: a 'bal láb' nem szigorúan monoton nő, a 'jobb láb' nem szigorúan monoton csökken. Így komplex fuzzy rendszerek (pl. heurisztikus MAUF)

[Esthatiou & Rajkovic 1979] eredményei szintén nem dolgozhatók fel tovább velük. Bármilyen törekvés viszont, amely az eredmény fuzzy halmaz csúcsszámának csökkentését célozza (pl. minimum-összeg kompozíció alkalmazása) igen kemény információvesztéssel jár. A diszkrét fuzzy számokat kezelő max-min konvolúció alkalmazásának hátrányait egy 'csináld-magad' példával szemléltethetjük. Próbáljunk meg összeszorozni két diszkrét fuzzy számot a kiterjesztési alapelv közvetlen alkalmazásával:

$$\mu_{A(\times)B}(z) = \max_{z=x_{ai}\times x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \qquad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m\,. \tag{2.27}$$

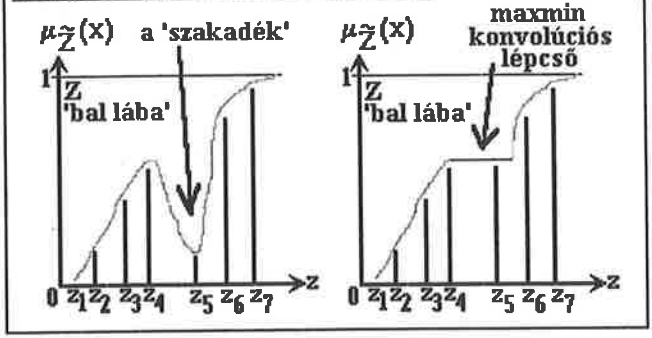
A helyzet úgy modellezhető a legjobban, ha különböző hosszúságú szögeket verünk egy asztal lapjába, amelyek A és B diszkrét fuzzy számok Descartes szorzatát szimbolizálják (lásd 3. ábra). Ezután megpróbálunk a szögek közé csúsztatni egy hiperbolikusan meghajlított lemezt, amely az éles szorzat operátor z'-szintű metszetét jelképezi.

3. ábra Példa diszkrét fuzzy számok extenziós alapelv szerinti összeszorzására



Lehetséges, hogy a lemez alsó éle egy hosszú szög tetején landol. De előfordulhat olyan szerencsétlen eset is, hogy a lemez lecsúszik az asztalig, vagy egy rövid szögön landol, holott több hosszú szög van a lemez közvetlen közelében. Ez az oka, hogy 'szakadékok' (lásd 4. ábra), vagyis váratlanul alacsony tagságfüggvény értékek jelennek meg az eredmény fuzzy halmazban. Ha a z'-szintű metszet csak kevés 'kereszteződést' érint a Descartes szorzatban, a tagságfüggvény érték torzulhat. Ha az operanduszok alaphalmazai csak kevés diszkrét elemet tartalmaznak, és ezek egymástól mért távolsága nem konstans, sok 'szakadék' keletkezik. A jelenség végső soron a diszkrét alaphalmazok és a folytonos éles operátor közti konfliktusra vezethető vissza.

4. ábra A 'szakadékok' problémája



A maxmin konvolúciós módszer meglehetősen primitív módon oldja meg a 'szakadékok' problémáját. Feltételezi, hogy csak egycsúcsú tagságfüggvények vannak, ahol a 'bal láb' nem szigorúan monoton nő, a 'jobb láb' nem szigorúan monoton csökken. Ezen a módon a szakadékok betömhetők (lásd 4. ábra) és furcsa 'lépcsők' keletkeznek az eredmény fuzzy halmaz tagságfüggvényében. Így a maxmin konvolúció a diszkrét fuzzy számok kezelésének egy igen durva megközelítése, ráadásul csak egycsúcsú fuzzy halmazok kezelésére alkalmas. A következő részben egy új megközelítést vezetünk be, ami más módszerrel oldja meg a 'szakadékok' problémáját.

3. Szakaszonként lineáris, több csúcsú tagságfüggvénnyel rendelkező fuzzy számok aritmetikája

Ha bonyolult fuzzy rendszerek output fuzzy számaival szeretnénk műveleteket végezni, akkor lehetővé kell tenni olyan több csúcsú tagságfüggvények használatát, ahol az egyes csúcsok tagsági értéke egynél kisebb is lehet. Alapvető feltételezésünk, hogy szakaszonként lineáris tagságfüggvények segítségével bármilyen profil elfogadható pontossággal leírható.

3.1 Fuzzy szám koncepció

Legyen A egy speciális fuzzy szám, amely tetszőleges számú töréspontból (alaphalmaz érték – tagságfüggvény párok) és a szomszédos töréspontokat összekötő lineáris szakaszokból áll (lásd 5. ábra):

$$A = \{[a_i, \mu_A(a_i)] \mid i = 1, \ldots, n,\ a_i \in U_A\} \cup \{(a, \mu) \mid$$
$$\mu = \beta\mu_A(a_i) + (1-\beta)\mu_A(a_{i+1}), a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1}, \tag{3.1}$$
$$\beta, \mu \in [0,1], a \in I\!R, i = 1, \ldots, n-1\}$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n \tag{3.2}$$

$$a_{i+1} - a_i \text{ nem konstans } i = 1, \ldots, n-1 \text{ esetén.} \tag{3.3}$$

ahol:

U_A - az alaphalmaz univerzuma

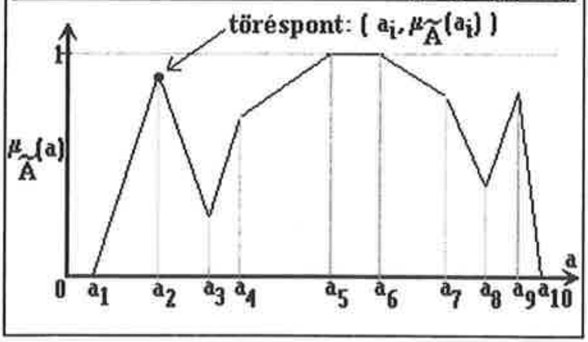
a_i - az i-edik töréspont alaphalmaz értéke

$\mu_A(a_i)$ - az i-edik töréspont tagságfüggvény értéke

n - a töréspontok száma

A töréspontok alaphalmaz értékei szigorúan növekvő sorrendben helyezkednek el. A szomszédos töréspontok közt eltérő távolság lehet. Így a tagságfüggvény szakaszonként differenciálható (nem tartalmazhat függőleges szakaszokat). A szakaszonként lineáris tagságfüggvény alkalmazása lehetővé teszi a diszkrét és a folytonos megközelítés kombinálását. Lássuk, hogyan végezhetünk aritmetikai műveleteket ilyen fuzzy számokon.

5. ábra Szakaszonként lineáris tagságfüggvény



3.2 A 'maxmin szkenelés' fuzzy aritmetikai módszere

A módszert itt csak két operandusz esetén mutatjuk be. Több operandusz használatával a következő részben foglalkozunk majd. Elsőként, tegyük fel, hogy A (lásd 3.1) és B operanduszok szakaszonként lineáris tagságfüggvénnyel rendelkeznek:

$$\begin{aligned} B = \{[b_j, \mu_B(b_j)] \mid j = 1, \ldots, m,\ b_j \in U_B\} \cup \{(b, \mu) \mid \\ \mu = \beta\mu_B(b_j) + (1-\beta)\mu_B(b_{j+1}), b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j+1}, \\ \beta, \mu \in [0,1], b \in I\!R, j = 1, \ldots, m-1\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Az éles operátor legyen:

$$z = f(a, b)\ . \tag{3.5}$$

A célunk az, hogy meghatározzuk az eredmény fuzzy szám szakaszonként lineáris tagságfüggvényét.

$$Z = \{(z, \mu_Z(z)) \mid z \in [z_1, z_r],\ z_1, z_r \in U_Z\} \tag{3.6}$$

Az operanduszok Descartes szorzata:

$$\begin{aligned} C = \{[(a,b), \mu_C(a,b)] \mid a \in [a_1, a_n],\ b \in [b_1, b_m], \\ \mu_C(a,b) = \min[\mu_A(a), \mu_B(b)]\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Második lépésben megpróbálunk szakaszonként lineáris profilokat kivágni A és B Descartes szorzatából (lásd 6. ábra). A szkenelt P profilokat 4 lehetséges irányban definiáljuk:

1. b tengellyel párhuzamosan:

$$\begin{aligned} P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid i = k,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_i, b_{j+1}),\ a = \beta a_i + (1-\beta)a_i, \\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j+1},\ \beta, \mu \in [0,1],\ i = k,\ j = 1, \ldots, m-1\big\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

2. a tengellyel párhuzamosan:

$$\begin{aligned} P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid i = 1, \ldots, n,\ j = k,\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1}, b_j),\ a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1}, \\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_j,\ \beta, \mu \in [0,1],\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = k\big\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

3. Diagonális 1:

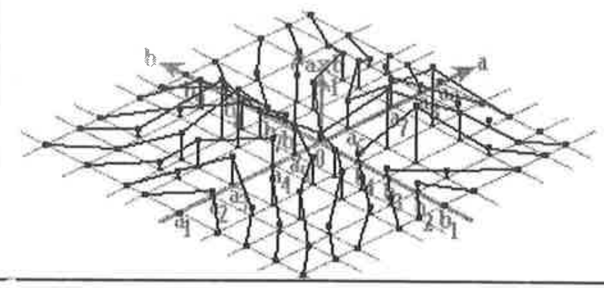
$$\begin{aligned} P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid i + j = k \in Z,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1}, b_{j-1}),\ a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1}, \\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j-1},\ \beta, \mu \in [0,1],\ i + j = k,\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = 2, \ldots, m\big\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

4. Diagonális 2:

$$P_k = \{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid j = i + k,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in Z\} \cup$$
$$\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1}, b_{j+1}),$$
$$a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1},\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j+1},\ \beta, \mu \in [0,1],$$
$$j = i + k,\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, m-1\} \tag{3.11}$$

Egy szkenelt profil a Descartes szorzat szomszédos 'oszlopait' (az operanduszok törésponti alaphalmaz értékeinek párosításai fölötti tagságfüggvény értékek) tartalmazza töréspontokként, valamint a szomszédos töréspontokat összekötő lineáris szakaszokat. (A 6. ábrán diagonális 1 tipusú szkenelést láthatunk az $a < 0$, $b > 0$ és $b < 0$, $a > 0$ szektorokban, valamint diagonális 2 tipusú szkenelést az $a > 0$, $b > 0$ és $a < 0$, $b < 0$ szektorokban.)

6. ábra Szkenelt profilok A és B fuzzy számok Cartesian szorzatában z = a x b éles operátornál



A szkenelési irány kiválasztása alapvető fontosságú a módszer pontossága szempontjából. Elméletileg a szkenelés ideális iránya bármely (a_i, b_j) pont esetén az éles operátorfüggvény adott pontbeli gradiensvektora. Így a szkenelés mindig a függvény z-szintvonalaira merőlegesen futhat. A későbbiekben azonban szó lesz róla, hogy a szkenelésnek ajánlatos a Descartes szorzat tengelyirányban vagy átlósan közvetlenül szomszédos oszlopai mentén haladnia, mert távolabb eső oszlopok összekötése jelentős torzítást okozhat. Az egyszerű operátorfüggvények (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) szkenelésére a fentebb definiált négy irány megfelelő pontosságú közelítést ad (a 6. ábra szkenelési irányai összevethetők a szorzat függvény sajátosságaival).

A második lépésben minden P_k szkenelt profilt leképezünk Z eredmény fuzzy halmaz $(z, m_Z(z))$ terébe. A leképezett profilokat P'_k-val jelöljük. A szkenelt profilok törési pontjai könnyen leképezhetők $z = f(a,b)$ éles operátorfüggvény segítségével:

$$\begin{aligned} P_k^{\text{discr.}} &= \{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid a \in [a_1, a_n],\ b \in [b_1, b_m]\} \rightarrow \\ P_k'^{\text{discr.}} &= \{f(a_i, b_j), \mu_C(a_i, b_j)\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

A probléma a szkenelt profilok lineáris szakaszainak leképezésével van. Nemlineáris operátorfüggvény esetén a leképezett szakaszok elvesztik linearitásukat. Ezt figyelmen kívül hagyva, a leképezett profil töréspontjai közt is lineáris szakaszokat definiálunk. A leképezett profilok a következőképppen definiálhatók (diagonális 2 tipusú szkenelés esetén):

$$\begin{aligned} P_k' = \big\{&[f(a_i, b_j), \mu_C(a_i, b_j)] \mid j = i + k,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\big\} \cup \\ &\big\{(z, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1}, b_{j+1}), \\ &z = \beta f(a_i, b_j) + (1-\beta) f(a_{i+1}, b_{j+1}), \beta, \mu \in [0,1], \\ &j = i + k,\ i = 1, \dots, n-1,\ j = 1, \dots, m-1\big\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Analitikus értelemben, a fenti lépés helytelen. De vegyük tekintetbe, hogy a töréspontok számának növekedésével a hiba egyre kisebb lesz. Később látni fogjuk, hogy a töréspontok száma több fuzzy aritmetikai művelet elvégzése folyamán növekvő tendenciát mutat. A hiba csökkentése végett csak szomszédos Descartes szorzat oszlopok közt haladó szkenelést engedtünk meg.

A harmadik lépésben meghatározzuk Z eredmény fuzzy szám tagságfüggvényét, mint a leképezett profilok unióját:

$$Z = \{[z, \mu_Z(z)] \mid \mu_Z(z) = \cup_k P'k,\ z \in U_z\} eqno(3.14)$$

A gyakorlatban célszerűbb mindig az utoljára leképezett profil unióját venni az összes eddigi leképezett profil uniójával. Így két, szakaszonként lineáris profil uniójának meghatározására vezethetjük vissza a problémát. Egy alkalmas algoritmussal páronként összehasonlíthatjuk a két profil lineáris szakaszait, megkeresve azokat a lokális maximumokat és metszéspontokat, amelyek az unió fuzzy halmaz profilját alkotják. A szakaszmetszéspontok új töréspontokként jelennek meg az eredményben. Hogy van-e két lineáris szakasznak metszéspontja, azt a következőképpen állapíthatjuk meg:

Legyenek $(z_{11}, \mu_Z(z_{11}))$ és $(z_{12}, \mu_Z(z_{12}))$ az egyik szakasz végpontjai.

Legyenek $(z_{21}, \mu_Z(z_{21}))$ és $(z_{22}, \mu_Z(z_{22}))$ a másik szakasz végpontjai.

$$\gamma = \frac{[z_{21} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{12}) - \mu_Z(z_{22})] + [z_{22} - z_{12}] \times [\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})]}{[\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})] \times [z_{11} - z_{12}] - [z_{21} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})]} \tag{3.15}$$

$$\delta = \frac{[z_{11} - z_{12}] \times [\mu_Z(z_{22}) - \mu_Z(z_{12})] + [z_{12} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})]}{[\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})] \times [z_{21} - z_{22}] - [z_{11} - z_{12}] \times [\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})]} \tag{3.16}$$

Ha $[\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})] \times [z_{11} - z_{12}] - [z_{21} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})] \neq 0$ és $\gamma, \delta \in [0, 1]$, a metszéspont létezik, a következő koordinátákkal:

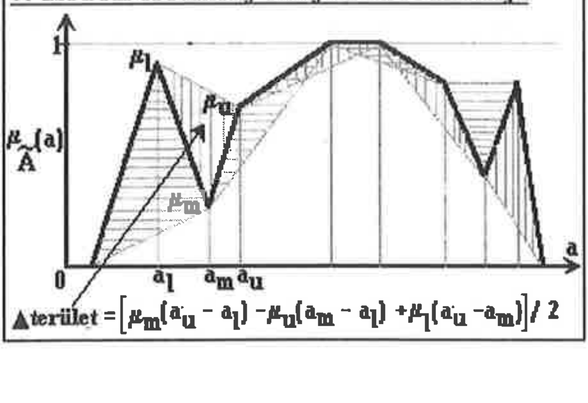
$$[\gamma z_{11} + (1 - \gamma) z_{12}], \quad [\gamma \mu_Z(z_{11}) + (1 - \gamma) \mu_Z(z_{12})] \, . \tag{3.17}$$

3.3 A maxmin szkenelés módszerének értékelése

A maxmin szkenelés fuzzy aritmetikai módszer legnagyobb előnye, hogy jobb közelítését adja a kiterjesztési alapelv szerinti elméleti eredménynek, mint a maxmin konvolúció, mert itt nincsenek konvolúciós 'lépcsők' (lásd a számpéldát alább). Ezenkívül lehetőség nyílik összetett formájú, több csúcsú tagságfüggvények kezelésére, míg a maxmin konvolúció egycsúcsú tagságfüggvényeket feltételez. A szakaszonként lineáris tagságfüggvény használata megengedi a diszkrét és a folytonos megközelítés kombinálását (a töréspontokat diszkrét elemekként is értelmezhetjük), míg a maxmin konvolúció kizárólag diszkrét módszer.

A legnagyobb hátrány, hogy nemlineáris operátorfüggvény esetén az eredmény fuzzy halmaz nem pontos, csak közelítése az elméleti eredménynek. Ráadásul, a maxmin szkenelés több operátoros kiterjesztése igen kevéssé hatékony. k darab operanduszt feltételezve, a Descartes szorzat $\mathbb{R}^{k+1}$ tér, így a szkenelendő profilok száma rendkívül gyors ütemben nő az operanduszok számának növekedtével. Így célszerűbb az operanduszokon páronként műveleteket végezni. A maxmin szkenelésnek jóval magasabb a számítási igénye, mint a maxmin konvolúciónak (bár ez utóbbi csak diszkrét esetek kezelésére alkalmas). Ezért nem ajánljuk használatát olyan területeken, ahol fuzzy számok trianguláris vagy trapezoidális tagságfüggvények alkalmazásával is jól kezelhetők. Ennél bonyolultabb esetben lehetőség van a trianguláris-trapezoidális és a szakaszonként lineáris tagságfüggvények kombinált használatára. Trapezoidális és trianguláris modulok bármiféle metszetét és unióját könnyedén átkonvertálhatjuk szakaszonként lineáris tagságfüggvénnyé. Ellenvetésként felhozható, hogy a konverzió fordított irányban nem működik, ha olyan fuzzy halmazok is vannak, ahol egyes csúcsok tagságfüggvény értéke nem éri el az egyet. A maxmin szkenelés eredményei azonban már néhány művelet elvégzése után is erősen a trapezoidális forma felé tendálnak, még akkor is, ha az operanduszok több csúcsúak voltak. A jelenség úgy érthető meg a legjobban, ha a Descartes szorzatot egy 'hegyvidéknek' tekintjük, amit különböző irányokból megszemlélünk. A megfigyelési pozíció változtatásával a völgyek könnyen eltűnhetnek a csúcsok között. További érdekes problémát jelent, hogy néhány művelet elvégzése után az eredmény fuzzy halmaz töréspontjainak száma gyors növekedésnek indul. Egy műveletben a Descartes szorzatból maximálisan $n \times m$ darab töréspont jöhet létre, ehhez járulnak hozzá a leképezett profilok uniója során szakaszmetszéspontként jelentkező töréspontok. Egyrészt, ez a jelenség természetes, hiszen az eredménynek tartalmaznia kell majdnem minden információt, amit az operanduszok tartalmaztak. Másrészt, a jelenség káros, mert feltornássza a műveletek számítási igényét. Így valamilyen módon redukálnunk kell az eredmény fuzzy szám töréspontjainak számát. A redukció alapelve, hogy minimalizáljuk a tagságfüggvény integráljában bekövetkező változást, amit egyes törési pontok eltüntetése jelent (lásd 7. ábra). Először azt a törési pontot tüntetjük el, amely a legkisebb területű háromszöget alkotja jobb és bal oldali szomszédjával. Mindaddig folytatjuk a töréspontok eltüntetését, amíg a kumulált területi változás meg nem haladja az eredeti integrál egy bizonyos százalékát. Azonos területű háromszögek estén először a 'völgy' háromszöghöz tartozó töréspontot tüntetjük el, mert a maxmin szkenelés eredménye általában alulról közelíti a kiterjesztési alapelv szerinti elméleti eredményt.

7. ábra Az eredmény fuzzy szám redukciója



1. Számpélda: A maxmin konvolúció és a maxmin szkenelés összehasonlítása

Tételezzük fel, hogy két, szakaszonként lineáris tagságfüggvénnyel rendelkező fuzzy számot akarunk összeszorozni (csak a töréspontokat soroltuk fel):

$$A = \{(0,0),(1,0.5),(2,1),(3,0.75),(4,0.5),(5,0.25),(6,0)\} ,$$

$$B = \{(0,0),(1,0.25),(2,0.5),(3,0.75),(4,1),(5,0.5),(6,0)\} ;$$

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5, a_7 = 6\,,$$

$$b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 5, b_7 = 6\,.$$

Mindkét operandusz tagságfüggvényének burkológörbéje trianguláris (lásd 8. ábra). Így a trianguláris aritmetika (lásd 2.21) eredményével történő összehasonlítás révén ellenőrizhetjük az eredményeket. Mivel $z = a \times b$ függvény mindkét elsőrendű parciális deriváltja nemnegatív bármely (a_i, b_j) elem felett az $a > 0$, $b > 0$ szektorban, így diagonális 2 irányú szkenelést választunk. A szkenelt profilok a következők (csak a töréspontokat soroltuk fel):

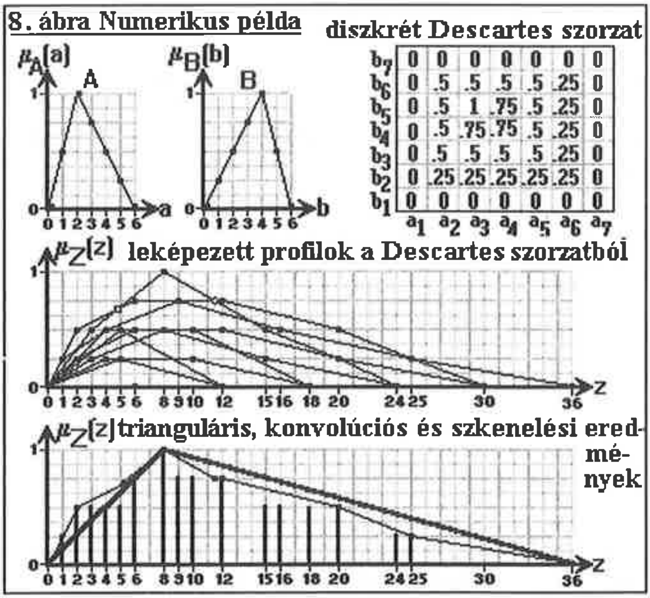
$\{[(a_7, b_1), 0]\}$;

$\{[(a_6, b_1), 0], [(a_7, b_2), 0]\}$;

$\{[(a_5, b_1), 0], [(a_6, b_2), 0.25], [(a_7, b_3), 0]\}$

stb.

A következő lépésben minden szkenelt profilt leképezünk a $(z, \mu_Z(z))$ térbe (lásd 8. ábra), és a leképezett profilok unióját vesszük. Az unióból két új törési pont keletkezik (körökkel jelölve pontok helyett az ábrán).



8. ábra Numerikus példa

A trianguláris, konvolúciós és szkenelési eredményeket összehasonlítva kitűnik, hogy a maxmin szkenelés eredménye csak egy közelítés a trianguláris eredményhez képest. De sokkal jobb eredményt ad, mint a konvolúció, elkerülve a 'lépcsőket' (lásd sötét oszlopok), amelyek a maxmin konvolúció diszkrét eredményében megjelennek.

Irodalom

1. Baas, S. M. - Kwakernak, H.: Rating and ranking of multiple aspect alternative using fuzzy sets. Automatica, vol. 13, 47–58. 1977
2. Dubois, D. - Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press. New York. 1980
3. Esthatiou, J. - Rajkovic, V.: Multiattribute decision making using a fuzzy heuristic approach. IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-9, 326–333. 1979
4. Jain, R.: Decision making in the presence of fuzzy variables IEEE Trans. On systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-6, 698-703, 1976
5. Kaufmann, A.-Gupta, M. M.: Introduction to Fuzzy Arithmetic. Van Nostrand. New York. 1985
6. Laarhoven, P. J. M. - Pedrycz, W.: A fuzzy extension of Saaty's priority theory. Fuzzy Sets and Systems, vol. 11, no. 3, 229–241, 1983
7. Mizumoto, M. - Tanaka, K.: Algebraic properties of fuzzy numbers. IEEE International Conference of Cybernetics and Society, 559–563, 1976
8. Zadeh, L. A.: Fuzzy Sets. Information and Control, vol. 8, 338–353, 1965
9. Zadeh, L. A.: Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes. IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-2, 28–44, 1973

FUZZY ARITHMETIC WITH 'SHARPLESS' SETS

In this paper, we overview and evaluate the existing fuzzy arithmetic methods at first. Then we introduce a developed approach to make arithmetic operations on fuzzy numbers defining sectionwise linear membership functions and maxmin scanning technique which avoids some failures of the maxmin convolution method.

Key words: fuzzy numbers, fuzzy arithmetics, extension principle, maxmin convolution, sectionwise linear membership, maxmin scanning.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

A BRUTTÓ HAZAI TERMÉK, AZAZ A GDP STATISZTIKÁJA[1]

HÜTTL ANTÓNIA
Miniszterelnöki Hivatal

A bruttó hazai termék, közismert angol betűjelével a GDP, talán a leggyakrabban hivatkozott statisztikai mutatószám. Erőssége, hogy egyetlen skalárba tömörítve és halmozódásmentesen fejezi ki a gazdaság összesített teljesítményét. Minthogy értéke nem függ a szervezeti és technológiai kapcsolatoktól és azok változásától, ezért igen alkalmas a gazdasági fejlettség térbeli és időbeni összehasonlítására. A gazdaság egészét átfogó mérőszám, így leggyakrabban ezt használják viszonyítási alapnak a részjelenségek relatív szintjének jellemzésére.

Látszólagos egyszerűsége ellenére a bruttó hazai termék a tartalmi meghatározást és a statisztikai számszerűsítést tekintve igen bonyolult fogalmat takar. A bruttó hazai termék azt a közgazdasági azonosságot számszerűsíti, hogy a gazdaságban bármely időszakban a megtermelt új érték, a keletkezett jövedelem és a végső felhasználásra rendelkezésre álló termékek és szolgáltatások értéke szükségképpen megegyezik.[2] A bruttó hazai terméket tehát három oldalról lehet meghatározni:

- a termelési tevékenységek (ágazatok) által előállított bruttó hozzáadott értékek összege, azaz a termékek és szolgáltatások kibocsátásának és

[1]Beérkezett: 1997. április 23.

[2]Legyen (az angol elnevezések széles körben használt rövidítésével): X – kibocsátás; IM – import; EX – export; IC – termelő felhasználás; HC – lakossági fogyasztás; CC – közösségi fogyasztás; GFCF – bruttó állóeszköz-felhalmozás; CI – készletváltozás; GVA – bruttó hozzáadott érték; L – munkavállalói jövedelem; CFC – értékcsökkenés (a statisztikában használt fogalom: állóeszközök felhasználása); NOS – nyereség (a statisztikában használt fogalom: nettó működési eredmény). Akkor a források és felhasználások azonossága: $IM + X = IC + HC + CC + GFCF + CI + EX$ és a termelés és a keletkezett jövedelmek azonossága: $GVA = L + CFC + NOS$ ebből $GVA = X - IC = HC + CC + GFCF + CI + (EX - IM)$ (Az egyszerűség kedvéért az összefüggésekből kihagytuk a termelési adókat és támogatásokat. A termelési adók és támogatások elszámolásával a későbbiekben a termékek és szolgáltatások értékelése során foglalkozunk.)

a termelés során felhasznált termékek és szolgáltatások összegének a különbsége;

- a keletkezett jövedelmek, azaz munkavállalói jövedelem, az értékcsökkenés (statisztikai szóhasználatban állóeszközök felhasználása) és a nettó működési eredmény összege;
- a lakossági fogyasztás, a közösségi fogyasztás, a bruttó állóeszköz-felhalmozás és készletváltozás, valamint az export és import egyenlegének az összege.

1. Az adatforrásokról általában

A háromoldalú megközelítés egyben azt is jelenti, hogy a bruttó hazai termékre három önálló becslés készíthető. A három önálló becslés teremti meg a konzisztenciát a termelési, jövedelmi és felhasználási folyamatok statisztikái között. A többoldalú kölcsönös ellenőrzés következtében az ebbe a konzisztens keretbe illeszkedő adatokat lényegesen megbízhatóbbnak tekinthetjük, mint az egyes részfolyamatokra készített különálló alapstatisztikák adatait.

Megfigyelhetjük tehát a termelés alakulását, összegezhetjük a jövedelmeket, és rendszerezhetők a végső felhasználás tételei. Legkönnyebben a termelésre vonatkozó adatforrások érhetők el, hiszen azok jórészt ráépíthetők a vállalatok és költségvetési intézmények számviteli nyilvántartásaira. Jóval heterogénebbek a végső felhasználás adatforrásai. Ugyanakkor a makroszintű gazdaságpolitika elsősorban a végső felhasználás alakulását kíséri figyelemmel, tekintettel arra, hogy a szokásos gazdaságpolitikai eszközök — ilyen az árfolyam, a kamatláb, a költségvetési hiány alakítása — közvetlenül inkább a kereslet befolyásolására alkalmasak. A végső fogyasztás alakulása egyrészt a termelési adatok felhasználási célok szerinti részletezésével, az ún. termékáramlási módszerrel becsülhető. Ezenkívül számos egyéb adatforrás létezik az egyes tételek becslésére: így a háztartás-statisztikai felvételek a lakossági fogyasztás alakulását mutatják, a vámstatisztikai adatok a külkereskedelmi áruforgalom adatforrását adják. A beruházások külön megfigyelése a múltban szinte kizárólagosan az állami tulajdonon alapuló gazdaságok statisztikai szolgálatára volt jellemző. A beruházások központi irányítása ugyanis megkövetelte azt, hogy pontos ismeretekkel rendelkezzünk a beruházási folyamatok alakulásáról. A piacgazdálkodást folytató országokban a tárgyi eszközök beszerzésének adatait a statisztika hagyományosan többnyire a termékáramlási összefüggésekből, azaz a beruházási javak termelésének és külkereskedelmének alapstatisztikáiból vezeti le. Az utóbbi években azonban a tőkefelhalmozás tételei között egyre jelentősebbé válnak olyan elemek, amelyek a termékáramlási módszerrel nem azonosíthatók.[3] A megváltozott körülményekhez igazodva a statisztikai szolgálat egyre több országban rendszeresíti a beruházások közvetlen megfigyelését.

A jövedelemi folyamatok, a megtakarítások szintjének és szerkezetének adatai képezik a statisztikai alapját annak, hogy megismerhessük a gazdasági alanyok viselkedését. A jövedelmi folyamatok elemzéséhez a kiindulópontot a bruttó hazai termék jövedelmi szerkezete adja. Ez mutatja meg, hogy a termelésben keletkezett jövedelem hogyan oszlik meg a termelési tényezők, illetve a termelési tényezőket birtokló szektorok között. A jövedelemstatisztikák nagyrészt az adóbevallások adatait használják fel, mivel az önálló statisztikai jövedelem-felvételekből nyerhető információk értéke, a válaszadások magas megtagadási aránya és a jövedelmek eltitkolása miatt világszerte kétségeket ébreszt.

2. Fogalmak, meghatározások

Hazai termék és nemzeti jövedelem

A bruttó hazai termékből származtatjuk a nettó hazai termék (NDP), a bruttó nemzeti jövedelem (GNI) és a nettó nemzeti jövedelem (NNI) mutatóját. A nettó és a bruttó mutatók között az állóeszközök értékcsökkenésének elszámolási módja jelenti a különbséget. Közgazdasági értelemben tulajdonképpen a nettó mutatók relevánsak, mivel ezek az állóeszközöknek a termelés során történt elhasználását a költségek között mutatják ki, és nem tekintik ezt a létrehozott új érték illetve a keletkezett jövedelem részének.[4]

A bruttó nemzeti jövedelem, régebbi elnevezésével a bruttó nemzeti termék (GNP) a termelési tényezők tulajdonosainak a termelésből származó (elsődleges) jövedelmeinek az összege. Ez azt jelenti, hogy a bruttó hazai terméket, azaz a keletkezett jövedelmeket felosztjuk a termelési tényezők tulajdonosai között. Mivel a már megtermelt értékösszeg elosztásáról van szó, ezért zárt gazdaságban a bruttó hazai termék és a bruttó nemzeti jövedelem, más összetételben, de összesenben mindig azonos érték. Amennyiben a termelésben külföldi tulajdonban lévő termelési tényezők is közreműködnek, úgy a bruttó hazai termék értékét módosítani kell a külföldre menő (−) és a külföldről jövő (+) termelési tényező jövedelmek egyenlegével. Magyar-

---

[3] Gondoljunk csak az immateriális eszközök (például szabadalmak, szoftverek) felhalmozására, a pénzügyi lízing elterjedésére. Ez utóbbit a lízinget használó egység hitelből történő beruházásaként számoljuk el.

[4] A bruttó mutatók elterjedtségét az magyarázza, hogy — ahogy arra a későbbiekben még visszatérünk — az értékcsökkenés statisztikai módszerekkel igen nehezen mérhető fogalom.

országon igen magas a külföldi hitelekből és újabban a külföldi működő tőke befektetésekből finanszírozott termelés, ezért magas az ezeknek járó tulajdonosi jövedelem (kamat és osztalék) nagysága is. A bruttó nemzeti jövedelem ennek megfelelően számottevően kisebb, mint a megtermelt bruttó hazai termék.[5] Az elnevezéseket tekintve érdemes megjegyezni, hogy csak a hagyományok követése miatt különböztetjük meg a fogalmakat a hazai, illetve a nemzeti jelzővel. Mindkét esetben a nemzetgazdaságban ugyanazon rezidens gazdasági szervezeteket figyeljük meg, a különbség csupán abban áll, hogy a rezidensek termeléséről, vagy tulajdonosi jövedelméről van-e szó.

Bruttó vagy nettó új érték

Mint már említettük, a bruttó hazai termék és a bruttó nemzeti jövedelem elnevezésben a bruttó jelző arra utal, hogy az összeg tartalmazza az állóeszközök termelés során való elhasználódásának az értékét is. Ez semmiképpen nem tekinthető a termelés során keletkezett új értéknek. Az elméletileg tiszta fogalmaktól eltérő kompromisszumot elsősorban az a megfontolás indokolja, hogy igen bizonytalanul lehet csak mérni az állóeszközök közgazdasági értelemben releváns értékcsökkenését.

Mi képezi a nehézséget? A számviteli nyilvántartásokban ugyan szerepel az állóeszközök értékcsökkenése, de ez valójában azt az összeget mutatja, amely összeget a költségek között az adótörvények szerint adómentesen el lehet számolni. Ennek az összegnek már csak azért sincs sok köze a közgazdasági értelemben releváns elhasználódáshoz, mert az amortizációs kulcsok az eszközök eredeti beszerzési értékére vonatkoznak. Mivel az állóeszközök beszerzése sok esetben évtizedekkel korábbi időszakban történt, a több év alatt kumulálódott infláció következtében az eredeti beszerzési érték esetleg csak a töredékét jelenti ahhoz képest, mintha az elszámolási időszak árszínvonalán értékelnénk az állóeszközt. Ráadásul, az állóeszközök rendszerint eltérő időpontokban kerülnek beszerzésre. Az eltérő időszakok egységárai eltérő mértékegységet jelentenek (ugyanis közben változik a forint vásárlóereje), az eltérő mértékegységben kifejezett értékek összegzése eleve értelmetlen. A számviteli elszámolástól való egyértelmű elhatárolódás explicit kifejezése céljából a statisztika az értékcsökkenés helyett az állóeszközök felhasználása kifejezést alkalmazza.

Az állóeszközöknek az elszámolási időszak újrabeszerzési árain való becslésére két lehetőség kínálkozik:

Az egyik lehetőséget az állóeszközök megfigyelésére rendszeresített sta-

[5] A hivatalos magyar statisztika nem közli a bruttó nemzeti jövedelem értékét, de szakértői becslések szerint annak értéke több száz milliárd forinttal kisebb, mint a bruttó hazai termék.

tisztikai adatgyűjtések jelenthetik. A teljes cenzus azonban meglehetősen költséges, az eszközök egyedi jellege miatt viszont nehéz reprezentatív mintát választani.

A másik módszer az ún. örök-készletezési modell.[6] Ennek alapelve, hogy az állóeszközök beszerzésének idősorát a beruházás statisztika megadja, az állóeszközök kiselejtezésének idősorát viszont az állóeszközök életgörbéjére vonatkozó feltevésekkel lehet modellezni. Amennyiben a beruházás-statisztikából az állóeszközök adatai részletes anyagi-műszaki bontásban ismertek, az életgörbék — akár kis mintából, akár nemzetközi tapasztalatokból — viszonylag jól becsülhetők.

A jólét méréséről

Piacgazdaságban az egyensúlyi árak egyszerre fejezik ki a termékek és szolgáltatások termelési költségeinek arányait és a felhasználásuk relatív hasznosságát. Ebből következően a bruttó hazai terméket, mint a gazdaságban felhasznált összes termék és szolgáltatás értékét, azaz a hasznosságok aggregátumát, a jólét mutatójaként is szokták értelmezni.

Ezzel kapcsolatban azonban feltétlenül szükséges két megszorító megjegyzést tenni. Először is, a széles értelemben vett társadalmi jólét az elfogyasztott javak tömegén kívül erősen függ nem-gazdasági tényezőktől, például a szabadság érzetétől vagy a fenyegetettséggel szembeni védelem mértékétől.

Másodszor, a bruttó hazai termék csak a termelésből eredő jólét mérésére alkalmas. Nem tudja ezzel szemben kifejezni az ún. sajnálatos szükségletek létezésének hatását. Ha csupán azért van szükség a termelés és a fogyasztás növelésére, hogy ellensúlyozza a jólét szintjének valamilyen káresemény által előidézett csökkenését, akkor a bruttó hazai termék ugyan nő, de aligha mondhatjuk, hogy a jólét is emelkedett. Ha például valamilyen járvány kitörése után nő az egészségügyi szolgáltatások kibocsátása, a bruttó hazai termék emelkedik, de korántsem javul a társadalom jóléte. Hasonlóképpen a háború után a helyreállítási periódusban gyorsan nő ugyan a bruttó hazai termék szintje, de mivel a háborús károkozást nem számoltuk el negatív termelésnek, vagyis a bruttó hazai termék csökkenésének, ezért a kimutatott növekedés nem fejezi ki a jólétnek a háború előtti állapothoz viszonyított tényleges szintjét. Ellenkező irányban, a felfedezések olyan pozitív externáliát jelentenek, amelyek lényegesen hozzájárulnak a társadalmi jólét növekedéséhez, de ez nem jelenik meg a bruttó hazai termék növekedésében.

---

[6] A módszer közismert angol betűjele PIM, lásd (12).

A termelés határai

Tekintettel arra, hogy a gazdaságstatisztika jellemzően termelés-orientált, a termelés fogalmának meghatározása egyben meghatározza a jövedelem és a végső felhasználás fogalmát. A statisztikák összeállításakor a közgazdaságtan viszonylag szélesen értelmezett termelés fogalmát a mérés lehetőségei korlátozzák.

A termelést olyan fizikai folyamatnak tekintjük, amely egy gazdasági alany (szervezeti egység) irányításával megy végbe, és amely során élőmunkát és állóeszközöket használnak fel abból a célból, hogy termék és szolgáltatás inputból termék és szolgáltatás outputot állítsanak elő. Követelmény, hogy a kibocsátott termék és szolgáltatás alkalmas legyen más gazdasági alanynak — piaci értékesítésben vagy más módon — való átadásra. Hasonlóképpen a feltételek között szerepel, hogy a felhasznált termék és szolgáltatás inputot más gazdasági alanytól — a piacon vagy más módon — lehessen beszerezni. A beszerzés és az átadás a két résztvevő önkéntes cseréjét jelenti. Intézményesített jellege miatt termelésnek számoljuk el a kormányzati intézmények által a társadalom egészének vagy egyes tagjainak ingyenesen nyújtott szolgáltatásokat,[7] bár ezek nem piaci módon kerülnek átadásra.

Az elméleti és a statisztikailag is mérhető termelés fogalma között elsősorban a háztartáson belül végzett tevékenységek és a természeti jelenségek képezik a határeseteket. Mivel a termékeket elvben mindig lehet piacosítani, a háztartáson belül saját fogyasztásra előállított termékeket beleszámítjuk a termelésbe. Ebben a körben a legnagyobb tételt a saját fogyasztásra termelt mezőgazdasági termékek jelentik. A szolgáltatások viszont jórészt egyedi jellegűek. A házilag készített ételt nehéz összehasonlítani a készen vett étellel, a szülői nevelés nem helyettesíthető a tanítói tevékenységgel. Ebben az esetben a ráfordítás oldalról vett értékelést sem alkalmazhatjuk, mivel a háztartáson belül végzett munkát nem tekinthetjük egyszerűen a jövedelemszerzés érdekében eszközölt munkainputnak, hiszen azt elsősorban nem-gazdasági szempontok motiválják. A háztartáson belül végzett szolgáltatások tetemes részét teszik ki a társadalom összes munkaráfordításának. Valamilyen mesterséges értéket adni mindezen tevékenységeknek, ez oly mértékben felpuhítaná az értékelést, hogy a termelési adatokat alkalmatlanná tenné a gazdaságstatisztikában játszott meghatározó szerepük betöltésére.

A háztartásokon belül végzett szolgáltatások közül kivételt jelent az az eset, amikor a tulajdonos a saját tulajdonában lévő lakásban lakva, valójában azt önmagától bérli. Ezt az esetet úgy tekintjük, mintha a lakástulajdonos és a bérlő két különálló egység lenne, és a lakástulajdonos piaci szolgáltatást

[7] Mivel azonban ezek a szolgáltatások a piacon jellemzően nem fordulnak elő, az értékelésükhöz a piaci árat nem tudjuk alapul venni. Ennek hiányában a termelés értékét a termelési ráfordítások összegével mérjük.

nyújt a bérlőnek. A kivételes eljárást több körülmény indokolja. Egyfelől szinte minden országban létezik a lakásbérletnek tényleges piaca, tehát a piaci ár megállapítható. A lakásszolgáltatás igen tetemes részét, Magyarországon 4,5–5%-át teszi ki a bruttó hazai terméknek, és országonként lényegesen eltérhet a ténylegesen bérelt és a tulajdonos által lakott ingatlanok aránya. Ebből következően a saját lakás bérlet figyelmen kívül hagyása nagymértékben torzítaná a nemzetközi összehasonlításokat.[8]

A természeti jelenségek esetén a termelés körét az az elv szabja meg, hogy egy szervezeti egység (gazdasági alany) felügyelete alatt történik-e a termelési folyamat, és birtokolja-e valaki a termelt terméket vagy szolgáltatást, vagy sem. Ennek megfelelően a halak tengerben való szaporodása nem minősül termelésnek, a mesterséges halszaporítás azonban igen. A fák növekedése az erdőben természeti jelenség, a mesterséges erdőtelepítés azonban termelés. A termelés meghatározásakor nem számít viszont az a körülmény, hogy a folyamat hasznos-e, vagy sem. Az eső és a napsütés a mezőgazdaság számára nélkülözhetetlen, mégsem jelent termelést. Ennek megfelelően a tiltott tevékenységek is termelésnek minősülnek, ha azok a piaci résztvevők önkéntes közreműködésén alapulnak. A kábítószerek előállítása és kereskedelme kifejezetten káros tevékenység, mégis termelésnek kell elszámolni.[9]

A köztudatban széles körben elterjedt hiedelemmel szemben a magyar statisztika bár a tiltott tevékenységet nem, az informális és rejtett tevékenységek nagy részét viszont számba veszi. Rejtett tevékenységnek tekintjük a legális, de szándékosan eltitkolt tevékenységeket. Ennél szélesebb értelemben használjuk az informális gazdaság fogalmát. A rejtett tevékenységeken kívül ide soroljuk mindazon tevékenységeket, amelyek nem társadalmilag szervezett formában mennek végbe, és ezért nem lehet megfigyelni ezeket a statisztika hagyományos módszereivel, például kérdőíves adatgyűjtéssel. Tipikusan ilyen tevékenység a háztartásokon belül saját felhasználásra történő termelés. A mezőgazdaságban a termékmérlegek összeállítása biztosítja, hogy a termelés egésze — beleértve az informális (esetleg rejtett) háztáji gazdálkodást — elszámolásra kerüljön. Hasonló a helyzet a lakásépítéseknél, az építési és lakhatási engedélyek alapján mód van a teljes körű számbavételre, függetlenül a bevallott építési költségektől. A regisztrált kisvállalkozók termelését a technológiai hasonlóság alapján az ágazatra jellemző fajlagos mutatókkal becsüljük, beleértve az eltitkolt jövedelmeket is. A gondos becslések ellenére valószínűsíthető, hogy a viszonyítási alapok hiánya miatt kimaradnak bi-

[8] Gondoljuk csak meg, amennyiben a sajátlakás-szolgáltatás nem lenne termelésnek elszámolva, akkor az elmúlt években végbement lakásprivatizáció hatására úgy tűnne, mintha jelentősen csökkent volna a bruttó hazai termék kimutatott összege.

[9] A tiltott tevékenységeket a statisztikai hagyományos módon aligha tudja megfigyelni. Ennek következtében a hivatalosan közölt adatok az országok többségében nem is tartalmazzák a tiltott tevékenységek értékét.

zonyos nem regisztrált szolgáltatások, valamint egyes olyan, az adóbevallásban a termelő felhasználás között kimutatott tételek, amelyek az előzőekben adott meghatározás értelmében inkább a lakossági fogyasztásba tartoznának. Ezeknél a tételeknél a megfigyelés elsősorban ott ütközik korlátokba, ahol a részben termelési és részben lakossági fogyasztási célokat szolgáló költségelemeket kellene arányosan szétosztani. Ilyen tételt jelent például a vállalati személyautók és a mobil telefonok magáncélú használata.

Felhasználás a termelés érdekében

Mint már szó volt róla, a bruttó hazai termék halmozódásmentes mutató, vagyis mindig csak az adott termelési fázis során létrehozott új értéket számolja el (beleértve az állóeszközök értékcsökkenését), de nem tartalmazza a korábbi termelési fázisok által előállított és a folyó termelés érdekében felhasznált termékek és szolgáltatások értékét.

Az esetek többségében egyértelműen elhatárolható, mit tekintsünk a termelés érdekében történő felhasználásnak, és mit ne. Határesetet jelenthet néhány olyan juttatás, amelyben az alkalmazottak a termelésben való részvétel során részesülnek. Jó példa erre a szolgálati autó, a szakképzésre fordított vállalati ráfordítások, vagy a munkaruha. Ezeket lehetne akár lakossági fogyasztásnak, akár termelő felhasználásnak értelmezni. Az elhatárolás lényegében azt az elvet követi, hogy az alkalmazott hajlandó lenne-e saját jövedelméből megvásárolni azt a terméket vagy szolgáltatást, vagy sem. Másképpen megfogalmazva, tudja-e az igénybevevő a terméket vagy szolgáltatást a munkán kívül is használni, vagy sem. Az overál vagy az egyenruha használata termelő felhasználás, a munkaidőn kívül is használt szolgálati autó viszont egyéni lakossági fogyasztás. Ahogy az előzőekben már említettük, ennek egy része a szándékos eltitkolás következtében átkerül a rejtett jövedelmek közé.

A termelő felhasználás kizárólag a jelen termelése érdekében történő felhasználásokat veszi számba, elválasztva ettől a jövő termelése érdekében eszközölt állóeszköz-felhalmozásokat. A felhalmozás fogalmát a statisztika viszonylag szűken értelmezi. Csak abban az esetben tekintünk egy tevékenységet állóeszköz-felhalmozásnak, ha azonosítani és értékelni tudjuk a tevékenység által létrehozott eszközt. Ily módon, mivel nem lehet egyértelmű szabályokat adni arra vonatkozóan, hogyan értékeljük a társadalomban felhalmozott tudás állományát, ezért az oktatást vagy a kutatás-fejlesztést nem tekintjük állóeszköz-felhalmozásnak. Ezzel összefüggésben ismételten hangsúlyozni kell, hogy a statisztikák körét nem a tevékenység hasznossága, hanem a mérhetősége szabja meg.

Ahogy már szó volt róla, számbavételi nehézségek miatt a magyar statisztika a bruttó hazai termékből nem választja le az értékcsökkenés értékét. Ezzel összhangban a felhasználások között az állóeszközök felhalmozását is bruttó módon veszi figyelembe, nem különítve el a pótlást és a kapacitásbővítést szolgáló beruházásokat.

3. A termékek és szolgáltatások értékelése

Piacgazdaságban a piaci ár a tökéletes értékmérő. Előnye, hogy kifejezi a kereslet és kínálat egyensúlyát, valamint az, hogy objektív értékelést jelent. A keresleti ár a hasznosságot, a kínálati ár a termelési költségeket tükrözi. Az egyensúlyi helyzetben a két ár megegyezik. Az objektivitás pedig ebben az összefüggésben azt jelenti, hogy nem az egyes eladók és vevők alakítják az árakat, hanem az lényegében tőlük függetlenül, az elvben végtelen számú piaci csere során határozódik meg. Vannak azonban olyan termékek és szolgáltatások, amelyek nem kerülnek piaci cserére, tehát ezeknek piaci ára sem létezik. Ilyenkor két lehetőség kínálkozik. Az elsőként ajánlott lehetőség, hogy vegyük a piacon előforduló hasonló termék vagy szolgáltatás árát, és helyettesítsük azzal (a statisztika szóhasználatában imputáljuk) a hiányzó árat. Ezt a megoldást alkalmazzuk például a házilagos lakásépítésnél. A házilagosan épített házak négyzetméter-árát az építési vállalkozók által, hasonló helyen és minőségben kínált áron értékeljük.

Nem tudunk piaci árat imputálni akkor, ha az adott termék vagy szolgáltatás jellemzően nem fordul elő a piacon. Ilyenek például az állam által nyújtott egészségügyi, oktatási, vagy a társadalom egészének nyújtott honvédelmi, közbiztonsági, államigazgatási szolgáltatások. Ezekkel azonos szolgáltatásokat a magánszektor a piacon nem kínál. A magánoktatás, a magánorvosi ellátás, vagy az őrző-védő vállalkozások tevékenysége nem hasonlítható az állami feladatok ellátásához. Ebben az esetben tehát a kibocsátást nem tudjuk paci áron mérni, ehelyett a felhasznált termelési tényezőket árazzuk be. A munkaerő-ráfordítást a bérek fejezik ki, a termelő felhasználást a beszerzett anyagok és szolgáltatások költsége, a termelés során elhasznált állóeszközöket az állóeszközök felhasználása (a közgazdasági alapon számított értékcsökkenés). A ráfordítás alapon mért termelés értékelésekor azonban nyereséget (a statisztika szóhasználatában nettó működési eredményt) nem számolunk el, és ezáltal tulajdonképpen a piaci termeléshez viszonyítva alulértékeljük az állami tevékenységeket. A nemzeti számlák módszertanának legutóbbi nemzetközi felülvizsgálata során csak hosszas vita után vetették el azt a javaslatot, hogy valamilyen módszerrel meg kellene becsülni az állami tulajdonban lévő nem vállalkozói tőke hozadékát annak érdekében, hogy ezzel az állami szolgáltatások értékét piaci árszintre hozzuk. A tőkének, mint termelési tényezőnek a figyelembevétele egyben felhívná a figyelmet a tőkével való takarékoskodásra, helyesebben orientálná a jelenleg elsősorban a folyó költségek csökkentésében érdekelt államháztartást.

A statisztika a piaci árat több változatban használja. A változatok a termelés, értékesítés, beszerzés során fizetett termékadók és kapott terméktámogatások elszámolásának módjában különböznek. Az alapáras érték azt az összeget jelenti, amelyet a termelő az értékesítéskor realizál, levonva abból azokat a termékadókat, amelyeket az árban ugyan felszámol, de amelyet az államnak kell befizetnie. A termékadók közé tartozik az ÁFA, a fogyasztási adó, a vám stb. Ezzel szemben az alapárba beleszámítanak azok a terméktámogatások, amelyeket a termelő nem a piacon realizál, tehát amelyeket nem a vevő fizeti meg, hanem az értékesítés után az államtól kapja meg. Tipikusan ilyenek a mezőgazdasági exporttámogatások.

A beszerzési ár az az összeg, amelyet a felhasználó a termék vagy szolgáltatás vásárlásakor fizet. A beszerzési árba beletartoznak a termékadók, de a beszerzési ár nem tartalmazza a terméktámogatásokat, mivel azokat nem a vásárló fizeti. Külön problémát jelent a hozzáadott érték típusú adók (ÁFA) kezelése, itt ugyanis a befizetés szakaszosan történik. A halmozódás elkerülése céljából a beszerzési árba csak a vissza nem igényelhető ÁFA-t kell beleszámolni. Elsősorban a hozzáadott érték adózás miatt lehetetlen a termékadókat az egyes termékek termeléséhez hozzárendelni, hiszen csak a felhasználási irányok ismeretében lehetne megmondani, hogy az egyes termékeknek mennyi a tényleges ÁFA tartalma. Ezért a termékadókat és terméktámogatásokat többnyire csak a nemzetgazdaság egészének szintjén számoljuk el, és a termelési szerkezetet az alapáras értékekkel elemezzük.[10]

A korábbiakban már említettük, hogy a bruttó hazai termék egy skalár érték, az ezt alkotó termelési tevékenységek értékét hozzáadott értéknek nevezzük. A hozzáadott értéket általában alapáron mutatjuk ki. Ebben az összefüggésben a bruttó hazai termék az alapáras hozzáadott értékek, valamint a termékadók és terméktámogatások egyenlegének az összege.

Érdemes megjegyezni, hogy bizonyos gazdasági elemzések használják a tényezőköltségen kifejezett hozzáadott érték fogalmát is. A tényezőköltség fejezi ki a termelési tényezők, a munka és a tőke hozzájárulását a termeléshez. Az alapáras értéktől abban különbözik, hogy nem tartalmazza az ún. egyéb termelési adókat és támogatásokat.[11] Az egyéb termelési adók és támogatások

[10] A hozzáadott érték kimutatható termelői áron is. A termelői ár a beszerzési árhoz hasonlóan tartalmazza az termékadók és támogatások egyenlegét is, kivéve azonban a termékek között nem felosztható hozzáadott érték típusú adókat. A statisztikai publikációk csak ritkán használják a termelői áras értékeket.

[11] Az adókat és támogatásokat a statisztika két nagy csoportra osztja: megkülönbözteti a termelési adókat és támogatásokat, valamint a jövedelemadókat és támogatásokat. A termelési adókon belül különválasztja a termékekhez és szolgáltatásokhoz rendelhető termékadókat és támogatásokat, valamint a termeléssel kapcsolatos, de a gazdasági szervezeten belül az egyes termelési tevékenységek között nem felosztható egyéb termelési adókat és támogatásokat.

lényegében a termelési tényezők igénybevételével összefüggő költségvetési kapcsolatokat mutatják, például a béradókat, a földadót stb. A statisztika kevésbé preferálja a tényezőköltségek számítását, mivel ez a mutató csak a gazdálkodó szervezetek szintjén értelmezhető, de — az egyéb termelési adók és támogatások definíciójából következően — nem osztható fel sem a gazdálkodó szervezetet alkotó homogén tevékenységi egységek, sem a termelési tevékenység kibocsátását képező termékek és szolgáltatások között.

4. Időbeni és térbeli összehasonlítás

Mint már szó volt róla, a gazdasági fejlődést általában a bruttó hazai termék változásával mérjük. Egy időszakról a másikra a termékek és szolgáltatások értékének változása az árak és/vagy a mennyiségek változásának a következménye. Annak érdekében, hogy a gazdasági fejlődést, tehát a termelés volumenének a változását mérni tudjuk, két időszak bruttó hazai termékének értékösszegéből ki kell szűrni az árváltozás hatását. A bruttó hazai termék értékösszegének valamely más időszak árain való kifejezését a bruttó hazai termék változatlan áras értékének nevezzük.

Mint ahogy azt a tanulmány több összefüggésben is tárgyalja, a statisztikai mérés során mindig szem előtt kell tartani, hogy csak azonos mértékegységben kifejezett mennyiségek összegzése vezet értelmes eredményre. A makrostatisztikák a nemzeti valutát használják közös mértékegységnek, ezzel azt feltételezve, hogy az elszámolási időszakon belül nincs infláció, azaz a nemzeti valuta értéke nem változik. Két elszámolási időszak között a valuta infláció okozta értékváltozását a változatlan áras számításokkal szűrjük ki.

A változatlan áras számítás során tulajdonképpen eltérünk attól a piacgazdasági alapelvtől, hogy a termelést és felhasználást a tényleges kínálatot és keresletet kifejező árakon kell mérni. A változatlan ár valamely korábbi időszak árain veszi számba az adott időszak bruttó hazai termékének értékét, ezért mesterséges értékelést jelent. Minél régebbi árral számolunk, annál kevésbé releváns az értékelés. Könnyen belátható, hogy időben minél távolabbi árakon számolunk, annál nagyobb a veszélye annak, hogy felülértékeljük a gazdaság fejlődését.[12] Az indexszámításból többféle előnyös és hátrányos tulajdonságokkal rendelkező indexformula ismert.[13] A statisztika ajánlásai szerint a bruttó hazai termék éves változási indexét az elméleti szempontból legjobbnak tekintett Fisher láncindexszel kell mérni. A Fisher láncindex

[12] Feltételezhetjük ugyanis a kereslet negatív árrugalmasságát. Ez azt jelenti, hogy amely terméknek vagy szolgáltatásnak az átlagosnál jobban nő az ára, a vevők törekszenek annak fogyasztását helyettesíteni, és így az azok iránt támasztott kereslet időben egyre csökken.

[13] Az indexszámítás statisztikai módszereiről átfogó leírást ad az [5] és a [6].

ugyanis a tárgyidőszak és az azt megelőző év árain számított volumenindexeket átlagolja, vagyis értékét nem befolyásolja az a körülmény, hogy melyik évet választjuk árbázisnak.

A gazdasági szerkezet változásának mérésére viszont az additivitási kritériumnak eleget tevő fix bázisú Laspeyres-típusú index felel meg. Ebben az esetben mindig igaz, hogy a bruttó hazai termék indexe előállítható akár a termelési szerkezet, akár a végső felhasználás egyes tételeiből számított indexek súlyozott átlagaként.

A negyedéves számításokhoz kifejezetten tilos láncindexeket alkalmazni. Tekintettel arra, hogy a láncindexek időben nem reverzibilisek, ezért erősen torzíthatják a konjunktúraciklusok mérését. Ennek következtében előfordulhat, hogy a ciklus ugyan visszatér az eredeti állapotába, de a volumenindex egytől eltérő értéket mutat.

A statisztikai megfigyeléseket tekintve az árváltozások kiszűrésére két út kínálkozik. Megfigyelhetjük közvetlenül a termékek és szolgáltatások mennyiségének változását, és a mennyiségi hányadosokat szorozzuk be a bázisnak választott időszak áraival. Lehet kiindulni az árváltozások megfigyeléséből, ebben az esetben az értékindexet az árindexszel osztva kapjuk meg a volumenindexet. Ez utóbbi módszert deflálásnak nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy a termelési mennyiségek változása általában nagyobb ingadozást mutat, mint az árindexek variabilitása, ezért feltételezhető, hogy az árváltozásokat pontosabban lehet mérni. Ebből következően a statisztikai módszertanok általában a deflálással számított változatlan áras értékszámítást ajánlják a közvetlenül számított volumenindexekkel szemben.

Ahogy a korábbiakban láttuk, a bruttó hazai termék a megtermelt források és a felhasználások azonosságából származtatott mutató, azaz nem valamilyen közvetlenül megfigyelhető termék- és szolgáltatáshalmaz értékét mutatja. Ebből következően a deflálásra használt árindex sem figyelhető meg közvetlenül. A bruttó hazai termék változatlan áras értékét tehát csak úgy tudjuk meghatározni, hogy kiszámítjuk az egyes alkotóelemek (kibocsátás, termelő-felhasználás, lakossági fogyasztás stb.) változatlan áras értékét, és a változatlan áron számított azonosságból kapjuk meg a bruttó hazai termék változatlan áras értékét. Más szóval, a bruttó hazai terméknek csak implicit árindexe létezik.

Térbeli, többnyire nemzetközi összehasonlításkor tulajdonképpen az időbeni összehasonlításhoz hasonlóan járunk el. Ebben az esetben a fejlettségi szintek összehasonlítása érdekében az árszínvonal országok közötti eltérésének a hatását kell kiszűrni. Erre a legkézenfekvőbb lehetőség a hivatalos valutaárfolyamokkal való átszámítás lenne. A statisztikai publikációk gyakran közölnek ilyen adatokat, például az egy főre jutó bruttó hazai termék US dollárban kifejezett értékét. A hivatalos árfolyamok azonban csak a rendszeresen külkereskedelmi forgalomba kerülő termékek és szolgáltatások árszínvonalának arányait, esetleg a valuta iránti kereslet egyéb tényezőit, például a tőkehozamok közötti eltérésekre visszavezethető befektetési keresletet jelzik, de semmiképpen nem jellemzik a különböző országokban a termékek és szolgáltatások összesített költség és hasznosság arányait. Erre a célra külön számítás, a valuták vásárlóerejének összehasonlítása, az ún. valutaerő összehasonlítások[14] szolgál.

A valutaerő összehasonlítás tulajdonképpen a bruttó hazai termék egyes alkotóelemeit árazza át. Fontos hangsúlyozni, hogy a hivatalos valutaárfolyammal és a valutaerő paritással készülő számítások ugyanabból a termék- és szolgáltatástömegből, az elszámolási időszak alatt létrejött bruttó hazai termékből indul ki. A valutaerő összehasonlítás tulajdonképpen csak más módon számított árfolyamot határoz meg. Ahogy a piaci ár egyszerre fejezi ki a termelési költségek arányait és felhasználás hasznosságának arányait, úgy elvben két lehetőség képzelhető el: vagy a termelés relatív költségei vagy a végső felhasználás relatív hasznossága alapján végezzük az összehasonlítást.

A nemzetközi összehasonlítások többnyire a végső felhasználás tételeit hasonlítják össze, azaz azt számítják ki, hogy az azonos hasznosságú termékek és szolgáltatások mennyi pénzegységet érnek a különböző országokban. Ezeket az árarányokat az összehasonlításban résztvevő országok átlagos felhasználási szerkezetével súlyozva jutunk el a vásárlóerő paritáson alapuló árfolyamhoz. Hasonlóan ahhoz, ahogy az időbeni összehasonlításban a bázisév választásától függően más és más növekedési dinamikát mutathatunk ki, a térbeli összehasonlításban a részt vevő országok köre, az ebből képzett bázis befolyásolja az eredményeket.

Könnyen belátható, hogy a fejletlenebb országokat a valutaerő alapján történő közös árszínvonal felfelé értékeli a hivatalos valutaárfolyammal számítotthoz képest, mivel ott a külkereskedelmi forgalomba nem kerülő termékek és szolgáltatások árai általában alacsonyabbak.[15] Ezen termékek és szolgáltatások hasznosságát a fejlettebb ország árszínvonalán kifejezve, az értékösszeg nő.

Az 1993-as nemzetközi összehasonlítás szerint[16] például az osztrák schilling vásárlóerő paritáson 4,16 forintot ért, szemben a hivatalos árfolyam 7,91-es szorzószámával. Ugyanakkor Svájc fejlettségét jelzi, hogy egy svájci frank valutaerő paritáson 6,49 osztrák shillinget tesz ki, a hivatalos árfolyam viszont 7,84 volt.

[14] Angol rövidítéssel PPP (Purchaser Power Parity)

[15] Ennek részben az az oka, hogy a szolgáltatások erősen munkaigényesek, és a fejletlenebb gazdaságokban viszonylag olcsó a munkaerő.

[16] Lásd [7].

5. A számbavétel időzítése

A statisztikában a termelést elvben a termelési folyamat menetét követve az adott időpontban érvényes áron kell számba venni. A statisztikai adatforrások azonban a termelési tevékenység naprakész közvetlen megfigyelését többnyire nem teszik lehetővé.

A termelésstatisztika legfontosabb adatforrása a számvitel, és ez csak az értékesítés és beszerzés időpontjában rendel (piaci) értékeket a termékekhez vagy a vásárolt anyagokhoz. A termelés és értékesítés, illetve a készletbeszerzés és felhasználás közötti időben a termékek ára az infláció következtében emelkedik. Ez azt jelenti, hogy a számvitel a kibocsátást felül-, a termelő felhasználást alulértékeli. Mindkét hatás felfelé torzítja a bruttó hazai termék nominális értékét. Fontos észrevenni, hogy itt nem a folyó ár és a változatlan ár korábbiakban részletezett megkülönböztetéséről van szó, a torzítás magában a folyó áras értékben jelentkezik, és a változatlan árra való átszámítás során eltűnik.

A probléma megoldásának elve egyszerű. A számvitel szerint az értékesítéskor érvényes áron kimutatott kibocsátásból ki kell vonni a termelés és az értékesítés közti időszakban bekövetkezett áremelkedés hatását, míg a termelő felhasználáshoz hozzá kell adni a készletre történő beszerzés és a tényleges felhasználás közötti időszakban bekövetkezett áremelkedés hatását. Az időszak hosszát a készlettartási idő mutatja.[17]

A nyers számviteli adatokból számított és a készletezési időszak alatti áremelkedéssel korrigált érték közti különbséget nevezik készlettartási nyereségnek. Ezzel az összeggel tehát csökkenteni kell mind a termelésből származtatott bruttó hazai termék értékét, mind a felhasználási tételek között elszámolt készletváltozást. Tehát továbbra is fennáll a termelés egyenlő a felhasználással azonosság. A korrekció természetesen érinti a termelésből keletkezett jövedelmek szintjét is. Az értékesítéskor realizált készlettartási nyereséget nem tekintjük jövedelemnek, hanem az eszközök átértékeléséből keletkező többletnek.[18] Magyarországon az átlagos készlettartási idő két hónap körül alakul.[19] 1996-ban az ipari termelői árak havi indexe meghaladta az 1%-ot. Bár pontos számítások egyelőre nem készültek, előzetes számítások szerint ezen körülmények között a készlettartási nyereség elérheti a bruttó hazai termék mintegy fél százalékát.

[17]Készlettartási idő (saját termelésű termékek és árukészletek) = átlagos készletállomány / egy napra jutó átlagos árbevétel. Készlettartási idő (vásárolt anyagok) = átlagos készletállomány / egy napra jutó termelő felhasználás.

[18]Ez az elv azonos azzal, hogy az állóeszközök értékesítéséből származó bevétel sem jövedelem, hanem csupán az eszközök összetételének a változását jelenti. A művelet során az állóeszközök készpénzzé alakultak át.

[19]Lásd [8].

Kétségtelen, hogy bruttó hazai termék elemei közül az infláció legnagyobb mértékben a készletváltozás kimutatott értékét torzítja, mivel ebben az esetben a torzítás az állományokra vonatkozik. A folyamatok értékelése során általában eltekintünk az elszámolási időszakban végbement inflációtól, vagyis azt feltételezzük, hogy nem változnak az árak. Az infláció valójában torzítja minden, különböző időpontban végbemenő folyamat — egymáshoz viszonyított — értékét, hiszen eltekint attól, hogy menet közben változik a közös mértékegységnek használt forint értéke. Számottevő, több számjegyű éves infláció esetén ennek a körülménynek az elhanyagolása jelentős hibát visz a rendszerbe.

Miről is van szó? Mint már szó volt róla, a termékek piaci egyensúlyi ára egyidejűleg fejezi ki a termelés relatív költségeit és a termékek relatív hasznosságát. A piac biztosítja, hogy az árarányok egy adott időpontban lényegesen ne térjenek el az azt alakító költség- és hasznossági arányoktól. A piaci ár mint értékmérő jelenti a közös mértékegységet, és ez teremti meg a lehetőségét a termékek és szolgáltatások aggregálásának. Jelentős infláció esetén azonban ez a feltétel az elszámolási időszak egészére nyilvánvalóan nem teljesül. Az árak nemcsak azért változnak, mert változik a termékek és szolgáltatások relatív költsége és hasznossága (azaz a minősége), hanem egyszerűen azért, mert nő az árszínvonal. Másképpen kifejezve, csökken a közös mértékegységet jelentő fizetőeszköz (forint) ára. Két különböző elszámolási időszak között az árváltozás kiszűrését szolgálják a változatlan áras számítások. Egyazon elszámolási időszakon belül azonban erre nincs mód. Amennyiben az infláció jelentős, úgy az egyetlen lehetőség, hogy az elszámolási időszak rövidítésével csökkentsük az infláció torzító hatását.

Gondoljuk csak meg! Amennyiben az árak az év során 30%-kal emelkedtek, akkor az év végén termelt termék 30%-kal jobb minőségűnek tűnik, mint az év elején termelt ugyanazon termék. Az éves számlákban tehát magasabb értéket kapnak az év végén történt események. Ugyanakkor, ha negyedévenként végezzük az aggregálást, akkor a negyedéves adatokat csak az egynegyed év inflációja torzítja, esetünkben valamivel több, mint 6,5%. A változatlan áras értékekből számított volumenindexek is lényegesen eltérő változási ütemet mutatnak akkor, ha az éves adatokat egyben defláljuk, vagy a negyedéves adatokat egyenként számítjuk át változatlan árra, és úgy összegezzük. Az éves számításoknál ugyanis az éven belüli infláció minőségi különbségnek mutatkozik, a negyedéves adatokban viszont árváltozásnak, és ezt a deflálás kiszűri.

6. Éves és évközi számítások

A döntések mindig a jövőre vonatkoznak, ezért a múltra vonatkozó tényadatok a döntéselőkészítéshez valójában mindig csak késve szolgáltathatnak információkat. Minél régebbi az adat, annál nehezebben lehet múltból a jövőre következtetni. Az adatok értéke az idő múlásával rohamosan erodálódik, tehát mindig a mindenkor legfrissebb adatra van szükség. Világszerte a statisztikai szolgálat talán legnagyobb dilemmája, hogyan lehet egyidejűleg gyors és megbízható adatokat szolgáltatni. Figyelembe véve azt a körülményt, hogy a bruttó hazai termék központi szerepet tölt be a gazdaságstatisztikában, az ennek becslésére és közlésére kialakított rendszer eklatáns példája a gyorsaság és megbízhatóság kihívására válaszoló adatszolgáltatási stratégiának.

Az eddig tárgyaltakból is kitűnik, hogy a bruttó hazai termék statisztikai számszerűsítése igen összetett feladatot jelent. Ezért meglehetősen hosszú időt vesz igénybe az összes részlet megbízható becslése. Értékét kellő megbízhatósággal csak éves szinten lehet megbecsülni. Az összes lehetséges adatforrás figyelembevételével számított végleges érték gyakran csak több évvel a tárgyidőszak után állítható elő. Különösen az adóbevallások adataira kell sokat várni, nem beszélve arról a potenciális lehetőségről, amelyet az adóellenőrzések tapasztalatainak felhasználása jelenthetne például a rejtett tevékenységek számbavételéhez.

A felhasználók azonban jóval gyorsabban, illetve sűrűbben igényelnek statisztikai információkat. Az igények kielégítése céljából az utóbbi egy-két évtizedben a fejlett statisztikával rendelkező országok áttértek a bruttó hazai termék rendszeres negyedéves számítására.[20] A beérkező információkhoz időzítve minden negyedévben több, egyre pontosabbá váló sorozatban közlik a bruttó hazai termék szintjének és volumenének alakulását.[21]

Az évközi becslések két markánsan eltérő szemléletet kifejező modellel készülhetnek. A direkt megközelítés arra törekszik, hogy évközben is rendelkezésre álljon lehetőleg minél több adatforrás, és ebből a bruttó hazai termék közvetlenül kiszámítható legyen. A négy negyedév összege adja az éves adat első becslését.[22] Az indirekt módszer ezzel szemben azt a megoldást választja, hogy kiválaszt néhány évközben is könnyen megfigyelhető mutatót,

[20] A kanadai statisztika például havi gyakorisággal közöl becsléseket az ágazati hozzáadott értékekből aggregált bruttó hazai termék értékére.

[21] Az évközi becslések nehézségét jelzi, hogy az OECD tagok közül is mindössze 18 ország képes a negyedéves bruttó hazai termék elfogadható megbízhatóságú becslésére. Ezenkívül több ország folytat kísérleti számításokat. Korai lenne ezek színvonalát megítélni, tekintettel arra, hogy az éves és a negyedéves számítások eredményeinek összevetésére több éves idősorra van szükség.

[22] Tipikusan ezt a megközelítést alkalmazza az angol statisztika.

amely alakulása éves szinten jól korrelál a bruttó hazai termék alakulásával, és negyedévenként ezek együttesével modellezi a bruttó hazai terméket.[23]

Mindkét módszernek vannak előnyei és hátrányai. A direkt módszer meglehetősen költséges, hiszen lényegében a bruttó hazai termék számításához szükséges összes statisztikát évente négyszer kell összegyűjteni. Ugyanakkor több szempontból is igen megbízható és jól interpretálható eredményekre vezet. Egyfelől lehetőséget ad arra, hogy negyedévente is több becslést készítsünk attól függően, hogy mikor érkeznek be újabb és jobb adatok. Másfelől, mivel az év közben és az év végén hasonló módon készül a becslés, ez valószínűsíti, hogy a negyedéves becslések sorozata jól közelít az éves értékhez.

Az indirekt módszer lényegében egy ökonometriai modellrendszer működtetését jelenti. Ez többnyire lényegesen olcsóbb megoldás, mint nagy tömegű statisztikai megfigyelés megszervezése. Az interpoláció egyben lehetőséget ad előrejelzések készítésére. Előnyének tudható be az is, hogy a módszer szigorúan dokumentált lépésekből áll, és kevesebb teret ad a heurisztikus becslések során nehezen kivédhető szubjektív megítéléseknek. Ugyanakkor a módszer csak akkor alkalmazható, ha a paraméterek becslésére kellően hosszú idősor áll rendelkezésre. Ráadásul nagyobb a valószínűsége, hogy számottevő eltérés adódik a negyedéves és az éves értékek között.

Bármely módszert választva, a számítási sorozatok elvégzését tovább nehezíti, hogy az éves adatoknak is több változata létezik. Ennek megfelelően tulajdonképpen utólag retropolálni kell az évközi adatokat mindaddig, amíg — gyakran csak több évvel a tárgyidőszak után — előáll a végleges éves adat.

Az évközi adatforrások sajátos problémái

Természetesen bármelyik módszer annál jobb, minél kisebb az eltérés a negyedéves első előzetes és az éves végleges adat között. Nagymértékben megkönnyíti a konvergenciát, ha a múlt tapasztalatait felhasználva az évközi becslésekbe előre beépülnek az előzetes és a végleges adatok közötti szisztematikus eltérések, készüljenek ezek akár modellel, akár szakértői becslésekkel.

Az éves és évközi adatok eltérését jól példázza a magyar bér- és keresetstatisztikák helyzete. A bérek és keresetek fogalma tartalmazza mindazt a díjazást, amelyben a munkavállalók a munkavégzés ellenértékeként részesülnek. Év közben a megfigyelések azonban csak a 10 fő feletti vállalatoknál a teljes munkaidőben foglalkoztatottaknak a számvitelben bér és keresetnek elkönyvelt tételekre korlátozódnak. A vállalkozási struktúra szétaprózódása, az adófizetést kikerülő bérjellegű tételek súlyának emelkedése következtében az utóbbi években egyre nőtt az olló az év közben megfigyelt és az éves szinten az egyéb adatforrásokra is támaszkodó bér és kereset adatok között. Az

[23] Ezt a modellt legtisztább formában a francia statisztika követi.

eltérés léte nyilvánvaló, mértéke azonban a múlt tapasztalataiból mechanikusan nem vezethető tovább. Ennek alakulásában ugyanis lényegesen közrejátszanak az adórendszer szabályai, az adófizetés kikerülését célzó vállalati reakciók.

A jövedelemfolyamatok évközi megfigyelhetősége egyébként is korlátozott. Különösen igaz ez az állítás a vállalkozói jövedelmekre. A vállalkozások az eredményüket csak a mérleg összeállításával tudják kiszámítani. Erre jórészt csak az üzleti év lezárása után kerül sor. Külön problémát jelent, hogy a kisvállalkozásokat szinte lehetetlen, vagy legalább is nagyon költséges lenne évente többször megfigyelni. Másfelől nem jogos azt feltételezni, hogy a kisvállalkozások a nagyvállalatokkal azonos módon reagálnak a konjunktúraciklusok alakulására. Empirikus vizsgálatok azt mutatják, hogy a kisvállalkozások, és elsősorban a kisvállalkozók nyeresége a világon mindenütt igen érzékenyen reagál a gazdasági konjunktúra változására. Ez a körülmény immanens akadálya annak, hogy a keletkezett jövedelmek évközi alakulását kellő pontossággal megbecsülhessük. Erre valójában olyan modellt kellene kialakítani, amely a kisvállalkozói jövedelmeket a bruttó hazai termék alakulásával szimultán módon becsli.

Az előzőekben elmondottak magyarázzák, hogy sok országban év közben jövedelemoldalról nem is készül becslés a bruttó hazai termék alakulására. Az *1. táblázat* is azt jelzi, hogy bemutatott 18 OECD ország közül mindössze 10 közöl negyedévenként jövedelemadatokat, de ebből is 5 esetben csak maradékelven készülnek a becslések.

Úton lévő áruk

A rövid távú folyamatokat leíró adatok általában érzékenyebbek a megfigyelési hibákra, tekintettel arra, hogy az adat értéke kisebb, és ezért azonos nagyságú hiba nagyobb relatív hibát eredményez.

Gyakori hibaforrást jelent az adatok eltérő időpontban való elszámolása. A termelési kapcsolatokat az eladó és a vevő is nyilvántartja. Ideális esetben a nyilvántartás mindkét félnél ugyanabban az időpontban történik. A gyakorlatban rendszerint azonban eltérés van a számbavétel időpontja között: az eladó a számla elküldésekor, a vevő a számla beérkezésekor könyvel. Ebből következően a termelés egy része lebeg, sehol nincs elszámolva. Jó példa erre a lakossági energiafelhasználás elszámolása. A háztartás-statisztika a díjfizetés időpontjában számolja el a fogyasztást, az energiaszolgáltató vállalat viszont a fogyasztás tényleges idején mutatja ki a termelést. A két megfigyelési időpont hónapokkal is eltérhet egymástól.

1. táblázat

Ország	Termelés	Felhasználás	Jövedelem
Kanada	+	+	+
Japán	−	+	+
Egyesült Államok	−	+	+
Ausztrália	+	+	+
Új-Zéland	+	+	−
Ausztria	+	+[1]	−
Dánia	+	+	+[2]
Finnország	+	+[1]	+[2]
Franciaország	+	+[1]	+[2]
Németország	+	+[1]	+[2]
Olaszország	+	+[1]	−
Hollandia	+	+[1]	−
Norvégia	+	+[1]	+[2]
Spanyolország	+	+[1]	−
Svédország	+	+	−
Svájc	+	+[1]	−
Törökország	+	+	−
Egyesült Királyság	+	+	+

[1] A készletváltozást maradékelven határozzák meg.
[2] A működési eredményt maradékelven határozzák meg.

Éves szinten az eltérés többnyire elhanyagolható mértékben torzítja a statisztikákat. Negyedéves szinten a megfigyelt folyamat nagysága az éves érték egynegyede, a lebegő tételek viszont ugyanakkorák. A relatív hiba tehát megnégyszereződik. A probléma többnyire csak akkor válik nyilvánvalóvá, ha a termelési és a felhasználási oldal között nagy eltérések adódnak.

Szezonális kiigazítás

A rövid távú gazdasági folyamatokat gyakran erős szezonalitás jellemzi. A kiskereskedelmi forgalom az év végén éri el a csúcspontját. Az építőipar termelése tavasztól őszig jóval magasabb, mint a téli hónapokban. Ugyanakkor több ágazatban a szabadságolások miatt a termelés a nyári hónapokban enyhe visszaesést mutat. Ebből következően a nyers adatokban a konjunktúra trendje (és a véletlen hatások mellett) a szezonalitás is megjelenik. A szezonális kiigazítás a szezonális hatásoktól tisztítja meg az adatokat, és így alkalmasabbá válnak a rövid távú konjunkturális hatások jelzésére. Két stratégia képzelhető el: lehet minden negyedéves becslés elkészültekor újra becsülni a modell paramétereit, ekkor többnyire a múlt adatai is módosulnak annak ellenére, hogy az eredeti adatok nem változtak; lehet évente csak egyszer, többnyire az utolsó negyedévben újrabecsülni a paramétereket, ekkor viszont jelentős lehet a korrekció mértéke.

Tekintettel arra, hogy a szezonális kiigazítást a bruttó hazai termék egyes tételeire egyenként végezzük el, nem biztos, hogy a szezonálisan kiigazított idősorok is kiadják az előzőekben említett elszámolási azonosságokat. Amennyiben bizonyos tételek maradékelven határozódnak meg, úgy az inkonzisztenciát is célszerű ezeknél a tételeknél eltüntetni.

A mezőgazdasági termelés becslése

A mezőgazdaság, elsősorban a növénytermelés jórészt éves termelési ciklussal állítja elő a termékeket. Az aratás ugyan nyáron történik, de a termelési folyamat egész évben tart, költségek folyamatosan merülnek fel. A statisztikának a termelés folyamatát kell regisztrálnia, a lábon álló termést mint befejezetlen termelést, a készletváltozással analóg módon elszámolva. A számvitel a készleteket többnyire költségszinten tartja nyilván, a nyereséget csak a termék értékesítésekor mutatja ki. Ez ugyan torzítja a termelési statisztikát, de a torzítás mértéke elhanyagolható. Hasonló módon, amennyiben ismerjük a növénytermelésben az év folyamán eszközölt termelési ráfordításokat, úgy a költségek szintjén a termelést negyedévenként mérhetjük. Lényeges probléma azonban, hogy a mezőgazdaságban a kibocsátás értéke az időjárástól és a kereslettől függően évről-évre igen erős ingadozást mutat. Ebből következően a termelés egyik évben igen nyereséges, a másikban nagyon veszteséges lehet. A nyári adatok simítása érdekében szükség van a nyereség és veszteség értékének éven belüli szétosztására, mégpedig ez — a termelési ciklust követve — az előző évi őszi vetések értékét is érinti. A becslés pontosítható, amennyiben a termés-előrejelzések információit is figyelembe vesszük.

7. A bruttó hazai termék regionális értéke

Gazdaságnak hagyományos értelemben a nemzetgazdaságot tekintjük. A nemzetgazdaságot egy ország földrajzi határán belül rezidens gazdasági alanyok (statisztikai terminológiával szervezeti egységek) alkotják. Általánosabban fogalmazva azonban a gazdaság nem feltétlenül nemzetgazdaságot jelent, hanem jelenthet olyan regionális entitást is, amelyet a belső gazdasági kapcsolatok kohéziója jellemez. Ez a megközelítés dominál az Európai Unió szemléletében.

A bruttó hazai termék regionális értékét leginkább a termelési oldalról lehet becsülni. A felhasználási oldalról történő számbavételt elsősorban az nehezíti, hogy szinte lehetetlen megfigyelni a régiók közötti szállításokat, azaz a régiók "külkereskedelmi" forgalmát. A termelési oldal számbavételére két markánsan eltérő megközelítés létezik. Amennyiben léteznek termelési adatok telephelyenkénti részletezettségben, úgy azok összesítésével "alulról felfelé" lehet összetenni a régiók által előállított hozzáadott értéket. A telepi statisztika hiányában a nemzetgazdaság egészére vonatkozó adatok — valamilyen regionális szinten rendelkezésre álló segédmutató segítségével történő — felosztásával, "felülről lefelé" végezhetjük a becsléseket. Az alulról felfelé való becslés rendszerint pontosabb eredményekre vezet. Ebben az esetben azonban előfordulhat, hogy az első számítások szerint a nemzetgazdasági adatok eltérnek a regionális adatok összegétől. Ilyenkor gondoskodni kell az inkonzisztencia megszüntetéséről. Ez történhet a közvetlenül számított regionális értékekkel arányosan; a legalacsonyabb értéket adó regionális adatok korrekciójával, feltételezve, hogy azok a legkevésbé megbízhatóak; a legnagyobb régió értéket korrigálva, mivel a korrekció ezt kevéssé módosítja.

Magyarországon először 1994-ben készült kísérleti jelleggel számítás a bruttó hazai termék megyei megoszlására. A számítások a kétféle megközelítést együttesen alkalmazták, de alapvetően a megyei (telepi) bér- és keresetadatok alapján, felülről lefelé történt a becslés.

8. Felhasználási irányok

A tanulmány több helyen is említette bruttó hazai termék széles körű felhasználási területeit. A makroszintű gazdaságpolitika végső célja mindig a gazdasági növekedés serkentése, ennek sikerét a bruttó hazai termék növekedése jellemzi. A monetáris politika a bruttó hazai termék nominális szintjének alakulásához igazítja a pénzmennyiség szabályozását. A konjunktúra-elemzésekben a bruttó hazai termék volumenindexének idősora, mint a reálfolyamatok összefoglaló mutatószám-sorozata képezi a legjobb referenciagörbét a konjunktúraciklusok kimutatásához. Az empirikus közgazdasági kutatások szintén széles körben hivatkoznak a bruttó hazai termékre.

Tekintettel arra, hogy a bruttó hazai termék fejezi ki az országban keletkezett jövedelmeket, az igazságos közteherviselésre hivatkozva a nemzetközi szervezetek általában a bruttó hazai termék arányában állapítják meg a tagdíjakat. Amíg ez az összeg nem jelentős, addig a számítások pontossága sem jelent komoly szempontot a tagdíjak beszedésekor. Az Európai Unióban egy 1989-ben hozott jogszabály[24] alapján a közösségi intézmények fenntartásához való hozzájárulást a tagországok bruttó nemzeti terméke (jövedelme) arányában állapította meg. Ez tulajdonképpen nem jelent mást, mint a közösség

[24] Az EU Tanácsának 89/130/ EEC, Euratom rendelete.

szintjén alkalmazott lineáris jövedelemadózást. Az így befizetésre kerülő összeg igen jelentős, 1995-ben közel 22 milliárd ECU-t tett ki. Ebben a megközelítésben a bruttó hazai termék nem egyszerűen statisztikai jelzőszám, hanem a kötelezően előírt módszerrel számított adóbevallás adata, hasonlóan az adóhatóság által elrendelt társasági vagy személyi jövedelemadó-bevalláshoz. A jogszabályok interpretálásában, a számítási módszerek adaptálásában a tagországok statisztikai szakértőiből álló rendszeresen ülésező munkabizottság az illetékes. Az ellenőrzést az EU auditáló szervezete végzi.

Bár nyilvánosan nem elismerve, de érthető, hogy az országok a mutató alábecslésében érdekeltek. Ugyanakkor, még a legfejlettebb statisztikával rendelkező országokban is, a szakértők egybehangzó véleménye szerint előfordulhat, hogy a bruttó hazai termék "utolsó" 4-5%-a kimarad a becslésekből. Elsősorban azokon a területeken, ahol a statisztikai megfigyelés hagyományos módszerei nem alkalmazhatók. Időről-időre felerősödik az az igény, hogy az igazságos közteherviselés érdekében minden tagország kísérelje meg minél teljesebb körben számításba venni a bruttó hazai termékbe beszámító összes tevékenységet. Az EU statisztikai hivatala, az Eurostat szervezésében jelenleg folyik egy munkaprogram végrehajtása, amely elsősorban a következő kérdésekre összpontosít:

- az adóellenőrzések tapasztalatainak felhasználása a rejtett jövedelmek becslésére;
- hogyan lehet a különböző adatforrásokban elérhető munkaügyi adatokkal kiegészíteni a nemzeti számlákban eddig elszámolt munkaerő inputot;
- becsléseket készíteni a természetbeni bérek, borravalók nagyságára.

2. táblázat

	1991	1992	1993	1994	1995
Bruttó hazai termék, folyó áron, mrd Ft	2498,3	2942,7	3548,3	4364,8	5561,7
Bruttó hazai termék, volumenindex, előző év=100	88,1	96,9	99,4	102,9	101,5
Hozzáadott érték, alapáron, mrd Ft	2191,3	2523,6	3017,9	3720,4	4673,3
Egy főre jutó GDP, hivatalos valutaárfolyamon, USD	3228	3608	3745	4046	4273
Egy főre jutó GDP, vásárlóerő-paritáson, USD	5750	5740	5962	6451	6577

Az Európai Unió költségvetésében jelentős tételt tesznek ki a regionális felzárkózást segítő strukturális alapokból adott támogatások. A többféle elosztási elv között a legnagyobb összegek igénybevételére azok a régiók jogosultak, ahol az egy főre jutó bruttó hazai termék értéke nem éri el a közösségi átlag 75%-át. 1995-ben közel 15 milliárd ECU-t tett ki az ennek alapján felosztott támogatások összege. Ez a körülmény a bruttó hazai termék regionális értékének kölcsönöz politikai jelentőséget.

Mindez túlmutat a statisztikák hagyományos felhasználási irányain. Maguk a statisztikusok igencsak kétlakian fogadják ezt a megnövekedett szerepkört. Egyfelől kétségtelenül munkájuk megbecsülésének tartják a statisztikai módszertani kérdésekre irányuló figyelmet. Másfelől azonban egyre erősödnek azok a félelmek, amelyek azt vélelmezik, hogy a hivatalos statisztikai szolgálatban a közgazdasági elméletek mérhetőségére összpontosító tudományos szempontok helyett óhatatlanul politikai szempontok fognak előtérbe kerülni. A tudományos és a politikai megközelítést egyeztető álláspontok kialakítása azért is egyre sürgetőbb feladat, mert az európai integráció elmélyülésével és kiterjesztésével a kérdés a jövőben még inkább exponálódni fog.

Irodalom

1. Barcellan,R., Bruno,G., Mazzi,G.,L., Quarterly National Accounts in EU Countries: Situation and Perspectives Eurostat (kézirat)
2. Farkasházi, L., Hüttl, A., Regionális számlák Magyarországon, Statisztikai Szemle 74. évfolyam 8-9. szám, 1996 augusztus-szeptember
3. Gábriel, K., Hüttl, A., Regionális számlák az Európai Unióban, Statisztikai Szemle 74. évfolyam 7. szám, 1996 július
4. Hill, P., Inflation Accounting, A Manual on National Accounting under Conditions of High Inflation OECD 1996
5. Köves, P., Indexelmélet és közgazdasági valóság, Akadémiai Kiadó, 1981
6. Hunyadi, L., Mundruczó, Gy., Vita, L., Statisztika, Aula kiadó, 1986 (3.fejezet)
7. A GDP (bruttó hazai termék) nemzetközi összehasonlítása 1993, KSH 1996
8. A vállalatok pénzügyi adatai, 1992-1993, KSH 1995
9. European System of Accounts ESA 1995, Eurostat 1996
10. Magyarország nemzeti számlái, Adatforrások, módszerek és számítások, KSH 1994
11. Magyarország nemzeti számlái 1991-1994, KSH 1996
12. Methods Used by OECD Countries to Measure Stocks of Fixed Capital, OECD 1993
13. National Accounts for Hungary 1991-1994, Sources, Methods and Estimates OECD-KSH 1997

14. SIGMA, The Bulletin of European Statistics, Eurostat 1995 nyár
15. System of National Accounts 1993 Eurostat, IMF, OECD, UN, WB, 1993

ON THE STATISTICAL ESTIMATION OF THE GDP

The paper summarizes some major conceptual issues and the problems of the statistical estimation of the gross domestic product. It deals with various aspects like the coverage of production, valuation, comparison in time and space, the reconciliation between annual, quarterly and regional estimates. It also discusses the reliability of the potential data sources. In many cases it provides examples derived from the practice of the Hungarian statistics underlining the special problems faced by the statisticians during the profound structural economic changes.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Beszámoló a 7. MINI EURO Konferenciáról

(Bruges, 1997. március 24-27)

Bevezetés

Az Operációkutatási Társaságok Európai Szövetsége (EURO) 1997. március 24-27. között a belgiumi Bruges-ben rendezte meg hetedik kiskonferenciáját. A konferencia főbb témái a következők voltak: döntéstámogatási rendszerek, csoportos döntéshozatal, multimédia, elektronikus kereskedelem. A konferencia célja az volt, hogy áttekintést adjon a döntési technológiák legújabb fejlesztési irányairól és értékelje az új módszerek vezetéstámogatásban betöltött szerepét.

A különböző európai országokban, továbbá Izraelben, Egyiptomban és Dél-Afrikában mintegy 12 000 fős tagsággal rendelkező szervezet három évente két alkalommal rendez nemzetközi konferenciát. Az előző rendezvényt 1995-ben Izraelben tartották, a következőre ez év júniusában, a spanyolországi Barcelonában kerül sor.

1984 óta az EURO olyan kiskonferenciákat is rendez, amelyeken az operációkutatás ígéretes, új témaköreivel kapcsolatos előadások bemutatására kerül sor. Ezekkel a rendezvényekkel az EURO az új operációkutatási módszerek fejlesztését és széleskörű alkalmazását kívánja elősegíteni. A korábbi kiskonferenciákat az alábbi városokban rendezték: Bruges (1984), Lunteren (1985), Herceg-Novi (1987), Warwick (1989), Thessaloniki (1993) és Liege (1994).

A konferencia szerkezete

Az EURO hetedik kiskonferenciáján 34 országból több mint 300 szakember vett részt. A nyitó és a záró plenáris üléseken, a három panel szekcióban, valamint a 9 fő témacsoport szerint párhuzamosan szervezett szekcióüléseken összesen több mint 200 előadás hangzott el.

A konferencia hivatalos programját megelőző napon a franciaországi INSEAD professzorai tartottak egész napos bemutató programot a csoportmunka, a multimédia és az elektronikus kereskedelem témaköreit érintő kérdésekről. A program résztvevői meggyőző, élő példákon keresztül ismerkedhettek meg a világméretű kereskedelemben új távlatokat nyitó korszerű elektronikus eszközök alkalmazási lehetőségeivel és az erre a megközelítésre épülő új marketing filozófiával.

A nyitó plenáris ülés illusztris előadói közül Zimmermann professzornak az Apex modellektől az intelligens döntéstámogatási rendszerek kifejlesztéséig vezető út fontosabb állomásait felvázoló előadása, az amerikai Gass professzornak az operációkutatás 21. századba átívelő híd szerepét bemutató előadása és az Electronic Data System cég elnökének az új üzleti lehetőségeket kínáló információtechnológiáról tartott átfogó ismertetője érdemel kiemelést.

A három napon keresztül kilenc párhuzamos szekcióban elhangzó előadások a döntési folyamatokat támogató operációkutatási módszerek igen gazdag tárházát mutatták be. A probléma megközelítések, a megoldásra használt matematikai módszerek és számítástechnikai eszközök, valamint az alkalmazások sokféleségéről tanúskodik a konferencián tárgyalt főbb témakörök alábbi felsorolása:

- koncepcionális keretbe foglalt döntési rendszerek,
- döntéstámogató rendszer alkalmazások,
- csoportos döntéstámogató rendszerek,
- multimédia szerepe a döntési rendszerekben,
- elektronikus kereskedelem,
- többkritériumú döntéstámogató rendszerek.

Az összesen 27 különböző szekcióban bemutatott előadások és az azokhoz kapcsolódó kérdések, hozzászólások jó lehetőséget kínáltak a résztvevőknek arra, hogy a szűkebb érdeklődési területüknek legjobban megfelelő témákat válasszák ki. A mindhárom napon szervezett délutáni plenáris ülésen részt vevők pedig átfogó képet alkothattak egy-egy aggregáltabb terület legújabb eredményeiről.

Néhány kiválasztott témakör értékelése

A beszámoló korlátozott terjedelme természetesen nem teszi lehetővé valamennyi szekció előadásainak átfogó, tartalmi ismertetését és értékelését. Ehelyett csupán egy adott érdeklődést tükröző, szubjektív válogatás eredményeként kialakult kép alapján lehet beszámolni a konferencián elhangzottakról. A koncepcióba foglalható döntéstámogató keretrendszerek szekcióban elhangzott előadások az alábbi kérdésekkel foglalkoztak:

- csoportos döntéstámogató rendszerek fejlődése,
- komplex rendszerek, illetve problémák kezelésére kifejlesztett eszközök,
- fuzzy logikán alapuló döntéselmélet,
- csoportos döntésen alapuló értékelés,
- drámaelméleti megközelítés,
- tudásbázisú csoportos döntéstámogatás,
- intelligens csoportos döntési rendszerek,
- genetikus algoritmusok.

A különböző DSS alkalmazásokat bemutató szekciókban szereplő előadások címszavakkal azonosítható főbb területei az alábbiak voltak: neurális hálózatok, illetve e hálózatok segítségével megvalósuló többkritériumú döntés, rendszerdinamika, közlekedés, szállítás, képfeldolgozás és -elemzés, árufuvarozási feladatok irányítása, útvonal-meghatározás, pénzügyi alkalmazások, gyártási és ellátási folyamatok támogatása, számviteli és üzleti folyamatok döntéstámogatása, minőségirányítás, ipari alkalmazások, heurisztikus módszerek, termelésütemezés, terméléstervezés és irányítás, egészségügyi és kulturális vonatkozású alkalmazások.

Az oktatásban dolgozó hazai szakemberek érdeklődésére számítva érdemel kiemelést Val Belton előadása, aki "Oktatás multimédiával" címmel tartott bemutatóján átfogó ismertetést adott az angol kormány jelentős pénzügyi támogatásával, három éves fejlesztés eredményeként kidolgozott MENTOR (Multimédia Educational Technology for Operational Research) nevű projektről. A 16 modulból álló programcsomag (a lineáris programozás, a szimuláció, a készletezés, az egész értékű programozás, a sztochasztikus folyamatok, a hálótervezés, a rendszertechnika, a döntéselemzés, a konfliktuselemzés, a heurisztikus módszerek, a dinamikus programozás, az anyagfelhasználás tervezése és ütemezése) jó példaként szolgál annak illusztrálására, hogyan lehet hatékonyan támogatni az operációkutatási és vezetéstudományi módszerek és ismeretek elsajátításának különböző formáit (konzultáció, távoktatás, önálló hallgatói munka segítése stb.).

A döntéstámogató módszerek között fontos és minden szervezet, vállalkozás gyakorlatában előforduló feladat megoldását segíti az angliai Friend által bemutatott stratégiai tanácsadó szoftver, a STRAD, amely jól illeszthető ahhoz a döntéstudományi megközelítéshez, amely szerint minden döntési problémát az adott körülmények gondos mérlegelése után a szóba jöhető döntéstámogató eszközök széles választékából alkalmasan válogatott módszer alkalmazásával célszerű kezelni.

Az alkalmazásokkal foglalkozó szekciók széles választékot kínáló előadásai bizonyították a döntéstámogató technikák széleskörű adaptációs lehetőségeit.

A közlekedési alkalmazásokkal foglalkozó alszekció előadásaiból az angliai Norman–Vickerman szerzőpáros előadása érdemel kiemelést. A szerzők előadásukban beszámoltak arról a közel 10 éves döntéstámogatási módszerekkel segített tervezési folyamatról, amely az Európai Unió több országát is átszelő közlekedési hálózat fejlesztésénél került alkalmazásra. A vázolt folyamatban részben vertikális (EU szintű), részben horizontális (regionális, illetve lokális szinten egyeztetéseket kívánó) konfliktusok megoldásában (nyomvonalak, vasútállomások kijelölése, összetett környezeti hatások identifikálása és értékelése stb.) használták eredményesen a döntéstámogatási technikákat.

A banktechnikai, pénzügyi és számviteli alkalmazásokat bemutató esettanulmányok közül két német kutató (Dellman és Vilczek) részleges információkkal ellátott beruházási döntések támogatására kidolgozott számítógépes programjának bemutatása váltott ki jelentős érdeklődést. A szerzők tapasztalatai szerint a beruházásokkal kapcsolatos valószínűségek rendszerint csak intervallumbecslésekkel adhatók meg, és többnyire rosszul strukturálható problémák kezelésére is alkalmas eljárásokat kell alkalmazni. Két francia kutató, Beal és Rowe, egyéni ügyfelek bankszámlájának forgalomkövetésére kidolgozott döntéstámogató információ-rendszerét bemutató előadása annak illusztrációjára szolgált, hogy a számítógép és a felhasználó közé iktatott interfész segítségével hogyan lehet kockázatmentes banküzemeltetést megvalósítani a médián keresztül történő választással. Ugyanebben a szekcióban Le Blanc előadása arra mutatott példát, hogy a szimuláció és a mesterséges intelligencia módszereinek felhasználásával hogyan lehet előre becsülni bizonyos gazdasági és politikai eseményeknek a valutaárfolyamok alakulására gyakorolt hatását.

Több előadás foglalkozott a többkritériumú döntéstámogató rendszerek ipari, gyártási, logisztikai, telepítési problémák megoldására történő alkalmazásával. Olasz kutatók előadásukban arról számoltak be, milyen tapasztalatokat szereztek az egészségügyi szervezetekben dolgozó vezetők — elsősorban stratégiai — döntéseinek támogatására kidolgozott információs rendszerek alkalmazásával. Az egészségügyi rendszerek irányításában Angliában is egyre szélesebb körben alkalmazzák a korszerű döntéstámogatási eljárásokat. Erről tanúskodott két angol kutató, Forte és Cropper előadása is, amelyben olyan DSS ismertetésére került sor, amelyet az országos egészségbiztosítási rendszer átalakításával összefüggésben alkalmaztak.

Speciális alkalmazási csoportot alkotnak azok az esetek, ahol osztott döntési problémák megoldása áll a középpontban. Ezzel a kérdéssel főleg francia kutatók előadásai foglalkoztak. Az osztott döntési rendszerek alkalmazására főleg olyan környezetben van szükség, ahol a vállalatoktól elvárt magatartás a változó környezethez történő gyors alkalmazkodás. Az ilyen típusú döntési problémák kezelésére jól áttekinthető modellt dolgozott ki és mutatott be 3 francia kutató, Cavaille, Bell és Dubois. A bemutatott modell fő célkitűzései az alábbiak:

- olyan koncepcionális keretrendszer meghatározása, amelyben pontosan rögzíthető a helyi döntéshozók döntési kompetenciája és a döntéshozók közötti információáramlás,
- olyan algoritmus szolgál a helyi döntéshozók autonómiájának értékelésére, amely figyelembe veszi a magasabb szintű döntésekből adódó korlátokat.

A területi fejlesztések megalapozását segítő alkalmazások közül is érdemes kiemelni a konferencia néhány előadását. Az olasz Lamiado professzor által kidolgozott és bemutatott LINDA nevű program a GIS technológiának egy olyan céllal továbbfejlesztett alkalmazása, amely egy adott régió társadalmi, gazdasági, demográfiai és környezeti adatokkal kapcsolatos idősorait tetszés szerinti mutatók képzésére használja fel, s a különböző mutatókat a területfejlesztési döntések előkészítésénél használja fel. Hasonló céllal kezdeményezett horvátországi kutatások eredményeit mutatta be a Pavic és Babic szerzőpáros által tartott előadás, amely a Split környéki térség PROMETHEE módszer felhasználásával elvégzett többkritériumú értékeléséről tartott beszámolót. A kutatás eredményeit a városi önkormányzat a privatizálás során kívánja hasznosítani.

A döntéstudományok interdiszciplináris jellegét tanúsítja az a drámaelméleti alszekcióban elhangzott előadás, amely a konfrontáció elkerülési lehetőségeire hívta fel a figyelmet. A konfrontáció-elemzés az interaktív döntéstámogatás egy olyan újszerű eszköze, amellyel olyan döntési szituációk kezelésére nyílik lehetőség, amelyben számos közreműködő döntéshozó alternatíva-választása a többiek tényleges vagy előre jelezhető választásának függvényeként alakul. Ez a megközelítés a játékelméletre épülő lehetőség-elemzésre alapozva keresi a megoldást, nagy hangsúlyt helyezve az egyes résztvevők kiinduló helyzetének meghatározására. Ez a döntéstámogató technika magába foglalja azokat a konfliktus-kezelő dinamikus modelleket is, amelyek figyelembe veszik a döntéshozatal racionális és emocionális aspektusait is.

A magyar résztvevők előadásai

Végül a beszámoló áttekintést kíván adni a konferencia magyar résztvevői által tartott előadásokról is.

Rapcsák Tamás szerzőtársakkal (Csáki P., Fölsz F., Sági Z.) összeállított előadása a WINGDSS 4.1 verziójával végrehajtható tenderértékelésekről számolt be. A Magyarországon 1995-ben elfogadott közbeszerzési törvény jelentős keresletet támasztott olyan többszintű, többkritériumú csoportos döntési módszerek alkalmazására, ahol a szigorú törvényi előírások betartását a teljes eljárásban garantálni kell. Az MTA SZTAKI Operációkutatási és Döntési rendszerek osztálya az általános célú WINGDSS 4.0 DSS szoftver alapján kifejlesztette azt a WINGDSS 4.1 jelű felhasználóbarát változatot, amely hatékony támogatást nyújt a közbeszerzési törvény által előírt szabályok betartásával lefolytatott pályázatértékelési eljárásokhoz.

Rapcsák Tamás Gass professzorral közösen "A csoportos döntések szintéziséről" címmel tartott másik előadása olyan döntési problémák kezelésére dolgozott ki a legjobb megoldás kiválasztására vagy rangsorolásra szolgáló eljárást, amelyben a szakértők egyénileg, egymástól függetlenül értékelik az egymással versengő nagyszámú változatot. A szerzők a csoport-döntési fázis támogatásához egy olyan megoldást mutatnak be, amely aggregálja a szakértők egyéni súlyvektorait. A módszer alkalmazása lehetővé teszi az egyéni szakértők eltérő szavazóerejének figyelembevételét és sokoldalú érzékenységvizsgálatra biztosít lehetőséget.

Bíró Miklós és szerzőtársai (Kovács L., Micsik A., Remzső T.) előadásukban a World Wide Web szavazási és rangsorolási szolgáltatásaival összefüggő referencia modellt mutattak be. A bemutatott referencia modell a korábban kifejlesztett osztott csoportos döntéstámogatási rendszerek referencia modelljének (RM DGDSS) olyan továbbfejlesztett változata, ahol a döntéshozók számítógépes hálózat segítségével kerülnek kapcsolatba egymással.

Temesi József "Az MCDM módszerek eredményeinek érvényessége" címmel tartott előadást. A szerző előadásában felhívta a figyelmet a többkritériumú döntési módszerekkel kapott eredmények gondos elemzésének szükségességére, különös tekintettel a stabilitás és az érzékenység vizsgálatára. A módszerek robosztusságát olyan képletekkel lehet ellenőrizni, amelyek alkalmasak az egyes eljárások viselkedésének leírására. Az ilyen elemzéseket célszerű beépíteni a többkritériumú döntési eljárásokba. Az érzékenységvizsgálatok elvégzését az alábbi paraméterek szerint javasolta: súlyok, preferenciák változása, adatrendszerek, illetve döntéshozók bizonytalansága. Arra is felhívta a figyelmet, hogy a modell érvényességi körének meghatározása nem csupán az eredmények matematikai elemzéséből áll, de magába foglalja az eredmények verifikálását is. Az utóbbira vállalkozhat maga a döntéshozó is, de olyan esetekben, ahol társadalmi problémákkal kapcsolatos döntésekről van szó, más mértékek alkalmazása is szükséges. Az előadás végül egy olyan MCDSS bemutatásával zárult, ahol a döntési probléma modellezés minden lépésének végrehajtása egyformán fontos és ahol a döntéshozót a végső döntést is elemző egység támogatja.

Tánczos Katalin és Békefi Zoltán előadása olyan új módszert és döntéstámogató programcsomagot mutatott be, amely beruházási döntések pénzügyi megvalósíthatóságának vizsgálatát és elemzését támogatja. A nagyobb infrastrukturális létesítményeket megvalósító beruházási projektek rendszerint olyan környezetben valósulnak meg, amelyet a pénzügyi források hiánya, a bizonytalanság és a versengő befektetési lehetőségek változatainak nagy száma jellemez. A szerzők által kifejlesztett módszer és programcsomag aktív támogatást nyújt a döntéshozóknak a pénzügyileg megvalósítható projektváltozatok összeállításához és a szükséges elemzések végrehajtásához.

Kiadvány

Az EURO 7. kiskonferenciáján elhangzott előadások közül a legjobbak szigorú válogatás után a The European Journal of Operation Research, The Journal of Decision System és az International Systems Journal külön számában kerülnek publikálásra.

Tánczos Lászlóné

KÖNYVEKRŐL

HUNYADI LÁSZLÓ–MUNDRUCZÓ GYÖRGY–VITA LÁSZLÓ: *Statisztika*, Aula kiadó 1996.

A Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem Statisztika tanszékén készült statisztika tananyagoknak hosszú előzménye van, a több évtizeden keresztül sok kiadást és átdolgozást megélt Köves Pál–Párniczky Gábor szerzőpáros Általános Statisztika tankönyve, majd 1990-től a mostani szerzőhármas Statisztika című kétkötetes könyve, amely 6 évig a statisztika tárgy tankönyve volt a BKE-n. Szintén fontos előzmény a Köves-Párniczky könyvhöz megjelent kiegészítő jegyzet, amely a nyolcvanas évek végén az emelt szintű statisztikaoktatást szolgálta. A mostani könyv a kétkötetes könyvnek az átdolgozott, letisztult folytatása. A könyv hármas célt próbál szolgálni. Egyrészt (a hozzá készített képletgyűjteménnyel és példatárral együtt) a közgazdasági oktatáshoz nyújt igényes, bő statisztika tananyagot. Másrészt kézikönyvként szolgál a statisztikát használó társadalomtudományi területeken működő kutatóknak és gyakorlati szakembereknek. Harmadrészt, miután a BKE-n az elmúlt években sikerült teljesen kiirtani a gazdaságstatisztika jellegű tárgyakat, a könyv a gazdaságstatisztika fogalomrendszerét, módszereit is igyekszik becsempészni témái közé, és így pótolni igyekszik a gazdaságstatisztika tananyagok kiesése miatt keletkezett hiányt.

A könyv tíz fejezetből áll, az első két fejezet tartalmazza a statisztika alapfogalmait és az információsűrítés főbb eszközeit. Nagyon jó ötletnek tartom a statisztikai alapműveletek fogalmának bevezetését (a sokaság nagyságának megállapítása, csoportosítás, összehasonlítás), mert ez módot ad az egyszerűbb módszerek feltétlenül szükséges, de a régi tankönyveknél sokkal tömörebb, lényegre törőbb tárgyalására. Az információsűrítés főbb eszközeiről szóló fejezet a minőségi és mennyiségi ismérvek és a kapcsolatvizsgálat leíró statisztikai elemzését tartalmazza. A mennyiségi ismérvek jellemzése az előző változatnál is plasztikusabban tárgyalja az eloszlások leíró statisztikai mutatószámok segítségével történő rekonstrukcióját. Itt érdemes megemlíteni azt a problémát, ami az egész könyvön végigvonul. Magyarországon, sok nyugati tankönyv gyakorlatával szemben a statisztika és a valószínűségszámítás tárgyalása diszciplinárisan elvált egymástól, a statisztika anyagok ezért tulajdonképpen kiszolgáltatottak az egyes intézményekben kialakult valószínűségszámítás tanítási gyakorlatnak. A statisztika könyvek általában nem tartalmaznak valószínűségszámítási fejezetet, vagy csak a legfontosabb fogalmakat sorolják fel függelékszerűen. A BKE-n ráadásul a valószínűségszámítást az elmúlt 7 évben a statisztikával párhuzamosan tanítják, így a fogalmak többségére csak a későbbi anyagrészeknél lehet hivatkozni. Az elmúlt évek tapasztalatai alapján véleményem szerint szakítani kell ezzel a gyakorlattal, és a valószínűségszámítást és a statisztikát szerves egységben, egy tárgy keretein belül kell tanítani. A Statisztika könyv a mennyiségi ismérvek jellemzésénél úgy próbálja áthidalni a valószínűségszámítási ismeretek hiányosságait, hogy az alak és a csúcsosság tárgyalásánál a régi tananyagoknál sokkal jobban támaszkodik a kvantilisekre építő mutatókra, ami a tanítás gyakorlatában didaktikus, jó megoldás, csak nem cseng egybe a statisztikai programcsomagok gyakorlatával, amelyek viszont egyáltalán nem közölnek ilyen mutatókat.

A harmadik fejezet szintén egy tartalmi, formai újítás a magyar (és a nemzetközi) gyakorlatban, a standardizálást és az indexszámítást egy logikai egységként, mint összetett összehasonlítási problémát tárgyalja. Az indexszámítás fejezetre (és az utolsó, A statisztika a társadalom szolgálatában című fejezetre) igaz a leginkább a gazdaságstatisztikai fogalmak, mutatók becsempészése az anyagba, itt aránylag részletesen megjelenik a fogyasztói árindex számítása, a deflálás és többszörös deflálás, és a nemzetközi összehasonlítások (ICP, ÉKS-indexek).

A negyedik és az ötödik fejezet is merész újítást jelent a mintavétel és a becslés tárgyalásmódjában. A két fejezet tulajdonképpen kétszer megy végig a mintavételi módokon, az első fejezet a mintavételek filozófiájára, fő célkitűzéseire koncentrálva, míg az ötödik fejezet a legfontosabb becsléselméleti fogalmak tárgyalása után újra végigveszi a mintavételi módokat, és bemutatja a különböző paraméterek becslését a hibaszámítással együtt. Alapozó statisztikai könyveknél részletesebben tárgyalja az ötödik fejezet a becslés alapvető elveit, a hibaszámítások mögötti filozófiát, és jó áttekintést nyújt (tudtommal a magyar statisztikai alapirodalomban egyedülállóan) a számítógépes ismétléses eljárásokról (bootstrap, jackknife-eljárások). A könyv legnagyobb veszteségének tartom az előző változatokhoz képest a bayes-i becslések gondolatmenetének egyetlen bekezdésre zsugorodását.

A hatodik fejezet tárgyalja a hipotézisvizsgálatokat. A könyv következetesen tárgyalja a null- és alternatív hipotézisek rendszerét, bevezeti a technikai nullhipotézis fogalmát, ami módot ad a hipotézisvizsgálat konzisztens tárgyalására, azt is bemutatva, hogy milyen további elemzésre nyílik mód, ha a technikai nullhipotézist fogadjuk el. A könyv — alapozó tankönyvhöz képest — talán túl sok próbát tárgyal részletesen (mintegy 20 különböző próba tárgyalása található meg a fejezetben), de természetesen az oktatás során ezek közt szelektálni lehet, a sok próba szerepeltetését a kézikönyv jelleg indokolta. A próbák között szerepelnek a legfontosabb nemparaméteres próbák is.

A hetedik fejezet tárgyalja az idősorok elemzési eszközeit, ezen belül az egyszerű eszközöket, a klasszikus dekompozíciót és a kisimító módszerek alapjait. A sztochasztikus idősorelemzés tárgyalása szintén nagyon lerövidült a könyv előző változatához képest, csak a legfontosabb fogalmak találhatóak meg egy-egy illusztratív példával kísérve. (Ezen a ponton is sérült szerintem a kézikönyv jelleg, de ezt az oktatási rendszer átalakulása indokolta a BKE-n, miután az elmúlt két évben megjelent egy új, graduális szintű tárgy, a Statisztikai elemzések, amelyhez jegyzet készült, és amely részletesen tárgyalja többek közt a sztochasztikus idősorelemzést is. A már említett bayes-i szemlélet kimaradását azért tartom még fájdalmasabbnak, mert az gyakorlatilag egyetlen későbbi tananyagban sem jelenik meg.) Az idősorelemzés klasszikus eszközeinek tárgyalása véleményem szerint az alapfogalmak mellett a könyv másik legletisztultabb fejezete, rendkívül tömören, ugyanakkor világosan, plasztikusan mutatja be a módszereket. A fejezet a szabálytalan ciklusok kimutatásának egy egyszerű módszerét is bemutatja, külön érdekesség, hogy ezt Kondratyev egy eredeti idősorának elemzésével illusztrálja.

A nyolcadik és kilencedik fejezet a regresszió- és korrelációszámítást tárgyalja, két- és többváltozós elemzésre tagolva azt. A két fejezet jól ötvözi az elméleti igényességű tárgyalást a praktikus ismeretekkel, a legfontosabb modellek, elméleti tulajdonságok bemutatása mellett részletesen tárgyalja a modellfeltételek tesztelését (homoszkedaszticitás, Durbin-Watson statisztika, normalitásvizsgálatok) és sérülésük esetén követhető eljárásokat (súlyozott legkisebb négyzetek módszere, Cochrane-Orcutt algoritmus). Ezenkívül kimerítően tárgyalja a multikollinearitást és a modell-validitási vizsgálatokat. Ez a két fejezet kötődik leginkább az elterjedt számítógépes programcsomagok outputjaihoz, egyes mutatókat kifejezetten azért mutat be, mert azokat az outputok tartalmazzák (pl. multikollinearitás VIF és tolerancia mutatói).

Az utolsó fejezet, mint szó volt róla, a statisztika társadalomban elfoglalt helyével foglalkozik. Ezt a témakört, be kell vallani, az oktatásban általában mostohán kezeljük, egy előadást szánunk rá legfeljebb, és a számonkérésben is minimális a szerepe, pedig bizonyos részei alapvető fontosságúak lennének a gyakorlat szempontjából is, hiszen ez a fejezet tartalmazza az információkhoz jutás gyakorlati és jogi kereteit. Többször előfordult az utóbbi időben, hogy üzleti, sőt tudományos műhelyekkel szemben bírósághoz vagy az adatvédelmi biztoshoz fordultak, mert a kutatók nem ismerték az információgyűjtés alapvető jogi szabályozását.

Végezetül néhány, nem a konkrét fejezetekhez tartozó megjegyzést szeretnék tenni. A könyv minden fejezet végén részletes példagyűjteményt tartalmaz, melyek közt elméleti és számításos feladatok egyaránt találhatóak, így a könyv anyaga autodidakta módon, egyéb segédanyagok nélkül is elsajátítható. A könyv végén nemcsak a legfontosabb táblázatok találhatóak meg, hanem minden táblázathoz egy kis bevezető használati utasítás tartozik, amelyet példa is illusztrál, rendkívül megkönnyítve a táblázatok használatát. A tárgymutató egyben a fontosabb fogalmak angol nyelvű megfelelőjét is tartalmazza, elősegítve az angol irodalom és főleg a számítógépes szoftverek outputjainak megértését. A könyv kivitele viszont még mindig nem elég mutatós, elsősorban a lényeges részek, definíciók más színnel történő kiemelése hiányzik. (Ez természetesen nem a szerzők hibája, elsősorban pénzkérdés, hiszen a könyv ilyen formájában is csak jelentős minisztériumi támogatással érte el, hogy a megfizethetőség határán legyen, ára az 1996-97-es tanévben 2600 forint volt.) Meg kell említeni, hogy bár a könyvet három szerző írta, és ezért természetesen az egyes fejezetek stílusa némileg eltér egymástól, mégis egységes művet alkot, ami nagyban köszönhető Kerékgyártó Györgynének is, aki a fejezeteket összeszerkesztette és egységesítette.

Sugár András