AZ 'ÉLETLEN' HALMAZOK ARITMETIKÁJA NEM 'TÖKÉLETLEN' ARITMETIKA[1]
(A fuzzy aritmetika új megközelítése a döntéstámogatásban)

PAULER GÁBOR
JPTE KTK PhD-hallgató

Jelen tanulmányban elsőként az eddigi fuzzy aritmetikai módszereket értékeljük, majd szakaszonként lineáris tagságfüggvények definálása és a maxmin szkenelési technika alkalmazása révén olyan új fuzzy aritmetikai módszert vezetünk be, amely kiküszöböli a korábbi eljárások egyes hátrányait.

Kulcsszavak: fuzzy számok, fuzzy aritmetika, kiterjesztési alapelv, maxmin konvolúció, szakaszonként lineáris tagságfüggvény, maxmin szkenelés.

1. Bevezetés

A fuzzy elmélet alkalmazása a döntéshozatal egyre újabb területeire tört be az elmúlt két évtizedben. Mégis, sok elméleti és gyakorlati szakember ma is úgy látja, hogy a fuzzy matematika helytelen és zavaros dolgok gyűjteménye, mert ez az elmélet teljesen más gondolkodásmódot igényel mint a hagyományos, kétértékű logikán alapuló teóriák. A kívülállók számára elég nehéz elképzelni, hogy lehet fuzzy számokon aritmetikai műveleteket végezni. Jelen tanulmány célja, hogy az eddigi fuzzy aritmetikai módszerek rövid áttekintésével enyhítsen az előítéleteken, emellett egy hatékonyabb megközelítést vezessen be.

Mielőtt belekezdenénk a fuzzy aritmetika vizsgálatába, röviden felidézünk néhány alapvető definíciót [Zadeh, 1965], amelyekre a későbbiekben gyakran hivatkozunk:

1. Fuzzy halmaz: *olyan halmaz, amelynek elemei különböző mértékben tartoznak a halmazhoz.*

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\} \qquad \mu_A(x) \geq 0 \tag{1.1}$$

ahol:

[1]Beérkezett: 1996. június 29.

A – fuzzy halmaz
x – alaphalmaz elem
$\mu_A(x)$ – az adott alaphalmaz elem tagságfüggvénye
X – az alaphalmaz univerzuma

2. Normalizált fuzzy halmaz: *a tagságfüggvény értéke nem haladhatja meg az egyet*

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \; . \tag{1.2}$$

3. Fuzzy halmaz supportja: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb, mint 0*

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \; . \tag{1.3}$$

4. Fuzzy halmaz α-szintű halmaza: *a fuzzy halmaz alaphalmazának olyan alhalmaza, ahol a tagságfüggvény értéke nagyobb (nem szigorú esetben nagyobb vagy egyenlő), mint α.*

Szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \tag{1.4}$$

Nem szigorú eset:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{1.5}$$

5. Fuzzy halmaz kardinalitása: *a tagságfüggvény alatti terület.*

Folytonos esetben:

$$|A| = \int_X \mu_A(x)\, dx \; . \tag{1.6}$$

Diszkrét esetben:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \; . \tag{1.7}$$

6. Fuzzy halmazok metszete:

$$C = (A \cap B) \mid \mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in X \; . \tag{1.8}$$

7. Fuzzy halmazok uniója:

$$C = (A \cup B) \mid \mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad \forall x \in X \; . \tag{1.9}$$

8. Fuzzy halmaz relatív kardinalitása: *a fuzzy halmaz kardinalitása és az alaphalmazának kardinalitása közti arány:*

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|} . \tag{1.10}$$

9. Fuzzy halmaz komplementere:

$$\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x) . \tag{1.11}$$

2. Az eddigi fuzzy aritmetikai módszerek áttekintése

Amíg az éles aritmetikai operátorok kívül esnek a kutatók érdeklődési körén — mindenki megtanulhatja őket az általános iskolában — a fuzzy aritmetikai operátorok komoly kihívást jelentenek. Mivel a fuzzy halmazok jóval több információt képesek hordozni, mint az éles döntési változók, a fuzzy aritmetikai operátoroknak jóval magasabb a számítási igénye is. Így ezen operátorok hatékonysága alapvetően befolyásolja a gyakorlatban alkalmazott fuzzy rendszerek sebességét és költségigényét. Mielőtt áttekintenénk a fuzzy aritmetikai módszereket, idézzük fel a fuzzy számok definicióját és az éles aritmetikai műveletek fuzzifikálásának alapelvét.

2.1 A fuzzy számok definíciója

A fuzzy szám bizonytalan, pontatlanul megfogalmazott mennyiségek (pl. "körülbelül 7", "8 és 10 közt" stb.) ábrázolására szolgáló fuzzy halmaz:

$$\tilde{M} = \{[x, \mu_{\tilde{M}}(x)]\} \qquad x \in I\!R \quad \mu_{\tilde{M}}(x) \in [0,1] \tag{2.1}$$

A tagságfüggvény azon állítás igazsági fokát jelzi, hogy M x értékét veszi fel. Fuzzy szám folytonos és diszkrét alaphalmazon is definiálható.

2.2 A kiterjesztési alapelv

A kiterjesztési alapelvet L. A. Zadeh vezette be [Zadeh, 1973] éles aritmetikai operátorok fuzzy-vá konvertálása céljából. Az egyszerűség kedvéért diszkrét fuzzy számokon, és csak két operandusz esetén mutatjuk be működését. Az érdeklődők könnyen általánosíthatják ezt több operandusz esetére.

- Tételezzük fel, hogy A és B két fuzzy operandusz, alaphalmazaik U_a, illetve U_b.

- $x_{a_1}, \ldots, x_{a_n} \in U_a$ és $x_{b_1}, \ldots, x_{b_n} \in U_b$ a két fuzzy halmaz alaphalmazának diszkrét elemei.
- Legyen Z a művelet eredményeként létrejövő fuzzy szám, U_z alaphalmazzal és $z_1, \ldots, z_k$ diszkrét alaphalmaz elemekkel.
- Legyen f egy függvény, ami $U_a \times U_b$-t U_z-be képezi le, vagyis $z = f(x_a, x_b)$. Ez az éles aritmetikai operátor, amit fuzzifikálni akarunk.
- A és B Descartes szorzata legyen:

$$\begin{aligned} C &= \{(x_{a_i}, x_{b_j}), \min[\mu_{\tilde{A}}(x_{a_i}), \mu_{\tilde{B}}(x_{b_j})]\} \\ &\forall x_{a_i}, x_{b_j},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Z eredmény fuzzy halmazt a következőképpen kaphatjuk meg A-ból és B-ből:

$$Z = \left\{ \left[Z_1, \mu_{\tilde{Z}}(Z_1) \right] \mid Z_1 = f(x_{ai}, x_{bj}),\ x_{ai} \in U_a,\ x_{bj} \in U_b \right\} \tag{2.3}$$

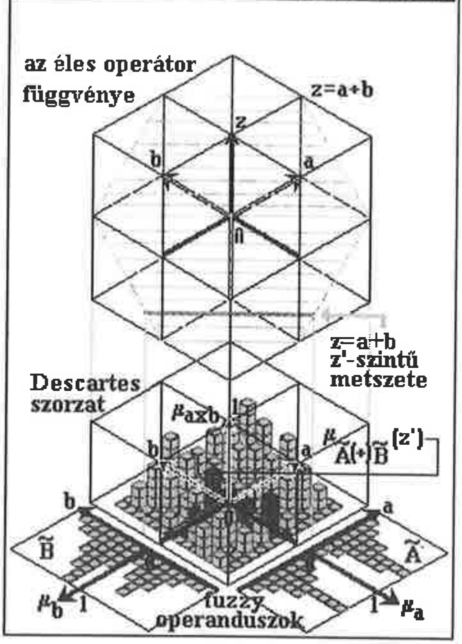
ahol

$$\mu_{\tilde{Z}}(Z_1) = \begin{cases} \max\min_{Z_1 = f(x_{ai}, x_{bj})} [\mu_{\tilde{A}}(x_{ai}, \mu_{\tilde{B}}(x_{bi})] & \text{ha } f^{-1}(Z_1) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A könnyebb érthetőség kedvéért lássunk egy grafikus példát két operandusz összeadására (lásd 1. ábra). A kérdés, hogy hogyan határozzuk meg az eredmény fuzzy halmaz alaphalmazának egy egyedi z' értékéhez rendelt tagságfüggvény értéket. Kiinduláskor az éles operátort jelentő függvényt ($z = x_a + x_b$), valamint A és B halmazok Descartes szorzatát ismerjük. A következő lépésben meghatározzuk az éles függvény z'-szintű metszetét (olyan (x_{ai}, x_{bj}) párokat keresünk, ahol $x_{ai} + x_{bj} = z'$). A Descartes szorzatban is megkeressük ezeket a párokat (lásd a sötétebb oszlopokat a Descartes szorzat oszlopdiagrammjában). Harmadik lépésben az elhatárolt elemek tagságfüggvény értékeinek a maximumát vesszük, ez lesz z' tagságfüggvény értéke az eredmény fuzzy halmazban. Ezt a három lépést minden z értékre meg kell ismételnünk.

A kiterjesztési elv legnagyobb problémája, hogy nem alkalmazható közvetlenül a gyakorlatban, mert nagyon sok gépidőt fogyasztó probléma az éles függvény z' szintű metszetét meghatározni, főként ha sok operandusz van, folytonos közelítés szükséges és az operátorfüggvény bonyolult. Ezért különböző szerzők [Jain 1976], [Mizumoto & Tanaka 1976], [Baas & Kwakernak 1977], [Dubois & Prade 1980] egyszerűsített módszereket vezettek be, amelyek mind a kiterjesztési elven alapulnak.

1. ábra Grafikus példa fuzzy összeadásra



2.3 Fuzzy aritmetikai módszerek

A módszereket a fuzzy operanduszok diszkrét vagy folytonos jellege alapján két nagy csoportra oszthatjuk. A folytonos fuzzy számokat kezelő módszer az α-szinthalmazokon alapul. Egy fuzzy halmaz α-szinthalmaza:

$$M = \{[m, \mu_M(m)] \mid m \in U_M, \mu_M(m) \geq \alpha\}\ . \qquad (2.5)$$

Egyszerűsítésként, csak két operandusz esetével foglalkozunk. Folytonos esetben az operanduszok legyenek:

$$M = \{[m, \mu_M(m)] \mid m \in U_M\} \quad \text{és} \quad N = \{[n, \mu_N(n)] \mid n \in U_N\} \qquad (2.6)$$

ahol

$$M_\alpha = [m_1, m_2] \quad \text{és} \quad N_\alpha = [n_1, n_2] \qquad (2.7)$$

α-szinthalmazai M-nek és N-nek

A diszkrét fuzzy számokat a maxmin konvolúciós módszer kezeli. Diszkrét operanduszokként az előző részben leírt A és B fuzzy számokat használjuk.

2.3.1 Összeadás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(+)\,N_\alpha = [m_1 + n_1, m_2 + n_2] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.8}$$

Diszkrét eset:

$$\mu_{A\,(+)\,B}(z) = \max_{z = x_{ai} + x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{2.9}$$

ahol $\cap$ a minimum operátor. Az összeadás tulajdonságai: kommutatív, asszociatív, a neutrális érték 0.

2.3.2 Kivonás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(-)\,N_\alpha = [m_1 - n_2, m_2 + n_1] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.10}$$

Diszkrét eset:

$$\mu_{A\,(-)\,B}(z) = \max_{z = x_{ai} - x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{2.11}$$

2.3.3 Szorzás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(\times)\,N_\alpha = [m_1 \times n_1, m_2 \times n_2] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.12}$$

Diszkrét eset: ha az eredmény fuzzy halmaz 'jobb lábánál' tartunk, vagyis $z > z' \mid \mu_{A\,(\times)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(\times)\,B}(z) = \max_{z \le x_{ai} \times x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{2.13}$$

ha az eredmény 'bal lábánál' tartunk, vagyis $z < z' \mid \mu_{A\,(\times)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(\times)\,B}(z) = \max_{z \ge x_{ai} \times x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{2.14}$$

A szorzás jellemzői: kommutatív, asszociatív, a neutrális érték 1, disztributív az összeadással és a kivonással.

2.3.4 Osztás

Folytonos eset:

$$M_\alpha\,(/)\,N_\alpha = [m_1/n_2, m_2/n_1] \qquad \forall\alpha \in [0,1]\,. \tag{2.15}$$

Diszkrét eset: ha az eredmény fuzzy halmaz 'jobb lábánál' tartunk, vagyis $z > z' \mid \mu_{A\,(/)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(/)\,B}(z) = \max_{z \leq x_{ai}/x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2.16}$$

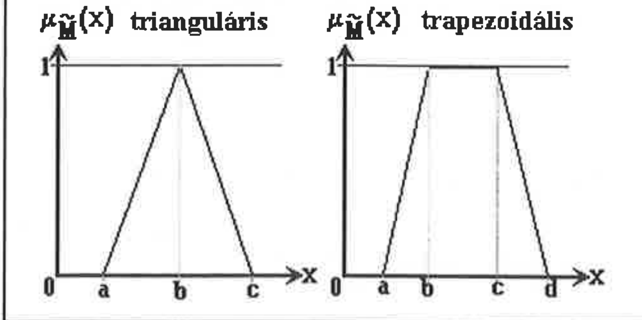
ha az eredmény 'bal lábánál' tartunk, vagyis $z < z' \mid \mu_{A\,(/)\,B}(z') = 1$, akkor

$$\mu_{A\,(/)\,B}(z) = \max_{z \geq x_{ai}/x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2.17}$$

2.3.5 Speciális fuzzy számok aritmetikája

Néhány szerző [Kaufmann & Gupta 1985], [Laarhoven & Pedrycz 1983] speciális fuzzy számokat alkalmazott, hogy jelentős mértékben leegyszerűsítse és felgyorsítsa a fuzzy aritmetikai műveleteket (lásd 2. ábra).

2. ábra Speciális fuzzy számok



Itt csak a trapezoidális fuzzy számok aritmetikáját részletezzük. Az érdeklődők könnyen visszavezethetik ezt trianguláris fuzzy számok esetére. A trapezoidális operandusok legyenek:

$$M = (a_1, b_1, c_1, d_1) \qquad \text{és} \qquad N = (a_2, b_2, c_2, d_2) \tag{2.18}$$

Összeadás:

$$M\,(+)\,N = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \tag{2.19}$$

Kivonás:

$$M\,(-)\,N = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2) \tag{2.20}$$

Szorzás:

ha $M > 0$ és $N > 0$ akkor

$$M\,(\times)\,N = (a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2, d_1 \times d_2) \tag{2.21}$$

ha $M > 0$ és $N < 0$ akkor

$$M\,(\times)\,N = (a_1 \times d_2, b_1 \times c_2, c_1 \times b_2, d_1 \times a_2) \tag{2.22}$$

ha $M < 0$ és $N < 0$ akkor

$$M\,(\times)\,N = (d_1 \times d_2, c_1 \times c_2, b_1 \times b_2, a_1 \times a_2) \tag{2.23}$$

Osztás:

ha $M > 0$ és $N > 0$ akkor

$$M\,(/)\,N = (a_1/d_2, b_1/c_2, c_1/b_2, d_1/a_2) \tag{2.24}$$

ha $M < 0$ és $N > 0$ akkor

$$M\,(/)\,N = (d_1/d_2, c_1/c_2, b_1/b_2, a_1/a_2) \tag{2.25}$$

ha $M < 0$ és $N < 0$ akkor

$$M\,(/)\,N = (d_1/a_2, c_1/b_2, b_1/c_2, a_1/d_2) \tag{2.26}$$

2.4 Az eddigi fuzzy aritmetikai módszerek értékelése

A fuzzy aritmetikának trianguláris és trapezoidális fuzzy számok használata esetén van a legkisebb számítási igénye. Azonban, még viszonylag egyszerű fuzzy rendszerek esetén is előfordulhat, hogy az eredmény fuzzy halmaz tagságfüggvénye igen összetett formájú, ami ezekkel az egyszerűsített aritmetikai módszerekkel nem dolgozható fel tovább.

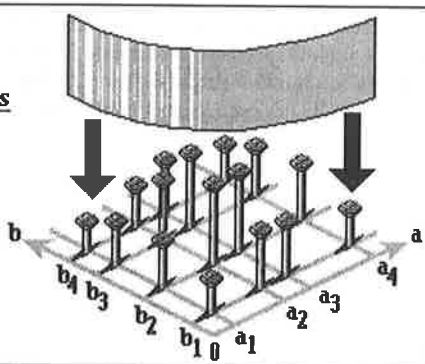
A folytonos, α-szinthalmazokhoz kapcsolódó módszer a tagságfüggvény jóval finomabb felbontását teszi lehetővé, de feltételezi, hogy mind az operanduszok, mind az eredmény fuzzy halmaz egycsúcsú tagságfüggvénnyel rendelkezik: a 'bal láb' nem szigorúan monoton nő, a 'jobb láb' nem szigorúan monoton csökken. Így komplex fuzzy rendszerek (pl. heurisztikus MAUF)

[Esthatiou & Rajkovic 1979] eredményei szintén nem dolgozhatók fel tovább velük. Bármilyen törekvés viszont, amely az eredmény fuzzy halmaz csúcsszámának csökkentését célozza (pl. minimum-összeg kompozíció alkalmazása) igen kemény információvesztéssel jár. A diszkrét fuzzy számokat kezelő max-min konvolúció alkalmazásának hátrányait egy 'csináld-magad' példával szemléltethetjük. Próbáljunk meg összeszorozni két diszkrét fuzzy számot a kiterjesztési alapelv közvetlen alkalmazásával:

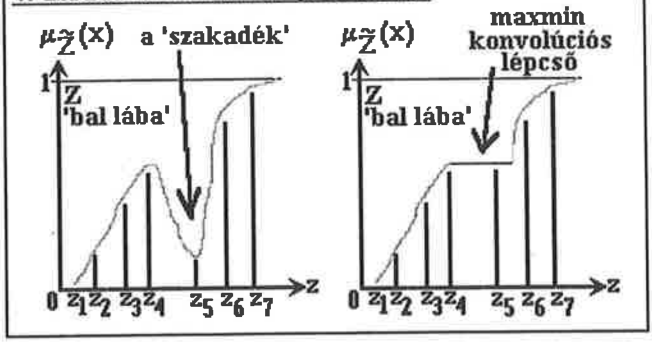
$$\mu_{A(\times)B}(z) = \max_{z=x_{ai}\times x_{bj}} [\mu_A(x_{ai}) \cap \mu_B(x_{bj})] \qquad i=1,\dots,n, \quad j=1,\dots,m\,. \tag{2.27}$$

A helyzet úgy modellezhető a legjobban, ha különböző hosszúságú szögeket verünk egy asztal lapjába, amelyek A és B diszkrét fuzzy számok Descartes szorzatát szimbolizálják (lásd 3. ábra). Ezután megpróbálunk a szögek közé csúsztatni egy hiperbolikusan meghajlított lemezt, amely az éles szorzat operátor z'-szintű metszetét jelképezi.

3. ábra Példa diszkrét fuzzy számok extenziós alapelv szerinti összeszorzására



Lehetséges, hogy a lemez alsó éle egy hosszú szög tetején landol. De előfordulhat olyan szerencsétlen eset is, hogy a lemez lecsúszik az asztalig, vagy egy rövid szögön landol, holott több hosszú szög van a lemez közvetlen közelében. Ez az oka, hogy 'szakadékok' (lásd 4. ábra), vagyis váratlanul alacsony tagságfüggvény értékek jelennek meg az eredmény fuzzy halmazban. Ha a z'-szintű metszet csak kevés 'kereszteződést' érint a Descartes szorzatban, a tagságfüggvény érték torzulhat. Ha az operanduszok alaphalmazai csak kevés diszkrét elemet tartalmaznak, és ezek egymástól mért távolsága nem konstans, sok 'szakadék' keletkezik. A jelenség végső soron a diszkrét alaphalmazok és a folytonos éles operátor közti konfliktusra vezethető vissza.



4. ábra A 'szakadékok' problémája

A maxmin konvolúciós módszer meglehetősen primitív módon oldja meg a 'szakadékok' problémáját. Feltételezi, hogy csak egycsúcsú tagságfüggvények vannak, ahol a 'bal láb' nem szigorúan monoton nő, a 'jobb láb' nem szigorúan monoton csökken. Ezen a módon a szakadékok betömhetők (lásd 4. ábra) és furcsa 'lépcsők' keletkeznek az eredmény fuzzy halmaz tagságfüggvényében. Így a maxmin konvolúció a diszkrét fuzzy számok kezelésének egy igen durva megközelítése, ráadásul csak egycsúcsú fuzzy halmazok kezelésére alkalmas. A következő részben egy új megközelítést vezetünk be, ami más módszerrel oldja meg a 'szakadékok' problémáját.

3. Szakaszonként lineáris, több csúcsú tagságfüggvénnyel rendelkező fuzzy számok aritmetikája

Ha bonyolult fuzzy rendszerek output fuzzy számaival szeretnénk műveleteket végezni, akkor lehetővé kell tenni olyan több csúcsú tagságfüggvények használatát, ahol az egyes csúcsok tagsági értéke egynél kisebb is lehet. Alapvető feltételezésünk, hogy szakaszonként lineáris tagságfüggvények segítségével bármilyen profil elfogadható pontossággal leírható.

3.1 Fuzzy szám koncepció

Legyen A egy speciális fuzzy szám, amely tetszőleges számú töréspontból (alaphalmaz érték – tagságfüggvény párok) és a szomszédos töréspontokat összekötő lineáris szakaszokból áll (lásd 5. ábra):

$$A = \{[a_i, \mu_A(a_i)] \mid i = 1, \ldots, n,\ a_i \in U_A\} \cup \{(a, \mu) \mid \\ \mu = \beta\mu_A(a_i) + (1-\beta)\mu_A(a_{i+1}), a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1}, \\ \beta, \mu \in [0,1], a \in I\!R, i = 1, \ldots, n-1\} \tag{3.1}$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n \tag{3.2}$$

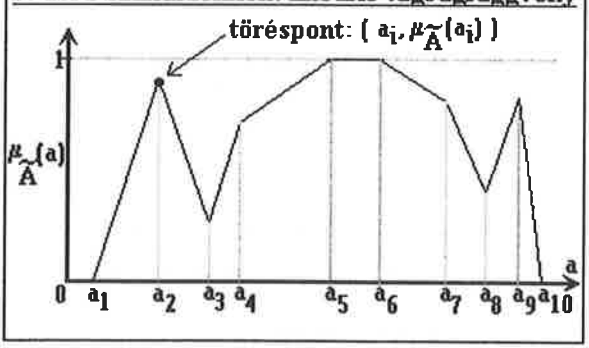
$$a_{i+1} - a_i \text{ nem konstans } i = 1, \ldots, n-1 \text{ esetén.} \tag{3.3}$$

ahol:

U_A - az alaphalmaz univerzuma
a_i - az i-edik töréspont alaphalmaz értéke
$\mu_A(a_i)$ - az i-edik töréspont tagságfüggvény értéke
n - a töréspontok száma

A töréspontok alaphalmaz értékei szigorúan növekvő sorrendben helyezkednek el. A szomszédos töréspontok közt eltérő távolság lehet. Így a tagságfüggvény szakaszonként differenciálható (nem tartalmazhat függőleges szakaszokat). A szakaszonként lineáris tagságfüggvény alkalmazása lehetővé teszi a diszkrét és a folytonos megközelítés kombinálását. Lássuk, hogyan végezhetünk aritmetikai műveleteket ilyen fuzzy számokon.

5. ábra Szakaszonként lineáris tagságfüggvény



3.2 A 'maxmin szkenelés' fuzzy aritmetikai módszere

A módszert itt csak két operandusz esetén mutatjuk be. Több operandusz használatával a következő részben foglalkozunk majd. Elsőként, tegyük fel, hogy A (lásd 3.1) és B operanduszok szakaszonként lineáris tagságfüggvénnyel rendelkeznek:

$$\begin{gathered} B = \{[b_j, \mu_B(b_j)] \mid j = 1, \ldots, m,\ b_j \in U_B\} \cup \{(b, \mu) \mid \\ \mu = \beta\mu_B(b_j) + (1-\beta)\mu_B(b_{j+1}), b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j+1}, \\ \beta, \mu \in [0,1], b \in I\!R, j = 1, \ldots, m-1\} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Az éles operátor legyen:

$$z = f(a, b)\ . \tag{3.5}$$

A célunk az, hogy meghatározzuk az eredmény fuzzy szám szakaszonként lineáris tagságfüggvényét.

$$Z = \{(z, \mu_Z(z)) \mid z \in [z_1, z_r],\ z_1, z_r \in U_Z\} \tag{3.6}$$

Az operanduszok Descartes szorzata:

$$\begin{gathered} C = \{[(a,b), \mu_C(a,b)] \mid a \in [a_1, a_n],\ b \in [b_1, b_m], \\ \mu_C(a,b) = \min[\mu_A(a), \mu_B(b)]\} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Második lépésben megpróbálunk szakaszonként lineáris profilokat kivágni A és B Descartes szorzatából (lásd 6. ábra). A szkenelt P profilokat 4 lehetséges irányban definiáljuk:

1. b tengellyel párhuzamosan:

$$\begin{gathered} P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid i = k,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_i, b_{j+1}),\ a = \beta a_i + (1-\beta)a_i, \\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j+1},\ \beta, \mu \in [0,1],\ i = k,\ j = 1, \ldots, m-1\big\} \end{gathered} \tag{3.8}$$

2. a tengellyel párhuzamosan:

$$\begin{gathered} P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid i = 1, \ldots, n,\ j = k,\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1}, b_j),\ a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1}, \\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_j,\ \beta, \mu \in [0,1],\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = k\big\} \end{gathered} \tag{3.9}$$

3. Diagonális 1:

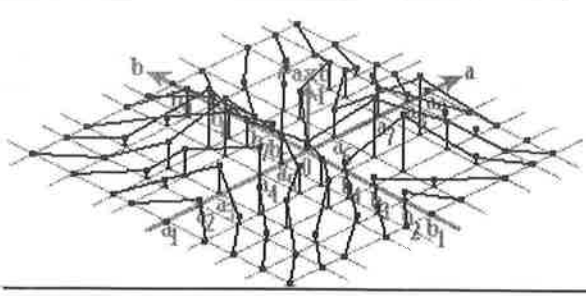
$$\begin{gathered} P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid i + j = k \in Z,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1}, b_{j-1}),\ a = \beta a_i + (1-\beta)a_{i+1}, \\ b = \beta b_j + (1-\beta)b_{j-1},\ \beta, \mu \in [0,1],\ i + j = k,\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = 2, \ldots, m\big\} \end{gathered} \tag{3.10}$$

4. Diagonális 2:

$$\begin{aligned}P_k = \big\{[a_i, b_j, \mu_C(a_i, b_j)] \mid j = i + k,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k \in Z\big\} \cup \\ \big\{(a, b, \mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i, b_j) + (1 - \beta)\mu_C(a_{i+1}, b_{j+1}), \\ a = \beta a_i + (1 - \beta)a_{i+1},\ b = \beta b_j + (1 - \beta)b_{j+1},\ \beta, \mu \in [0, 1], \\ j = i + k,\ i = 1, \ldots, n - 1,\ j = 1, \ldots, m - 1\big\}\end{aligned} \tag{3.11}$$

Egy szkenelt profil a Descartes szorzat szomszédos 'oszlopait' (az operanduszok törésponti alaphalmaz értékeinek párosításai fölötti tagságfüggvény értékek) tartalmazza töréspontokként, valamint a szomszédos töréspontokat összekötő lineáris szakaszokat. (A 6. ábrán diagonális 1 tipusú szkenelést láthatunk az $a < 0$, $b > 0$ és $b < 0$, $a > 0$ szektorokban, valamint diagonális 2 tipusú szkenelést az $a > 0$, $b > 0$ és $a < 0$, $b < 0$ szektorokban.)

6. ábra Szkenelt profilok A és B fuzzy számok Cartesian szorzatában z = a x b éles operátornál



A szkenelési irány kiválasztása alapvető fontosságú a módszer pontossága szempontjából. Elméletileg a szkenelés ideális iránya bármely (a_i, b_j) pont esetén az éles operátorfüggvény adott pontbeli gradiensvektora. Így a szkenelés mindig a függvény z-szintvonalaira merőlegesen futhat. A későbbiekben azonban szó lesz róla, hogy a szkenelésnek ajánlatos a Descartes szorzat tengelyirányban vagy átlósan közvetlenül szomszédos oszlopai mentén haladnia, mert távolabb eső oszlopok összekötése jelentős torzítást okozhat. Az egyszerű operátorfüggvények (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) szkenelésére a fentebb definiált négy irány megfelelő pontosságú közelítést ad (a 6. ábra szkenelési irányai összevethetők a szorzat függvény sajátosságaival).

A második lépésben minden P_k szkenelt profilt leképezünk Z eredmény fuzzy halmaz $(z, m_Z(z))$ terébe. A leképezett profilokat P'_k-val jelöljük. A szkenelt profilok törési pontjai könnyen leképezhetők $z = f(a,b)$ éles operátorfüggvény segítségével:

$$\begin{aligned} P_k^{\text{discr.}} &= \{[a_i, b_j, \mu_C(a_i,b_j)] \mid a \in [a_1,a_n],\, b \in [b_1,b_m]\} \rightarrow \\ P_k'^{\text{discr.}} &= \{f(a_i,b_j), \mu_C(a_i,b_j)\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

A probléma a szkenelt profilok lineáris szakaszainak leképezésével van. Nemlineáris operátorfüggvény esetén a leképezett szakaszok elvesztik linearitásukat. Ezt figyelmen kívül hagyva, a leképezett profil töréspontjai közt is lineáris szakaszokat definiálunk. A leképezett profilok a következőképppen definiálhatók (diagonális 2 tipusú szkenelés esetén):

$$\begin{aligned} P_k' = &\big\{[f(a_i,b_j), \mu_C(a_i,b_j)] \mid j = i+k,\, i = 1,\ldots,n,\, j = 1,\ldots,m\big\} \cup \\ &\big\{(z,\mu) \mid \mu = \beta\mu_C(a_i,b_j) + (1-\beta)\mu_C(a_{i+1},b_{j+1}), \\ &z = \beta f(a_i,b_j) + (1-\beta) f(a_{i+1},b_{j+1}), \beta,\mu \in [0,1], \\ &j = i+k,\, i = 1,\ldots,n-1,\, j = 1,\ldots,m-1\big\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Analitikus értelemben, a fenti lépés helytelen. De vegyük tekintetbe, hogy a töréspontok számának növekedésével a hiba egyre kisebb lesz. Később látni fogjuk, hogy a töréspontok száma több fuzzy aritmetikai művelet elvégzése folyamán növekvő tendenciát mutat. A hiba csökkentése végett csak szomszédos Descartes szorzat oszlopok közt haladó szkenelést engedtünk meg.

A harmadik lépésben meghatározzuk Z eredmény fuzzy szám tagságfüggvényét, mint a leképezett profilok unióját:

$$Z = \{[z, \mu_Z(z)] \mid \mu_Z(z) = \cup_k P'k,\, z \in U_z\} eqno(3.14)$$

A gyakorlatban célszerűbb mindig az utoljára leképezett profil unióját venni az összes eddigi leképezett profil uniójával. Így két, szakaszonként lineáris profil uniójának meghatározására vezethetjük vissza a problémát. Egy alkalmas algoritmussal páronként összehasonlíthatjuk a két profil lineáris szakaszait, megkeresve azokat a lokális maximumokat és metszéspontokat, amelyek az unió fuzzy halmaz profilját alkotják. A szakaszmetszéspontok új töréspontokként jelennek meg az eredményben. Hogy van-e két lineáris szakasznak metszéspontja, azt a következőképpen állapíthatjuk meg:

Legyenek $(z_{11}, \mu_Z(z_{11}))$ és $(z_{12}, \mu_Z(z_{12}))$ az egyik szakasz végpontjai.

Legyenek $(z_{21}, \mu_Z(z_{21}))$ és $(z_{22}, \mu_Z(z_{22}))$ a másik szakasz végpontjai.

$$\gamma = \frac{[z_{21} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{12}) - \mu_Z(z_{22})] + [z_{22} - z_{12}] \times [\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})]}{[\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})] \times [z_{11} - z_{12}] - [z_{21} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})]} \tag{3.15}$$

$$\delta = \frac{[z_{11} - z_{12}] \times [\mu_Z(z_{22}) - \mu_Z(z_{12})] + [z_{12} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})]}{[\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})] \times [z_{21} - z_{22}] - [z_{11} - z_{12}] \times [\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})]} \tag{3.16}$$

Ha $[\mu_Z(z_{21}) - \mu_Z(z_{22})] \times [z_{11} - z_{12}] - [z_{21} - z_{22}] \times [\mu_Z(z_{11}) - \mu_Z(z_{12})] \neq 0$ és $\gamma, \delta \in [0,1]$, a metszéspont létezik, a következő koordinátákkal:

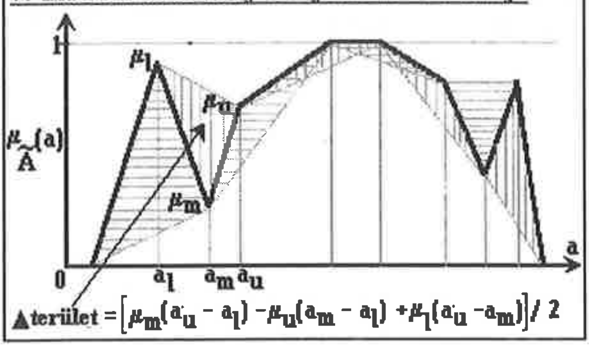
$$[\gamma z_{11} + (1-\gamma) z_{12}], \quad [\gamma \mu_Z(z_{11}) + (1-\gamma)\mu_Z(z_{12})]\,. \tag{3.17}$$

3.3 A maxmin szkenelés módszerének értékelése

A maxmin szkenelés fuzzy aritmetikai módszer legnagyobb előnye, hogy jobb közelítését adja a kiterjesztési alapelv szerinti elméleti eredménynek, mint a maxmin konvolúció, mert itt nincsenek konvolúciós 'lépcsők' (lásd a számpéldát alább). Ezenkívül lehetőség nyílik összetett formájú, több csúcsú tagságfüggvények kezelésére, míg a maxmin konvolúció egycsúcsú tagságfüggvényeket feltételez. A szakaszonként lineáris tagságfüggvény használata megengedi a diszkrét és a folytonos megközelítés kombinálását (a töréspontokat diszkrét elemekként is értelmezhetjük), míg a maxmin konvolúció kizárólag diszkrét módszer.

A legnagyobb hátrány, hogy nemlineáris operátorfüggvény esetén az eredmény fuzzy halmaz nem pontos, csak közelítése az elméleti eredménynek. Ráadásul, a maxmin szkenelés több operátoros kiterjesztése igen kevéssé hatékony. k darab operanduszt feltételezve, a Descartes szorzat $\mathbb{R}^{k+1}$ tér, így a szkenelendő profilok száma rendkívül gyors ütemben nő az operanduszok számának növekedtével. Így célszerűbb az operanduszokon páronként műveleteket végezni. A maxmin szkenelésnek jóval magasabb a számítási igénye, mint a maxmin konvolúciónak (bár ez utóbbi csak diszkrét esetek kezelésére alkalmas). Ezért nem ajánljuk használatát olyan területeken, ahol fuzzy számok trianguláris vagy trapezoidális tagságfüggvények alkalmazásával is jól kezelhetők. Ennél bonyolultabb esetben lehetőség van a trianguláris-trapezoidális és a szakaszonként lineáris tagságfüggvények kombinált használatára. Trapezoidális és trianguláris modulok bármiféle metszetét és unióját könnyedén átkonvertálhatjuk szakaszonként lineáris tagságfüggvénnyé. Ellenvetésként felhozható, hogy a konverzió fordított irányban nem működik, ha olyan fuzzy halmazok is vannak, ahol egyes csúcsok tagságfüggvény értéke nem éri el az egyet. A maxmin szkenelés eredményei azonban már néhány művelet elvégzése után is erősen a trapezoidális forma felé tendálnak, még akkor is, ha az operanduszok több csúcsúak voltak. A jelenség úgy érthető meg a legjobban, ha a Descartes szorzatot egy 'hegyvidéknek' tekintjük, amit különböző irányokból megszemlélünk. A megfigyelési pozíció változtatásával a völgyek könnyen eltűnhetnek a csúcsok között. További érdekes problémát jelent, hogy néhány művelet elvégzése után az eredmény fuzzy halmaz töréspontjainak száma gyors növekedésnek indul. Egy műveletben a Descartes szorzatból maximálisan $n \times m$ darab töréspont jöhet létre, ehhez járulnak hozzá a leképezett profilok uniója során szakaszmetszéspontként jelentkező töréspontok. Egyrészt, ez a jelenség természetes, hiszen az eredménynek tartalmaznia kell majdnem minden információt, amit az operanduszok tartalmaztak. Másrészt, a jelenség káros, mert feltornássza a műveletek számítási igényét. Így valamilyen módon redukálnunk kell az eredmény fuzzy szám töréspontjainak számát. A redukció alapelve, hogy minimalizáljuk a tagságfüggvény integráljában bekövetkező változást, amit egyes törési pontok eltüntetése jelent (lásd 7. ábra). Először azt a törési pontot tüntetjük el, amely a legkisebb területű háromszöget alkotja jobb és bal oldali szomszédjával. Mindaddig folytatjuk a töréspontok eltüntetését, amíg a kumulált területi változás meg nem haladja az eredeti integrál egy bizonyos százalékát. Azonos területű háromszögek estén először a 'völgy' háromszöghöz tartozó töréspontot tüntetjük el, mert a maxmin szkenelés eredménye általában alulról közelíti a kiterjesztési alapelv szerinti elméleti eredményt.

7. ábra Az eredmény fuzzy szám redukciója



1. Számpélda: A maxmin konvolúció és a maxmin szkenelés összehasonlítása

Tételezzük fel, hogy két, szakaszonként lineáris tagságfüggvénnyel rendelkező fuzzy számot akarunk összeszorozni (csak a töréspontokat soroltuk fel):

$$A = \{(0,0),(1,0.5),(2,1),(3,0.75),(4,0.5),(5,0.25),(6,0)\},$$

$$B = \{(0,0),(1,0.25),(2,0.5),(3,0.75),(4,1),(5,0.5),(6,0)\};$$

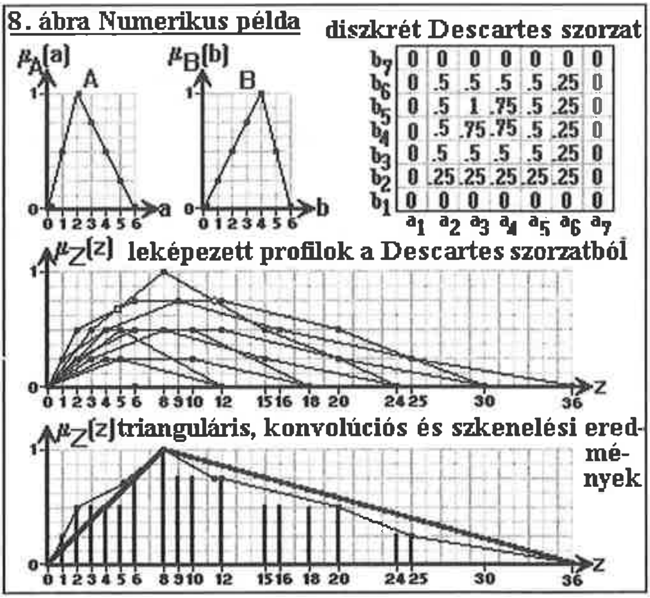
$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5, a_7 = 6\,,$$

$$b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 4, b_6 = 5, b_7 = 6\,.$$

Mindkét operandusz tagságfüggvényének burkológörbéje trianguláris (lásd 8. ábra). Így a trianguláris aritmetika (lásd 2.21) eredményével történő összehasonlítás révén ellenőrizhetjük az eredményeket. Mivel $z = a \times b$ függvény mindkét elsőrendű parciális deriváltja nemnegatív bármely (a_i, b_j) elem felett az $a > 0$, $b > 0$ szektorban, így diagonális 2 irányú szkenelést választunk. A szkenelt profilok a következők (csak a töréspontokat soroltuk fel):

$\{[(a_7, b_1), 0]\}$;
$\{[(a_6, b_1), 0], [(a_7, b_2), 0]\}$;
$\{[(a_5, b_1), 0], [(a_6, b_2), 0.25], [(a_7, b_3), 0]\}$
stb.

A következő lépésben minden szkenelt profilt leképezünk a $(z, \mu_Z(z))$ térbe (lásd 8. ábra), és a leképezett profilok unióját vesszük. Az unióból két új törési pont keletkezik (körökkel jelölve pontok helyett az ábrán).



8. ábra Numerikus példa

A trianguláris, konvolúciós és szkenelési eredményeket összehasonlítva kitűnik, hogy a maxmin szkenelés eredménye csak egy közelítés a trianguláris eredményhez képest. De sokkal jobb eredményt ad, mint a konvolúció, elkerülve a 'lépcsőket' (lásd sötét oszlopok), amelyek a maxmin konvolúció diszkrét eredményében megjelennek.

Irodalom

1. Baas, S. M. - Kwakernak, H.: Rating and ranking of multiple aspect alternative using fuzzy sets. Automatica, vol. 13, 47–58. 1977
2. Dubois, D. - Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press. New York. 1980
3. Esthatiou, J. - Rajkovic, V.: Multiattribute decision making using a fuzzy heuristic approach. IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-9, 326–333. 1979
4. Jain, R.: Decision making in the presence of fuzzy variables IEEE Trans. On systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-6, 698-703, 1976
5. Kaufmann, A.-Gupta, M. M.: Introduction to Fuzzy Arithmetic. Van Nostrand. New York. 1985
6. Laarhoven, P. J. M. - Pedrycz, W.: A fuzzy extension of Saaty's priority theory. Fuzzy Sets and Systems, vol. 11, no. 3, 229–241, 1983
7. Mizumoto, M. - Tanaka, K.: Algebraic properties of fuzzy numbers. IEEE International Conference of Cybernetics and Society, 559–563, 1976
8. Zadeh, L. A.: Fuzzy Sets. Information and Control, vol. 8, 338–353, 1965
9. Zadeh, L. A.: Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes. IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC-2, 28–44, 1973

FUZZY ARITHMETIC WITH 'SHARPLESS' SETS

In this paper, we overview and evaluate the existing fuzzy arithmetic methods at first. Then we introduce a developed approach to make arithmetic operations on fuzzy numbers defining sectionwise linear membership functions and maxmin scanning technique which avoids some failures of the maxmin convolution method.

Key words: fuzzy numbers, fuzzy arithmetics, extension principle, maxmin convolution, sectionwise linear membership, maxmin scanning.