A TERMELŐI ÁRVÁRAKOZÁSOK EGY ÚJ MEGKÖZELÍTÉSI MÓDJÁRÓL[1]

KOVÁCS GERGELY, VIZVÁRI BÉLA ÉS MARIAN MUREŞAN
ELTE, Budapest és Babeş-Bolyai Egyetem, Kolozsvár

Az irodalomban számos megközelítési módja ismeretes a termelői árvárakozások modellezésének. A jelen dolgozatban az eddigiektől eltérő, a matematikai közgazdaságtan eszköztárához jobban illeszkedő modelltípust javaslunk.

1 Bevezetés

Bármely dinamikus piacmodellnek egyik kulcspontja, hogy a modell miként kezeli a termelők jövőre vonatkozó árvárakozásait. Ugyanis ez az a pont, ahol a modell dinamikus jellegét adó visszacsatolás történik. A jelen dolgozatban csak a diszkrét idejű modellek vizsgálatára szorítkozunk. Ezek esetében az irodalomban szereplő árvárakozások legfontosabb típusai a következőkben foglalhatók össze. Az alábbi jelöléseket használjuk: t az időperiódus indexe; p_t a piaci ár a t időpontban; p_t^e a $t-1$ időpontban a t időpontra becsült ár; $m(\geq 2)$ pozitív egész; α, illetve α_k $(k = 1, ..., m)$ pedig rögzített konstans.

(i) *Naiv árvárakozás:* A termelő azt feltételezi, hogy a mostani ár marad fenn, azaz

$$p_t^e = p_{t-1}. \tag{1}$$

(ii) *Racionális árvárakozás:* A termelő pontosan meg tudja határozni a jövőbeli árat:

$$p_t^e = p_t. \tag{2}$$

(iii) *Extrapolatív árvárakozás:* Az utolsó árváltozás súlyozott értékét vetítjük előre:

$$p_t^e = p_{t-1} + \alpha(p_{t-1} - p_{t-2}). \tag{3}$$

(iv) *Általánosított extrapolatív árvárakozás:*

$$p_t^e = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_{t-k}, \tag{4}$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1.$$

[1] Beérkezett: 2000. november 11.

(v) *Adaptív árvárakozás:* Itt a termelő az előző évi árbecsléséből kiindulva ugyanezen becslés hibáját vetíti előre:

$$p_t^e = p_{t-1}^e + \alpha(p_{t-1} - p_{t-1}^e), \tag{5}$$

ahol

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

(vi) *AR(1) becslés és általánosításai:* Ebben az esetben a termelő csak az ár várható értékét tudja megbecsülni, de a tényleges ár attól egy véletlen hibataggal - aminek a várható értéke természetesen 0 - különbözhet:

$$p_t^e = F(p_{t-1}, p_{t-1}^e) + \xi, \tag{6}$$

ahol F egy megfelelő függvény, ξ pedig egy hibatag.

(vii) *A minta autokorrelációján alapuló tanulás:* A múltbeli árak egy véges hosszú idősor elemeit alkotják. A t időpontban a megfigyelt értékek átlaga legyen α_t, az idősor korrelációja önmaga egy lépéssel való eltoltjával pedig legyen β_t. Ekkor

$$p_t^e = F(\alpha_{t-1} + \beta_{t-1}(p_{t-1} - \alpha_t)), \tag{7}$$

ahol F ismét egy alkalmasan választott függvény.

(viii) *Keynes-féle n lépéses várakozás:* Legyen $p_t^{e,0} = p_t^e$ a fenti módszerek valamelyikével vagy bármilyen más módon meghatározott árvárakozás. Ezt nevezzük 0 lépéses árvárakozásnak. Jelölje $D(p)$, illetve $S(p^e)$ a keresleti, illetve kínálati függvényt p valódi, illetve p^e becsült ár mellett. Legyen n egy pozitív egész. Ekkor a $p_t^{e,n}$ n lépéses árvárakozást az alábbi rekurzív módon határozzuk meg. Az nem más, mint az a $\bar{p}$ ár, amire a

$$D(\bar{p}) = S(p_t^{e,n-1}) \tag{8}$$

egyenlet teljesül.

Nehéz megmondani, hogy egy adott piacon melyik modell adja a legjobb közelítést. A naiv várakozás bizonyos százalékban a valós piacokon is létezik. A racionális nyilvánvalóan csak az elméletben létező, ideális eset. Előnye, hogy sok esetben a piac stabilizálódásához vezet(ne). Az extrapolatív becslés, amit például [8] és [10] tárgyal, azon alapul, hogy a termelő nem az árat, hanem az ár változásának tendenciáját tartja tartósnak. Előnye, hogy nem kívánja meg a termelőtől bonyolult összefüggések ismeretét és számítását, valamint hosszú idősorok nyilvántartását. Tehát ebben a vonatkozásban hasonlít a valódi termelő magatartására. Az adaptív modellt [9] vezette be abból az elméleti megfontolásból, hogy a múltból való tanulás segít stabilizálni a piacot. Azonban [4] rámutatott, hogy ez nincs mindig így. [11] kimutatta, hogy a piacon meglévő várakozások jól közelíthetők az extrapolatív vagy adaptív esettel. A hazai burgonyapiacot elemzi ezek alapján [1,2,3].

Mindazonáltal nem lehet kizárni, hogy a valódi termelő árvárakozásának meghatározása során bonyolult összefüggéseket alkalmaz, azok explicit ismerete nélkül. Pédául [7] egyebek mellett így jellemez egy gazdálkodói csoportot: „Megvan ugyan a gazdálkodásban a kalkulatorikus elem, de a hagyományban rögzítve. Olyan jövőszámítás ez, amit a gyakorlat ezerszeresen igazolt, így az egyéni praxisban nem jelenik meg mint kalkulatorikus elem." Egy másik, piacorientáltnak mondott csoportról pedig ezt írja: „... azt termelik, amit el tudnak adni, de a bevétel és kiadás könyvelése helyett egy definiálatlan 'megéri' érzésre alapozzák munkájukat. ... Létezik ennél a csoportnál egy konszenzus, hogy meddig éri meg állatokat tartani, és mi az a küszöb, ami alá nem érdemes menni." Ezek olyan magatartásformák, amelyek jóideig jelen lesznek a hazai mezőgazdasági termelők körében. Mindezt tovább bonyolítja, hogy amennyiben érzékelhető infláció van jelen a gazdaságban, akkor ezt hogyan veszi figyelembe a termelő. Példaként említjük, hogy az egyik legegyszerűbb árvárakozás, az extrapolatív, képlete állandó β inflációs ráta esetén

$$p_t^e = (1+\beta)(1+\alpha)p_{t-1} - \alpha(1+\beta)^2 p_{t-2}. \tag{9}$$

Nem valószínű, hogy a termelők többsége ezt így végigszámolja. Ez azonban még nem jelenti azt, hogy nincs árvárakozásuk. Egy implicit várakozás valódi képlete viszont igen bonyolult is lehet. Az említett bonyolult modellek közül [11] használja az általánosított extrapolatívat, [12] tárgyalja az AR(1) modellt és általánosításait, a Keynes-féle modell gondolata [6]-ból származik, az autokorreláción alapuló tanulás gondolata pedig [5]-ből.

Megjegyezzük végül, hogy legjobb ismereteink szerint [11] az egyetlen kisérlet arra, hogy a fent tárgyalt elméleti modelleknek a valósághoz való viszonyát valamely konkrét piac esetében elemezze.

Vegyük észre, hogy a fenti modellek közül egyedül a (vi) ismeri be azt a tényt, hogy a termelő nem képes egyetlen számot megadni becsült árként. A várakozás és a tényleges ár közti különbségre tett azon feltételezés, hogy ez véletlentől függ, természetesnek látszik. Gondoljunk például arra, hogy a mezőgazdaságban a terméseredmények a véletlennek tekinthető időjárástól függnek. Ugyanakkor a hibatag nem lehet akármekkora, hiszen negatív árak nem lehetségesek, így a hibatagra az elméletben megkövetelt normális eloszlás nem lesz igaz. Továbbá egyéb technológiai feltételekből (pl. vetésforgó, öntözés) következik, hogy a terméseredmény bizonyos korlátok közt fog maradni.

Ezért a jelen dolgozatban egy olyan új modellt tárgyalunk, ahol megmarad a becslés bizonytalansága, de ezt matematikai értelemben determinisztikus eszközzel írjuk le. Ez az eszköz a matematikai közgazdaságtan más fejezeteiben ismert és használt halmazértékű függvény.

2 Árvárakozási bizonytalanságok leírása halmazértékű függvények segítségével

Legyen X és Y két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy F egy X-ből Y-ba képező *halmazértékű függvény*, másik nevén *multifüggvény*, ha F olyan függvény, ami X-ből Y hatványhalmazába képez, azaz minden $x \in X$ esetén $F(x)$ az Y halmaz részhalmaza. Ennek jelölése $F: X \Rightarrow Y$. Az alábbiakban azt a konvenciót alkalmazzuk, hogy a halmazértékű függvényeket mindig nagybetűvel jelöljük, míg a közönségeseket kisbetűvel.

Még egy matematikai segédeszközre lesz szükségünk. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész és A, $B \subset \mathbb{R}^n$ két korlátos zárt halmaz. Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ két tetszőleges vektor, akkor jelölje $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ a szokásos euklideszi távolságukat. Ekkor az A halmaznak a B halmaztól vett távolságán a

$$H(A,B) = \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$$

mennyiséget értjük. Könnyen belátható, hogy ebben a fogalomban az A és B halmaz szerepe nem szimmetrikus, azaz az így definiált mennyiség nem távolság a szokásos értelemben. Ugyanis, ha A egyetlen pontból áll, akkor $H(A, B)$ ettől az egyetlen ponttól a B halmaz hozzá legközelebb eső pontjába vezető szakasz hossza, míg ha a B halmaz áll egyetlen pontból, akkor $H(A, B)$ ezt az egyetlen pontot az A halmaz tőle legtávolabb eső pontjával összekötő szakasz hossza. Azonban könnyen azt kaphatunk a segítségével, amit A és B Hausdorff-Pompeiu távolságának nevezünk, illetve általában Hausdorff-Pompeiu metrikának, és amelynek képlete:

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\left\{ \max_{\mathbf{a} \in A} \min_{\mathbf{b} \in B} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|,\ \max_{\mathbf{b} \in B} \min_{\mathbf{a} \in A} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \right\}$$

Belátható, hogy az így definiált fogalom teljesíti a távolságfogalomtól megkövetelt szokásos tulajdonságokat. Ezért lehet arról is beszélni, hogy egy halmazértékű függvény ezen metrika szerint folytonos, ha annak értékei nem üres, korlátos, zárt halmazok.

Olyan piacot vizsgálunk, amelyen egyetlen termék van jelen, és ennek a jövőbeli árát kívánjuk megbecsülni. Bár formailag sehol nem fogjuk felhasználni, vizsgálataink mögött az a hipotézis áll, hogy a piac nyugodt, azaz az ár változhat, de hisztérikus, váratlan események nem történnek.

A fentebb mondottaknak megfelelően azt feltételezzük, hogy a jövőbeli árat egy bizonyos halmazba tudjuk behatárolni. Ez azonban még önmagában nem zárja ki, hogy ne határozzunk meg a jövőbeli árra egy reálisnak tartott értéket. Ezt az utóbbit fogjuk *várt ár*nak nevezni. Ez utóbbi pedig a piac, pontosabban a termék valódi árának történetétől függ, azaz a termelő megpróbál a korábban elkövetett becslés hibájából okulni. A következő időperiódusban megvalósuló ár a jelenlegi piaci ár és a várt ár közös függvényeként határolható be egy szűkebb halmazba.

Az eddig mondottakat matematikailag a következőképpen fogalmazzuk meg. A szükséges jelölések:

t	az időperiódus indexe
p_t	a piaci ár a t periódusban
p_t^e	a t periódusra várt ár
F	az az $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ halmazértékű függvény, ami a jövőbeli piaci árat behatárolja
G	egy $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ halmazértékű segédfüggvény
$\{\gamma_t\}$	egy nemnegatív számokból álló végtelen sorozat
α_t	a p_t^e meghatározásánál használt segédváltozó

Most megadjuk a folyamat matematikai leírását, majd pedig tisztázzuk a piaci árak és a termelői árvárakozások kialakulásának, mint két folyamatnak az időbeli kapcsolatát.

Az eddig mondottak szerint legfontosabb feltételezésünk:

$$p_t \in F(p_{t-1}; p_t^e). \qquad (A1)$$

A várt ár a jelenlegi ár egy számszorosa:

$$p_t^e = \alpha_{t-1} p_{t-1}, \qquad (A2.1)$$

ahol α_t a piac történetétől és az utolsó várt ár relatív hibájától függ:

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1} \frac{p_t - p_t^e}{p_{t-1}}, \qquad (A2.2)$$

és

$$\alpha_0 \geq 0. \qquad (A2.3)$$

A nemnegatív számokból álló $\{\gamma_t\}$ sorozatról pedig feltesszük, hogy

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = +\infty. \qquad (A3)$$

Végül az F halmazértékű függvényről feltesszük, hogy a következő egyszerű módon írható fel:

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \geq 0 : \ F(p, \alpha p) = G(\alpha) p. \qquad (A4)$$

A $t-1$ időpontban az ekkor már létező p_{t-1} piaci ár ismeretében a termelő meghatározza, hogy milyen árat vár a t időpontra az α_{t-1} paraméter segítségével (A2.1 képlet). A t idő pontban a piacon megjelenő árumennyiség ettől a várakozástól függ. Ezután a piaci árat az ott megjelenő árumennyiség határolja be a t időpontban (A1 képlet). A termelő megfigyeli várakozása hibáját és ennek megfelelően módosítja az α paraméter értékét, azaz tanulja a piac viselkedését (A2.2 képlet). A γ_t paraméter azt fejezi ki, hogy az utolsó információnak mennyi a súlya. Ha

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t < +\infty,$$

akkor az a gyakorlatban azt jelentené, hogy a termelő szerint ő a piacról nem kaphat egy idő után releváns információt.

3 Hogyan tanulja meg a termelő a piacot?

A termelő akkor tanulta meg pontosan a piacot, ha a várt ár mindig megegyezik a tényleges piaci árral egy időponttól kezdődően. Ekkor a $\{\gamma_t\}$ sorozat tagjainak értékétől függetlenül α_t állandó lesz ugyanezen időponttól. Ez azonban túl erős követelménynek látszik. Joggal gondolhatjuk, hogy a termelő akkor is megtanulja a piac mechanizmusát, ha az $\{\alpha_t\}$ sorozat tart egy α rögzített értékhez. Az alábbiakban ezt az esetet vizsgáljuk.

1. tétel. Tegyük fel, hogy az (A1)-(A4) feltételezések igazak, továbbá, hogy létezik egy $\bar{\alpha}$, hogy

$$\bar{\alpha} = \lim_{t\to\infty} \alpha_t, \tag{10}$$

és hogy $G(\alpha)$ egy nem üres, korlátos, zárt intervallum minden $\alpha \geq 0$ esetén, és a G halmazértékű függvény folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában. Ekkor

$$\bar{\alpha} \in G(\bar{\alpha}). \tag{11}$$

Bizonyítás. A feltételek szerint

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1}\frac{p_t - p_t^e}{p_{t-1}} \in \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1}\frac{G(\alpha_{t-1})p_{t-1} - p_t^e}{p_{t-1}} = \\ &= \alpha_{t-1} + \gamma_{t-1}\left(G(\alpha_{t-1}) - \alpha_{t-1}\right).\end{aligned}$$

Innen

$$\alpha_t - \alpha_{t-1} \in \gamma_{t-1}\left(G(\alpha_{t-1}) - \alpha_{t-1}\right). \tag{12}$$

Legyen T egy tetszőleges pozitív egész. Összegezzük a (12) egyenleteket $t = 1, ..., T$-re. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\alpha_T - \alpha_0 \in \sum_{t=0}^{T-1} \gamma_t\left(G(\alpha_t) - \alpha_t\right). \tag{13}$$

A feltételezések mellett az egyenlet bal oldala a véges $\bar{\alpha} - \alpha_0$ értékhez konvergál. Hasonlóképpen a jobb oldalon $G(\alpha_t)$ a $G(\bar{\alpha})$ halmazhoz tart. Ha a (11) reláció nem igaz, akkor létezik egy $\epsilon_0 > 0$, hogy minden $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ estén van egy $T(\epsilon)$ küszöbindex, hogy vagy

(i) $\forall\, t \geq T(\epsilon)$ és $\forall\, \alpha \in G(\alpha_t)$ esetén $\alpha \geq \bar{\alpha} + \epsilon$,

vagy

(ii) $\forall\, t \geq T(\epsilon)$ és $\forall\, \alpha \in G(\alpha_t)$ esetén $\alpha \leq \bar{\alpha} - \epsilon$.

Ez azt jelenti, hogy a (13) jobboldala egy plusz végtelenhez vagy egy minusz végtelenhez tartó intervallum, vagyis maga a (13) reláció nem állhat fenn minden T-re. Q.E.D.

Meg kell jegyezni azonban, hogy sok fixpont lehetséges, mint azt az alábbi tétel mutatja.

2. tétel. (i) Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában és értékei korlátos, zárt intervallumok. Ekkor a G halmazértékű függvény fixpontjainak C halmaza zárt. (ii) Ha $C \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges zárt halmaz, akkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy g fixpontjainak halmaza azonos a C halmazzal.

Bizonyítás. (i) Legyen $\{\alpha_t\}$ a G fixpontjainak egy konvergens sorozata úgy, hogy $\alpha = \lim_{t\to\infty} \alpha_t$. Ekkor $H(G(\alpha_t), \{\alpha\}) \leq |\alpha_t - \alpha| \to 0$. Ezért $G(\alpha)$ zártsága miatt $\alpha \in G(\alpha)$.

(ii) Ha a C halmaz egyetlen v számból áll, akkor legyen $g(x) = 2x - v$. Ha C egynél több számból áll, akkor a következőképpen járunk el. Ha C felülről korlátos, akkor létezik egy u maximális eleme. Ekkor minden $x \geq u$ esetén legyen $g(x) = u + \log(x - u + 1)$. Ha C alulról korlátos, akkor létezik egy v minimális eleme. Ekkor minden $x \leq v$ esetén legyen $g(x) = 2x - v$. Minden más esetben ha $x \neq C$, akkor létezik a C halmaznak az x számnál kisebb elemei közül egy maximális és az x-nél nagyobb elemei között egy legkisebb. Legyen ez a két elem $c_1 < x < c_2$. Ekkor legyen

$$g(x) = \frac{x^2}{c_2 - c_1} - \frac{2c_1 x}{c_2 - c - 1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1}.$$

Egyszerű számolással látható, hogy minden esetben g fixpontjai pontosan a C halmaz elemei. Q.E.D.

4 A tanulás konvergenciájáról

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy egy fixpont közelében hogyan zajlik a folyamat. Feltesszük, hogy $\bar{\alpha}$ a G halmazértékű függvény fixpontja, azaz $\bar{\alpha} \in G(\bar{\alpha})$. Szükségünk lesz a következő halmazra:

$$D(\bar{\alpha}) = \left\{(\alpha, \gamma) \mid \mathcal{H}((1-\gamma)\alpha + \gamma G(\alpha), \bar{\alpha})^2 \leq (\alpha - \bar{\alpha})^2\right\} \cup \\ \cup \left\{(\bar{\alpha}, \gamma) \mid 0 \leq \gamma \leq 1\right\}. \tag{14}$$

3. tétel. Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában és értékei korlátos, zárt intervallumok. Legyen továbbá $\bar{\alpha}$ a G fixpontja. Ha az (α_t, γ_t) sorozat olyan, hogy a $(\alpha_t, \gamma_t) \in D(\bar{\alpha})$ és az $\alpha_t \neq \bar{\alpha}$ relációk véges sok kivételtől eltekintve mindig teljesülnek. Ekkor az $|\alpha_t - \bar{\alpha}|$ sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ha az állításban szereplő relációk véges sok kivételtől eltekintve teljesülnek, akkor egy alkalmas küszöbindextől kezdve mindig igazak lesznek. Elegendő a sorozatot csak ettől kezdve vizsgálni. Az 1. tétel bizonyításában szereplő (12) reláció ismét igaz lesz. Innen felhasználva, hogy $(\alpha_{t-1}, \gamma_{t-1}) \in D(\bar{\alpha})$

$$(\alpha_t - \bar{\alpha})^2 \leq \mathcal{H}((1-\gamma_{t-1})\alpha_{t-1} + \gamma_{t-1} G(\alpha_{t-1}), \bar{\alpha}) \leq (\alpha_{t-1} - \bar{\alpha})^2. \tag{15}$$

Tehát a nemnegatív $\{|\alpha_t - \bar{\alpha}|\}$ sorozat monoton csökkenő, amiből következik, hogy konvergens. Q.E.D.

4. tétel. Ha a 3. tétel feltételei mellett az $\{\gamma_t\}$ sorozat 0-hoz tart, akkor az $\{\alpha_t\}$ sorozat konvergens.

Bizonyítás. A G halmazértékű függvény folytonosságából következik, hogy a $\{G(\alpha_t)\}$ halmazsorozat korlátos. Innen az ismét teljesülő (12) relációból következik, hogy $\{\alpha_t\}$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Q.E.D.

A továbbiakban megvizsgáljuk azt az ideális esetet, amikor csak egyetlen fixpont van, és ennek képe önmaga.

5. tétel. Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában és értékei korlátos, zárt, nemüres intervallumok. Feltesszük továbbá a következőket: (i) G-nek egyetlen fixpontja van, ami $\bar{\alpha}$, (ii) minden α esetén

$$\mathcal{H}(G(\alpha), \bar{\alpha}) \leq |\alpha - \bar{\alpha}|, \tag{16}$$

$$\gamma = \limsup_{t\to\infty} \gamma_t < 1. \tag{17}$$

Ekkor

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \bar{\alpha}. \tag{18}$$

Bizonyítás. Legyen $\delta = |\alpha - \bar{\alpha}|$. Ekkor a (16) feltétel azt jelenti, hogy $G(\alpha) \subset [\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha} + \delta]$. Innen következik, hogy minden $\alpha \in [0, 1]$ esetén $(\alpha, \gamma) \in D(\bar{\alpha})$. A (17) feltételből adódik, hogy véges sok kivételtől eltekintve $\gamma_t < 1$. Tehát a 3. tételből következik, hogy $|\alpha_t - \bar{\alpha}|$ konvergens. Ezért az α_t sorozatnak egy vagy két torlódási pontja van. Ha az α_t sorozatnak csak egy torlódási pontja van, akkor a sorozat konvergens és az 1. tétel szerint egy fixponthoz tart, ami a feltételeink szerint nem lehet más, csak $\bar{\alpha}$.

Tegyük most fel, hogy az $|\ \alpha_t - \bar{\alpha}\ |$ sorozatnak két torlódási pontja van. Legyen ez a két torlódási pont $\bar{\alpha} - \delta$ és $\bar{\alpha} + \delta$, ahol

$$\delta = \lim_{t\to\infty} |\alpha_t - \bar{\alpha}| > 0.$$

Ekkor a 3. tétel bizonyításához hasonló módon (l. (15)) belátható, hogy a $|\alpha_t - \bar{\alpha}|$ sorozat monoton csökkenő. Tehát α_t sorozat megfelelő részsorozatai kívülről tartanak a $[\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha} + \delta]$ intervallum két végpontjához. Ezért végtelen sokszor kell előfordulnia annak a két helyzetnek, hogy $\alpha_{t-1} \leq \bar{\alpha} - \delta$ és $\alpha_t \geq \bar{\alpha} + \delta$, illetve $\alpha_{t-1} \leq \bar{\alpha} + \delta$ és $\alpha_t \geq \bar{\alpha} - \delta$. Vizsgáljuk meg az első esetet. A (12) képlet alapján tudjuk, hogy

$$\alpha_t \in (1 - \gamma_t)\alpha_{t-1} + \gamma_t G(\alpha_{t-1}). \tag{19}$$

Minden $\epsilon > 0$ esetén, ha t elegendően nagy, teljesülnie kell, hogy $\alpha_{t-1} \geq \bar{\alpha} - \delta - \epsilon$, $\gamma_t \leq \gamma + \epsilon$. Innen annak figyelembevételével, hogy a (19) jobb oldalán lévő halmaznak az $\alpha_t \geq \bar{\alpha} + \delta$ pontot le kell fednie, az adódik, hogy

$$(\bar{\alpha} - \delta)(1 - \gamma - \epsilon) + (\bar{\alpha} + \delta + \epsilon)(\gamma + \epsilon) \geq \bar{\alpha} + \delta.$$

Ez pedig a

$$2\gamma\delta + 2\delta\epsilon + \gamma\epsilon + \epsilon^2 \geq 2\delta$$

egyenlőtlenséggé redukálható. Mivel a balodal határértéke határozottan kisebb a jobboldalnál, ezért ez minden $\epsilon > 0$ mellett nem lehet igaz, azaz ellentmondásra jutottunk. Q.E.D.

6. lemma. Legyen $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan halmazértékű függvény, amelynek értékei korlátos, zárt, nemüres intervallumok, és amely folytonos a Hausdorff-Pompeiu metrikában egy $\bar{\alpha}$ pontban. Ha minden α esetén a (16) egyenlőtlenség teljesül, akkor

$$G(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}. \tag{20}$$

Bizonyítás. Ha létezik egy $\bar{\bar{\alpha}} \neq \bar{\alpha}$ elem úgy, hogy $\bar{\bar{\alpha}} \in G(\bar{\alpha})$, akkor $\mathcal{H}(G(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) \geq |\bar{\bar{\alpha}} - \bar{\alpha}| > 0$. Ugyanakkor (16) azt követeli meg, hogy ez a távolság 0 legyen. Mivel $G(\bar{\alpha}) \neq \emptyset$, ezért $G(\bar{\alpha})$ egyedüli lehetséges eleme $\bar{\alpha}$. Q.E.D.

Ha a következő feltételek teljesülnek, lehetőség adódik a fixpontok egyfajta, a halmazértékű függvényen alapuló karakterizációjára.

7. tétel. Tegyük fel, $\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \bar{\alpha}$ úgy, hogy a sorozat végtelen sok tagja különbözik $\bar{\alpha}$-tól, és $\lim_{t\to\infty} \gamma_t = \bar{\gamma}$, $G(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}$, és az $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ pontnak létezik olyan környezete, amely $D(\bar{\alpha})$ része. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ folytonosan differenciálható függvények, hogy $G(\alpha) = [g_1(\alpha), g_2(\alpha)]$. Ekkor g_i $(i = 1, 2)$ az alábbi négy eset valamelyikébe tartozik:

(i) $\bar{\gamma} > 0$ és $1 - \frac{2}{\bar{\gamma}} < g_i'(\bar{\alpha}) < 1$,
(ii) $\bar{\gamma} = 0$ és $g_i'(\bar{\alpha}) < 1$,
(iii) $\bar{\gamma} > 0$, $g_i'(\bar{\alpha}) = 1$ és a g_i' függvénynek $\bar{\alpha}$-ban maximuma van,
(iv) $\bar{\gamma} > 0$, $g_i'(\bar{\alpha}) = 1 - \frac{2}{\bar{\gamma}}$ és a g_i' függvénynek $\bar{\alpha}$-ban minimuma van.

Bizonyítás. Az adott feltételek mellett az α_t sorozat végtelen sok tagja különbözik 0-tól. Ha $(\alpha_t, \gamma_t) \in D(\bar{\alpha})$, akkor

$$\mathcal{H}((1-\gamma_t)\alpha_t + \gamma_t G(\alpha_t), \bar{\alpha})^2 \leq (\alpha_t - \bar{\alpha})^2,$$

ami $G(\bar{\alpha}) = \{\bar{\alpha}\}$ miatt $\alpha_t = \bar{\alpha}$ esetén is igaz. Innen kapjuk, hogy $i = 1, 2$ esetén

$$((1-\gamma_t)\alpha_t + \gamma_t g_i(\alpha_t) - \bar{\alpha})^2 \leq (\alpha_t - \bar{\alpha})^2. \tag{21}$$

A Lagrange-középértéktétel szerint létezik olyan $\xi \in (\alpha_t, \bar{\alpha})$, hogy $g_i(\alpha_t) = g_i(\bar{\alpha}) + g_i'(\alpha_t - \bar{\alpha})$. Ezt behelyettesítve (21)-be nyerjük, hogy

$$((1-\gamma_t + \gamma_t g_i'(\xi))(\alpha_t - \bar{\alpha}))^2 \leq (\alpha_t - \bar{\alpha})^2. \tag{22}$$

Mivel $\alpha_t \to \bar{\alpha}$ esetén $\xi \to \bar{\alpha}$, ezért (22) csak akkor teljesülhet, ha $g_i' \leq 1$. Feltéve, hogy $\alpha_t \neq \bar{\alpha}$, osszuk le a (22) egyenlőtlenséget a jobboldalával. Ekkor

$$(1 + \gamma_t + \gamma_t g_i'(\xi))^2 \leq 1,$$

ami határátmenet után azt adja, hogy

$$|(1-\bar{\gamma}+\bar{\gamma}g_i'(\bar{\alpha}))| \leq 1. \tag{23}$$

Az eddigiekből $\bar{\gamma}=0$ esetén azonnal a (ii) esetet kapjuk. A továbbiakban tegyük fel, hogy $\bar{\gamma}>0$. Vizsgálatainkat aszerint folytatjuk, hogy (23) bal oldalán mi adja az abszolút értéket. Ha $1-\bar{\gamma}+\bar{\gamma}g_i'(\bar{\alpha})\geq 0$, akkor (23)-ból a $g_i'(\bar{\alpha})\leq 1$ feltételt kapjuk vissza. Ha $g_i'(\bar{\alpha})=1$, akkor abból a feltételből, hogy $(\bar{\alpha},\bar{\gamma})$ egy környezete $D(\bar{\alpha})$-ban van, a fentiekhez hasonló meggondolásokból következik, hogy a g_i' függvénynek $\bar{\alpha}$-ban maximuma van. Ha viszont $-1+\bar{\gamma}-\bar{\gamma}g_i'(\bar{\alpha})\geq 0$, akkor innen azonnal adódik, hogy

$$1-\frac{2}{\bar{\gamma}} \leq g_i'(\bar{\alpha}).$$

Ha itt egyenlőség teljesül, akkor a már említett környezetben nem lehet kisebb g_i' értéke, tehát a függvénynek $\bar{\alpha}$-ban minimuma van. Q.E.D.

5 Összefoglalás

Új modellünkben a becslések bizonytalanságát egy matematikai értelemben determinisztikus eszközzel, a halmazértékű függvénnyel írjuk le. A termelő akkor tanulja meg a piacot, ha a várt ár és a tényleges ár közötti különbség idővel eltünik. Ehhez adtunk dolgozatunkban egy szükséges és két elégséges feltételt.

Irodalom

1. Bacsi Zs., Vizvári B., A magyar burgonyapiac viselkedéséről és irányításáról, *VI. Nemzetközi Agrárökonómiai Tudományos Napok, Gyöngyös*, 1998. március 24-25., I. kötet, 25–30.
2. Bacsi Zs., Vizvári B., Modelling chaotic behaviour in Agricultural prices using a discrete deterministic nonlinear price model, *Annals of Operations Research* 89(1999), 125–148.
3. Bacsi Zs., Vizvári B., Mezőgazdasági termékárak modellezése és szabályozása egy determinisztikus nemlineáris ármodell alkalmazásával, GATE Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar, Tudományos Közlemények, *Vállalati környezet és alkalmazkodás az élelmiszertermelésben*, III. kötet, 1998., 85–87.
4. C. H. Hommes (1991), Adaptive learning and roads to chaos (The case of the cobweb), *Economics Letters*, 36, 127–132.
5. C. H. Hommes, G. Sorger, Consistent expectations equilibria, *6th Viennese Workshop on Optimal Control, Dynamic Games, Nonlinear Dynamics and Adaptive Systems*, Bécs, 1997.05.22.
6. J. M. Keynes, *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillen, London, 1936. 156.
7. Kovách Imre, Kuczi Tibor, Gazdálkodói előnyök átváltási lehetőségei a társadalomban, *Valóság*, 1982. 6.sz., 45–55.

8. Molnár S., Szidarovszky F. (1994), Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról, *Szigma*, 25, 207–219.
9. M. Nerlove (1958), Adaptive expectation and cobweb phenomena, *Quaterly Journal of Economics*, 72, 227–240.
10. Szidarovszky F., Molnár S. (1994), Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben, *Szigma*, 25, 221–227.
11. Vizvári B., Bacsi Zs., Kovács E., Lakner Z. (2000), Empirical analysis of producers' price expectations, *Central European Journal of Operation Research*, 7, 327–336.
12. M. Zenner, *Learning to Become Rational*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 439, Springer, Berlin, 1996.

A NEW APPROACH OF PRICE EXPECTATIONS

A new market model is provided which describes the uncertainty of the estimations by set-valued functions. The producer learns the market if the difference between the estimated price and the real market price converges to zero. A necessary and two sufficient conditions of the convergence are provided.