ÁLTALÁNOSÍTOTT MONOTONITÁS MIKROÖKONÓMIAI MODELLEKBEN[1]

KOMLÓSI SÁNDOR
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Az általánosított monotonitás „karrierje" 1990-ben a Karamardian-Schaible cikk megjelenésével kezdődött. Ebben a cikkben a szerzők többváltozós differenciálható függvények általánosított konvexitási tulajdonságait vizsgálták és megmutatták, hogy ezek a tulajdonságok a szóbanforgó függvények gradiensének bizonyos általánosított monotinitási tulajdonságaival ekvivalensek. Ez a tanulmány arra hívja fel a figyelmet, hogy az általánosított monotonitás, mint természetes módon jó tulajdonság, már reflektorfénybe kerülése előtt is számos közgazdasági munkában, mikroökonómiai modellben megjelent.

1 Bevezetés

Az általánosított monotonitás „karrierje" 1990-ben a Karamardian-Schaible cikk [16] megjelenésével kezdődött. Ebben a cikkben a szerzők differenciálható többváltozós függvények általánosított konvexitási tulajdonságait vizsgálták és megmutatták, hogy ezek a tulajdonságok a szóbanforgó függvények gradiensének bizonyos általánosított monotonitási tulajdonságaival ekvivalensek.

A pszeudomonotonitás fogalmát S. Karamardián vezette be egy 1976-ban megjelent cikkében [15]. Ennek a tulajdonságnak a használhatóságára már korábban is rájöttek. Reinhard John hívta fel a figyelmet arra (lásd [11]), hogy Wald Ábrahám, híres egzisztencia bizonyításában, ezt a tulajdonságot feltételezve tudta a Walras-féle egyensúlyi modell megoldhatóságát bizonyítani [27]. Ugyancsak R. John mutatott rá arra, hogy Samuelsonnak „a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája" nem más, mint a szigorú pszeudomonotonitás megkövetelése [12].

A kvázimonotonitás fogalmát 1983-ban vezette be A. Hassouni marokkói matematikus [9]. Azóta több változata is az érdeklődés középpontjába került. Az egyik legfigyelemreméltóbb változatát a valódi kvázimonotonitást Daniilidis és Hadjisavvas vezették be [4]. Keresleti relációk, illetve keresleti leképezések racionalizálásában játszott szerepére ugyancsak R. John mutatott rá először [12, 14].

1.1 Jelölések

X, Y a továbbiakban lokálisan konvex Hausdorff-féle topologikus vektorteret jelölnek.

[1]Beérkezett: 2001. június 25. E-mail: komlosi@ktk.pte.hu

$\Re$ a valós számok halmazát, $\Re_+$ ($\Re_-$) pedig a nemnegatív (nempozitív) valós számok halmazát jelöli.

$L(X, Y)$ az X-en értelmezett és Y-ba képező folytonos lineáris operátorok terét jelöli.

$X^* = L(X, \Re)$ az X topologikus duálját jelöli, vagyis az X-en értelmezett folytonos lineáris funkcionálok terét.

Az $\langle x^*, x\rangle$, $x^* \in X^*$ és $x \in X$ bilineáris forma jelentése: $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$. Ha $F \subseteq X^*$ és $x \in X$, akkor $\langle F, x\rangle$ jelentése a következő:

$$\langle F, x\rangle = \{\langle f, x\rangle : f \in F\}.$$

Annak ellenére, hogy közgazdasági alkalmazásokban X, Y rendszerint véges dimenziós euklideszi terek, én mégis —ahol lehet— az általánosságnak ezt a szintjét tekintem. Aki nem szívesen kalandozik a véges dimenzióból végtelenbe, az nyugodtan gondolja azt, hogy $X = \Re^n$, amikor is $X^* = \Re^n$ és az $\langle x^*, x\rangle$ bilineáris forma pedig az x, x^* n-dimenziós vektorok skaláris szorzata.

1.2 Kvázimonotonitás és pszeudomonotonitás

Ebben a részben —pusztán a rend kedvéért— két klasszikus eredményt szeretnék felidézni [16].

1. Definíció. *Az $f(x)$ függvényt az A konvex halmazon* kvázikonvex*nek mondjuk, ha bármely $x, y \in A$ és bármely $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén*

$$f(x) \leq f(y) \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y)\,. \tag{1}$$

Az $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezést az A halmazon kvázimonoton*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in A$ esetén*

$$\langle F(x), y - x\rangle > 0 \Longrightarrow \langle F(y), x - y\rangle \leq 0\,. \tag{2}$$

2. Definíció. *Az $f(x)$ függvényt az A konvex halmazon* pszeudokonvex*nek mondjuk, ha bármely $x, y \in A$ esetén*

$$f(x) < f(y) \Longrightarrow \langle \nabla f(y), x - y\rangle < 0\,. \tag{3}$$

Az $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezést az A halmazon pszeudomonoton*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in A$ esetén*

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle F(y), x - y\rangle \leq 0\,. \tag{4}$$

Az $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezést az A halmazon szigorúan pszeudomonoton*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in A, x \neq y$ esetén*

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle F(y), x - y\rangle < 0\,. \tag{5}$$

A következő alaptétel teremt kapcsolatot az általánosított monotonitás és az általánosított konvexitás között. Legyen $f : A \to \Re$ differenciálható függvény, ahol $A \subseteq X$ konvex halmaz. Jelölje $\nabla f : A \to X^*$ az f függvény gradiensét.

1. Tétel. [16] *Legyen az $f : A \to \Re$ függvény differenciálható az $A \subseteq X$ konvex halmazon. Ekkor igazak a következő állítások.*

(i) *Az f függvény akkor és csak akkor kvázikonvex A-n, ha a ∇f leképezés kvázimonoton A-n.*

(ii) *Az f függvény akkor és csak akkor pszeudokonvex A-n, ha a ∇f leképezés pszeudomonoton A-n.*

1.3 Pszeudomonotonitás és a komplementaritási feladat

A pszeudomonotonitás fogalmát Karamardián a következő feladat megoldhatósága szempontjából találta célszerűnek. Legyen adott egy $K \subseteq X$ konvex kúp és egy $F : K \to X^*$ leképezés. Jelölje K^+ a K kúp (pozitív) polárisát:

$$K^+ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \geq 0 \text{ minden } x \in K\text{-ra}\} \ .$$

Az F és K által meghatározott komplementaritási feladat a következő: keressünk olyan $a \in K$ elemet, melyre $F(a) \in K^+$ és $\langle F(a), a\rangle = 0$. Más szóval: oldjuk meg a következő $CP(F, K)$ feladatot

$$x \in K, \quad F(x) \in K^+, \quad \langle F(x), x\rangle = 0. \tag{6}$$

A következő tételt, $X = \Re^n$ esetén, Karamardian bizonyította be [15]. Hilbert térre Cottle és Yao terjesztette ki [1].

2. Tétel. *Legyen a K kúp zárt és konvex, legyen továbbá* $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$ *és* $K \cap (-K) = \emptyset$. *Legyen az $F : K \to \Re^n$ leképezés folytonos és pszeudomonoton. Ha* $F(K) \cap \operatorname{int}(K^+) \neq \emptyset$, *akkor a $CP(F, K)$ feladatnak van megoldása.*

2 Általánosított monotonitás és egyensúlyi modellek

A komplementaritási feladatnál általánosabbak a variációs egyenlőtlenségek. Legyen adott egy $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezés. Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenségnek a következő feladatot szokták nevezni [19]:

SVI(F,A): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, hogy minden $x \in A$ esetén*

$$\langle F(a), x - a\rangle \geq 0 \ .$$

Nem nehéz belátni, hogy amennyiben az A halmaz konvex kúp, akkor az $SVI(F, A)$ feladat egybeesik a $CP(F, A)$ komplementaritási feladattal.

Duális feladatnak, vagy Minty-féle variációs egyenlőtlenségnek a következő feladatot nevezzük [7, 19, 13]:

MVI(F,A): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, hogy minden $x \in A$ esetén*

$$\langle F(x), a - x\rangle \leq 0 \,.$$

Mindkét feladattípust általánosítani lehet arra az esetre, amikor $F : X \longrightarrow L(X, Y)$. Ekkor vektor-variációs egyenlőtlenségekről beszélünk. Vegyük észre, hogy az $Y = \Re$ esetben $L(X, \Re) = X^*$, tehát speciális esetként a nem vektoros eset adódik. A vektor variációs egyenlőtlenségeknek bőséges irodalma van (lásd pl. a [2,19,20] cikkeket és a bennük található hivatkozásokat), de ezt az esetet ennek a dolgozatnak a keretében nem tárgyalom. Közgazdasági alkalmazások szempontjából nagyobb érdeklődésre tarthatnak számot a variációs egyenlőtlenségek halmazértékű változatai [25].

Legyen adott egy halmazértékű $F : A \longrightarrow 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés. Ebben az esetben mind az (SVI)-nek, mind pedig az (MVI)-nek többféle általánosítása is lehetséges. A következő feladatot az (SVI) erős változatának szokás tekinteni.

(mv-eSVI): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, amelyhez létezik olyan $a^* \in F(a)$, hogy minden $x \in A$ esetén*

$$\langle a^*, x - a\rangle \geq 0 \,. \tag{7}$$

A (7) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett *erős egyensúlyi pontjának* nevezzük. Szokás az ilyen pontot *Stampacchia-féle erős egyensúlyi pontnak* is nevezni. Jelölje $eS(F, A)$ az összes erős egyensúlyi pont halmazát. A következő változatot tekintik sokan az (SVI) természetes általánosításának.

(mv-SVI): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, hogy minden $x \in A$-hoz található olyan $a^* \in F(a)$, hogy*

$$\langle a^*, x - a\rangle \geq 0 \,. \tag{8}$$

A (8) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett *egyensúlyi pontjának* nevezzük. Szokás az ilyen pontot *Stampacchia-féle egyensúlyi pontnak* is nevezni. Jelölje $S(F, A)$ az egyensúlyi pontok halmazát.

Egy lehetséges duális feladat a következő:

(mv-MVI): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, hogy minden $x \in A$ és minden $x^* \in F(x)$ esetén*

$$\langle x^*, a - x\rangle \leq 0 \,. \tag{9}$$

Az (9) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett stabil egyensúlyi pontjának nevezzük. Szokás az ilyen pontot *Minty-féle egyensúlyi pontnak* is nevezni. Jelölje $M(F, A)$ a stabil egyensúlyi pontok halmazát.

Legutóbbi feladatunkat gyengíthetjük a következőképpen:

(mv-gyMVI): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, hogy minden $x \in A$-hoz létezik olyan $x^* \in F(x)$, hogy*

$$\langle x^*, a - x\rangle \leq 0 \,. \tag{10}$$

A (10) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett gyengén stabil egyensúlyi pontjának (Minty-féle gyenge egyensúlyi pontjának) nevezzük. Jelölje $gyM(F, A)$ a gyengén stabil egyensúlyi pontok halmazát.

Mind a négy feladattípust általánosítani lehet arra az esetre, amikor $F : X \to 2^{L(X,Y)}$. Ekkor halmazértékű vektor variációs egyenlőtlenségekről beszélünk. Vegyük észre, hogy az $Y = \Re$ esetben $L(X, \Re) = X^*$, tehát speciális esetként a nem vektoros halmazértékű eset adódik. A halmazértékű vektor variációs egyenlőtlenségeknek is bőséges irodalma van (lásd pl. a [20, 21] cikkeket és a bennük található hivatkozásokat), de ezt az esetet sem tárgyalom ennek a dolgozatnak a keretében.

Amennyiben az $F(x)$ halmaz minden x-re egyetlen elemből áll, akkor visszakapjuk az egyértékű esetet, és ekkor —nyilvánvaló módon— az *(mv-eSVI)* és *(mv-SVI)* feladatok egybeesnek az *(SVI)* feladattal, illetve az *(mv-gyMVI)* és *(mv-MVI)* feladatok egybeesnek az *(MVI)* feladattal. Az nyilvánvaló a definíciókból, hogy

$$eS(F, A) \subseteq S(F, A) \qquad \text{és} \qquad M(F, A) \subseteq gyM(F, A) \,. \tag{11}$$

A definíciókból a Minty-féle egyensúlyi pontok és a Stampacchia-féle egyensúlyi pontok halmazai között semmiféle kapcsolat nem következik.

Az egyensúly elmélet egyik alapvető kérdése, hogy az F leképezésnek mikor van erős egyensúlyi, egyensúlyi, gyengén stabil, illetve stabil egyensúlyi pontja A fölött. Ezekre a kérdésekre általában igen nehéz választ adni. Egyensúlyi, illetve stabil egyensúlyi pontok létezésére vonatkozó vizsgálatok azonban szép eredményeket hoztak. Ezekben a vizsgálatokban fontos szerepet kapnak a következő halmazértékű leképezések:

$$S_F(x) = \{y \in A : \exists y^* \in F(y), \text{ hogy } \langle y^*, x - y\rangle \geq 0\} \,,$$

$$M_F(x) = \{y \in A : \forall x^* \in F(x), \ \langle x^*, y - x\rangle \leq 0\} \,.$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$S(F, A) = \bigcap_{x \in A} S_F(x) \,, \tag{12}$$

és

$$M(F, A) = \bigcap_{x \in A} M_F(x) \,. \tag{13}$$

Egyensúlyi pontok létezése tehát ekvivalens a

$$\bigcap_{x \in A} S_F(x) \neq \emptyset \qquad \text{és} \qquad \bigcap_{x \in A} M_F(x) \neq \emptyset$$

feltételekkel.

Az $S_F(x)$ halmazértékű függvénynek van egy fontos tulajdonsága: minden $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ esetén

$$\operatorname{conv} \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq S_F(x_1) \cup S_F(x_2) \cup \ldots \cup S_F(x_k) \,. \tag{14}$$

Ezt a tulajdonságot —mely a nevezetes Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz tételben alapvető szerepet játszik— *KKM-tulajdonságnak*, azokat a halmazértékű leképezéseket pedig, melyek rendelkeznek a KKM-tulajdonsággal, *KKM-leképezéseknek* nevezzük.

3. Tétel. *Az $S_F(x)$ leképezés KKM-leképezés.*

Bizonyítás. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy létezik olyan $z \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, hogy $z \notin S_F(x_i), i = 1, 2, \ldots, k$. Ez azt jelenti, hogy minden $z^* \in F(z)$-re és x_i-re

$$\langle z^*, x_i - z\rangle < 0\,.$$

Legyen $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát λ_i-vel szorozva ($\lambda_i \geq 0$), majd i-re összegezve ($\sum_i \lambda_i = 1$), a következő ellentmondás adódik:

$$\langle z^*, z - z\rangle < 0\,.$$

□

Ez a tétel azért érdekes, mert a Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-féle fixpont tételt általánosító Ky Fan Lemma éppen a KKM-leképezésekre vonatkozik [18, 23].

A Ky Fan Lemma. *Legyen A részhalmaza az X Hausdorff topologikus vektortérnek. Legyen $T : A \to 2^X$ egy kompakt halmazértékű függvény, vagyis legyen minden* $x \in A$ esetén a *$T(x) \subseteq X$ halmaz zárt és legyen legalább egy olyan x_0, hogy $T(x_0)$ ráadásul még kompakt is. Ha T KKM-leképezés, akkor*

$$\bigcap_{x \in A} T(x) \neq \emptyset\,.$$

Mivel

$$S(F, A) = \bigcap_{x \in A} S_F(x)\,,$$

így az $S(F, A) \neq \emptyset$ feltételhez elegendő, hogy az $S_F : A \to 2^X$ leképezés kompakt legyen. Mivel $S_F(x) \subseteq A$, ezért az ember ezek után azt hihetné, hogy kompakt A halmaz esetén az $F : A \to 2^{X^*}$ halmazértékű leképezésről már csak valamilyen alkalmas módon értelmezett folytonosságot kell feltenni, amely biztosítja az $S_F(x)$ halmazok zártságát, és már kezünkben is van egy tétel egyensúlyi pont létezéséről. A helyzet valóban ilyen szép, ha X véges dimenziós, $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ pedig folytonos egyértékű leképezés [17]. Végtelen dimenzióban sajnos nem ismert olyan folytonossági fogalom, amely garantálná az $S_F(x)$, $x \in A$ halmazok zártságát. Alkalmasan értelmezett folytonossággal azonban egy lépéssel előrébb juthatunk.

3. Definíció. *Legyenek X és Y topologikus terek és tekintsünk egy $F : X \to 2^Y$ halmazértékű leképezést.*

(i) *F-et az $a \in X$ helyen* felülről félig folytonosnak *nevezzük, ha bármely olyan $V \subseteq Y$ nyitott halmazhoz, melyre $T(a) \subseteq V$ teljesül, található olyan $U \subseteq X$ nyitott környezete a-nak, hogy valahányszor $x \in U$, mindannyiszor $T(x) \subseteq V$ teljesül.*

(ii) *Legyen X topologikus vektortér, $Y = X^*$ és legyen $A \subseteq X$ konvex halmaz. F-et A-n* radiálisan vetítve felülről félig folytonosnak*nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ esetén a $\Phi_{a,b}(t) = \langle F(a + t(b - a)), b - a \rangle$, $t \in [0,1]$ halmazértékű leképezés jobbról felülről félig folytonos $t = 0$-ban.*

Ha az $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés rendelkezik ezzel a speciális folytonossági tulajdonsággal, akkor F-nek A fölött vett minden stabil egyensúlyi pontja egyúttal egyensúlyi pontja is.

4. Tétel. *Ha az $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés radiálisan vetítve felülről félig folytonos a konvex A halmazon, akkor*

$$M(F, A) \subseteq S(F, A)\,. \tag{15}$$

Bizonyítás. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $a \in A$ stabil egyensúlyi pontja F-nek A fölött, de nem egyensúlyi pontja. Ekkor van olyan $x \in A$ pont, hogy

$$\langle a^*, x - a \rangle < 0 \quad \text{minden} \quad a^* \in F(a) \quad \text{esetén}\,.$$

Mivel a $\Phi_{a,x}(t) = \langle F(a + t(x - a)), x - a \rangle$, $t \in [0, 1]$ leképezés jobbról felülről félig folytonos $t = 0$-ban és $\Phi_{a,b}(0) = \langle F(a), x - a \rangle \subseteq \operatorname{int} \Re_-$, ezért „elegendően kicsi" pozitív t-vel a $z = a + t(x - a)$ pontra

$$\Phi_{a,b}(t) = \langle F(z), x - a \rangle \subseteq \operatorname{int} \Re_-$$

teljesül. Mivel $z - a = t(x - a)$, ezért $\langle F(z), z - a \rangle \subseteq \operatorname{int} \Re_-$, ami (9) szerint ellentmond az $a \in M(F, A)$ feltevésnek. □

Az F leképezésről tehát egy sajátos radiális félig folytonosságot feltételezve az $S(F, A) \neq \emptyset$ problémát —végső soron— át lehet játszani az

$$M(F, A) = \bigcap_{x \in A} M_F(x) \neq \emptyset$$

problémára. Sajnos az $M_F(x)$ halmazértékű leképezés azonban általában nem KKM-leképezés. Viszont minden esetben zárt és konvex. Ha az (mv-MVI) feladatot konvex kompakt A halmazon tekintjük, akkor Minty egyensúlyi megoldás létezéséhez elegendő az, ha az $M_F(x)$ leképezés KKM-leképezés. Hogy ez a feltétel a kvázimonotonitással van kapcsolatban, az az elmúlt évek egyik szép felismerése. Ez a felismerés a kvázimonotonitásnak egy variánsára, a valódi (proper) kvázimonotonitásra hívta fel a figyelmet [4]. A célszerűség kedvéért halmazértékű leképezésekre több általánosított monotonitási fogalmat is bemutatunk.

4. Definíció. *A halmazértékű $F: A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezést*

(i) kvázimonotonnak *nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in A$ és $x_1^* \in F(x_1)$, $x_2^* \in F(x_2)$ esetén igaz a következő implikáció*

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > 0 \implies \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \leq 0\,, \tag{16}$$

(ii) valódian kvázimonotonnak *nevezzük, ha minden $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ és $z \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ esetén létezik olyan $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, hogy minden $x_j^* \in F(x_j)$-re*

$$\left\langle x_j^*, z - x_j \right\rangle \leq 0\,. \tag{17}$$

(iii) pszeudomonotonnak *nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in A$ és $x_1^* \in F(x_1)$, $x_2^* \in F(x_2)$ esetén igaz a következő implikáció*

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \implies \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \leq 0, \tag{18}$$

A definíciók közvetlen következménye, hogy pszeudomonoton leképezés szükségképpen valódian kvázimonoton, míg egy valódian kvázimonoton leképezés szükségképpen kvázimonoton. (Legyen $z = (x_1 + x_2)/2$.) Megmutatható, hogy a fordított kapcsolatok azonban általában nem érvényesek.

5. Tétel. [4] *A halmazértékű $F: A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés akkor és csak akkor valódian kvázimonoton, ha az $M_F: A \to 2^X$, $A \subseteq X$ leképezés KKM leképezés.*

Ebből és a 4. Tételből azonnal adódik a következő egzisztencia tétel:

6. Tétel. *Legyen $A \subseteq X$ kompakt konvex halmaz, legyen továbbá F valódian kvázimonoton A-n. Ekkor F-nek A fölött létezik stabil (Minty-féle) egyensúlyi pontja. Ha ráadásul F radiálisan vetítve felülről félig folytonos A-n, akkor minden stabil egyensúlyi pont egyúttal egyensúlyi pont is.*

Ha az F leképezéstől pszeudomonotonitást követelünk (ami erősebb, mint a valódi kvázimonotonitás), akkor az előző tétel állítása élesíthető. Igaz ugyanis a következő tétel.

7. Tétel. *Legyen az $F: A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés pszeudomonoton az A konvex halmazon. Ekkor*

$$S(F, A) \subseteq M(F, A)\,.$$

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy minden $x \in A$-ra

$$S_F(x) \subseteq M_F(x)\,. \tag{19}$$

Legyen $y \in S_F(x)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $y^* \in F(y)$, hogy

$$\langle y^*, x - y \rangle \geq 0.$$

(18)-ból az következik, hogy

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq 0$$

minden $x^* \in F(x)$ esetén. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $y \in M_F(x)$. □

Megjegyzés. Az, hogy a pszeudomonoton esetben az M_F halmazértékű leképezés KKM-leképezés, közvetlenül is adódik a (19) tartalmazásból.

8. Tétel. *Legyen $A \subseteq X$ kompakt konvex halmaz, legyen továbbá F pszeudomonoton A-n. Ekkor F-nek A fölött létezik stabil (Minty-féle) egyensúlyi pontja. Ha ráadásul F radiálisan vetítve felülről félig folytonos A-n, akkor minden stabil egyensúlyi pont egyúttal egyensúlyi pont is és fordítva.*

Az A halmaz kompaktságának feltételezése azt a célt szolgálja, hogy a Ky Fan Lemmát közvetlenül alkalmazni lehessen. A variációs egyenlőtlenségek elméletében természetesen a nemkompakt A halmazok esete is fontos. Ilyenkor a kompaktság hiányát bizonyos koerszivitási (coercive) feltételekkel lehet ellensúlyozni [3]. Ezekre azonban itt most nem szándékozom kitérni.

3 Általánosított monotonitás a mikroökonómiában

3.1 Georgescu-Roegen fogyasztási elmélete

Gyakori jelenség, hogy hasznosnak bizonyult fogalmakat már „születésük előtt" felfedezték és elnevezés nélkül használták. Reinhardt John-tól tudjuk [14], hogy így van ez az általánosított monotonitással is. 1936-ban Georgescu-Roegen fogyasztói magatartás elméletében "észrevétlenül" már használta a szigorú pszeudomonotonitás tulajdonságát [5].

A fogyasztáselmélet azt vizsgálja, hogy a fogyasztó miként választ a fogyasztási javak kötegeiből. A fogyasztáselmélet olyan fogyasztót feltételez, aki képes „racionálisan" választani, döntéseit egy (saját) preferenciarendezés vezérli. Egy fogyasztási jószágköteget (fogyasztási kosarat) jelöljön egy $x \in \Re^n_+$ vektor.

Tekintsünk egy fogyasztót, aki számára adott egy fogyasztói kosár $x \in \Re^n_+$. Tegyük fel, hogy a fogyasztó az adott fogyasztói kosár helyett másik, $y \in \Re^n_+$, fogyasztói kosár választását fontolgatja. Georgescu-Roegen lokális preferenciarendezést feltételez, vagyis azt, hogy a fogyasztó számára a választható jószágköteg csak egy valódi A részhalmaza $\Re^n_+$-nak. További feltételezés, hogy a fogyasztó képes eldönteni, hogy az $x \in A$ fogyasztói kosárról az $y \in A$ fogyasztói kosárra való áttérés számára előnyösebb, hátrányosabb, vagy teljesen mindegy. Georgescu-Roegen modelljében ezt a döntési szabályt egy

$F : A \to \Re^n$ leképezés formalizálja a következő módon: az $\{x \to y\}$ váltás preferált, nem-preferált illetve közömbös akkor és csak akkor, ha

$$\langle F(x), y - x \rangle > 0\,, \qquad < 0\,, \qquad \text{illetve } = 0\,.$$

Georgescu-Roegen az $x \in A$ jószágköteget *a fogyasztó megelégedettségi pontjának* (point of saturation) vagy *egyensúlyi jószágkötegnek* nevezi akkor, ha

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \text{minden} \quad y \in A \quad \text{esetén}\,.$$

(Egyik bírálóm hívta fel a figyelmemet, hogy a magyar nyelvű szakirodalomban a megelégedettségi pont helyett inkább a *telítődési pont* elnevezés használatos.)

Vegyük észre, hogy a megelégedettségi pont fogalma mai modern terminológia szerint nem egyéb, mint az F leképezés Stampacchia-féle egyensúlyi pontja A fölött.

Természetesen alapvető kérdés a fogyasztáselméletben a megelégedettségi pont létezése. A létezés „kikényszerítéséhez" természetesen a preferenciáról (jelen esetben az F leképezésről) valami speciális tulajdonság meglétét is fel kell tenni. Ez vezette Georgescu-Roegent a következő posztulátumhoz (*principle of persisting nonpreference*): ha a fogyasztó az $x \in A$ mellet nem preferálja az $y \in A$ jószágköteget, azaz az $y - x$ változás nem preferált, vagy közömbös x-ben, akkor a változásnak ez az iránya y-ban nem preferált, formálisan

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(y), y - x \rangle < 0\,. \tag{20}$$

Ez a posztulátum valójában az $F(x)$ leképezés szigorú pszeudomonotonitását írja elő. Egy későbbi dolgozatában ezt a posztulátumot Georgescu-Roegen a következő, enyhébb változatban használta [6]:

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(y), y - x \rangle \leq 0\,, \tag{21}$$

ez pedig F pszeudomonotonitását jelenti.

Georgescu-Roegen —kikerülve a fixpont tételek használatát— a variációs egyenlőtlenségek ma már jól kidolgozott elméletének alapvető megállapításaihoz is eljutott. Feltételezve az A halmaz konvexitását és kompaktságát, valamint az F leképezés folytonosságát, bebizonyította egyensúlyi pont létezését, egyensúlyi pont és stabil egyensúlyi pont egybeesését és az egyensúlyi pontok halmazának konvexitását.

Megjegyzés. A figyelmes olvasó szemünkre vetheti, hogy a Georgescu-Roegen modellben szereplő $F(x)$ leképezéssel kapcsolatban helytelenül használtuk a (szigorú) pszeudomonotonitás fogalmat. A (20) és a (21) feltételek valójában a $-F(x)$ leképezés (szigorú) pszeudomonotonitását jelentik. A probléma gyökere abban van, hogy az általánosított monotonitás az általánosított konvexitással van összhangban. Az általánosított konkavitási tulajdonságok az antigradiens, vagyis a $-\nabla f(x)$ leképezés általánosított monotonitási tulajdonságaival jellemezhetőek. Ha tehát általánosított konkavitást a gradienssel szeretnénk közvetlenül jellemezni, akkor be kellene vezetnünk az "anti" általánosított monotonitási fogalmakat. Ekkor pl. a (20) tulajdonságot *anti pszeudomonotonitásnak* kellene neveznünk. Ez a megkülönböztető szóhasználat még nem alakult ki, ezért nem teszünk különbséget se most, se pedig a későbbiek folyamán az „anti" és az „eredeti" változat között.

3.2 Fogyasztói választás és keresleti megfeleltetés

A fogyasztói magatartás egzakt leírására többféle megközelítés alakult ki. Szokásos a fogyasztói magatartást (a) preferencia relációval, (b) hasznossági függvénnyel, illetve (c) keresleti relációval, keresleti megfeleltetéssel leírni. A fogyasztási elmélet egyik központi kérdése a három megközelítés kapcsolata [12, 25, 26, 28]. Ismertetésünkben a fogyasztói preferencia és az általa indukált keresleti megfeleltetés vizsgálatára szoritkozunk.

Szükségünk lesz a továbbiakban néhány fogalomra. A figyelembe veendő jószágokra nézve nem teszünk semmiféle megkötést, azaz a teljes $\Re^n_+$ halmazt jószágtérnek tekintjük. Jelölje $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ az aktuális árak vektorát és tekintsük egységnyinek a fogyasztó által elkölthető jövedelmet.

5. Definíció. *A*

$$K(p) = \left\{x \in \Re^n_+ : \{p, x\rangle \le 1\right\}, \quad p \in \operatorname{int} \Re^n_+$$

halmazértékű függvényt a fogyasztó költségvetési leképezés*ének nevezzük.*

Amennyiben a fogyasztói magatartást az R preferenciareláció írja le, akkor azt a $D_R \subseteq \operatorname{int} \Re^n_+ \times \Re^n_+$ relációt, amelyre

$$pD_Rx \iff x \in K(p) \quad \text{és} \quad \text{minden } y \in K(p) \text{ estén } xRy\,,$$

keresleti reláció*nak nevezzük. A keresleti reláció helyett dolgozhatunk a*

$$D_R(p) = \{x \in \Re^n_+ : pD_Rx\}\,,$$

keresleti hozzárendeléssel,*amennyiben minden $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ esetén $D_R(p) \neq \emptyset$.*

Megjegyzés. Ha xRy jelentése: x *„nem rosszabb, mint"* y, akkor pD_Rx jelentése: p árszinvonalat feltételezve nincs x-nél jobb választás.

A keresleti reláció a gyakorlat számára jobban megragadható, közvetlen megfigyeléseket végezhetünk rá vonatkozóan. Természetesen adódik tehát a kérdés, hogy a megfigyelt adatokból lehet-e rekonstruálni azt az R relációt, amely a D_R keresleti relációt indukálja? Hogy ezt a kérdésfeltevést pontosítsuk, vezessük be a következő fogalmakat.

6. Definíció.

(i) *A $D \subseteq \operatorname{int} \Re^n_+ \times \Re^n_+$ relációt* keresleti reláció*nak mondjuk, ha*

$$pDx \implies \langle p, x\rangle = 1\,. \tag{22}$$

(ii) *A $D : \operatorname{int} \Re^n_+ \to 2^{\Re^n_+}$ halmazértékű hozzárendelést* keresleti megfeleltetés*nek nevezzük, ha minden $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ esetén $D(p) \neq \emptyset$ és minden $x \in D(p)$-re $\langle p, x\rangle = 1$.*

(iii) *Azt mondjuk, hogy az R preferenciareláció racionalizálja a D keresleti relációt (a D keresleti megfeleltetést), ha $D \subseteq D_R$ ($D(p) \subseteq D_R(p)$), minden $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ esetén. Ha $D = D_R$, akkor szigorú racionalizálásról beszélünk.*

Megjegyzés. Nem nehéz igazolni, hogy a D_R reláció csak akkor rendelkezik a (22) tulajdonsággal, ha az R reláció *lokálisan kielégítetlen*, ami azt jelenti, hogy bármely $x \in \Re^n_+$ esetén az x bármely U környezetében található olyan $y \in \Re^n_+$, amelyre $(x,y) \notin R$, verbálisan: „x rosszabb, mint y".

A keresleti relációkra (megfeleltetésekre) vonatkozó olyan feltevéseket, amelyek biztosítják racionalizálhatóságukat *kinyilvánított preferencia axiómáknak* szokás nevezni. Az ezekben az axiómákban megfogalmazott tulajdonságok interpretálhatóak úgy is, mint racionális fogyasztói döntésekkel szemben támasztott konzisztencia.

Az egyik ilyen nevezetes axióma Samuelsontól ered [24], és a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómájaként* (*WARP*) szokás emlegetni.

(WARP): *Tegyük fel, hogy a p árrendszer esetén az x jószágköteget választom ($x \in D_R(p)$), a q árrendszer esetén az x-től különböző y-t választanám ($y \in D_R(q)$), miközben tudom (felfedem), hogy a p árrendszer mellett — tisztán költségvetési szempontból— az y-t is választhattam volna ($\langle p, y\rangle \leq 1 = \langle p, x\rangle$). A konzisztens viselkedés —Samuelson szerint— azt jelenti, hogy ekkor a q árrendszer esetén —költségvetési szempontból— nem lehetséges az x választása ($\langle q, x\rangle > 1 = \langle q, y\rangle$). Ez a „konzisztens" viselkedés tehát a következőképpen formalizálható:*

$$x \in D_R(p),\ y \in D_R(q),\ \langle p, y-x\rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle q, x-y\rangle > 0\,. \tag{23}$$

Sokan túl erősnek találták ezt a fajta konzisztenciát, és a következővel helyettesítették:

$$x \in D_R(p),\ y \in D_R(q),\ \langle p, y-x\rangle < 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle q, x-y\rangle \geq 0. \tag{24}$$

Tekintettel a $\langle p, x\rangle = \langle q, y\rangle = 1$ költségvetési azonosságra, az előbbi feltételek a következő alakban is felírhatóak:

$$y \in D_R(q),\ x \in D_R(p),\ \langle y, p-q\rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x, q-p\rangle > 0\,, \tag{$WARP$}$$

$$y \in D_R(q),\ x \in D_R(p),\ \langle y, p-q\rangle < 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x, q-p\rangle \geq 0\,. \tag{ARP}$$

A ($WARP$) illetve az (ARP) feltételek —modern szóhasználattal élve— a $D_R(p)$ költségvetési megfeleltetés szigorú pszeudomonotonitását, illetve kvázimonotonitását jelentik. Hogy ezeknek a „konzisztencia" követelményeknek a posztulálása jó intuícióra vallanak, bizonyítja R. John alábbi tétele.

9. Tétel. [12] *Ha az R preferenciareláció konvex és lokálisan nem kielégíthető, akkor a $D_R(p)$ keresleti megfeleltetés kvázimonoton.*

Ennek a tételnek van egy nagyon fontos következménye.

Következmény. *Ahhoz, hogy a $D(p)$ keresleti megfeleltetést egy konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia racionalizáljon, szükséges, hogy a $D(p)$ halmazértékű leképezés kvázimonoton legyen.*

Bizonyítás. Feltételezésünk szerint van olyan R konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia, hogy $D(p) \subseteq D_R(p)$. A 9. Tétel szerint $D_R(p)$ kvázimonoton. Egyszerűen belátható, hogy a $D(p) \subseteq D_R(p)$ tartalmazás miatt $D(p)$ is kvázimonoton. □

R. John bebizonyította, hogy az állítása megfordítható.

10. Tétel. [12] *Ahhoz, hogy a $D(p)$ keresleti megfeleltetést egy konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia racionalizáljon, szükséges és elegendő, hogy a $D(p)$ halmazértékű leképezés kvázimonoton legyen.*

Az előző két tételben azzal a nagyon erős feltételezéssel éltünk, hogy minden p árvektor esetén $D_R(p)$, illetve $D(p)$ nem üres. Tetszőleges keresleti reláció esetén ez a feltétel általában nem teljesül. Éppen ezért érdekes R. John következő tétele, melynek megfogalmazásához értelmeznünk kell a D keresleti reláció valódi kvázimonotonitását.

7. Definíció. *A $D : \mathrm{int}\,\Re^n_+ \times \Re^n_+$ keresleti relációt* valódian kvázimonoton*nak nevezzük, ha a $G(x) = \{p \in \mathrm{int}\,\Re^n_+ : (p, x) \in D\}$ halmazértékű függvény valódian kvázimonoton.*

Könnyű belátni, hogy a $D : \mathrm{int}\,\Re^n_+ \times \Re^n_+$ keresleti reláció akkor és csak akkor valódian kvázimonoton, ha nem léteznek olyan (p_1, x_1), (p_2, x_2), ..., $(p_k, x_k) \in D$ elemek és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ pozitív valós számok, melyek összege 1, hogy az $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$ vektorra minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén $\langle p_i, x\rangle < 0$ teljesül.

11. Tétel. [12] *Ahhoz, hogy a $D : \mathrm{int}\,\Re^n_+ \times \Re^n_+$ keresleti relációt egy konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia racionalizáljon, szükséges és elegendő, hogy a D halmazértékű leképezés valódian kvázimonoton legyen.*

R. John azt is megmutatta, hogy ebben a tételben a valódi kvázimonotonitás nem gyengíthető kvázimonotonitásra.

3.3 Wald Ábrahám egzisztencia bizonyítása

További érdekes példát találhatunk a pszeudomonotonitás tulajdonságának „korai” előfordulására Wald Ábrahám nevezetes egzisztencia bizonyításában [27]. Az egyensúlyi modell, amit Wald megoldott, lényegében a következő [22, 28]. Keresünk olyan $x^*, p^*, q^* \in \Re^n_+$ vektorokat, amelyek adott $r \in \mathrm{int}\,\Re^n_+$, $A \in \Re^{m\times n}_+$ és $F : \Re^n_+ \to \mathrm{int}\,\Re^n_+$ mellett kielégítik az alábbi feltételrendszert.

$$p \leq qA \quad \text{és} \quad \langle qA - p, x\rangle = 0\,, \tag{25}$$

$$Ax \leq r \quad \text{és} \quad \langle q, Ax - r\rangle = 0\,, \tag{26}$$

$$p = F(x)\,. \tag{27}$$

Wald a következő feltételekkel dolgozott:

(W1) *Minden* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *indexhez található olyan* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *index, hogy* $a_{ij} > 0$.

(W2) F *folytonos.*

(W3) *Minden* $x_1, x_2 \in \Re^n_+$, $x_1 \neq x_2$ *esetén*

$$\langle F(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0\,.$$

A (W1) feltétel biztosítja, hogy a lehetséges megoldások $L = \{x \in \Re^n_+ : Ax \leq r\}$ halmaza korlátos. L emellett még zárt is és konvex is. Ezek a jó tulajdonságok garantálják, hogy bármely adott p vektor mellett a

$$\langle p, x \rangle \to \max$$

$$Ax \leq r, \quad x \geq 0$$

és a

$$\langle q, r \rangle \to \min$$

$$p \leq qA, \quad q \geq 0$$

lineáris programozási duális feladat-párnak van x^* és q^* optimális megoldása, melyekkel a (p, q^*, x^*) hármas kielégíti a (25) és (26) feltételeket, a (27) feltételt azonban nem szükségképpen. A (27) feltétel teljesülését kikényszeríthetjük azáltal, hogy először keresünk egy olyan $x^* \in L$ vektort, amely maximalizálja az $\langle F(x^*), x \rangle$ függvényt az L halmazon. Nyilvánvaló, hogy x^* akkor és csak akkor rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, ha eleget tesz a következő feltételnek:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \leq 0\,, \quad \text{minden} \quad x \in L\text{-re.} \tag{28}$$

Ez azt jelenti, hogy x^* az F leképezés Stampacchia egyensúlyi pontja kell, hogy legyen L fölött. Mivel L korlátos és zárt konvex halmaz, F pedig folytonos, ezért a variációs egyenlőtlenségek elméletéből ismert, hogy ilyen x^* létezik. Megmutatható, hogy ha az előbb említett lineáris programozási feladat-párt a $p^* = F(x^*)$ választás mellett oldjuk meg, akkor a kapott (p^*, q^*, x^*) hármas kielégíti a (25) – (27) feltételrendszert.

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy az F leképezés szigorú pszeudomonotonitását megkövetelő (W3) tulajdonság nélkül is igazolható az egzisztencia tétel. A (W3) feltétel egyébként nem más, mint a $D(p) = F^{-1}(p)$ keresleti függvényre kírótt szokásos konzisztencia: a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája.

Sokaknak okozott fejtörést, hogy mi szüksége volt Waldnak az említett konzisztencia megkövetelésére. Wald bizonyítása nem használ fixpont tételt, ehelyett n szerinti indukcióval dolgozik. Az F leképezés szigorú pszeudomonotonitása ekvivalens azzal, hogy az F leképezésnek bármely $C \subseteq L$ zárt konvex halmazon létezik egyetlen Stampacchia egyensúlyi pontja. Ez az a fontos tulajdonsága a szigorú pszeudomonotonitásnak, melyre Wald Ábrahámnak ténylegesen szüksége volt, és amelyet R. John fedzett fel. Igaz ugyanis a következő Martos-típusú tétel.

12. Tétel. [10] *Tekintsük az $F : A \to \Re^n$ leképezést, ahol $A \subseteq \Re^n$ konvex halmaz. Ahhoz, hogy F szigorúan pszeudomonoton legyen A-n, szükséges és elégséges, hogy bármely kompakt konvex $C \subseteq A$ esetén az $S(F, C)$ halmaz pontosan egy elemű legyen.*

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom lektoraimnak a hasznos észrevételeikért, valamint az OTKA T025442 és az FKFP 059/1997 sz. pályázatoknak támogatásukért.

Irodalom

1. Cottle, R. W. and J. C. Yao, Pseudomonotone complementarity problems in Hilbert space, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75 (1992) 281–295.
2. Daniilidis, A. and N. Hadjisavvas, Existence Theorems for Vector Variational Inequalities, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 54 (1996) 473–481.
3. Daniilidis, A. and N. Hadjisavvas, Coercivity Conditions and Variational Inequalities, *Mathematical Programming*, 86 (1999) 433–438.
4. Daniilidis, A. and N. Hadjisavvas, On Generalized Cyclically Monotone Operators and Proper Quasimonotonicity, *Optimization*, 47 (2000) 123–135.
5. Georgescu-Roegen, N., The Pure Theory of Consumer's Behaviour, *Quarterly Journal of Economics*, 50 (1936) 545–593.
6. Georgescu-Roegen, N., Choiche and Revealed Preference, *Southern Economic Journal*, 21 (1954) 119–130.
7. Giannessi, F., On Minty Variational Principle, in: Giannessi, F., S. Komlósi and T. Rapcsák (eds.) *New Trends in Mathematical Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. pp. 93–99.
8. Hartman, P. and G. Stampacchia, On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Mathematica*, 115 (1966) 153–188.
9. Hassouni, A., *Sous-differentiels des fonctions quasiconvexes*, Thèse de 3ème Cycle de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1983.
10. John, R., Variational Inequalities and Pseudomonotone Functions: Some Characterizations, in: Crouzeix, J.-P., Martínez-Legaz, J.-E. and M. Volle (eds.), *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, pp. 291–301.
11. John, R., Abraham Wald's equilibrium existence proof reconsidered, *Economic Theory*, 13 (1999) 417–428.
12. John, R., Quasimonotone individual demand, *Optimization*, 47 (2000) 201–209.
13. John, R., A Note on Minty Variational Inequalities and Generalized Monotonicity, in: Hadjisavvas, N., J.-E. Martínez-Legaz and J.-P. Penot (eds.), *Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Springer Verlag, Berlin, 2001, pp. 240–246.

14. John, R., *Uses of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity in Economics*, Manuscript, University of Bonn, 2001, pp. 45.
15. Karamardian, S., Complementarity Problems over Cones with Monotone and Pseudomonotone Maps, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18 (1976) 445–454.
16. Karamardian, S. and S. Schaible, Seven kinds of monotone maps, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 66 (1990) 37–46.
17. Kinderlehrer, D. and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, 1980.
18. Knaster, B., K. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-Dimensionale Simplexe, *Fundamenta Mathematicae*, 14 (1929) 132–137.
19. Komlósi, S., On the Stampacchia and Minty Variational Inequalities, in: G. Giorgi and F. Rossi (eds.), *Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions*, Pitagora Editrice, Bologna, 1999, pp. 231–260.
20. Konnov, I. and J. C. Yao, On the Generalized Vector Variational Inequality Problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 206 (1997) 42–58.
21. Konnov, I. and J. C. Yao, Existence of Solutions for Generalized Vector Equilibrium Problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233 (1999) 328–335.
22. Kuhn, H. W., On a Theorem of Wald, in: Kuhn, H. W. and A. W. Tucker (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathematical Studies No. 38, Princeton University Press, Princeton, 1956.
23. Ky Fan, A Generalization of Tychonoff's Fixed-Point Theorem, *Mathematics Annals*, 142 (1961) 305–310.
24. Samuelson, P. A., A Note on the Pure Theory of Consumer Behaviour, *Economica*, 5 (1938) 61–72.
25. Szabó, I., *Dualitás a mikroökonómiában*, kézirat, BKÁE, Budapest, 1999.
26. Varian, H. R., *Mikroökonómia középfokon*,
27. Wald, A., *Über die Produktionsglechungen der ökonomischen Werthlehre*, Ergebnisse eines mathemathischen Kolloquiums, 7 (1936) 1–16.
28. Zalai, E., *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-KERSZÖV Kiadó, Budapest, 2000.

EARLY APPEARANCE OF GENERALIZED MONOTONICITY IN MICROECONOMICS

Generalized monotonicity is a very useful property of maps figuring in complementarity problems, variational inequality problems and equilibrium problems. The "carrier" of these concepts started with the seminal paper of Steven Karamardian and Siegfried Schaible published in 1990, in which the authors revealed the links between several generalized convexity properties of smooth functions and generalized monotonicity properties of their gradient maps. Based on the results obtained by Reinhard John very recently the paper provides on overlook on the early appearance of these favourite concepts in Microeconomics.