# TERMELÉSI ÉS KÖLTSÉGFÜGGVÉNYEK INTERPOLÁCIÓS KÖZELÍTÉSE[1]

BESSENYEI ISTVÁN
*Janus Pannonius Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar*

Ez a dolgozat az ismert, adatigényes statisztikai módszerekkel kívánja szembeállítani az interpoláció egyetlen megfigyelésre támaszkodó módszerét. A módszer a mikroökonómiában szokásos vegyes hozadékú, kvázikonkáv termelési függvény esetén alkalmazható, melyhez U alakú határ- és átlagköltséggörbék tartoznak. Az alkalmazáshoz szükséges egyetlen megfigyelés a technikai maximumhoz tartozó kibocsátás, változó tényezőmennyiség és a változó tényező egységára. A becslés a költséggörbék releváns tartományában, az üzembezárási pont fölött ad jó közelítést.

## 1. Bevezetés

A termelési és költségfüggvények jelentős szerepe az elméleti és alkalmazott közgazdaságtudományokban közismert. Elegendő csupán Kotler [1] és Varian [3] közismert munkáira utalni. Ismertek azok a statisztikai eljárások is, melyek segítségével e függvények becsülhetők. E módszerek azonban nagyszámú megfigyelésre támaszkodnak, s ez nem minden esetben áll rendelkezésre. Elegendő csupán arra az esetre gondolni, amikor egy beruházás nyomán létrejövő üzem rövid távú költséggörbéinek előzetes meghatározása a feladat. Mivel a költséggörbéket ekkor még a termelés megkezdése előtt kell meghatározni, a statisztikai becsléshez szükséges adatállomány nem áll rendelkezésre. Általában ismert azonban a létesítendő üzem maximális kibocsátása, az ennek előállításához szükséges változó tényező mennyisége és a változó tényező egységára. Ezekre az adatokra támaszkodva keressük a változóköltség-függvény egy interpolációs közelítését. A közelítést két lépésben végezzük: először az egyetlen változó tényező parciális hozadéki függvényét közelítjük egy harmadfokú polinommal, majd pedig Vörös [4] megjegyzése nyomán e függvény inverzének a változó tényező egységárával vett szorzatát (ami tulajdonképpen a változóköltség-függvény) közelítjük egy másik harmadfokú polinommal.

[1]Beérkezett: 1997. szeptember 20.

Jelölje $Q$ a vállalat kibocsátását, $K$ a felhasznált tőke, $L$ pedig a felhasznált munka mennyiségét. Föltesszük, hogy $K$ nagysága rövid távon rögzített, míg $L$ értéke szabadon változhat.[2] A kibocsátás és tőke-, munkafelhasználás közti összefüggést fejezi ki általában a $Q = F(K, L)$ termelési függvény, rövid távon pedig a $Q = f(L)$ parciális hozadéki függvény. Határtermelékenységen a parciális hozadéki függvény deriváltját értjük, átlagtermelékenységen pedig $Q$-val vett hányadosát. Jelölje $P_L$ a változó tényező, azaz a munka egységárát, ekkor a parciális hozadéki függvény inverzének $P_L$-lel vett szorzata a változóköltség-függvény. A parciális hozadéki függvényről föltesszük az alábbiakat:

1. Változó tényező felhasználása nélkül nincs kibocsátás.
2. Az első egység változó tényező határtermelékenysége zérus.
3. A változó tényező határtermelékenysége eleinte növekszik, majd csökken.
4. Egyértelműen létezik a parciális hozadéki függvény maximumhelye, a technikai maximum.

Ha a parciális hozadéki függvény rugalmassága egységnyi, az üzem technikai optimumáról beszélünk. Jelölje $L_o$ a technikai optimumhoz, $L_m$ a technikai maximumhoz tartozó változó tényező-felhasználást, $Q_o$ pedig a technikai optimumhoz tartozó kibocsátást, míg $Q_m$ a technikai maximumhoz tartozót. A technikai optimumhoz $VC_o$, a technikai maximumhoz pedig $VC_m$ nagyságú változó költség tartozik. Ismertnek tekintve az $L_m$, $Q_m$, és $P_L$ nagyságokat, keressük a parciális hozadéki és változóköltség függvények interpolációs közelítését.

## 2. A parciális hozadéki függvény közelítése

A parciális hozadéki függvényt a $Q = aL^3 + bL^2 + cL + d$ polinommal közelítjük. Az 1. feltétel miatt $d = 0$, a második miatt pedig $c = 0$. Mivel a technikai maximumban a változó tényező határtermelékenysége nulla, $0 = 3aL_m^2 + 2bL_m$ teljesül, amiből

$$L_m = -\frac{2b}{3a}\,. \tag{1}$$

[2]Természetesen $K$ és $L$ tetszőleges termelési tényezőt jelölhet, akár tényezők valamiféle aggregátumát is. Csak azt kell kikötni, hogy elemzésünk során $K$ értéke fix, míg $L$ nagysága változhat.

Alkalmazva most az (1) összefüggést a technikai maximumra, a parciális hozadéki függvénybe helyettesítve az alábbi egyenlet adódik:

$$Q_m = -a\frac{8b^3}{27a^3} + b\frac{4b^2}{9a^2} = -0.5aL_m^3 ,$$

amiből

$$a = \frac{2Q_m}{L_m^3} . \tag{2}$$

Visszahelyettesítve az (1) egyenletbe, a $b$ paraméter értékét kapjuk:

$$b = -1.5aL_m = 3\frac{Q_m}{L_m^2} . \tag{3}$$

Amiből rögtön látszik, hogy $a < 0$ és $b > 0$, amint az várható volt.

Az így nyert parciális hozadéki függvény technikai optimumpontjának meghatározásához abból indulunk ki, hogy a keresett pontban a változó tényező határ- és átlagtermelékenysége megegyezik, azaz $3aL_o^2 + 2bL_o = aL_o^2 + bL_o$, amiből

$$L_o = -\frac{b}{2a} . \tag{4}$$

Ismét a parciális hozadéki függvénybe helyettesítve a technikai optimumhoz tartozó kibocsátást kapjuk:

$$Q_o = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^3}{8a^2} . \tag{5}$$

## 3. A változóköltség-függvény közelítése

Az interpoláció alappontja egyrészt a technikai maximum másrészt a technikai optimum. Felhasználjuk továbbá, hogy ismert a közelítendő függvény deriváltjának értéke a technikai optimumban (Hermite-interpoláció [2]), tehát azt az általánosan ismert tényt, mely szerint a technikai optimumhoz tartozó kibocsátás előállítása esetén a határ- és átlagváltozóköltségek megegyeznek. Az interpoláció negyedik alappontja az origó, melyen a változóköltség-függvény definíció szerint keresztülmegy. A függvényt a következő polinommal közelítjük: $VC(Q) = \alpha Q^3 + \beta Q^2 + \gamma Q$. Mivel a technikai optimumban a változó tényező határ- és átlagváltozóköltsége megegyezik,

$$3\alpha Q_o^2 + 2\beta Q_o + \gamma = \alpha Q_o^2 + \beta Q_o + \gamma ,$$

amiből:

$$\beta = -2Q_o\alpha\,. \tag{6}$$

$VC(Q_o) = P_L L_o$ miatt továbbá az alábbi egyenletet írhatjuk:

$$\alpha Q_o^3 + \beta Q_o^2 + \gamma Q_o = P_L L_o\,,$$

amiből a (6) összefüggést felhasználva

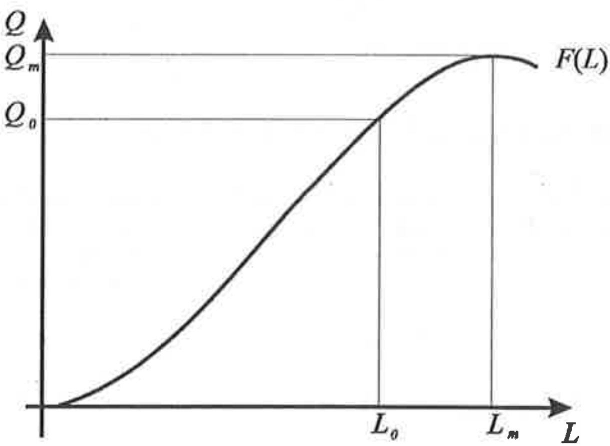
$$\gamma = \frac{P_L L_o}{Q_o} + \alpha Q_o^2 \tag{7}$$

adódik. Végül $VC(Q_m) = P_L L_m$ fölhasználásával

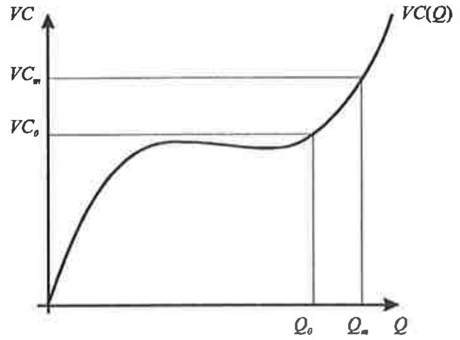
$$\alpha Q_m^3 + \beta Q_m^2 + \gamma Q_m = P_L L_m\,,$$

amiből a (6) és (7) összefüggést felhasználva

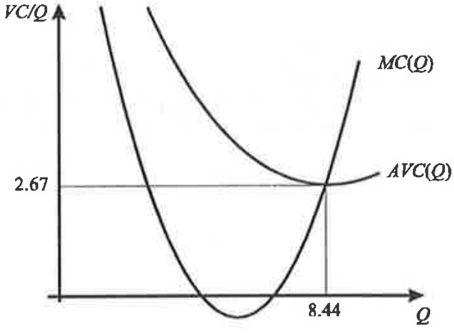
$$\alpha = \frac{P_L\left(L_m - \frac{Q_m}{Q_o} L_o\right)}{Q_m(Q_m - Q_o)^2}\,. \tag{8}$$




*1. ábra A parciális hozadéki függvény*




*2. ábra A változóköltség-függvény*




*3. ábra A határ- és átlagköltség függvények*

## 4. Egy konkrét példa a hozadéki és költségfüggvények közelítésére, az interpoláció hibája

Legyen a tervezett üzem maximális kapacitása 10 egység, az ennek előállításához szükséges változó tényező mennyisége 6 egység, a változó tényező egységára pedig 5. A (2) és (3) egyenletek fölhasználásával a változó tényező hozadéki függvényére a következő formula adódik:

$$Q = -0.0926L^3 + 0.8333L^2 \,.$$

A technikai optimumhoz tartozó változó tényezőfelhasználás a (4) összefüggés szerint: $L_o = 4.5$, az ehhez tartozó kibocsátást az imént nyert hozadéki függvénybe helyettesítve kapjuk: $Q_o = 8.4375$. Ezen adatok ismeretében a változóköltség-függvény $\alpha$ paramétere a (8) egyenletből nyerhető. A (7) összefüggés a $\gamma$, a (6) a $\beta$ paraméter értékét szolgáltatja. Így a változóköltség-függvény alábbi közelítő képletéhez jutunk:

$$VC(Q) = 0.1365Q^3 - 2.3040Q^2 + 12.387Q \, .$$

A parciális hozadéki függvényt az 1. ábra szemlélteti, a változóköltség-függvényt a 2. ábra. A változóköltség-függvény deriváltját határköltség-függvénynek, $Q$-val vett hányadosát pedig átlagváltozóköltség-függvénynek nevezik. Ezek láthatók a 3. ábrán. Amint az 1. ábráról megállapítható, a parciális hozadéki függvény a szokásos tankönyvi ábrázolásnak felel meg. Ezt a bevezetőben felsorolt négy feltétel biztosítja. A változóköltség-függvény ábrája azonban durva elvi hibát tartalmaz: a függvénynek van negatív meredekségű szakasza. Ez egyértelműen az interpolációs közelítés hibájának tudható be. Könnyen látható,[3] hogy ha a piaci ár nem éri el az átlagváltozóköltség-függvény minimumát, a termelést nem érdemes fenntartani, ezért ezt a pontot üzembezárási pontnak nevezik. Amennyiben azonban célunk a költséggörbék releváns tartományba, tehát üzembezárási pont fölé eső darabjának közelítése, itt ez a hiba nem jelentkezik. Ezek után azonban feltétlenül szükséges megvizsgálni, mekkora hibát követünk el a második interpoláció során. Ehhez a technikai optimumhoz és technikai maximumhoz tartozó foglalkoztatási szintek közti intervallumot osztjuk fel ekvidisztáns alappontokkal, és e pontokban számítjuk ki a változóköltség-függvény pontos értékét. Az interpoláció során nyert parciális hozadéki függvény segítségével meghatározható továbbá az ezen alappontokhoz tartozó kibocsátás, a változóköltség-függvény közelítő formulájának felhasználásával pedig az ezen kibocsátásokhoz tartozó változóköltség. A számítások eredményét az 1. táblázat foglalja össze, melynek első oszlopában a változó tényező különböző mennyiségei találhatók a technikai optimum és technikai maximum által meghatározott intervallumban. A második oszlop a változó tényező felhasználásának különböző szintjei mellett előállítható kibocsátás-mennyiségeket tartalmazza. Az itt szereplő adatok kiszámításához az imént nyert

$$Q = -0.0926L^3 + 0.8333L^2$$

függvényt használtuk. A harmadik oszlop a változóköltség-függvény "pontos" értékeit tartalmazza. A "pontos" jelző itt arra utal, hogy az adatok kiszámítása a $VC = P_L L$ formula felhasználásával történt. A negyedik oszlopba a változóköltségfüggvény $VC(Q) = 0.1365Q^3 - 2.3040Q^2 + 12.387Q$ közelítő formulával nyert értékei kerültek. Az utolsó oszlop a "pontos" és közelítő értékek közti eltérést tünteti föl, százalékos formában.

[3] lásd pl. Varian [3] pp. 452–454 vagy Vörös [4] pp. 47-50.

Amint a táblázatból kitűnik, a közelítés hibája az interpolációs alappontokban nulla, de ott, ahol a legnagyobb, sem haladja meg az 5%-ot. Helyesnek tűnik tehát Vörös azon megállapítása, mely szerint a hozadéki függvény inverze jól közelíthető egy harmadfokú polinommal.[4] Megjegyezzük még, hogy a költséggörbék releváns szegmensében a költségek becsült nagysága sehol nem kisebb a tényleges nagyságnál, tehát a módszer nem sérti a "kereskedői óvatosság" elvét. Az első sor adataiból az is kitűnik, hogy az üzembezárási ponthoz tartozó ár: $5 \cdot 4.5/8.4375 = 2.67$.

| $L$ | $Q$ | $VC$ | közelítő $VC$ | hiba % |
|---|---|---|---|---|
| 4.5000 | 8.4375 | 22.5000 | 22.5000 | 0.00 |
| 4.6000 | 8.6207 | 23.0000 | 23.0282 | 0.12 |
| 4.7000 | 8.7951 | 23.5000 | 23.6071 | 0.46 |
| 4.8000 | 8.9600 | 24.0000 | 24.2273 | 0.95 |
| 4.9000 | 9.1149 | 24.5000 | 24.8775 | 1.54 |
| 5.0000 | 9.2593 | 25.0000 | 25.5451 | 2.18 |
| 5.1000 | 9.3925 | 25.5000 | 26.2162 | 2.81 |
| 5.2000 | 9.5141 | 26.0000 | 26.8764 | 3.37 |
| 5.3000 | 9.6234 | 26.5000 | 27.5104 | 3.81 |
| 5.4000 | 9.7200 | 27.0000 | 28.1028 | 4.08 |
| 5.5000 | 9.8032 | 27.5000 | 28.6386 | 4.14 |
| 5.6000 | 9.8726 | 28.0000 | 29.1030 | 3.94 |
| 5.7000 | 9.9275 | 28.5000 | 29.4825 | 3.45 |
| 5.8000 | 9.9674 | 29.0000 | 29.7651 | 2.64 |
| 5.9000 | 9.9918 | 29.5000 | 29.9402 | 1.49 |
| 6.0000 | 10.0000 | 30.0000 | 30.0000 | 0.00 |

*1. táblázat*

A második interpolációs közelítés során tehát nem követtünk el 5%-nál nagyobb hibát, de mi a helyzet a hozadéki függvény közelítésével? Erre a kérdésre nehezebb választ találni. Az mindenesetre biztos, hogy minél inkább megfelel a valóságnak a bevezetésben fölsorolt négy feltétel, annál jobb a függvény közelítése. Az első interpoláció további gyengesége, hogy az origó mint alappont kívül esik a változó tényező technikai optimuma és maximuma által definiált releváns intervallumon. Ráadásul nemcsak ezen irreleváns alappontra támaszkodik az interpoláció, hanem a közelítendő függvény deriváltjának itteni értékére is. Másrészt azt is látni kell, hogy a szokásos tan-

[4] Vörös [4] p.43.

könyvi ábrázolásnak megfelelő[5] hozadéki függvény közelítéséhez minimálisan harmadfokú polinom szükséges, ennek interpolációjához pedig legalább négy független adat kell. Az 1. és 2. feltétel helyettesíthető ugyan két olyan megfigyeléssel, melyek a releváns szférába esnek, ezzel azonban nemcsak a közelítés válik számításigényesebbé, hanem az interpolációs eljárás adatigényessége is nő, célunk pedig egy olyan eljárás bemutatása volt, mely a lehető legkevesebb megfigyelésre támaszkodik.

## 5. Összegzés

Hozadéki és költségfüggvények becslésére az ismert statisztikai módszerek mellett interpolációs eljárások is alkalmazhatók. Ezek az eljárások, ha nem is adnak mindenhol jó közelítést, az üzem működése szempontjából releváns tartományban a gyakorlatban használható eredményt szolgáltatnak. Az eljárás nem különösebben számításigényes, az interpolációs polinomok együtthatói a (2), (3), (6), (7), (8) összefüggések fölhasználásával egyszerűen adódnak. A közelítés pontossága a megfigyelések számának növelésével javítható, ezért azonban — csakúgy, mint a statisztikai módszerek esetében — az input adatok számának növelésével kell "fizetni".

## Irodalom


1. Kotler P., Marketing management. Műszaki könyvkiadó. Budapest, 1991
2. Stoyan G. és Tako G., Numerikus módszerek. Eötvös Lóránd Tudományegyetem. Budapest, 1993
3. Varian H. R, Mikroökonómia középfokon. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1991
4. Vörös J., Termelés management. Janus Pannonius Egyetemi Kiadó. Pécs, 1991.


[5] A szokásos tankönyvi ábrázolásnak megfelelő hozadéki függvényekkel összefüggő költséggörbékről lásd pl. Kotler [1] p. 426 vagy Varian [3] p. 433.

CUBIC INTERPOLATION OF PRODUCTION AND COST FUNCTIONS

This paper compares the well known data demanding statistical methods with the method of extrapolation based on one observation. The method is applicable at the examination of mixed return, quasiconcave production-functions with U-shaped marginal and average cost curves. The single observation needed by the method is the level of output at the technical maximum, the varying factor and the unit price of the factor. The method gives a good estimation in the relevant domain of the cost curves, above the shutdown point.