EGY ÚJ KÜLSŐPONTOS ELJÁRÁS RÁCSOS TARTÓK TOPOLÓGIAI TERVEZÉSÉRE[1]

CSÉBFALVI ANIKÓ – CSÉBFALVI GYÖRGY
Janus Pannonius Tudományegyetem

A cikkben egy külsőpontos eljárást ismertetünk térbeli rácsos tartók optimális topológiájának meghatározására. A csomópontokból és rudakból álló térbeli rácsos tartó, mint szerkezeti modell számos tervezési probléma, épületszerkezet, hídszerkezet és repülőgép tervezési feladatok esetében fontos szerepet játszik. A topológiai optimálás során azt a minimális súlyú szerkezeti elrendezést keressük, amely adott terhelési viszonyok mellett kielégíti a szerkezet viselkedésével kapcsolatos korlátozó feltételeket. Az optimális topológia meghatározása — a szerkezeti modellből fakadóan — tipikusan nagyméretű, nemlineáris és nemkonvex optimálási feladat. A módszer alkalmazási lehetőségeit a szakirodalom egyik közismert teszt feladatával szemléltetjük.

1. Bevezetés

A topológiai optimálás, amelyen belül a csomópontok optimális topológiájának és a rúdelemek optimális keresztmetszeti értékeinek meghatározása egyidejűleg történik, az alapszerkezet — ground structure — feltételezésén alapuló szerkezet-optimálási feladatok csoportjába tartozik. A kiindulási alapszerkezetet úgy állítjuk elő, hogy a tervezési feladat függvényében előre meghatározott térbeli rácspontokat, mint a rácsos tartó csomópontjait, az összes lehetséges módon, rúdelemekkel kötjük össze. Az eljárás során elimináljuk az alapszerkezet felesleges — gazdaságtalan — rúdelemeit. A módszer elméleti alapjait és alkalmazási lehetőségeit Rozvany, Bendsøe és Kirsch (1995) monográfiája tárgyalja. Az első analitikus módszerek (Hemp (1973), Rozvany (1989)), amelyeket a "rácsszerű" kontinuum feladatok tulajdonságainak vizsgálatára dolgoztak ki, Michell (1904) munkáján alapulnak. Diszkrét modellek — pl. rácsos tartók — topológiai optimálási feladatainak numerikus módszereit ismerteti Kirsch (1989) és Ben-Tal (1993). Az elmúlt években dolgozták ki az ún. "homogenizáló" módszert (Bendsøe és Kikuchi (1988), Suzuki és Kikuchi (1991)), hangsúlyozva a topológiai optimálási feladatok

[1]A cikk a T 018324 számú OTKA pályázat által támogatott kutatás keretén belül készült. Beérkezett: 1998. január 20.

gyakorlati szerepének fontosságát. Az a tény, hogy a topológiai optimálás területén még nincs akkora tapasztalatunk, mint a rögzített elrendezésű szerkezet-optimálási feladatok esetén, számos alapvető nehézséget vet fel, beleértve a megoldó módszerek sajátosságaiból fakadó problémákat is.

A térbeli rácsos tartók topológiai optimálása során az alábbi alapvető nehézségekkel kell szembenéznünk:

- a feladat tipikusan nagyméretű, mivel az alapszerkezet rúdelemeinek száma a rácspontok számának kvadratikus függvénye;
- a szerkezeti modell az optimálási eljárás során változik, mivel a zérus keresztmetszetű elemeket automatikusan töröljük az alapszerkezetből;
- az optimálási feladat nemlineáris és rendszerint nemkonvex;
- a korlátozó feltételek implicit függvényei a tervezési változóknak;
- a függvények, illetve a függvény gradiensek kiértékelése — a fenti okok miatt — rendkívül költséges.

A fenti nehézségek elkerülésére, illetve részleges kiküszöbölésére az optimálási feladat megfogalmazása, modellezése és annak megoldása során számos olyan egyszerűsítést és közelítést alkalmaznak (Kirsch (1993), Rozvany, Bendsøe és Kirsch (1995)), amely az így kapott eredményt, mint optimális megoldást kérdőjelezi meg.

2. A topológiai optimálási feladat

Vizsgálataink során feltételezzük, hogy a tartó lineárisan rugalmas anyagmodellel jellemezhető szerkezet. A tartó egyensúlyi állapota, a szerkezet geometriájának változása a rácsos tartó rúdjaiban keletkező feszültségek, valamint a csomóponti eltolódások függvényében meghatározhatók, illetve korlátozhatók. A topológiai optimálási feladat célfüggvénye lineáris, az egyensúlyi és kompatibilitási feltételek nemlineárisak és implicit függvényei a tervezési változónak.

A geometriailag nemlineáris szerkezeti modellt a nagy elmozdulások elméletének alkalmazásával, a "Total-Lagrange" vonatkoztatási rendszerben ábrázoljuk. A deformált rácsos tartó egy rúdelemének megváltozott hossza:

$$l = \left[\sum_{d=1}^{3} \left(l_d^0 + u_{2d} - u_{1d} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

ahol

l_d^0 a rúdelem deformálatlan hosszának a koordináta-tengelyekre vetített képe;

u_{1d} a rúdelem kezdőpontjának eltolódása;

u_{2d} a rúdelem végpontjának eltolódása.

A rácsos tartó teljes potenciális energia függvénye az alábbi formában adható meg:

$$V\left(u_i(a_j), a_j\right) = \frac{E}{2}\sum_{j=1}^{e}\frac{a_j}{l_j^0}\left(l_j^0 - l_j\right)^2 - p_i u_i(a_j) \tag{2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, e$$

ahol

u_i a rácsos tartó csomóponti eltolódásait,

a_j a rúdelemek keresztmetszeti méreteit, mint tervezési változókat jelöli;

p_i a rácsos tartóra ható, külső, csomóponti teher vektora;

n a rácsos tartó csomóponti elmozdulásainak száma;

e a rácsos tartó rúdjainak száma;

E a szerkezet anyagának rugalmassági modulusa.

A térbeli rácsos tartó optimálási topológiáját az alábbi szélsőérték feladat megoldásával kapjuk. Határozzuk meg a térbeli rácsos tartó rúdelemeinek azon keresztmetszeti értékeit — megengedve a zérus keresztmetszeti értékeket is —, amelyek minimális súlyú szerkezetet eredményeznek.

$$w = \rho l_j^0 a_j \to \min, \tag{3}$$

kielégítik a

$$V_{,i}(u_i(a_j))|^{a_i} = 0, \tag{4}$$

egyensúlyi feltételeket és az

$$a_j \geq 0,$$

$$\underline{u} \leq u_i(a_j) \leq \overline{u}, \tag{5}$$

$$\underline{s} \leq s_j(u_i(a_j)) \leq \overline{s}, \tag{6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, e,$$

egyenlőtlenségi korlátozó feltételeket, ahol

$\rho l_j^0 a_j$ célfüggvény a szerkezet súlya;

$V = V(u_i, a_j)$ a szerkezet teljes potenciális energia függvénye;

$V_{,i}|^{a_j} = 0$ a szerkezet egyensúlyi egyenletrendszere az adott a_j helyen;

$\underline{u}$ a csomóponti elmozdulások alsó korlátja;

$\overline{u}$ a csomóponti elmozdulások felső korlátja;

s_j a rácsos tartó rúdelemeiben keletkező feszültség;

$\underline{s}$ a feszültségek alsó korlátja;

$\overline{s}$ a feszültségek felső korlátja;

ρ az anyagsűrűség.

Az egyensúlyi egyenletrendszerre vonatkozó (4) kifejezésben $()_{,i}$ az u_i csomóponti eltolódások szerinti parciális deriváltakat jelöli.

A rúdelemek alakváltozása és a rácsos tartó csomópontjainak elmozdulása közötti kompatibilitási feltétel a "Total-Lagrange" vonatkoztatási rendszer alkalmazása miatt minden esetben teljesül. A rúdelemekben keletkező feszültségek a lineárisan rugalmas anyagtörvény feltételezésével a deformált rúd hosszának ismeretében az

$$s_j = \frac{l_j^0 - l_j(u_i(a_j))}{l_j(u_i(a_j))} E \tag{7}$$

összefüggés alapján meghatározható.

3. A szerkezetoptimálási módszer

Az ismertetendő módszer egy aktív feltételeket kezelő külsőpontos eljárás, amely az optimális topológiát linearizált lépések sorozatával közelíti meg. Az egyes $r = 0, 1, 2, \ldots$ lépéseket az $\{a_j^r, u_i^r, s_j^r\}$ vektorokkal jellemezzük. A Δa_j^r keresztmetszet növekményeket — mint irányvektort — minden lépésben egy-egy lineáris programozási feladat megoldásával nyerjük. A lineáris programozási feladatban a szerkezet súlynövekményét minimalizáljuk, a linearizált aktív elmozdulás és feszültség korlátok figyelembevételével.

A keresztmetszet növekmények $\alpha\Delta a_j^r$, $\alpha \leq 1$ nagyságát iteratíve a linearizálás hibájának korlátozásával, vagyis a lineárisan becsült és a tényleges lehajlások és feszültségek eltérésének korlátozásával állítjuk be. Az első lépésben α bemenő paraméter, ezután mindig az előző lépés eredményét használjuk induló α paraméterként.

A keresztmetszet növekmények meghatározása után az $a_j^r = a_j^{r-1} + \alpha\Delta a_j^r$ pontban Newton-eljárással megoldjuk a szerkezet nemlineáris egyensúlyi egyenletrendszerét, amely az adott pontban a szerkezet elmozdulásait, illetve feszültségeit adja. Az eljárást addig ismételjük, amíg el nem érjük a megvalósítható megoldások halmazát.

A módszer egy azonos ξ keresztmetszetű rúdelemekből álló $\{a_j^0, u_i^0, s_j^0\}$, $a_j^0 = \xi$, $\xi \approx 0$, nem megvalósítható alapszerkezetből indul ki. Az irányvektort adó lineáris programozási feladat felépítése a következő:

$$\rho l_j^0 \Delta a_j^r \rightarrow \min! \tag{8}$$

$$u_i^r + \widehat{\Delta} u_i^r \leq \overline{u_i} \qquad \text{ha} \quad u_i^r \succ \overline{u_i} \tag{9}$$

$$u_i^r + \widehat{\Delta} u_i^r \geq \underline{u_i} \qquad \text{ha} \quad u_i^r \prec \overline{u_i} \tag{10}$$

$$s_j^r + \widehat{\Delta} s_j^r \leq \overline{s_j} \qquad \text{ha} \quad s_j^r \succ \overline{s_j} \tag{11}$$

$$s_j^r + \widehat{\Delta} s_j^r \leq \underline{s_j} \qquad \text{ha} \quad s_j^r \prec \overline{s_j} \tag{12}$$

ahol

$\widehat{\Delta} u_i^r$ a csomóponti eltolódás növekmény közelítő étéke

$\widehat{\Delta} s_j^r$ a feszültség növekmény közelítő értéke.

A $\widehat{\Delta} u_i^r$ csomóponti eltolódás növekményt az alábbi lineáris approximációval határozhatjuk meg:

$$\widehat{\Delta} u_i^r = \alpha\, u_{i,j} \Delta a_j^r \tag{13}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, e,$$

ahol $u_{i,j}$ a rácsos tartó $V_{,k}(u_i) = 0$ egyensúlyi egyenletrendszere alapján a következő módon számolható:

$$V_{,kj} + V_{,ki} u_{i,j} = 0, \tag{14}$$

$$u_{i,j} = [V_{,ki}]^{-1} V_{,kj}\ . \tag{15}$$

A $\widehat{\Delta} s_j^r$ feszültség növekmény közelítő értékének meghatározása az előzőekhez hasonló módon történik:

$$\widehat{\Delta} s_j^r = \alpha\, s_{j,l}^r \Delta a_l^r \tag{16}$$

$$j = l = 1, 2, \ldots, e\ ,$$

ahol:

$$s_{j,l}^r = s_{j,i}^r u_{i,l}\ , \tag{17}$$

mivel

$$\widehat{\Delta} s_j^r = s_{j,i}^r \Delta u_i^r \,, \tag{18}$$

amelyből a (13) kifejezés alapján a

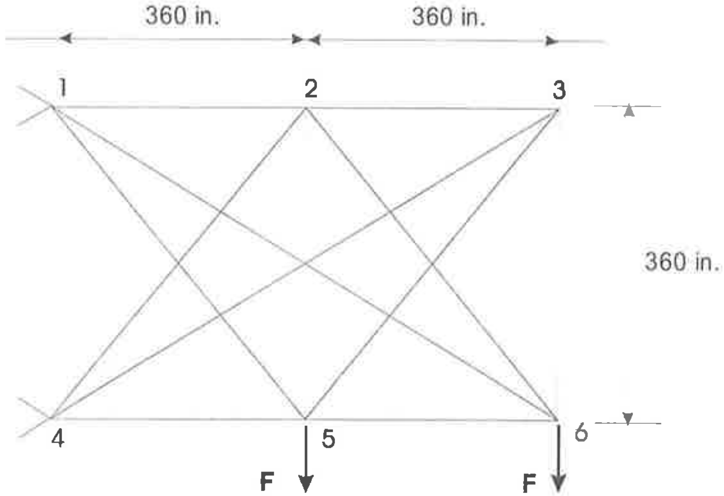
$$\widehat{\Delta} s_j^r = s_{j,i}^r u_{i,l}^r \Delta a_l^r \,. \tag{19}$$

összefüggést kapjuk.

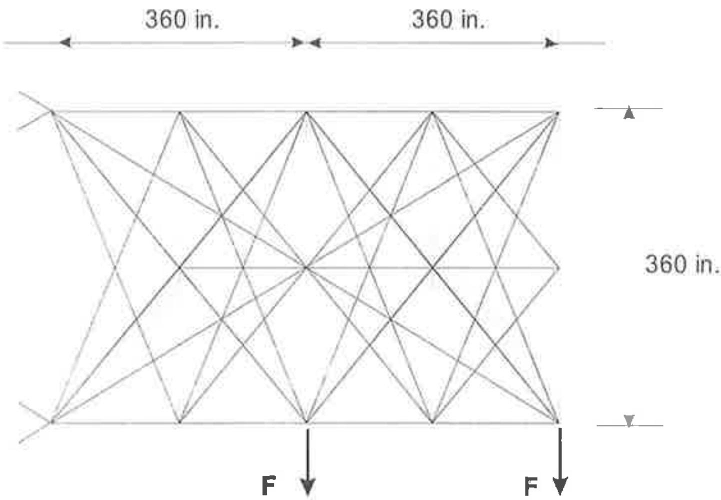
4. Numerikus példák

A módszer hatékonyságát és alkalmazási lehetőségeit az irodalomból jól ismert teszt feladatokon keresztül vizsgáltuk. A szerkezeti modell geometriailag nemlineáris, ideálisan rugalmas anyagú. A rugalmassági modulus $10^7\,psi$, anyagsűrűség $\rho = 0.1\,lb/in^3$. A szerkezetet az 1. és 2. ábrán megadott csomópontokban ható $F = 10^5\,lb$ nagyságú koncentrált erő terheli. A megfogási viszonyokat ugyancsak az 1. és 2. ábrák szemléltetik. A tervezés során azt a legkisebb súlyú szerkezetet kerestük, amely kielégíti az $u_{\max} = 2.0\;in$ lehajlás korlátot és az $s_{\max} = 25000\,psi$ feszültség korlátot.

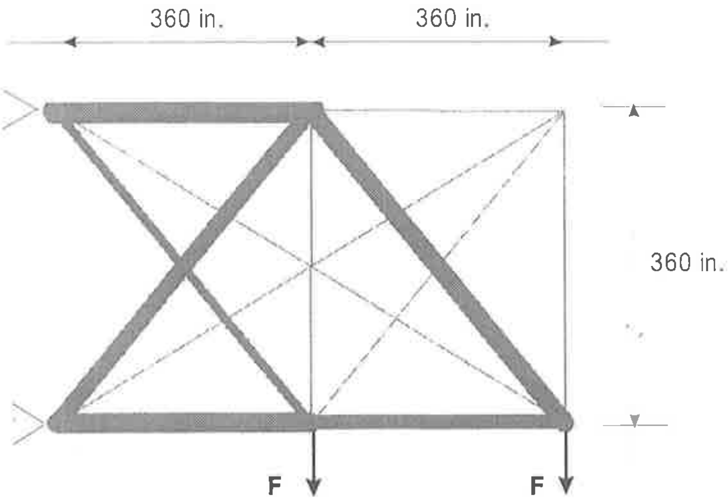
Az 1. ábra szerinti alapszerkezetből kiindulva a 3. ábrán látható eredményt kaptuk. A 2. ábrán egy olyan alapszerkezetet tüntettünk fel, amelyet az előző feladathoz képest "sűrűbb" pontrács felvételével nyertünk. Az így kapott eredmény az előzővel megegyező, melyet a 4. ábra szemléltet. Az optimális szerkezet súlya mindkét esetben $5036.67\,lb$ és az eredményként kapott geometriai elrendezés is mindkét esetben megegyezik. A 3. és 4. ábrákon vékony vonalakkal ábrázolt rudak keresztmetszete a vastagabb vonalakkal jelölt rúdkeresztmetszetekhez képest olyan kicsi, hogy gyakorlatilag nullának tekinthető. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy az eredmény minden esetben függ az alapszerkezet felvételétől és csak abban az esetben jutunk azonos eredményre, azaz csak abban az esetben kapjuk az optimális topológiai elrendezést, ha az eredmény részhalmaza az előre felvett alapszerkezetnek.



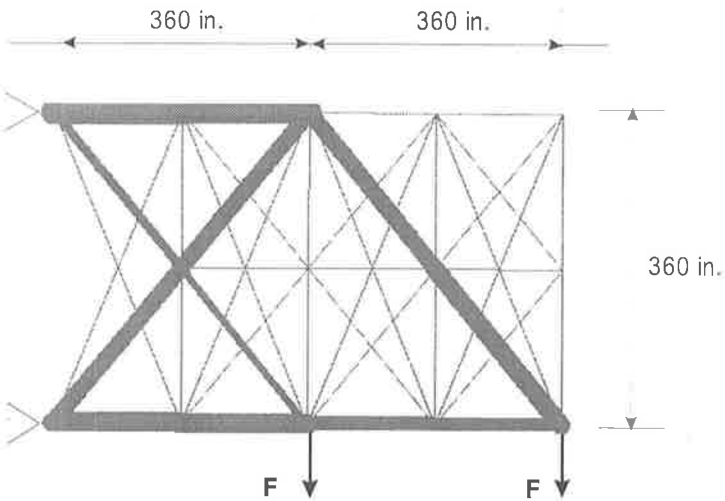
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Irodalom

1. Ben-Tal A. és Bendsøe M. P. (1993), A new method for optimal truss topology design, SIAM J. Optim. 3, 323-358
2. Bendsøe M. P. és Kikuchi N. (1988), Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 71, 197-224
3. Forgó F.(1978), Nemkonvex és diszkrét programozás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
4. Hemp, W. S. (1973), Optimum Structures, Clarendon Press, Oxford, UK.
5. Kirsch U. (1981), Optimum structural design, Mc Graw-Hill Book Company
6. Kirsch U. (1989), Optimal Topologies of Structures, Applied Mechanics Reviews, Vol. 42, 223-239
7. Michell, A. G. M. (1904), The Limits of Economy of Material in Frame Structures, Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 8, 589-597
8. Rozvany GIN (1989), Structural Design Via Optimality Criteria, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands
9. Rozvany GIN, Bendsøe M. P. és Kirsch U. (1995), Layout optimization of structures,.Applied Mechanics Reviews, Vol. 48, 41-118
10. Suzuki K. és Kikuchi N. (1991), A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 93, 291-318

A NEW EXTERIOR POINT METHOD FOR OPTIMAL TRUSS TOPOLOGY DESIGN

In this paper an exterior point method is presented for optimal truss topology design using a non-linear structural model. The trusses — pin-jointed frames — have many practical applications in building construction and bridge as well as in aerospace engineering. The objective of optimization is the weight of the structure. The behavior constraints for member stresses and nodal displacements are implicit functions of design variables. Truss topology optimization based on the assumption of an initial ground structure and formulated in terms of member cross-sectional areas, member stresses and nodal displacements results a large, non-linear and nonconvex optimization problem. The method proposed is computationally attractive and have been tested on large number of applications, some of which are presented.