NAGY SZTOCHASZTIKUS MÁTRIXOK SZUBDOMINÁNS SAJÁTÉRTÉKE[1]

MOLNÁR GYÖRGY – SIMONOVITS ANDRÁS
MTA Közgzdaságtudományi Intézet

Bródy (1997) cikkét követve, egy olyan lineáris dinamikus rendszert vizsgálunk, amelynek mátrixa nagyméretű, nem-negatív és az egyes elemei eléggé hasonlóak egymáshoz. Bródy azt sejtette, hogy a rendszer konvergenciasebessége — a domináns és a szubdomináns sajátértékek hányadosának az abszolút értéke — gyorsan nő a szektorok számával. Ebben a cikkben sztochasztikus mátrixokra szorítkozva pontos eredményt bizonyítunk: ha a mátrix elemei legfeljebb $\tau/n^{1+\epsilon}$-nel térnek el $1/n$-től, akkor a szubdomináns sajátérték abszolút értéke legfeljebb τ/n^ϵ, ahol τ és ϵ tetszőleges pozitív állandók.

1. Bevezetés

A dinamikus vizsgálatok egyik legfontosabb kérdése a rendszer stabilitása. Nem elegendő azonban a rendszer stabilitását igazolni; azt is tudnunk kell, hogy a rendszer milyen gyorsan tart az egyensúlyi állapotához. (Mit érne egy közönséges mérleg, amely a helyes értéket több perc alatt állapítaná meg?) Ennek ellenére mind a hazai, mind a nemzetközi közgazdasági irodalomban meglehetősen keveset vizsgálták a különböző dinamikus rendszerek konvergencia-sebességét. Előzményként két cikket említünk meg: Atkinson (1969) és Simonovits (1978).

Nemrégiben Bródy (1997) a konvergencia-sebességgel kapcsolatban a következő kérdést tette föl: lehet-e valamilyen általános eredményt kapni, ha a gazdasági rendszer nagyon sok és egymáshoz hasonló egységből áll? A válasza egyszerű: ha a rendszer nagy és lineáris, valamint alkotórészei nagyon hasonlítanak egymásra, akkor a konvergencia nagyon gyors.

Tegyük föl, hogy dinamikus rendszerünk állapotát minden időszakban egy n-dimenziós vektor írja le, s az állapotok közti átmenetet egy $n \times n$-es $A_n = A$ mátrix. (Ilyen rendszert vizsgált korábban Bródy (1992).) Ismert,

[1]Köszönetet mondunk a korábbi változatok névtelen lektorainak, Simonovits Miklósnak és mindenekelőtt Bródy Andrásnak, aki nemrég megjelent cikkének eredményeit a közlés előtt szóban elmondta és kéziratban megmutatta. Simonovits András köszönetét fejezi ki az OTKA T 019696 pályázat támogatásáért. Beérkezett: 1997. október 14.

hogy a relatív konvergencia-sebességet a mátrix abszolút értékben két legnagyobb sajátértékének — a domináns és a szubdomináns sajátértéknek — a hányadosa határozza meg. Ha az alkotórészek teljesen azonosak, akkor az A mátrix minden eleme azonos, normálás esetén $1/n$. Ezt a mátrixot $E_n = E$-vel jelöljük.

Ebben a dolgozatban először bemutatjuk a sejtést, majd egy közeli problémával helyettesítjük a feladatot. Determinisztikus keretben már jogosan normalizálhatjuk az oszlopösszegeket, anélkül, hogy a függetlenséggel szembe kerülnénk. Belátjuk, hogy az A_n mátrix szubdomináns sajátértékének az abszolút értéke legfeljebb akkora lehet, mint A_n és E_n ún. l_1-távolsága. A tétel következménye azzal az esettel foglalkozik, amikor mindegyik elem közel esik a várható értékéhez, és ekkor igazolja a szubdomináns kicsinységét. Végül megmutatjuk, hogy a tétel éles.

A cikk felépítése a következő: a 2. pontban Bródynak a véletlen mátrixra vonatkozó sejtését ismertetjük, és e sejtésnek Wigner (1955), (1958), Füredi és Komlós (1981) cikkéhez való viszonyát vizsgáljuk. A 3. pontban kifejtjük a sztochasztikus mátrixokról szóló eredményeket, és utalunk a Diaconis és Stroock (1991) cikkel való kapcsolatra.

2. Véletlen mátrixok

Legyen $A = A_n$ egy $n \times n$-es mátrix, nem-negatív elemekkel: $A \geq 0$, $n > 1$. Föltesszük még, hogy a mátrix *primitív* (másképpen: aciklikus), azaz létezik olyan (1 és n közötti) p természetes szám, amelyre $A^p > 0$. Legyen μ_i az A mátrix nem-növekvő sorrendben vett i-edik sajátértéke: $|\mu_i| \geq |\mu_{i+1}|$, $i = 1, \dots, n-1$. A Perron–Frobenius tétel szerint létezik egyetlen egy domináns sajátérték, μ_1, s ez pozitív: $|\mu_i| < |\mu_1|$, $i = 2, \dots, n$.

A konvergencia sebességét a második legnagyobb abszolút értékű, az ún. *szubdomináns* sajátérték és a domináns sajátérték aránya határozza meg.

Bródy (1997) azt vizsgálta, hogyan függ a szóban forgó hányados n-től! Szellemes fogással nem egy adott, hanem egy sereg *véletlen elemű* mátrixra vizsgálta a kérdést. Mint Bródy (1997) is hangsúlyozza, a véletlen mátrixok tipikus elemére általában élesebb eredményt kapunk, mint egy konkrét determinisztikus mátrixra.

Legyen $\{a_{ij}\}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ korlátos, független és azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók sorozata: $A_n = (a_{ij})$ egy véletlen mátrix.

Bródy az elemzést a determinisztikus esettel, E_n-nel kezdte. Rámutatott, hogy ekkor A rangja 1, és az összes dominált sajátérték 0. Megállapította, hogy a Mises-iterációnál a perturbációs összetevők egyetlen egy iteráció alatt eltűnnek — függetlenül n értékétől.

A véletlen mátrixoknál bonyolultabb a helyzet. Persze megfelelő normálás után a nagy számok törvényéhez hasonlóan az elemek 1 valószínűséggel $1/n$-hez "tartanak". A sajátértékek folytonosan függenek az elemektől, azonban a méretnövekedés miatt ez a tétel esetünkben nem alkalmazható. Bródy heurisztikus meggondolásokkal és számítógépes szimuláció segítségével mégis eljutott a következő

Sejtéshez. *A független elemekből álló, véletlen A_n mátrix szubdomináns sajátértékének és domináns sajátértékének hányadosa nullához tart, amint n tart a végtelenhez.*

Ebben a cikkben Bródy kutatását folytatjuk. Történetünkben fontos szerepet játszik a szimmetrikus mátrixok kétparaméteres serege. Legyen σ és π két valós szám: $a_{ii} = \sigma$, ha $i = 1, \ldots, n$ és $a_{ij} = \pi$, ha $i \neq j$. Jól ismert és könnyű igazolni, hogy A sajátértékei $\mu_1 = \sigma + (n-1)\pi$ és $\mu_2 = \sigma - \pi$, rendre 1 és $(n-1)$-es multiplicitással. Eltekintve a valószínűtlen esetektől, feltehető, hogy 1 és $n-1$ független sajátvektor létezik, amely rendre μ_1-hez és μ_2-höz tartozik. A 3. pontban látni fogjuk, hogy ebben az esetben a sejtésnek megfelelően μ_2 tart a 0-hoz.

Egészen más okokból a fizikusok (Wigner (1955) és (1958)) már régóta vizsgálták a szimmetrikus nagy mátrixok spektrumát. Itt elegendő lesz a matematikus Füredi és Komlós (1981) éles eredményére utalni: legyen a főátló fölötti elemek szórása v^2, és a várható érték mátrix tartozzék kétparaméteres családunkhoz. (A szimmetria miatt nem lehet minden elem független!) Ekkor

$$\frac{|\mu_2|}{|\mu_1|} \approx \frac{2v}{\sqrt{n}}\,.$$

Egyrészt Bródy sejtése általánosabb, mint Füredi és Komlós tétele, hiszen nemcsak szimmetrikus várható értékű mátrixokra vonatkozik. Másrészt viszont speciálisabb, mert azonos eloszlású pozitív valószínűségi változók szerepelnek a sejtésben: $\sigma = \pi > 0$, míg Füredi és Komlós tetszőleges σ-t és π-t megenged, szabad előjellel.

Ismert, hogy a közgazdaságtanban a szimmetrikus mátrixok közel sem játszanak olyan fontos szerepet, mint a fizikában vagy a statisztikában. Nagyon gyakran föltehetjük viszont, hogy az átmeneti mátrix elemei pozitívak vagy nullák. Jelen cikkünkben éppen ezt a fontos esetet vizsgáljuk.

3. Sztochasztikus mátrixok

Mostantól kezdve csak nem-negatív elemű mátrixokat vizsgálunk, véletlen hatások nélkül, a következő normálással: mindegyik oszlop összege 1. Ezeket a mátrixokat *sztochasztikus*nak nevezzük, és domináns sajátértékük egységnyi: $\mu_1 = 1$. A sztochasztikus mátrixok által származtatott dinamikát *Markov-lánc*nak nevezik, és széleskörűen használják a valószínűségszámításban. Mint korábban említettük, minden primitív mátrixnak egyetlen domináns sajátértéke van.

Olyan mátrixokra fogjuk Bródy megfigyelését bizonyítani, amelyek közel esnek E-hez. (A közelséget a mátrix-normával fogalmazzuk meg.) Egy $n \times n$-es U mátrix l_1-*normá*ját a következőképp definiáljuk: az elemek abszolút értékét véve ($|u_{ij}|$), az új mátrix maximális oszlopösszege a norma, azaz $\|U\| = \max_j \sum_i |u_{ij}|$. Ennek megfelelően két mátrix, U és V l_1-*távolságá*a a különbség mátrix normája: $\|U - V\|$.

Kimondjuk a

Tételt. *A sztochasztikus A mátrix szubdomináns sajátértékének abszolút értéke legfeljebb akkora, mint az A és E mátrix l_1-távolsága.*

Bizonyítás. Vegyük a $D = A - E$ különbségmátrixot, ahol $d_{ij} = a_{ij} - 1/n$. Mint ismert, az **1**' összegző sorvektor minden sztochasztikus mátrix baloldali sajátvektora, tehát A-é is, E-é is. Az A mátrix dominált sajátvektorai, $x_2, \ldots, x_n$ mindegyike ortogonális **1**-re. Hasonlóan x_j az E mátrix 0 sajátértékhez tartozó $(n-1)$-dimenziós sajátalterében fekszik: $Ex_j = 0$. Ezért $\mu_j x_j = Ax_j = Ex_j + Dx_j = Dx_j$ maga után vonja, hogy μ_j D-nek is sajátértéke, $j = 2, \ldots, n$. Ezen a ponton alkalmazhatjuk a következő elemi egyenlőtlenséget: egy négyzetes mátrix bármely sajátértékének az abszolút értéke legfeljebb akkora, mint a mátrix normája: $|\mu_2| \le \|D\|$. Q.E.D.

Mivel $|d_{ij}| < \tau/n^{1+\epsilon}$ $(1 \le i, j \le n)$ egyenlőtlenségekből következik $\|D\| < \tau/n^{\epsilon}$, egy egyszerűbb eredményt is megfogalmazhatunk.

Következmény. *Legyen τ és ϵ két valós szám, $\tau > 0$ és $\epsilon \ge 0$. Ha az $n \times n$-es sztochasztikus A_n mátrix elemei kielégítik az $|a_{ij} - 1/n| \le \tau/n^{1+\epsilon}$ $(1 \le i, j \le n)$ egyenlőtlenségeket, akkor a szubdomináns sajátértékre teljesül $|\mu_2| \le \tau/n^{\epsilon}$.*

Megjegyzések

1. A tétel és a következmény alapgondolata jól szemléltethető a kétparaméteres családon. Ahhoz, hogy sztochasztikus mátrixot kapjunk, egyparaméteres családra kell szorítkoznunk: $\sigma + (n-1)\pi = 1$. Ezért $\mu_1 = 1$ és $\mu_2 = 1 - n\pi$. További egyszerűsítésnél adódik E_n, ahol $\sigma = \pi = 1/n$ és $\mu_2 = 0$. Ha $\sigma = 1/n + \tau/n^{1+\epsilon}$, akkor $\mu_2 = \tau/n^{\epsilon}$.

2. Ha $\epsilon = 1$ és az elemek véletlen változók, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség miatt a közelségi feltételünk megbízhatósági intervallumra egyszerűsödik, de az egyenlőtlenség csak valószínűleg teljesül. Ha $\epsilon = 0$ és $0 < \tau < 1$, akkor a közelségi feltétel pozitivitást is implikál.

3. A feltevés nem szükséges. Például legyen $\sigma = \beta/n$ és $\pi = (1 - \beta/n)/(n-1)$. Ekkor $\mu_2 = (\beta - 1)/(n-1)$. Itt az eltérések nagyságrendje $1/n$, de μ_2 nagyságrendje mégis $1/n$, nem pedig 1 (ami az $\epsilon = 0$ esetből adódna).

4. A 3. megjegyzés ellenére eredményünk más tekintetben éles. Legyen $n = 2m$, $a_{ij} = \pi$, ha $1 \leq i,j \leq m$ vagy $m+1 \leq i,j \leq 2m$ és $a_{ij} = \sigma$ egyébként. Ahhoz, hogy sztochasztikus mátrixot kapjunk, fel kell tennünk, hogy $m(\pi + \sigma) = 1$. Ekkor elemi számolás után $\mu_2 = m(\pi - \sigma)$ adódik. A szimmetrikus $\pi = 1/n + \tau/n^{1+\epsilon}$ és $\sigma = 1/n - \tau/n^{1+\epsilon}$ esetben $\mu_2 = \tau/n^\epsilon$ áll. Éppen ez a tételben és következményében szereplő felső határ. Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy az itt szereplő eltérés-mátrix *2-ciklikus* (Rózsa, 1974), és az effajta mátrixok a Simonovits (1978) dolgozatban is kulcsszerepet játszottak.

5. Poincaré módszerét továbbfejlesztve, az elmúlt években több matematikus (például Diaconis és Stroock, 1991) érdekes felső korlátokat kapott a szimmetrikus (és közvetve, nem szimmetrikus) sztochasztikus mátrixok szubdomináns sajátértékére. Ezek az eredmények azonban olyan bonyolultak, hogy nem is tudjuk őket idézni. Csupán annyit említünk meg, hogy az általános elméletben is az előzőleg említett 2-ciklikus mátrixtól való távolság a döntő. Talán jól érzékelteti a lényeget a kártyakeverés példája. Bár a kártyaeloszlások száma rendkívül nagy, néhány (7) keverési művelet után a kártyák jól elkeverednek. Ez arra utal, hogy a megfelelő sztochasztikus mátrix szubdomináns sajátértéke abszolút értékben nagyon kicsi.

Irodalom

1. Atkinson, A. B. (1969) "The Timescale of the Economic Models": How Long is the Long Run", *Review of Economic Studies 36* 137–152.

2. Bródy, A. (1992) "A pénzforgalom egy input-output modelje: kísérlet a multiplikátor-elmélet általánsoítására és a multiplikátorok kiszámítására", *Közgazdasági Szemle 39: 3.* 197–207.

3. Bródy, A. (1997) "Leontief mátrixok legnagyobb sajátértékéről", *Szigma 28*, 1–6.

4. Diaconis, P. és Stroock, D. (1991) "Geometric Bounds for Eigenvalues of Markov Chains", *Annals of Applied Probability Theory 1* 36–61.

5. Füredi, Z. és Komlós, J. (1981) "The Eigenvalues of Random Symmetric Matrices", *Combinatorica 1* 233–241.

6. Rózsa, P. (1974) *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

7. Simonovits, A. (1978) "A decentralizált szabályozás maximális konvergencia-sebessége", *Szigma 11* 49–67.

8. Wigner, E. P. (1955) "Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions", *Annals of Mathematics 62* 548–564.

9. Wigner, E. P. (1958) "On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices", *Annals of Mathematics 67* 325–327.

THE SUBDOMINANT EIGENVALUE OF A LARGE STOCHASTIC MATRIX

Using intuition and computer experimentation, Bródy conjectured that the ratio of the subdominant eigenvalue to the dominant eigenvalue of a positive random matrix (with identically and independently distributed entries) converges to zero when the number of sectors tends to infinity. In this paper, we discuss the deterministic case and, among other things, prove the following version of this conjecture: if each entry of the matrix deviates from $1/n$ by at most $\tau/n^{1+\epsilon}$, then the modulus of the subdominant root is at most τ/n^{ϵ}, where τ and ϵ are arbitrary positive real parameters.