

A NÖVEKEDÉSI CIKLUSOK ÉS A PÉNZ. A LELEGYSZERŰBB HULLÁMMÁTRIX ÉS ALAKZATAI¹

BRÓDY ANDRÁS

MTA Közgazdaságtudományi Intézet

A hosszú, mintegy 200 éves ciklus Hawtrey - Keynes - Goodwin féle modellje elégséges pontossággal linearizálható és jól közelíthető a növekedés rövidebb távú elemzésére és előrejelzésére használt Leontief-féle mátrix-moddellel. A mozgás így megszerkesztett és könnyen számítható hullámmátrixának sajátos alakja van. Ez az alak önmagában is érdekes következtetésekre vezet és lehetővé teszi a pénz és a pénztőke értékének és forgalmának jobb ábrázolását az Input-Output elmélet keretén belül.

Bevezetés

Korábbi tanulmányomban² leírtam, hogyan alakítható ki Leontief és Goodwin³ nyomán a zárt gazdaság sokszektoros mozgásegyenlete. Ebben a nem lineáris modellben a termelés növelését szolgáló befektetést minden ágazatban az éppen érvényesülő profit (valójában a profitráta) nagysága szabja meg, a piaci árakat pedig minden termék vagy szolgáltatás piacán a kereslet és kínálat aránya (tehát a túltermelés vagy elégtelen termelés százalékos mértéke) mozgatja. Régi tanulmányom matematikai lényegét, a mozgásegyenlet linearizálását ismétlem el a "hullámmátrix" szerkesztéséről szóló második részben.

Az így leírt mozgás a szabad verseny klasszikus elképzeléseit tükrözi. Akkor is érdemes elméleti alakját közelebbről vizsgálni, ha rosszul, vagy akár teljesen elégtelenül közelíti meg a valóságos gazdaságok mozgását. A logikailag zárt modell ugyanis olyan megállapításokhoz vezet, amelyek az input-output táblázatoktól függetlenül, általános statisztikai adatok alapján is ellenőrizhetők.

A modellel elvégzett számítás megmutatta, hogy a modell, a zárt dinamikus Leontief-modellhez hasonlóan "hibajavító" tulajdonságú. Ezen az

¹A kutatást az OTKA T. 13.574 számú támogatása tette lehetővé. Köszönöm Körösi Gábor, Molnár György, Simonovits András és két anonim bírálóm észrevételeit.

²Ciklus és Egyensúly. Közgazdasági Szemle 1997. Szeptember.

³Két Goodwin-tanulmányt idézek az irodalomból, a Neumann-sugár körüli ciklusokat tárgyaló 1989. évi és a társszerzőkkel írt (valószínűleg utolsó) 1998. évi értekezést. Elete végéig a nemlineáris modell dezaggregálása foglalkoztatta.

értendő, hogy a kiinduló adatok adott, mondjuk 1-2 százalékos relatív hibája mellett a modell összevont gazdasági mutatóit nagyobb pontossággal, tehát 1-2 ezrelékes relatív hibával kapjuk meg. Ez a sajátosság már bebizonyosodott a zárt modell növekedési rátájával kapcsolatban. Hasonló a helyzet a ciklikus modellből számítható minden egyes mozgási frekvencia értékére vonatkozóan, bár a változó aggregáció (résztelvezettség) ezeket súlyosabban érinti. A modell viselkedése azért hasonlít Leontief modelljéhez, mert belőle származik. Az egyensúlyi árak és volumenek tekintetében ezért itt is csak annyit lehet állítani, hogy relatív hibájuk nem sokkal nagyobb a kiinduló adatok relatív hibájánál. A kapott megoldás, mivel kiszámítása a rendszer mátrixának invertálását igényli, pontatlanabb a kiinduló adatoknál. A hibák azonban semmiképpen nem halmozódnak a nemlinearitás miatt.

A munka során kiderült, hogy érdemes a lineáris közelítés mátrixát úgy transzformálni, hogy egyensúlyi pontja egy minden elemében egységnyi vektor legyen. Ennek hasznossága a modell logaritmikus fogantatásából ered. Goodwin logaritmikus differenciálegyenletet posztulált. Az árak és a termelési intenzitások vektorának változását a Leontief-féle folyó- és tőke-ráfordítási mátrixokkal és magával e vektorral, tehát a gazdaság pillanatnyi helyzetével magyarázta. Korábbi tanulmányom megmutatta, hogy az eredeti logaritmikus egyenlet az egyensúlyi vektorok segítségével linearizálható. Ezzel egyszerűbb, nagy pontossággal számítható és elméletileg könnyen vizsgálható alakhoz jutunk. A modell

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{W}\mathbf{v} \quad (1)$$

alakban írható fel. Ez lineáris differenciálegyenlet, ahol tehát a \mathbf{W} mátrix elemei már függetlenek az árak és volumenek értékeitől, amelyek a ciklus folyamán jellegzetesen változnak. A \mathbf{v} változó és az eredeti árak és volumenek \mathbf{p} és \mathbf{x} változói között egyértelmű a kapcsolat.

Ezt a \mathbf{W} mátrixot tehát akkor nevezem hullámmátrixnak, ha az egységnyi árak és az egységnyi termelések pontja a fixpont. Mivel az árak és a menyniségek pozitívak, a megadott hasonlósági transzformáció (az egyensúlyi vektorból készített diagonális mátrixszal és ennek inverzével) mindig létezik. A hullámmátrix hozzásegít ahhoz, hogy az eredeti modell logaritmikus felállításának szellemében az egyensúlyi helyzet közelében ne kelljen különbséget tenni az abszolút és a relatív eltérés közt.

Tehát 5 vagy 6 fillérnyi, illetve 0.05 vagy 0.06 egységnyi eltérés helyett mondhatunk 5 vagy 6%-os eltérést. Így a hullámmátrix elemei a szokásos elaszticitási, rugalmassági megfontolásokkal értelmezhetők. A hullámmátrix ugyanis éppen a pontrugalmasságokat foglalja össze. Az i -edik sor k -adik oszlopában álló w_{ik} elem azt mutatja, hogy a rendszer mozgása folyamán a k -adik ár (vagy termelési intenzitás) 1%-os változása hány %-kal és milyen irányban változtatja meg az i -edik árat (vagy termelési intenzitást).

E W mátrix összeállítását a következőkben íróm le.

A hullámmátrix szerkesztése

Legyen adott a Leontief-féle rendszer A folyó- és B tőke-ráfördítési mátrixa. Akkor az árak p és a volumenek x egyensúlyi sajátvektorait

$$p' = p'A + \lambda p'B \quad (2)$$

és

$$x = Ax + \lambda Bx \quad (2^*)$$

alakban írhatjuk fel. Itt λ az egyensúlyi növekedés (az átlagprofit) rátája. Ha ismerjük a Leontief-féle inverzet, $Q = (1 - A)^{-1}$, akkor λ a QB mátrix legnagyobb sajátértékének reciproka.

Képezzük most a z egyensúlyi vektort a p és x vektorok összefűzéséből, tehát $z = [p, x]$. Tehát az egyensúlyi vektor első n elemét az árak, második n elemét a volumenek vektora adja meg. Azt a diagonális mátrixot, amelynek főátlójában ez a z vektor áll, Z betűvel jelölhetjük:

$$Z = \text{diag}\langle z \rangle. \quad (3)$$

A teljes rendszer folyó ráfordításainak ferdén szimmetrikus K mátrixa

$$K = \begin{pmatrix} 0 & A + \lambda B - 1 \\ 1 - A' - \lambda B' & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

alakú. Ez az egyensúlyi vektorral szorozva a (2) definíciós egyenlet alapján zérust ad:

$$Kz = 0.$$

Legyen az egységnyi termelésre jutó tőkefelhasználást tartalmazó és mindig szimmetrikus R mátrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B' & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

alakú. Ebből a teljes rendszer szintén szimmetrikus, változó elemeket tartalmazó, tehát nemlineáris S tőkelekötési mátrixa:

$$S = \text{diag}\langle Rz./z \rangle - R. \quad (6)$$

Itt a $./$ műveleti jel a megfelelő vektorok elemenkénti osztását jelenti.⁴ Az S mátrix az $U = \text{diag}\langle Rz \rangle$ jelöléssel az $S = UZ^{-1} - R$ alakban is írható és az

⁴Ez a tényleges (és változó) értékekhez való viszonyítás teszi nemlineárisá Goodwin modelljét. Ennek a hányadosnak a rögzítésével (tehát változásának elhanyagolásával) lehet a mátrixot lineárisá tenni.

egyensúlyi vektorral szorozva ez is zérust ad:

$$\mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{0} .$$

Az \mathbf{S} mátrix főátlójának, amellyel a tökelekötéseket kiegészítettük, az a feladata, hogy egyrészt az idő szerinti deriváltakat logaritmikusan deriváltakká változtassa, másrészt, hogy a profitot a lekötött tőkéhez, a túlkeresletet pedig az összes termékhez viszonyítsa. Goodwin logaritmikusan modelljében ez a főátló maga is változó, az árak és volumenek mindenkorinak értékének függvénye. A lineáris közelítés azt a megfigyelést használja fel, hogy a változó árakkal és volumenekkel kiszámított diagonális nem távolodik messze az egyensúlyi értékek adta hányadostól. A diagonális fix eleművé változtatása, rögzítése a megoldás pontosságát csak kis és elhanyagolható mértékben csökkenti. A lineáris közelítés modellje a $\mathbf{v} = [\mathbf{p}, \exp(-\lambda t)\mathbf{x}]$ vektorra felírva most az

$$\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{K}\mathbf{v} \quad (7)$$

alakot ölti. A valódi volumenek lineáris közelítéséhez úgy jutunk el, hogy a \mathbf{v} vektor volumen-elemeit évente \mathbf{x} értékének λ százalékával növeljük.

\mathbf{S} tehát szintén szinguláris mátrix, csak úgynevezett pszeudo-inverze létezik. \mathbf{K} szingularitása is az egyensúlyi vektorra áll fenn. Ebben az irányban a rendszer mozdulatlan. Ezért használhatjuk a pszeudo-inverzet, amely csak a zérustól különböző sajátértékek reciprokával számol. A zérus-altér ("nullspace") a számítás során elhanyagolható.

Ha a pszeudo-inverzrel szorzunk, majd a kapott mátrixot az egyensúlyi \mathbf{Z} diagonálmátrixszal úgy transzformáljuk, hogy az egyensúlyi pont a csupa egységből álló vektorba tevődjek át, akkor megkapjuk a hullámmátrixot.

$$\mathbf{W} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Z} . \quad (8)$$

Abból, hogy az összegező $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ vektor egyben a fixpont vektora, már következik, hogy a \mathbf{W} mátrix sorösszegei zérussal egyenlők. Sőt külön-külön az árakra és az intenzitásokra vonatkozó felsorok maguk is zérus összegűek.

Ha ugyanis minden ár egyenlően változik, akkor ez nem hathat a mennyiségekre, ha pedig minden mennyiség egyformán nő vagy csökken, akkor ez nem okozhat árváltozást. Az oszlopösszegek azonban általában nem egyenlőtűdnek ki. Egy-egy ár vagy termelési intenzitás növelésének tehát egészében pozitív vagy negatív hatása lehet, habár soha nem lehet minden szektorra pozitív vagy negatív az eredmény. A mátrix egyetlen oszlopának sem lehet csupa azonos, tehát egyező előjele, mert minden oszlop az eredeti egyensúlyi \mathbf{z} vektor négyzetével (tehát egy pozitív sorvektorral) szorozva zérust ad.⁵

⁵Mint az idézett tanulmányban megmutattam, a \mathbf{Z} vektor hossza konstans.

Egy gyakorlati hullámmátrix

Az alábbiakban bemutatom a U.S. 1958. évi folyó ráfordítási és tőkelekötési mátrixaiból készített hullámmátrix egy részletét. Ez az almátrix Hicks piaci mátrixának rokona, de nem a fogyasztás, hanem a termelés árrugalmasságait adja meg. Ezek tehát a **W** mátrix bal alsó negyedének elemei. Az adatok a fejrovatban megnevezett szektor 1%-os árváltozásának hatását mutatják az egyes sorokban szereplő (és az oldalrovatban megnevezett) szektorok termelésére, mégpedig ezrelékes értékben.

Az alapadatokat változatlanul vettem át a már idézett tanulmányból, a számítás eredményeit azonban ezrelékesre kerekítettem.

A táblázat adta értékek, a mátrixok pontatlansága és összevontsága miatt, mint erre a számításokkal kapcsolatban már kitértem, nem megbízhatók. Értékük és előjelük azonban logikus és elfogadható. A főátló nagy és pozitív, mert a termék árának "kedvező állása" a termelés növeléséhez vezet. A többi érték, mint az várható is, inkább negatív.

	A	K	G	É	E	Sz	H
Agrárium	49	-2	-2	-2	0	5	-47
Kitermelés	6	27	-1	-1	0	16	-47
Gépek	8	-2	17	-1	2	27	-51
Építkezés	0	-7	-13	99	-1	0	-77
Energia	6	0	0	-3	11	25	-39
Szolgáltatás	5	0	-2	-4	1	55	-56
Háztartás	-32	-2	-1	-1	-7	-78	121

1. tábla. Az USA 1958 évi hullámmátrixának harmadik kvadránsa

Érdekes és megfontolandóak a kivételek. A mezőgazdasági termékek és a szolgáltatások oszlopában csak a háztartás reakciója negatív, tehát e szektorok árainak emelkedése általában nem gátolja, hanem ösztönzi a többi szektor termelését is. A mátrix összeállítását követő évtizedekben éppen a szolgáltatások szektora növekedett a leggyorsabban. Ez vezette a gazdaság fejlődését az elmúlt évtizedekben, de a mezőgazdaság is jó eredményeket (és némi túltermelést) ért el. Csak a háztartás az az ágazat, amely minden áremelkedéstől szenved. A béremelkedés a maga részéről viszont minden más ágazat fejlődését lassítja. Figyelemreméltók az építési szektor adatai. Itt is csak a főátlóban található pozitív árrugalmasság, és ez meglehetősen magas. A többi elem mind igen kicsi és negatív. Végül pedig csak a háztartásoknak volt egységnyinél nagyobb árrugalmasságuk.

A hullámmátrix e kvadránsa pozitív szemidefinit. Van egyensúlyi vektora, tehát van zérus sajátértéke. A többi sajátérték pozitív, mert egy pozitív

szemidefinit mátrix pszeudo-inverzének és egy (a zérus egyensúlyi értéken kívül) szigorúan pozitív sajátértékekkel bíró Leontief-mátrixnak a szorzata. Párja a mátrix második kvadránsa, ez pedig negatív szemidefinit, mert a megfelelő Leontief-mátrixok az előbbieket transzponáltjainak negatívjai. Ez is logikus, mivel valamely termék "túltermelése" a termék árának eséséhez vezet. A főatlóban viszonylag nagy negatív értékek találhatók, a mátrix többi eleme kisebb és többnyire pozitív.

Mindezek az előjeleket és nagyságrendeket idősoros makroökonómiai elemzés is igazolhatja vagy cáfolhatja az adott időszakra vonatkozóan, mégpedig az input-output táblázatoktól független adatok segítségével.

Az elemek nagysága és jelentése

Az összefüggések jobb megértéséhez vizsgáljuk meg egy kicsi, csupán két szektoros gazdaság "laza" és "kooperatív" formáját. A rend kedvéért mindkét forma egyensúlyi vektora azonos lesz és egységnyi. Növekedésük is egyazon ütemű. A mozgás és belső "erőviszonyok" mégis különböznek az egyensúlyi helyzet közelében, mégpedig éppen a technikai összefüggések változása miatt. Két folyó ráfordítási mátrixot kombinálok ugyanazzal a tőkelekötési mátrixszal, amelyet úgy választottam meg, hogy a hullámmátrix első és harmadik kvadránsa zérus legyen. Az eltérés tehát csak a folyó ráfordítások terén mutatkozó munkamegosztásban van. Ha mátrixaink az alábbiak:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} .9 & 0 \\ 0 & .9 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & .9 \\ .9 & 0 \end{pmatrix},$$

míg a tőkemátrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix},$$

akkor a lazán csatolt 1. rendszer hullámmátrixa, ahol a szektorok csak saját terméküket fogyasztják és csak a tőkeszükséglet révén kerülnek egyáltalán összekötésbe

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -.0167 & .0167 \\ 0 & 0 & .0167 & -.0167 \\ .0167 & -.0167 & 0 & 0 \\ -.0167 & .0167 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az értékek kicsik és ennek megfelelően a rendszer igen hosszú, mintegy 188.5 éves ciklussal leng.

Viszont a két ágazat közt szoros kapcsolatot mutató, kooperáló, sőt csakis a másik ágazat termékére támaszkodó 2. rendszer hullámmátrixa

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -.3167 & .3167 \\ 0 & 0 & .3167 & -.3167 \\ .3167 & -.3167 & 0 & 0 \\ -.3167 & .3167 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Itt a szoros kapcsolat miatt sokkal rövidebb, mintegy 10 éves ciklus jön létre, hiszen a mátrix értékei közel 19-szer akkora. A W hullámmátrix elemeinek nagysága tehát, szabadon fogalmazva, a belső csatoltság mérőszámának tekinthető, előjelei a befolyásolás pozitív vagy negatív voltát jelzik. Az elemek nagysága fordítottan arányos a keltett ciklus hosszával.

Mindkét fenti mátrix igen egyszerű és az egyensúlyi (tehát 0 sajátértékhez tartozó) diádon kívül csak egyetlen diádot tartalmaz. Azt, amely a ciklust generálja. Egy n számú szektort tartalmazó rendszer hullámmátrixa $2n$ sort és $2n$ oszlopot tartalmaz, de csak $n - 1$ számú lengést hoz létre. Ez zavaró, különösen akkor, ha a lengéseket az egyes szektorokra jellemző termelési és forgalmi időkkel szeretnénk magyarázni, ami kézenfekvőnek tűnne. Kevesebb ciklus adódik így, mint ahány "jellemző" értékkel rendelkezünk.

Valamilyen viszonylag semleges szektort kellene keresni. Ne legyen külön lengése. Ha ezt egy összevont, egyszektoros növekedési modellhez társítjuk, akkor ez utóbbinak a lengési lehetőségét, ciklikus növekedését magyarázza meg. Mivel minden terméknek van termelési és forgalmi ideje, olyasvalamit kell keresni, aminek vagy egyik, vagy másik ideje hiányzik, vagy speciális, például végtelen vagy zérus.⁶

A boldogság kék madaráról

A fenti két gazdaság tehát még nem a kétszektoros modell legegyszerűbb alakja. Ennek megkeresése végett vegyük a Leontief modell skalárisra összevont formáját, a Harrod-Domar-féle növekedési modellt, és ezt egészítsük ki a lehető legegyszerűbb kétszektoros gazdasággá. A múlt századi mintegy 3 százalékos szekuláris növekedés körülbelül tíz százalékos megtakarítási rátával és átlagosan 3 évi tőkeigényességgel magyarázható. A legkisebb, de már működő (tehát regulárisnak nevezhető) modell két kiinduló mátrixa ezért a következő alakú lehet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & .9 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

⁶N.B. az egyensúlyi megoldás "ciklusának" hossza végtelen, formálisan $2\pi/0$. Ezért is tartozik hozzá zérus sajátérték.

Az \mathbf{A} mátrix nem kíván meg semmilyen újabb elemet a forma regularitásának biztosítása végett. A hullámmátrix kiszámításához ugyanis a $\mathbf{Q} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ Leontief-inverzét használjuk fel, s ez létezik és nemnegatív ebben a legegyszerűbb esetben is. De a rendszer esetleg reducibilissé válhat, működőképessége a tőkelekötési mátrix alakjától függ.

A \mathbf{QB} és $\mathbf{Q'B'}$ mátrix pozitív és egyértelmű sajátvektorának (a termelés és az árak egyensúlyi arányainak) létezése a β és γ értékek létezésén múlik. Tehát ilyen tőkelekötéseket kell feltételezni. Az α érték léte ugyan elégségesnek látszana, de igazában nem szükséges és nem is elégséges feltétel. Ha ugyanis a másik két érték zérus, akkor a rendszer reducibilis. Ebben az esetben azonban nincs egyértelmű gazdasági egyensúly.

A legegyszerűbb kiegészítés tehát az, amikor γ tőkebefektetéssel, de folyó költségek nélkül valamit létre lehet hozni, ami maga is tőke-jellegű, tehát maradandó értékű. Termelési ideje lehet nagyon rövid, akár zérus, forgalmi ideje mégis végtelen, mert végtelenül tartós. Nem lehet, és ne is lehessen elfogyasztani. A folyó termeléshez legfeljebb katalizátorként járuljon hozzá, mert nem szerepel a folyó ráfordítási mátrixban. Mégis legyen rá szükség tőkeként az addig "egyszektoros" termelés fenntartásához, mégpedig $\beta > 0$ mértékben.

Ez a furcsa termék talán maga a boldogság kék madara. Biztosan boldogító, mert költségmentes, szabadon létrehozható és gyorsítható tőkenövelést tesz lehetővé. Nem teljesen a semmiből hoz létre valamit, *ex nihilo nihil fit*, de olyan valamiből hozza létre, ami majdnem semmi: egy sajátos monopólium lehetősége. A létrehozott pénz aztán nem kopik és nem szorul megújításra.

Az így leírható tevékenység leginkább a papírpénz nyomtatásához hasonlít.⁷ Azt gondolhatnánk, hogyha e tevékenység szabad, akkor ebből minél több volna jó, akár végtelenül sok. A számítás és a gondosabb logika azonban arra mutat, hogy itt igen lényeges megszorítások szükségesek ahhoz, hogy a pokol ránk ne szabaduljon. Olyan szektort találtunk ugyanis, amelynek önérdeke a szokásosnál élesebben és könnyebben kerülhet ellentétbe a rendszer egészének érdekeivel. Az ellentét természetesen a többi termék esetében is fennáll, hiszen éppen ezt az ellentétet oldja ciklikus mozgássá a szabad verseny. Itt azonban a termelési és forgalmi folyamat eltérése miatt a kisiklás szinte szabállyá válik.

Vizsgáljuk meg ezt az egyszerű hullámmátrixot a két skalár függvényében. A bővített rendszer egyensúlyi növekedési rátája, bár az új szektor látszólag a tőke korlátlan növelésének lehetőségét teremti meg, mégis kisebb lesz az egyszektoros modell rátájánál. A tőkemátrix, \mathbf{B} , nagyobb lett a két elem ér-

⁷Ezt a gondolatot már felvettem a Ciklus és szabályozás (Budapest, 1980. KJK) papírpénzre vonatkozó fejezetében, de a kifejtés menete akkor a hullámmátrix fogalmának hiányában megszakadt.

tékével, ennek következtében **QB** legnagyobb sajátértéke, ami 3%-os átlagos növekedés mellett mintegy 30 körül van, most megnő és nagyobb lesz ennél. Ennek reciproka, az egyensúlyi növekedési ráta éppen ezért csökkenni fog.

A rendszer egészének tehát még a tisztán elektronikus jelekkel elvégzett ingyenes és elvont-elvi formájában teljesen automatizálható klíringforgalom esetében is elemi érdeke marad, hogy ez minél kevesebb tőke lekötésével járjon. Ez vonatkozik mind β , mind pedig γ nagyságára. Az első a termelő egységek folyószámláján készletben tartott pénz viszonylagos mennyiségét mutatja. A második a klíringet végző "pénzteremtő" szféra szükséges anyagi befektetéseit (épületeit, gépeit, automatizált eszközeit) fejezi ki. E két mennyiség egyébként mind matematikailag, mind gazdasági megfontolások alapján szimmetrikus, tehát csak szorzatok, $\beta\gamma$ a hatékony és számunkra fontos változó.⁸

Matematikailag az a transzformáció, amely az egyik elemet ugyanannyival osztja, mint a másikat szorozza, úgynevezett hasonlósági transzformáció, és nem változtatja sem **B** sem pedig **QB** sajátértékeit. Gazdaságilag pedig mennél több "tőke" van befektetve a pénzkészítés szektorába, tehát minél "értékesebb" egy adott névértékű pénzmennyiség "készlete", annál kevesebbet kell belőle tartalékolni az egyes ágazatokban, a fizetési forgalom adott szerkezete és forgalmi sebessége mellett.

Mennyi pénzre van hát szükség?

A pénz "hígítása" az újonnan kialakított szektor feltétlen érdeke, hiszen ezzel, ha nem is teremt új és valóságos tőkét, mégis gyakorlatilag elszívhatja a másik (illetve általában: az összes többi) termelő szektor tőkéjét.⁹ Ez pedig, különösen, ha nemzetközi méretekben történik, igen vészterhes következményekkel járhat.

Soros György, a pénzpiac magyarok közt is legismertebb szakembere az Atlantic Monthly 1997 februári számában közzétett nevezetes dolgozatában aggodalmát fejezte a pénzpiaci egyensúly súlytalansága, rebbenékenysége, bizonytalansága, közgazdasági műszóval volatilitása miatt. Úgy látja, hogy a piacoknak nincs valódi, csupán "reflexív" egyensúlyuk. Ezen azt érti, hogy a keresletről vagy kínálatról, az ár magasságáról vagy csekély voltáról kialakuló

⁸A **QB** mátrix legnagyobb sajátértéke $15 + \sqrt{900 + 40\beta\gamma}/2$, azaz a rendszer maximális növekedésének rátája $\lambda = 0.0\dot{6}/(1 + \sqrt{1 + 0.04\beta\gamma})$. Ez utóbbi kifejezés maximuma $1/30$, és ez csak $\beta\gamma = 0$ esetén következhet be.

⁹Ez a kérdés külön tárgyalást igényel, a "pénzügyi multiplikátor" szemrevételelét, amely a gazdaságba injektált új pénzeszközök útját, és csak átmenetileg élénkítő, de az elosztást mégis véglegesen módosító hatását írja le. E modell angol szövege most kerül sajtó alá.

vélemények, tehát a piac szereplőinek elvárásai és reményei túlságosan befolyásolják magukat ezeket az értékeket. Ez azt is jelenti, hogy a spekulációnak (vagyis a bizalomnak, illetve hiányának) itt a többi piacnál lényegesen nagyobb, sőt döntő a szerepe. Valóban bizonyos pénzüpiacok könnyen pánikba esnek, mintegy a tömegpszichózis áldozataivá válnak. A tapasztalat azt mutatja, hogy még a legszolidabb, legpatinásabb bank iránti bizalom is megtörhető.

Ezek a jelenségek abból származnak, hogy a papírpénznek valóban nincs a gazdasági élet egészétől független és önálló értéke, mint ahogyan azt régebben az arany pénz, vagy aranyra átváltható pénz esetében véltük. Az a tétel, hogy a papírpénz csak meghatározott mennyiségű arany pénzt helyettesít, ma már nem ad módot arra, hogy ezt a mennyiséget gyakorlatilag megmérjük. Az arany tényleges ára egyre jobban eltér a pénzlábtól. Amennyiben a kegyes szokás még egyáltalán fenntartja az adott nemzeti fizetőeszköz ilyen hagyományos meghatározását, akkor sem lehet azt komolyan venni. A papírpénznek csak nemzeti monopóliuma ad vásárlóerőt, és ez az erő változó és bizonytalan. Mindenütt inflálódik és egy adott ország pénzének mennyiségét ma már nem csak a kormány vagy a központi bank befolyásolhatja. Nem tudja kiküszöbölni a külföldi pénzek forgalmát. A belső piac már nem szigetelhető el más országok pénzétől. Ez egyébként a múltban is több bajjal, mint haszonnal járt.¹⁰

Ma minden egyes bankügylet a bizalmon alapul. Az az árucikk, amivel a bank kereskedik, tulajdonképpen nem is a pénz, hanem maga a bizalom, a *goodwill*. Mind a bankban elhelyezett betét, mind pedig a banktól kapott hitelnek ez a végső alapja. A pénzügyi krízis idején azonban újra és újra kiderül, hogy még a legszolidabb bank is csak a pilótajáték sajátos formáját űzi. A bankár, és így a betevők jövedelme is csak akkor jöhet létre, ha egyre újabb betétek keletkeznek. Pontosabban szólva, bármekkora is a bank által kiaknázott kamatrés, a nyereséget a bizalom csökkenése hamar eltüntetheti. Ha ez a lanyhulás (például a romló üzletmenet miatt) tartós, akkor a bank fizetéseképtelensége nem kerülhető el, hacsak más bankok, vagy a bankrendszer, illetve a kormány nem áll a bank mögé. Mindez a leggondosabb előírások és szabályozás mellett is olyan körkörös likviditási válsághoz vezethet, ami még a nagy nemzeti bankokat is tönkretetheti.

Itt a nagyságrendek a következők. A bankok a jelenlegi szabályozás szerint saját tőkéjük mintegy tízszeresét hitelezhetik ki, ha ehhez elég pénzt, azaz elég sok és megfelelő időtartamú betétet tudtak szerezni. A banktőke profitja ma azonban legfeljebb tíz százalék,¹¹ ami a teljes hitelre számítva

¹⁰Mint szigetország, Japán még ma is közel áll ehhez az állapothoz. A yen alacsony belföldi vásárlóerejének és magas külföldi árfolyamának diszparitása azonban túl sok fejfájást okoz mindkét piacon, semhogy mai mértéke sokáig fenntartható maradjon.

¹¹Itt most reálprofitról, tehát a pénz inflációs rátájának levonása után megmaradó

magyságrendileg 1 százalékot tesz ki. Ezzel már túlbecsültük a pénztőke értékesülését, mert az átlagos profit rátája évszázadunkban nem lehetett magasabb a növekedés átlagos rátájánál, évi 3 százaléknál. Ez a 3 százalék olyan átlagos ráta, amit még a monopolizált területek rátái sem haladhatnak meg tartósan és jelentősen. A pénztőke értékesülési rátája pedig éppen azt jelzi, vagy legalábbis azt kellene jeleznie, hogy mennyi többletre lehet szert tenni a pénz birtokában. A gazdaság átlagában — nem pedig a kivételes esetekben.¹² Amikor az értékesülés rátája ennél magasabban áll, akkor a pénztőke áradata a pénzpiac felé fordul és ez a termelés és a kereskedelem területén a pénztőke viszonylagos apályát hozza magával. Ez a helyzet azonban éppen ezért csak átmeneti lehet — még ha az "átmenet" ideje esetleg évtizedeket jelent is.

Ha ezek az arányok mérvadóak, akkor még a tíz százalékos, tehát az egyensúlyinál vagy átlagosnál háromszorta nagyobb profit is, ha azt a betétállomány egészének forgalma után számítjuk, csak 1 százalékos kamatrést jelent. Az ilyen, viszonylag csekély különbözetet a pénz keresletének és kínálatának enyhe lengése is elfújhatja vagy megtöbbszörözheti. A banküzemtan a nagy számok törvényén nyugszik, a tömegesen végzett műveletek tömegén, a kialakuló átlagokon. Egymástól korántsem független valószínűségi változók különbsége, illetve ilyen különbségek hányadosa határozza meg minden egyes bank eredményét. Az ilyen változókról tudjuk, hogy roppant érzékenyek, könnyen tótágast állhatnak. A banküzem lényegéhez tartozik tehát a nagyfokú volatilitás, a hirtelen és aránytalan reakciók gyakorisága, még akkor is, amikor a szakma kedvező és jól tervezhető körülmények közt működik. Soros György figyelmeztetését komolyan kell venni. A bankszakma rendbetétele ma csak magától e szakmától eredhet, mert kivételes helyzetben van. Ha visszaél vele (és Soros György éppen ennek jeleit sorolja fel), akkor nagy kárt okoz. Mégpedig anélkül, hogy ebből végső soron valóban hasznot is húzna.

Más azonban az egyensúlyi helyzet bizonytalanságát belátni és más magát az egyensúly elméleti lehetőségét tagadni. A piacok bizonytalanságát és a papírpénz értékállóságának különleges törekenységét elismerve itt mégis azt állítom, hogy elméletileg létezik az egyensúlyi állapot. Tehát, bár β és γ értéke külön-külön tekintve egyaránt bizonytalan, de szorzatuk valószínűleg meglehetősen állandónak mutatkozna, ha meg tudnánk mérni. A pénzügyek terén foglalkoztatott tőke nagysága, a szükséges pénz mennyisége e téren is

valóságos profitról van szó.

¹²Ha valamely különös terület monopóliuma révén az átlagosnál nagyobb profitra tesz szert, ez addig tartható fenn, amíg többletjövedelme az egész gazdaság birtokosává nem teszi. Ezután profitja maga az átlagprofit. Tehát vagy a többi terület profitja volt már eredetileg is átlag alatti, vagy most az ő profitja süllyed az átlag színvonalára. Elfogadva, hogy az átlagprofitra kialakulására vezető tendencia soha nem éri el végcélját (hiszen éppen ez a 200 éves ciklus kialakulásának lényegi mozgatórugója), mégis helyes az "egyensúly" fogalmán valóban a (gyakorlatilag nem létező, de feltételezhető) egyensúlyi helyzetet érteni.

olyan szilárdságú technikai együttthatókhöz vezet, mint az egyéb termelő és szolgáltató ágakban. Mint ott, úgy itt is megváltozhatnak az együttthatók, és a technika fejlődésével meg is változnak. Mégis a gazdaság ismerten "gyors" változóival, az árakkal és volumenekkel szemben ezek "lassú" változók, mert viszonylag lassabban változnak.

Az egyensúly létezésének eszméje tehát csupán azt jelenti, sem többet, sem kevesebbet, hogy a gyakorlatban jobban tudunk tájékozódni, ha a gyors változókat visszavezetjük a jobban megismerhető lassú változókra. Ehhez csak két dolog kell. Az egyik, hogy ezt logikailag egyértelmű módon lehessen megtenni és éppen erre a célra szolgálnak a modellek. A másik az, hogy ezek a lassú változók valóban létezzenek. Ez utóbbi kérdést hosszabb ideje vizsgálja az Input-Output elmélet irodalma. Lényegében megnyugtató eredményekhez jutott a termelés és a csere területén. A pénzügyi változók ilyen ráfordítási együttthatóit azonban részletesebben még nem vizsgálta, holott erre nagy szükség volna.

Milyen hosszú a hosszú ciklus

Az egyensúlyi megoldást, még ha létezését el is fogadjuk, a fenti vizsgálat szerint egy igen hosszú, mintegy 200 éves ciklus tartja karban. Az ilyen helyzetet persze nem lehet igazán rendnek tartani. Azt a nézetet viszont, hogy a tőzsdei brókerek "azonnali" reakciója állandó egyensúlyt biztosít, alapvetően tévesnek tartom.¹³ Ez a nézet összecseréli a ciklus idejét megszabó időtartamokat egyetlen szabályozási reakció idejével. Ha egy késleltetett $\Delta^2 x = -x$ (differencia)egyenletet helyett az azonnal reagáló $\dot{x} = -x$ (differenciál)egyenletet tekintjük, ennek mozgása hasonlít az előbbihez.

Amíg a pénz forgalomban lévő mennyisége kisebb, mint az ország beruházott vagyona, a ciklus hossza (a fenti értékek alapján) meglehetősen stabilan 188 és 189 év közt marad, és a pénzmennyiség növekedtével csak igen lassan kezd maga is növekedni.¹⁴ Ha viszont realitásra törekszünk, és a második szektor adatait a valóságos bankokról rendelkezésre álló statisztikából töltjük ki, akkor a helyzet már alapvetően megváltozik. Ugyanis ekkor a folyó ráfordítások mátrixában is megjelennek adatok: a vállalatok által a kölcsönök után fizetett kamatok, a bankok üzemviteli és kamatköltségei és így tovább.

Azt tapasztaljuk, hogy a realisabban megalkotott és kitöltött kétszektoros

¹³Igen részletesen és nagy apparátussal fejt ki ezt például A. Burgstaller: *Property and Prices* című kötete (Cambridge, 1994, Cambridge University Press). Ez a monetarizmus ár és értékelméletét a tulajdonból és a tulajdon tőzsdei értékeléséből vezeti le.

¹⁴A 200 évet az adott szekuláris növekedési ráta esetén csak akkor éri el, amikor a $\beta\gamma$ szorzat értéke meghaladja a 67-et (tehát ha a bankszektorban lekötött tőke meghaladja a teljes termelés 67-szeresét).

modell jóval rövidebb ciklusidőkhöz vezet. Mint ahogy már láttuk, az összefonódás növekedtével, a szorosabb szerveződéssel a ciklus hossza csökken. A bankszektor tekintetében 10 év a ciklus gyakorlati alsó határa. Ettől persze létezhetnek ennél rövidebb ciklusok, de még évi szezonálisok is. Ezek tükröződni fognak a bankok forgalmában, a pénz értékének és a kamatok nagyságának mozgásában. De ez a mozgás máshonnan ered. Maguk a pénzügyi kapcsolatok aligha hozhatnak létre tíz évnél rövidebb ciklusokat, s ha mégis ilyeneket észlelünk, akkor azok nem innen erednek.

Ez a megfontolás azonban elhalványítja a kétszáz éves ciklus létezését és még inkább fontosságát, hatásának valószínűségét. Továbbra is hasznos elméleti konstrukciónak bizonyulhat, de gyakorlati számítására csak akkor kerülhet sor, ha a modellben szigorúan elválasztjuk az új pénz teremtését a meglévő pénz forgalmazásától. Ekkor azonban a pénzügyi szektorok számát legalább kettőre kell növelni.¹⁵ Ez felel meg annak a követelménynek, hogy a pénz tekintetében legalább két árat és két volument illene meghatározni. Először is magának a pénznek van ára, azaz vásárlóereje és van volumene, azaz mennyisége. Másodsor, és ugyanakkor a hiteleknek is van áruk, azaz kamatuk és mennyiségük is. Ezt a négy nagyságot semmiképpen nem lehet egyetlen szektorral megragadni.

A pénzügyek ilyen kettéhasítása nem az én igyekezetem terméke, annak érdekében, hogy a hosszú ciklus gondolati modelljét megteremtsem. A javaslat maga sokkal régebbi és már a hetvenes és nyolcvanas években felmerült az "új pénzügyi gazdaságtan" irodalmában:

"Általában ('most generally') az új pénzügygazdaságtan a pénzügyi szolgáltatások és a pénzzel való ellátás közti megkülönböztetést hangsúlyozza. Különösen ('more specifically') nem kell egyetlen, pénznek nevezett vagyontárgyban egyesíteni a pénznek azt a két funkcióját, hogy az elszámolások és a csere közege."¹⁶

A hosszú ciklus hossza így (a gazdaságilag értelmes és értelmezhető nagyságrendek mellett) tehát közel konstansnak és valamivel talán 200 év alattinak adódik. Maga a ciklus gondolata pedig még akkor is segít abban, hogy a pénzügyeket, a pénz teremtését és forgalmazását helyesen, vagy legalábbis az eddiginél helyesebben szerepeltessük az Input-Output táblázatokban, ha egyébként a hosszú ciklus köztvetlen nyomait nehezen, vagy sehol sem fogjuk megtalálni a pénzügyi statisztikában.

¹⁵A munkamegosztás a termelésben és a pénzügyekben is a specializálódás felé halad. Az input-output elemzés hatékonyságát növeli, ha nem von össze egyetlen szektorba minden pénzzel kapcsolatos tevékenységet, a szerencsejátéktól az életbiztosításig.

¹⁶T. Cowen - R. Kroszner: Empirical Predictions of the New Monetary Economics: Perspectives on Velocity. Journal of Policy Modeling. Vol. 12. Number 3. Summer 1990. North Holland. 265-280 o.

Irodalom

1. Bródy András: *Ciklus és szabályozás*, Budapest, KJKK, 1960.
2. Bródy András: *Ciklus és egyensúly*. *Közgazdasági Szemle*, 1987. 9. sz.
3. A. Burgstaller: *Property and Prices*. Cambridge, 1994, Cambridge University Press.
4. T. Coven – R. Kroszner: *Empirical Predictions of the New Monetary Economics*. *Journal of Policy Modeling*. Vol. 12. No. 3. Summer 1990.
5. R. M. Goodwin: *Swinging Along the Autostrada: Cyclical Fluctuations along the von Neumann Ray*, = M. Dore – S. Chakravarty – R. Goodwin (szerk): *John von Neumann and Modern Economics*. Oxford, 1986. Clarendon Press. 125–140. o.
6. R. M. Goodwin – L. Landesman – R. Stehrer: *Structural Economic Dynamics: Catching up and the Global Deflationary Bias*. = A. Simonovits – A. E. Steenge (szerk): *Prices, Growth and Cycles. Essays in Honour of András Bródy*. London, 1996. Macmillan. 161–183. o.
7. G. Soros: *The Capitalist Threat*, *Atlantic Monthly*, 1987. February.

CYCLES AND MONEY. THE STRUCTURE OF A SIMPLE WAVE-MATRIX

The trajectory of the logarithmic model of the long swing based on the theories of Hawtrey, Keynes and Goodwin may be approximated by a linear system of differential equations. The solution can be readily computed with the aid of the matrix-model of Leontief, used habitually for analyzing and forecasting economic growth in the short run. The matrix of the dynamic model, a "wave-matrix", relying on data published already for almost every country, has interesting and peculiar features. It may also include additional sectors for producing, distributing and circulating money. It then offers a better picture of money-flows within the framework of Input-Output Analysis.

DINAMIKUS PANELMODELLEK BECSLŐ- FÜGGVÉNYEINEK ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE¹

MARK N. HARRIS – MÁTYÁS LÁSZLÓ

Melbourne-i Egyetem – BKE és Párizs XII. Egyetem

Napjainkban egyre nyilvánvalóbbá válik, amint ezt a témában írott tanulmányok bősége is mutatja, hogy a dinamikus panelmodellek becslése az ökonometriai kutatások egyik legfontosabb területe. Közismert, hogy a panelmodellek szokásos becslési eljárásai dinamikus esetben inkonzisztensek. Az irodalom persze számos konzisztens becslőfüggvényt javasol. Ebben a tanulmányban két új becslőfüggvényt ajánlunk (egyét a rögzített-, egyet a véletlen hatású specifikációra), és ezek kismintás tulajdonságait hasonlítjuk össze az összes már létező becslőfüggvényével. Reméljük, hogy e kísérletek eredményei segítséget nyújtanak az alkalmazott kutatók számára a legelőnyösebb becslőfüggvény(ek) kiválasztásában. Végül, az összes becslőfüggvény pontbecsléseinek eltéréseit illusztrálándó, bemutatunk egy alkalmazást, mely az ausztráliai Melbourne vonzáskörzetének mosószerre vonatkozó fogyasztói keresletét vizsgálja.

1. Bevezetés

Az elmúlt években lényegesen bővült az elérhető paneladatok köre, ugyanakkor nagy fejlődést tapasztalhattunk azokban az eszközökben is, melyek az alkalmazott kutatók rendelkezésére állnak. Mindezek következtében a panelmodellek ökonometriája az utóbbi időben nagyon népszerűvé vált. Mi több, a gazdasági változókat részleges egyensúlyi helyzetbe hozó eljárások egyes formáival foglalkozó gazdasági elméletek mérhetetlenül hosszú sorából adódóan is egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy nagy figyelmet kell szentelni a dinamikus panelmodellek becslésének. Ezek olyan panelmodellek, melyek magyarázó változó(k)ként az endogén változó(k) késleltetett értékét (értékeit)

¹A becslőfüggvény (estimator) az itt vizsgált esetekben gyakran nem fejezhető ki zárt alakban, ám ez nem változtat lényegén, nevezetesen azon, hogy hozzárendelési szabályt, függvényt jelent. Ezt a továbbiakban a becslőfüggvény értelmezésénél célszerű mindig szem előtt tartani.

A szerzők köszönetet mondanak Ritchard Longmire-nak és Kónya Lászlónak a kutatáshoz nyújtott segítségért. Az eredetileg angol nyelven írt cikket Töröcsik Timea, a BKE IV. évf. hallgatója fordította magyarra.

is tartalmazzák. Ez a téma sok újkeletű elméleti és szimulációs tanulmány központi kérdésévé vált (lásd például Arellano és Bond [1991], Arellano és Bover [1993], Kiviet [1994], Ahn és Schmidt [1993, 1995], és Crépon és mások [1996] munkáit).

A paneladatokat általában meg nem figyelt egyedenkénti (és esetleg időbeli) heterogenitás jellemzi. Ezen heterogenitás formalizálására a két leggyakrabban használt modellspecifikáció a *rögzített-* és a *véletlen* hatású modell. Míg az utóbbi feltételezi, hogy az egyedhatások egy meghatározott eloszlás realizációi, az előbbi rögzített paraméterként tekinti ezeket. Sok a vita az irodalomban arról, hogy melyik az „előnyösebb” specifikáció (lásd például Mundlak [1978a, b] és Hsiao [1985, 1986]), mi azonban ebben a tanulmányban mindkét specifikáció becslőfüggvényeit vizsgálni fogjuk.

A dinamikus panelmodellek becslése a heterogenitás specifikációjától függetlenül sem könnyű. A rögzített hatású specifikációnál a probléma abban jelentkezik, hogy a panel adatbázisokat általában viszonylag rövid idősorok alkotják. Így a rögzített hatású dinamikus modell legkisebb négyzetek módszerével (*OLS*) való becslését a szokásos Hurwitz típusú torzítás jellemzi (Nickell [1981]). A véletlen hatású specifikációnál a becslt kovariancia mátrixot felhasználó (megvalósítható) általánosított legkisebb négyzetek módszer — (*F*)*GLS* — az egyenlet reziduumaival és a késleltetett függő változó közötti korreláció következtében (Sevestre és Trognon [1985]) szintén torzított.

Mindkét specifikációra találhatók azonban konzisztens becslőfüggvények. Ezek a becslőfüggvények többnyire az instrumentális változó (*IV*) alakját öltik. Az *IV* becslések tartalmazznak bizonyos ortogonalitási feltételeket, elsősorban olyanokat, melyek kimondják, hogy az „instrumentumok” az egyenlet hibatagjaival aszimptotikusan korrelálatlanok. Az ilyen ortogonalitási feltételek szélesebb körének alkalmazása a Momentumok Általánosított Módszerével (*GMM*) készített becslések területére vezet. A *GMM* becslések esetén az érdeklődés éppen az ilyen feltételek maximális (és optimális) számának meghatározása felé fordul (Ahn és Schmidt [1993, 1995] és Crépon és mások [1996]).

Ennek a cikknek az elsődleges célja a meglévő *IV/GMM* becslőfüggvények kismintás tulajdonságainak összehasonlítása. Emellett két új becslőfüggvényt is ajánlunk, (egyet a rögzített-, egyet pedig a véletlen hatású specifikációra), és összehasonlítjuk ezek kismintás tulajdonságait a már meglévő becslőfüggvényekével. Ezen eredmények ismeretében az alkalmazott kutató joggal bízhat abban, hogy a saját adatainak legjobban megfelelő becslőfüggvényt használja.

A tanulmány felépítése a következő: a 2. és 3. fejezet a modellspecifikációval, a dinamikus rögzített- és véletlen hatású modellek „hagyományos” és (szemi-)konzisztens becslőfüggvényeivel foglalkozik. A 4. fejezet ismerteti a szimulációs kísérleteket, és elemzi a kapott eredményeket. A becslések közötti

különbségeket egy példán, a mosószer- vásárlásra készített modell becslésain keresztül (a Roy Morgan Research Centre's Consumer Panel of Australia által a Melbourne vonzáskörzetében realizálódott fogyasztói vásárlásokat tartalmazó adatok felhasználásával) az 5. fejezet illusztrálja. Végül a 6. fejezet néhány összefoglaló következtetést tartalmaz.

2. A rögzített hatású dinamikus panelmodell

2.1 A modell

Tételezzük fel, hogy az y_{it} eredményváltozó lineáris függvénye a változó saját előző időszaki realizációjának, az egyidejű egyedi jellemzőnek és x_{it} -nek, ismeretlen δ és β paraméterekkel. Így azt írhatjuk, hogy

$$y_{it} = \alpha_i + \delta y_{it-1} + \underline{x}'_{it} \underline{\beta} + u_{it}, \quad (1)$$

ahol az α_i -k az *egyedhatások* (állandók minden i -re), és u_{it} a szokásos fehér zaj hibatagok. Vagy mátrix alakban:

$$\underline{y} = D\underline{\alpha} + \delta \underline{y}_{-1} + X\underline{\beta} + \underline{u}, \quad (2)$$

ahol $D = I_N \otimes \underline{L}_T$ és \underline{L}_T a $T \times 1$ -es egységvektor.

Az (1) és (2) egyenlet becslése szokásosan (azaz amikor nincs késleltetett változó (LDV)), közvetlenül *OLS* becsléssel történik (Least Squares Dummy Variable Estimator – LSDV), ami a jól ismert *Within* becslőfüggvényhez vezet. Általában feltesszük (lásd pl. Balestra [1992]), hogy

HF1: az x változók nem sztochasztikusak és az u_{it} hibatagokkal korrelálatlanok;

HF2: a hibatagok várható értéke nulla;

HF3: a hibatagok autokorreláció mentesek;

HF4: az egyedhatások időben állandók.

Mivel a paneladatokat jellemző módon rövid idősorok alkotják, ezért a gyakorlati alkalmazások szempontjából az $N \rightarrow \infty$ és T véges, szemi-aszimptotikus eset vizsgálata a fontos. Az (1) – (2) dinamikus modellek esetén az *OLS* és a *Within* becslőfüggvények, sajnos, szemi-inkonzisztensek, így olyan módszereket kell keresni, amelyek véges T esetében is konzisztenciát biztosítanak. (A probléma elméleti megközelítésére lásd Nickell [1981] és Sevestre és Trognon [1985], szimuláción alapuló vizsgálatára pedig Nerlove [1967, 1971] tanulmányait.)

2.2 Az instrumentális változók (IV) módszere

A *Balestra-Nerlove* becslőfüggvény ($BN^{(1)}$). Balestra és Nerlove [1966] megmutatta, hogy véletlen hatású autoregresszív modellben, ha instrumentumok gyanánt késleltetett exogén változókat használunk, a paraméterek konzisztens becslőfüggvényéhez juthatunk. Ez a módszer rögzített hatású specifikációkra alkalmazható (lásd pl. Sevestre és Trognon [1992]). A δ , $\underline{\alpha}$ és $\underline{\beta}$ IV becslőfüggvényei a (2) modell alábbi transzformációjával kaphatók:

$$Z'\underline{y} = Z'\tilde{X}_{1D}\underline{\gamma}_D + Z'\underline{u}, \quad (3)$$

ahol $\tilde{X}_D = (\underline{y}_{-1} : X : D)$, $\underline{\gamma}_D = (\delta : \underline{\beta}' : \underline{\alpha}')'$ és $Z = (X_{-1} : X : D)$.

Amint ezek az összefüggések megvannak, a BN becslőfüggvény megkapható, ha (3)-ra a GLS -t alkalmazzuk úgy, hogy a transzformált modell hibatagjának, $Z'\underline{u}$ -nak kovariancia mátrixaként a $\sigma_u^2 Z(Z'Z)^{-1}Z'$ kifejezést használjuk.

Az állandó hatású specifikáció további becslőfüggvényei az első differenciák felhasználásával készülnek:

$$\Delta\underline{y} = \Delta\tilde{X}\underline{\gamma} + \Delta\underline{u}, \quad (4)$$

ahol $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{it-1}$ (és így tovább), $\Delta\tilde{X} = (\Delta\underline{y}_{-1} : \Delta X)$ és $\underline{\gamma} = (\delta : \underline{\beta}')'$. Ez az eljárás kedvelt, mivel több ortogonalitási feltételt tartalmaz, azaz felhasználja HF1-HF4-t (lásd később), és az eljárás HF4 által kiküszöböli az egyedhatásokat. Mindamellett az első differenciák alkalmazása maga is okoz problémákat. Először is a most transzformált modell OLS becslőfüggvénye még mindig nem konzisztens, mert a $\Delta\underline{y}_{-1}$ késleltetett endogén változó korrelált a modell maradékvektorával, $\Delta\underline{u}$ -val. Másodsor, ha az eredeti u_{it} hibák „jól viselkednek” (azaz teljesítik HF2-t és HF3-t), akkor a transzformált Δu_{it} első rendű mozgó átlagolású folyamatot (MA[1]) fog követni (lásd később).

Az *Anderson-Hsiao* (AH) és *Arellano* (AR) becslőfüggvény. Anderson és Hsiao [1982] a (4) IV becslőfüggvényében mind y_{it-2} -t, mind Δy_{it-2} -t ajánlja Δy_{it-1} megfelelő instrumentumaiként. Mindazonáltal néhány esetben az utóbbi nem eredményez eléggé hatásos becslőfüggvényt, ezért y_{it-2} a megfelelőbb instrumentum (Arellano [1988]). Emellett $\Delta y_{it-2} = y_{it-2} - y_{it-3}$ instrumentumként való használata a becslési célok érdekében szükségessé teszi a vizsgált időperiódus rövidítését (szemben y_{it-2} használatával). Ez pedig a már amúgy is „rövid” idősor további megnyírbalását jelentheti. Ezek szerint

az instrumentumokat a következőképp definiáljuk:

$$\begin{aligned} Z_{it}^{AR} &= (y_{it-2} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}), \\ Z_{it}^{AH} &= (y_{it-2} - y_{it-3} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Az egyszerű AH és AR módszer a transzformált

$$Z' = \Delta \underline{y} = Z' \Delta \tilde{X} \underline{\gamma} + Z' \Delta \underline{u} \quad (6)$$

modell OLS-sel történő becslésével kapható meg. Ha az instrumentális változók száma megegyezik a magyarázó változók számával, akkor az eredményül kapott becslőfüggvénynek —általában— nem lesznek véges momentumai (Kinal [1980]). Ekkor az AH és AR becslőfüggvények kismintás tulajdonságai kiegészítő instrumentális változók, például ΔX_{-1} bevezetésével javíthatók. A kiterjesztett instrumentumhalmaz a következő:

$$\begin{aligned} Z_{it}^{AHt^+} &= (y_{it-2} : \underline{x}'_{it-1} - \underline{x}'_{it-2} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}), \\ Z_{it}^{AH^+} &= (y_{it-2} - y_{it-3} : \underline{x}'_{it-1} - \underline{x}'_{it-2} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Mivel az instrumentumok száma meghaladja az exogén magyarázó változókét, (6) GLS-sel becsülhető, ha a transzformált hibatagjainak kovariancia mátrixaként $Z' \Omega_{\Delta} Z$ -t használjuk. Jegyezzük meg, hogy az első differencia képzés miatt $\text{Var}(\Delta \underline{u}) = \sigma_u^2 \Omega_{\Delta}$ és

$$\Omega_{\Delta} = I_N \otimes \Sigma_{\Delta} = I_N \otimes \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

A Sevestre-Trognon ($ST^{(b)}$ és $ST^{(c)}$) becslőfüggvények. Sevestre és Trognon [1992] szintén (5) használatát javasolták, de úgy, hogy az instrumentumok alkalmazása előtt a $\Omega_{\Delta}^{1/2}$ -del való szorzással a modellt skalár kovariancia mátrixú modellé alakítják. A transzformáció után is fennáll azonban a korreláció a késleltetett endogén változó és a transzformált hibatagok között. Mi több, mivel (5) balról való szorzása olyan maradékokhoz vezet, melyek az u_{it} -k lineáris kombinációi, $\Omega_{\Delta}^{1/2} \Delta \underline{y}_{-1}$ egyedüli érvényes instrumentumai mind $\Omega_{\Delta}^{1/2} \Delta X$, mind ΔX folyó és késleltetett értékei lesznek.²

²Lásd a 10. oldalon található b) és c) módszereket

Habár ezek a becslőfüggvények hatásosabbak lesznek azoknál, amelyek *ugyanazeket az instrumentumokat használják* a nem transzformált modellben (Sevestre és Trognon [1992] és White [1984]), például az Anderson-Hsiao becslőfüggvénnyel való közvetlen összehasonlításuk nem célszerű, mivel különböző instrumentumokat alkalmaznak.

Az *Arellano-Bond egy lépéses IV (AB) becslőfüggvény*. Ha az idősróról feltesz-
szük, hogy $t = 0$ -nál kezdődik, a Δy_{it-1} változót csak $t \geq 2$ -re definiálhatjuk. $t = 2$ -re Δy_{it-1} egyetlen érvényes instrumentális változója y_{i0} (ne feledjük, hogy $t = 2$ -nél $\Delta u_{it} = u_{i2} - u_{i1}$, ami ezért y_{i0} -tól független). $t = 3$ -ra azonban érvényes instrumentumainak köre kibővül y_{i1} -gyel. Ez a trianguláris kiterjesztés folytatódik az egymást követő periódusokban, meghatározva ezáltal az instrumentális változók egész körét, pl. $t = 4$ -re:

$$Z_i^{AB} = (Z_i^* : \Delta X_i) = \begin{pmatrix} y_{i0} & & & & 0 & \underline{x}'_{i2} - \underline{x}'_{i1} \\ & y_{i0} & y_{i1} & & 0 & \underline{x}'_{i3} - \underline{x}'_{i2} \\ & & & & 0 & \underline{x}'_{i4} - \underline{x}'_{i3} \\ 0 & & & y_{i0} & y_{i1} & y_{i2} & \underline{x}'_{i3} - \underline{x}'_{i2} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Továbbmenve, ha felteszük, hogy az x -ek szigorúan exogének (HF1), akkor ezek minden időegyenletnek valódi instrumentális változói lesznek, és az instrumentumok köre tovább bővül:

$$Z_i^{*+} = \begin{pmatrix} y_{i0} \underline{x}'_{i0} \cdots \underline{x}'_{i1} & & & & 0 \\ & y_{i0} & y_{i1} & \underline{x}'_{i0} \cdots \underline{x}'_{i1} & \\ 0 & & & & y_{i0} & y_{i1} & y_{i2} & \underline{x}'_{i0} \cdots \underline{x}'_{i1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$Z_i^{AB+} = (Z_i^{*+} : \Delta X_i).$$

Az instrumentumok mátrixait minden egyedre $Z = (Z'_i : \dots : Z'_N)'$ -ben összegyűjtve, az Arellano és Bond [1991] becslőfüggvények a (6) transzformált modellre alkalmazott GLS típusú becslőfüggvényként kaphatók.

Az instrumentumként a függő változó késleltetett értékeit használó IV becslőfüggvények közül az AB becslőfüggvény szemi-aszimptotikusan a leg-
hatásosabb (Sevestre és Trognon [1992]), de a GMM becslőfüggvények körében ezeknél hatásosabbak is levezethetők (lásd később). Mindkét AB becslőfüggvény számításánál felmerülhetnek azonban problémák, melyeknek okai: az instrumentális mátrix mérete (különösen T növekedésével), két időszaknyi veszteség, valamint az, hogy a (9) és (10) típusú mátrixokat a standard ökonometriai programcsomagokkal nehéz kezelni.

A *Balestra-Nerlove féle első differencia becslőfüggvény* ($BN^{(1)}$). A Balestra-Nerlove becslőfüggvény szintén alkalmazható az első differenciákra felírt modellben, ahol Δy_{-1} instrumentális változói egyszerűen a ΔX_{-1} -ek. A teljes

instrumentumhalmaz a következő:

$$Z = (\Delta X_{-1} : \Delta X), \quad (11)$$

ami abban különbözik a korábban már ismertetett ST becslőfüggvényektől, hogy (6)-ra közvetlenül GLS becslést alkalmazunk.

Az első differenciákra felírt modell kétlépéses IV becslőfüggvényei. White [1984] nyomán a HF2 és HF3 feltételek enyhíthetők, és a $Z'\Omega_{\Delta}Z$ mátrix, mely több fenti becslőfüggvényhez szükséges, konzisztens módon becsülhető a következő módon:

$$\hat{\Omega}_{\Delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' \Delta \hat{u}_i \Delta \hat{u}_i' Z_i, \quad (12)$$

mivel, független egyedeket feltételezve, az Ω_{Δ} kovariancia mátrix blokk-diagonális. Annak ellenére, hogy

$$E \left(\sum_{i=1}^N Z_i' \Delta \hat{u}_i \Delta \hat{u}_i' Z_i \right) = E (Z' \Delta u \Delta u' Z),$$

ez a két becslőfüggvény $Z'\Omega_{\Delta}Z$ -re számszerűen el fog térni egymástól.³ A becslőfüggvények többségénél a paraméterbecslések végeredményei közötti eltérés nagyon kicsiny volt (10^{-3} nagyságrendű).

A $\Delta \hat{u}_i$ reziduunvektor γ egy konzisztens induló becsléséből származik, ahol Ω_{Δ} (5) szerint alakul. A különféle becslőfüggvények egy- és kétlépéses változatai aszimptotikusan ekvivalensek lesznek, ha az u_{it} -k függetlenek és homoszkedasztikusak (Arellano és Bond [1991]). Megjegyezzük azt is, hogy azoknál az eljárásoknál, amelyeknél erre szükség volt, Ω_{Δ} becslése közvetlenül az

$$\hat{\Omega}_{\Delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \hat{u}_i \Delta \hat{u}_i'$$

felhasználásával történt.

2.3 A Momentumok Általánosított Módszere (GMM)

Hansen nagy hatású írása [1982] óta az alkalmazott ökonometrikusok előszeretettel használják a GMM becslőfüggvényt (hasznos összefoglalásként

³Tekintsünk egy egyszerű, exogén változókat nem tartalmazó $AR(1)$ modell AB becslőfüggvényét két egyedre és a $t = 0, 1, 2$ esetre: $Z' \Delta u \Delta u' Z = (y_{10} \Delta u_{12})^2 + (y_{20} \Delta u_{22})^2 + 2y_{10} \Delta u_{12} y_{20} \Delta u_{22} \neq \sum_i Z_i' \Delta u_i \Delta u_i' Z_i = (y_{10} \Delta u_{12})^2 + (y_{20} \Delta u_{22})^2$.

lásd Pagan és Vella [1989] írását). A becslés technikája nagyon széles körű, magában foglal sok más jól ismert módszert (például az *IV* becslőfüggvényt) is. A *GMM* lényege az, hogy felhasználja az elméleti momentumok tulajdonságait, melyeket a becslés céljából a mintabeli megfelelőikkel helyettesít. Egyebek között Ahn és Schmidt (1995) ill. Crépon és mások [1996] legújabb munkáinak köszönhetően megkülönböztetett figyelem fordul a dinamikus hibakomponensű panelmodellek *GMM* becslőfüggvényei felé, habár ez a módszer rögzített hatású dinamikus modellekre szintén alkalmazható.

Először is, határozzuk meg a kezdeti értékeket a következőképpen:

$$y_{i0} = \alpha_i + \underline{x}'_{i0}\underline{\beta} + u_{i0}. \quad (13)$$

Megjegyezzük, hogy az exogén változókhoz tartozó $\underline{\beta}$ paramétervektort az (1)-től (13) egyenletig azonosnak feltételeztük. Az (1) és (13) egyenletekben a HF1-HF4 kikötéseken túl egy sor implicit ortogonalitási feltétel fejeződik ki, úgy mint:

$$(2a) \quad E(y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta}) = 0$$

$$(2b) \quad E((y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})^2) = \sigma_0^2$$

$$(2c) \quad E((y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})(y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})) = 0, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(2d) \quad E(y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta}) = 0, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(2e) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})(y_{is} - \alpha_i - \delta y_{is-1} - \underline{x}'_{is}\underline{\beta})) = 0 \\ (t, s = 1, \dots, T, t \neq s)$$

$$(2f) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})^2) = \sigma_u^2, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(2g) \quad E((y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (k, t = 1, \dots, T)$$

$$(2h) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{i0}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 1, \dots, T)$$

$$(2i) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 1, \dots, T)$$

$$(2j) \quad E((y_{it} - \alpha_t - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it} \underline{\beta}) x_{is}^k) = 0, \\ (\forall k, t \neq s, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, T)$$

Ezt a tíz ortogonalitási feltételt becslési (GMM) célokból a megfigyelt változókkal és a paraméterekkel kifejezett identifikációs összefüggésekké alakítjuk. Látható, hogy a fentebb ismertetett IV becslőfüggvények is eme identifikáló egyenletek egy részén alapulnak. A rögzített hatású specifikációra vonatkozó becslőfüggvények többsége használható a véletlen hatású modell esetére is (mivel az egyedhatásokat — akár rögzített, akár véletlen a specifikáció —, az első differenciák képzése kiküszöböli). Ezért az ortogonalitási feltételek és az IV becslőfüggvények közötti összefüggéseket a későbbiekben részletezzük.

Ha az azonosságok mindegyikét felírtuk, az a kérdés merül fel, hogy ezek közül hányat érdemes használni. Aszimptotikus hatásosságai meggondolások azt javasolják, hogy mindet. Mindazonáltal Crépon és mások [1996] megmutatták, hogy nem jelent hatásosságvesztést, ha azokat az egyenleteket figyelmen kívül hagyjuk, melyekben a lényeges paraméterek (α_t , $\underline{\beta}$, és δ) valamelyike nem szerepel. Sőt, úgy is át lehet rendezni az egyenletek egy részét, hogy ne kelljen minden zavaró (a vizsgálat szempontjából érdektelen) paramétert becsülni. A teljes paramétervektort $\underline{\gamma}_D^+$ -ként definiálva, mely $\underline{\gamma}_D^+ = (\underline{\alpha}' : \underline{\beta}' : \delta)$ -t, a lényeges paramétereket éppúgy tartalmazza, mint a zavarókat, a GMM becslőfüggvény az alábbi célfüggvény minimalizálásával kapható meg:

$$\hat{\underline{\gamma}}_D^+ = \min_{\underline{\gamma}_D^+} m_N(\underline{\gamma}_D^+) \hat{W}^{-1} m_N(\underline{\gamma}_D^+), \quad (14)$$

ahol $m_N = N^{-1} \sum_i m_i(\underline{\gamma}_D^+)$, $W = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(N^{-1/2} \sum_i m_i) = \text{cov}(m_N)$, és

$$\hat{W} = N^{-1} \sum_i m_i(\underline{\gamma}_D^+) m_i(\underline{\gamma}_D^+)',$$

melyet $\underline{\gamma}_D^+$ egy kezdeti konzisztens paraméterbecslése helyén értékelünk.

Nehézséget jelent az, hogy ha az ortogonalitási feltételek száma nő (különösen T növekedésével), a \hat{W} mátrix oszlopai között növekvő kollinearitás érvényesül, ami oda vezet, hogy a \hat{W} mátrix nem lesz invertálható. Ebben az esetben néhány feltételt el kell hagyni, ami nem okoz gondot, mivel a kikötések közötti erős korrelációs kapcsolat miatt ennek hatása a hatásosságra valószínűleg kicsiny lesz. A GMM becslőfüggvény által használható ortogonalitási kritériumok maximális száma a mintanagyságtól, mind N -től, mind T -től függ. Az 1a. táblázat azokat a feltételeket mutatja, amelyeket az ebben a tanulmányban vizsgált mintáknál felhasználtunk, míg az 1b. táblázat az IV típusú becslőfüggvényeket összegzi.

1a táblázat: GMM típusú becslőfüggvények dinamikus állandó hatású modellekre

Mintanagyság		Használt feltételek	Súly- mátrix	Becslőfv. rövidítése
T^*	N			
4	25	2a) - 2j)	I	GMM-F1
4	50	2a) - 2j)	I	GMM-F1
10	25	2a) - 2j)	I	GMM-F1
10	50	2a) - 2j)	I	GMM-F1
4	25	2a) - 2g) és 2l) ¹	\hat{W}	GMM-F2
4	50	2a) - 2j)	\hat{W}	GMM-F3
10	25	2a), 2b), 2d) és 2f)	\hat{W}	GMM-F4
10	50	2a), 2b), 2d), 2f), 2i) ² és 2g)	\hat{W}	GMM-F5

Megjegyzések: ¹ \hat{W} az empirikus momentumok becsült kovariancia mátrixa,
²2i) csak $k = 1$ -re.

1b táblázat: IV típusú becslőfüggvények dinamikus állandó hatású modellekre, $N \rightarrow \infty$, véges T

Módszer	Kon- zisz- tencia	A modell becslése		Instrumentum(ok) y_{it-1} -re vagy Δy_{it-1} -re
		színtek alapján	első differenciák alapján	
OLS	–	+	+	y_{it-1} vagy Δy_{it-1}
$Within$	–	+	–	y_{it-1}
$BN^{(L)}$	+	+	–	X_{-1}
AH	+	–	+	y_{it-2}
AR	+	–	+	Δy_{it-2}
AH^+	+	–	+	$y_{it-2}, \Delta X_{-1}$
AR^+	+	–	+	$\Delta y_{it-2}, \Delta X_{-1}$
$ST^{(b)}$	+	–	+	$\Omega_{\Delta}^{-1/2} \Delta X_{-1}$
$ST^{(c)}$	+	–	+	ΔX_{-1}
AB	+	–	+	$y_{i0}; y_{i0}, y_{i1}; \dots$
AB^+	+	–	+	$y_{i0}, \underline{x}_{i0}^1, \dots, \underline{x}_{iT}^1; y_{i0}, y_{i1}, \underline{x}_{i0}^2, \dots, \underline{x}_{iT}^2$
$BN^{(D)}$	+	–	+	ΔX_{-1}

3. A véletlen hatású dinamikus panelmodell

3.1 A modell

A véletlen hatású specifikációban az (1)-ben található α_i -ket úgy kezeljük, mint amelyek egy meghatározott eloszlás független, véletlen realizációi, így a hibtag „összetetté” válik, hiszen $v_{it} = \alpha_i + u_{it}$. Ugyanúgy, mint a rögzített hatású specifikációnál, a statikus véletlen hatású panelmodell hagyományos

becslőfüggvényei (*Within* és *OLS*) dinamikus esetben szemi-konzisztensek (Sevestre és Trognon [1985]).

A dinamikus véletlen hatású modell szemi-konzisztens becslőfüggvényei hasonlóképpen bizonyos hipotézisekre épülnek, melyek nem feltétlenül azonosak minden becslőfüggvényre.

HR1: Az u_{it} -k és az y_{it} korrelálatlanok $\forall t, i$ -re.

HR2: Az u_{it} -k és az α_i korrelálatlanok $\forall t, i$ -re.

HR3: Az u_{it} -k korrelálatlanok $\forall t, i$ -re.

HR4: Az u_{it} hibatagok várható értéke nulla, és σ_u^2 a varianciája.

HR5: Az α_i egyedhatások várható értéke nulla és varianciája σ_α^2 .

HR6: Az x változók nem sztochasztikusak, és az egyedenkénti várható értékek korrelálatlanok mind az u_{it} -kel, mind az α_i -kel, $\forall t, i$ -re.

HR7: Az x változók nem sztochasztikusak, és korrelálatlanok mind az u_{it} -kel, mind az α_i -kel, $\forall t, i$ -re.

A késleltetett változók szerepeltetése következtében HR6 és HR7 ismét csak nem teljesül. Hausman és Taylor (1981) nyomán —lásd később— az utóbbi könnyen módosítható, ha megengedjük, hogy az x változók egy része α_i -vel korreláljon. Ez ugyanakkor közvetlenül hat az érvényes instrumentumok kiválasztására, és fölöslegesen bonyolítja a későbbi tárgyalást. Az egyenletek hibatagjaira vonatkozó feltételekből adódóan az összetett hibatag variancia-kovariancia mártixa a következő lesz:

$$\Omega_v = V(v) = I_N \otimes E(\underline{v}_i \underline{v}_i') = I_N \otimes \Sigma_v, \quad (15)$$

$$\Sigma_v = \sigma_\alpha^2 J_T + \sigma_u^2 I_T = \sigma_v^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \rho \\ \rho & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $\rho = \sigma_\alpha^2 / (\sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2)$ a csoporton belüli korrelációs együttható.

3.2 IV becslőfüggvények

Ahogy korábban már említettük, az első differenciákra épített modell összes IV becslőfüggvénye hasonlóan alkalmazható mind véletlen, mind rögzített hatású specifikációknál. Ezért már csak a szintekre épített véletlen hatású modell becslésének áttekintése maradt hátra.

A *Balestra-Nerlove (BN)*, *Hausman-Taylor (HT)*, *Amemiya-MaCurdy (AM)* és *Breusch-Mizon-Schmidt (BMS)* kétlépéses IV becslőfüggvények. A statikus véletlen hatású panelmodellnél jónéhány becslőfüggvény javasolta a modell szférikus alakítását, a *GLS*-nél szokásos, az $\Omega_v^{-1/2}$ -del való, balról történő szorzás segítségével. Ez a transzformáció általában megfelelően alkalmazható dinamikus modellekre is.⁴

Bármilyen is a becslőfüggvény, ha Ω_v ismeretlen, a szokásos *Megvalósítható Általánosított Legkisebb Négyzetek (FGLS)* problémája jelentkezik. Csakugyan, (1) *OLS* regressziójának reziduumaiból Ω_v nem becsülhető, mert a paraméterbecslések szemi-inkonzisztensek lesznek, hiszen Ω_v bármely becslőfüggvénye a \hat{u} reziduumokon alapulna. Aszimptotikusan \hat{u} bármely szemi-inkonzisztens becslőfüggvénye (és így Ω_v -é is) alkalmazható, habár a különböző módszerek kismintás eltéréseket okozhatnak. Ha Ω_v -re konzisztens becslőfüggvényt találtunk és meghatároztunk egy megfelelő instrumentumhalmazt (Z), három becslőfüggvény közül választhatunk.

- (1) szorzása balról Z' -vel, majd becslés *GLS*-sel, $\text{Var}(Z'\underline{v}) = Z'\Omega_v Z$ használatával.
- (1) skálár-moddellé transzformálása $\Omega_v^{-1/2}$ -del való szorzással. Újabb transzformáció a (transzformált) modellnek $Z'\Omega_v^{-1/2}$ -del való balréli szorzásával. Végül $\text{Var}(Z'\Omega_v^{-1}\underline{v}) = Z'\Omega_v^{-1}Z$ használatával a kétszer transzformált modell *GLS* becslése.
- Ugyanaz mint b), kivéve, hogy a második fokozatban a nem traszformált Z instrumentumhalmaz kerül alkalmazásra ($\Omega_v^{-1/2}Z$ helyett), és $\text{Var}(Z'\Omega_v^{-1/2}\underline{v}) = Z'Z$.

Az *Általánosított Balestra-Nerlove (G-BNran)* kétlépéses IV becslőfüggvény. A Balestra és Nerlove [1966] becslőfüggvény instrumentumhalmazként szintén folyóidőszaki és (egy időszaki) késleltetett exogén változókat használ.

A *Hausman-Taylor (HT)* IV becslőfüggvény. Hausman és Taylor [1981] az X mátrixot $X = (X_1 : X_2)$ módon particionálja, ahol X_1 korrelálatlan az egyedhatásokkal, ám X_2 az. Dinamikus panelmodelleknél a késleltetett függő változó X_2 -nek felel meg, és HR7-t feltételezve a megmaradó magyarázó változók (e tanulmány jelölései szerint X) a Hausman-Taylor-féle X_1 -nek felelnek meg.

A G-BNran becslőfüggvényhez hasonló logikát követve X késleltetett értékei mellett a *HT* becslőfüggvény is figyelembe veszi az eredeti exogén változók mint érvényes instrumentumok várható értékeit és az azoktól való

⁴A Breusch-Mizon-Schmidt becslőfüggvény kivétel (lásd később).

eltéréseket. Amint Breusch, Mizon és Schmidt ([1989], 696. old.) megmutatja, ez a következő instrumentumok alkalmazását jelenti:

$$Z = (W_n X_{-1} : \overline{B}_n X_{-1} : X). \quad (17)$$

Az *Amemiya-MaCurdy (AM) IV* becslőfüggvény. Ha az x -ek szigorúan exogén változók, mind múlt-, mind folyó- és jövőbeni értékeik érvényes instrumentumokká válnak. Így az Amemiya és MaCurdy [1986] becslőfüggvény tovább bővíti az instrumentumhalmazt X^* beiktatásával, melyet az alábbiak szerint definiálunk:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{11}^{(2)} & \dots & x_{11}^{(k)} & \dots & x_{1T}^{(1)} & \dots & x_{1T}^{(k)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{21}^{(2)} & \dots & x_{21}^{(k)} & \dots & x_{2T}^{(1)} & \dots & x_{2T}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N1}^{(1)} & x_{N1}^{(2)} & \dots & x_{N1}^{(k)} & \dots & x_{NT}^{(1)} & \dots & x_{NT}^{(k)} \end{pmatrix} \otimes \mathcal{L}_T. \quad (18)$$

Jegyezzük meg, hogy X^* minden oszlopa *csak egy* t -re vonatkozó x_{it} értékeket tartalmaz, szemben X -szel, mely x_{it} értékeit $t = 1, \dots, T$ -re tartalmazza. Valójában X $(T+1)$ -szer kerül alkalmazásra, T -szer, mint X^* , és egyszer, mint $W_n X$. A dinamikus modellnél mindemellett szükség van X_{-1}^* -re is, ami az alábbi lesz:

$$X_{-1}^* = \begin{pmatrix} x_{10}^{(1)} & x_{10}^{(2)} & \dots & x_{10}^{(k)} & \dots & x_{1T}^{(1)} & \dots & x_{1T}^{(k)} \\ x_{20}^{(1)} & x_{20}^{(2)} & \dots & x_{20}^{(k)} & \dots & x_{2T}^{(1)} & \dots & x_{2T}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N0}^{(1)} & x_{N0}^{(2)} & \dots & x_{N0}^{(k)} & \dots & x_{NT}^{(1)} & \dots & x_{NT}^{(k)} \end{pmatrix} \otimes \mathcal{L}_T. \quad (19)$$

A dinamikus modellre ezért a teljes AM instrumentumhalmaz:

$$Z = (W_n X_{-1} : X_{-1}^* : X). \quad (20)$$

Az *AM* becslőfüggvény, ha konzisztens, legalább olyan hatásos, mint a *HT* becslőfüggvény (Amemiya és MaCurdy [1986], 871-872. old.).

A *Breusch-Mizon-Schmidt (BMS) IV* becslőfüggvény. A *BMS* becslőfüggvény (Breusch, Mizon és Schmidt [1989]) szintén kiterjeszti az instrumentumok körét. A dinamikus modellben ez $(W_n y_{-1})^*$ beiktatását jelenti, melynek definíciója hasonló a (19)-ben szereplő X^* -hoz. Dinamikus modellben ezek a kiegészítő instrumentumok nem érvényesek, minthogy ez a forrása a *Within* becslőfüggvény inkonzisztenciájának is. Ezért ebben az esetben a *BMS* és *AM* becslőfüggvények azonosak.

A Wansbeek-Bekker (WB) IV becslőfüggvény. Bár a javasolt IV becslőfüggvények véges T -re és $N \rightarrow \infty$ -re konzisztensek, véges N -re még mindig torzítottak. A kismintás torzításon kívül a becslőfüggvények a szemi-aszimptotikus hatásosság szempontjából rendelkezhetnek kedvező tulajdonságokkal; ezt aknázza ki Wansbeek és Bekker [1993].

A WB Anderson és Hsiao (1982) megközelítését terjeszti ki oly módon, hogy az instrumentumok között a független változó késleltetett és jövőbeli értékei (valamint ezek lineáris kombinációi) is szerepelnek. Az y változót $t = 1$ -től $t = T$ időszakig értelmezve a WB becslőfüggvény instrumentumként figyelembe veszi \underline{y}_+ lineáris függvényeit, ahol \underline{y}_+ a $t = 1$ -től $t = T$ -ig az egyes egyedekre vonatkozó megfigyelésekből máglyázott vektor. A lineáris függvényeket az A_i $(T + 1) \times T$ méretű mátrix határozza meg, melyből megkapjuk a teljes instrumentumhalmazt, $A' \underline{y}_+$ -t (ahol $A = I_N \otimes A_i$). Az A -ra előírt korlátozások a következők:

$$A \underline{1}_T = 0 \quad \text{és} \quad E(\underline{y}'_+ A \underline{u}) = \text{tr} A E(\underline{u} \underline{u}'_+) = 0. \quad (22)$$

Ezek biztosítják az egyedhatások kiküszöbölését valamint a becslőfüggvény konzisztenciáját.

Wansbeek és Bekker [1993] megmutatták, hogy ezek a feltételek egyben meghatározzák A szerkezetét is, mégpedig úgy, hogy sorait összegezve éppúgy nullát kapunk, mint a legalacsonyabb T kvázi-diagonális elemeinek összegzéseként (nevezetesen a bal alsó elem nulla). Egy változó A mátrix segítségével való transzformálásának néhány esetben „szokásos” értelmezése lesz, míg más esetekben nem (példaként lásd Wansbeek és Bekker [1993] tanulmányát). A teljes WB-féle instrumentumhalmaz ezért a következő:

$$Z = (A' \underline{y}_+ : X), \quad (23)$$

és $(Z' u)$ kovariancia mátrixaként $\sigma_u^2(Z' Z)$ -t használva a WB becslőfüggvény a GLS-nek a transzformált modellre történő alkalmazásával kapható meg:⁵

$$Z' \underline{y} = Z' \tilde{X} \underline{\gamma} + Z' \underline{u}. \quad (24)$$

A becslőfüggvény szemi-aszimptotikus kovariancia mátrixa a következő:

$$\sigma_u^2 \left(\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\tilde{X}' P_Z \tilde{X})^{-1} \right), \quad (25)$$

ahol $P_Z = Z(Z' Z)^{-1} Z'$, ami (23) alapján A függvénye. A optimális értéke az, amelyik minimalizálja (25)-t, ugyanakkor kielégíti a reá vonatkozó korlátozásokat. Valójában ezektől a feltételektől eltekintve A nincs közelebbről

⁵Megjegyezzük, hogy ez a kifejezés a $(Z' Z)$ varianciának csak egy közelítése, amelyik az igazi varianciától $E(\underline{y}'_+ \underline{u}) \neq 0$ mértékben tér el, ám ezt a keresztkorrelációt nem vettük figyelembe.

meghatározva. Az egyszerű AR(1) modell WB becslőfüggvénye a megfelelő A korlátozott optimalizálása révén kapható meg (Wansbeek és Bekker [1993]). Ha azonban a modell exogén változókat is tartalmaz, numerikus módszereket kell alkalmazni, hiszen a becslőfüggvény varianciája mátrix, nem pedig skalár.

Ha csak a paramétervektor kovariancia mátrixával foglalkozunk (és nem egyes elemeinek kovarianciájával), az optimális WB becslőfüggvény korlátozott optimalizálás révén kapható meg, ahol σ_u^2 -t konstansnak tekintve azt az A -t keressük, amelyik minimalizálja (25) nyomát, és eleget tesz a (22) korlátozásoknak. Megjegyezzük, hogy az érvényes instrumentumok köre nemcsak $A'y_+$ -nal terjeszthető ki, hanem például $A'X_+$ -szel is (WB illetve WB^+), azaz:

$$Z^+ = (A'y_+ : A'X_+ : X) . \quad (26)$$

Ezek a becslőfüggvények olyan modellekre is alkalmazhatók, ahol az hibatagok kovariancia mátrixára vonatkozó skalár kovariancia mátrix feltételt feloldottuk. A GLS alkalmazásával (24)-re a megfelelő becslőfüggvények most is megkaphatók, de $(Z'u)$ kovarianciája most $(Z'\Omega_u Z)$, ahol Ω_u nem adott. A korlátozatlan WB becslőfüggvény kovariancia mátrixa:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\tilde{X}' P_{Z\Omega} \tilde{X})^{-1} , \quad (27)$$

ahol $P_{Z\Omega} = Z(Z'\Omega_u Z)^{-1}Z'$, és a P_{ZW} inverzének becslése a (12) egyenlet alapján \underline{u}_i előzetesen becsült értékeiből történik. A korlátozatlan WB becslőfüggvény (27) nyomának minimalizálásával újra megkapható, feltéve, hogy A eleget tesz a szükséges korlátozásoknak. A korlátozatlan WB^+ ugyanaz, mint fent, kivéve hogy $P_{Z\Omega}$ helyett $P_{Z\Omega}^+$ -t használ, melynek definíciója nyilvánvaló.

Az Arellano és Bover (ABov) IV becslőfüggvény. A WB becslőfüggvényhez hasonlóan az Arellano és Bover [1993] becslőfüggvény is a T egyenletek rendszerét transzformálja. A nonszinguláris transzformáció a következőképpen adott:

$$H_i = \begin{pmatrix} K \\ \underline{L}'_i/T \end{pmatrix} , \quad (28)$$

ahol K a Wansbeek és Bekker féle A -hoz hasonlít abban, hogy $K\underline{L}'_i = 0$, ahol K valamilyen $(T-1)$ rangú $(T-1) \times T$ -s mátrix. K lehet például a Within csoport operátor első $(T-1)$ sora, vagy az első differencia operátor. Mivel az első $(T-1)$ transzformált hiba,

$$\underline{v}_i^+ = H_i \underline{v}_i = \begin{pmatrix} K \underline{v}_i \\ \bar{\underline{v}}_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

nem tartalmaz α_i -t, erre az első $(T - 1)$ egyenletre az összes exogén változó érvényes instrumentum. Mi több, a v_{it} maradékok autokorrelálatlanságát feltételezve az Arellano-Bond becslőfüggvény nyomán az $(y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{iT-1})$ szintén érvényes instrumentum. Ámbátor ez a feltevés K -ra több strukturális megköttést igényel, melynek most még felső triangulárisnak is kell lennie (Arellano és Bover [1993] 16. old). Ez definiálja az érvényes instrumentumok mátrixát:

$$Z_i = \begin{pmatrix} (\underline{x}'_i, y_{i0}) & & & & 0 \\ & (\underline{x}'_i, y_{i0}, y_{i1}) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (\underline{x}'_i, y_{i0}, \dots, y_{iT-2}) & \\ 0 & & & & \underline{x}'_i \end{pmatrix}, \quad (30)$$

ahol $\underline{x}'_i = (\underline{x}'_{i0} : \dots : \underline{x}'_{iT})$. Legyen $Z = (Z'_1 : \dots : Z'_N)'$ és $H = I_N \otimes H_i$. Ekkor az *A-Bov* becslőfüggvény megkapható a transzformált modell *GLS* becsléseiből:

$$Z' H \underline{y} = Z' H \tilde{X} \gamma + Z' H \underline{v}, \quad (31)$$

ahol $V(Z' H \underline{v}) = Z' H \Omega_v H' Z$. Arellano és Bover a működést tekintve azt állítja, hogy feltéve, hogy a kapott K kielégíti a fenti feltételeket, az *Abov* becslőfüggvény K választására nézve invariáns.⁶

Az előző becslőfüggvényekhez hasonlóan a transzformált rendszer $\Omega^+ = H \Omega_v H'$ kovarianciáját előzetes szemi-konzisztens becslőfüggvények reziduumaiból kell becsülni. White [1984] nyomán Arellano és Bover (uo. 6. old.) a következőt javasolja:

$$\hat{\Omega}_{II'}^+ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{v}_i^+ \hat{v}_i^{+'}, \quad (32)$$

ahol \hat{v}_i^+ -k a $H_i \underline{v}_i$ -k előzetes szemi-konzisztens becslései, és $\hat{\Omega}_{II'}^+$ az Ω^+ korlátozatlan becslőfüggvénye. A hibatagokra vonatkozó szokásos feltevések mellett a korlátozott becslőfüggvény:

$$\hat{\Omega}_v^+ = H \hat{\Omega}_v H', \quad (33)$$

ahol $\hat{\Omega}_v = I_N \otimes (\hat{\sigma}_{\alpha}^2 J_T + \hat{\sigma}_u^2 I_T)$, és $\hat{\sigma}_{\alpha}^2$, $\hat{\sigma}_u^2$ konzisztens becslőfüggvényei σ_{α}^2 -nak illetve σ_u^2 -nak.

GMM becslőfüggvények. A dinamikus panelmodellek *GMM* becslőfüggvényének terén az utóbbi időben fontos előrelépés történt. Ezek közül a legjelentősebbek Ahn és Schmidt [1995] és Crépon és mások [1996] munkái. A HR1-HR7 feltételezések a kezdeti értékek specifikációjával együtt (a (20) egyenlet

⁶Ezt az eredményt használva az első differencia operátort az egymást követő szimulációs kísérletekben alkalmaztuk (lásd a 4. fejezetet).

szerint) lehetővé teszik a paraméterek és az adatok segítségével kifejezett ortogonalitási feltételek felállítását:

$$(3a) \quad E(y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta}) = 0$$

$$(3b) \quad E((y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})^2) = \sigma_0^2$$

$$(3c) \quad E((y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})(y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})) = \sigma_{\alpha}^2, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(3d) \quad E(y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta}) = 0, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(3e) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})(y_{is} - \delta y_{is-1} - \underline{x}'_{is}\underline{\beta})) = \sigma_{\alpha}^2, \quad (\forall t \neq s)$$

$$(3f) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})^2) = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_u^2, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(3g) \quad E(y_{i0}(y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})) = c, \quad (t = 1, \dots, T, c \text{ konstans.})$$

$$(3h) \quad E((y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 0, \dots, T)$$

$$(3i) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{i0}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 0, \dots, T)$$

$$(3j) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 1, \dots, T)$$

$$(3k) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{is}^k) = 0, \quad (\forall k, t \neq s)$$

Az *IV* becslőfüggvények csak azokon a feltételeken alapulnak, amelyek a vizsgált paraméterekben lineárisak (vö. *AB* becslőfüggvény és *g*) feltétel fent), míg Ahn és Schmidt [1995] a nem-lineáris feltételekre fordítja a figyelmet (mint 3f)). Bár, ahogyan Crépon és mások [1996] rámutatnak, ezek a becslőfüggvények mellőzik az elsőrendű momentumokat (3a) és 3d)) a csökkenő hatásosság árán is.

A fenti 3a) - 3k) feltételek különböző részalmazaira számos *GMM* becslőfüggvény építhető (Ahn és Schmidt [1993]). Mindazonáltal a numerikus megfontolások nagymértékben befolyásolhatják a használható feltételek számát. (2b táblázat).

A szintekre épített véletlen hatású specifikációra vonatkozó *IV* típusú becslőfüggvényeket a 2a táblázat foglalja össze. (Érdeemes utalni az első differenciákat használó becslőfüggvényekre, melyek az 1b táblázatban láthatók). A *GMM* típusú becslőfüggvényeknél használható ortogonalitási feltételek számát itt is *N* és *T* határozza meg. Ezen *GMM* típusú becslőfüggvények összefoglalását a 2b táblázat tartalmazza.

2a táblázat: IV típusú becslőfüggvények dinamikus, véletlen hatású modellekre, $N \rightarrow \infty$, T véges

Módszer	Konzisztencia	Szférikus modellé alakítás	y_{it-1} instrumentuma(i)
<i>OLS</i>	–	–	y_{it-1}
<i>Within</i>	–	W_n	y_{it-1}
<i>FGLS</i>	–	$\Omega_v^{-1/2}$	y_{it-1}
<i>G – BNran</i> ^(a)	+	–	X_{-1}
<i>G – BNran</i> ^(b)	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$\Omega_v^{-1/2} X_{-1}$
<i>G – BNran</i> ^(c)	+	$\Omega_v^{-1/2}$	X_{-1}
<i>HT</i> ^(a)	+	–	$W_n X_{-1}, \bar{B}_n X_{-1}$
<i>HT</i> ^(b)	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$\Omega_v^{-1/2} W_n X_{-1}, \Omega_v^{-1/2} \bar{B}_n X_{-1}$
<i>HT</i> ^(c)	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$W_n X_{-1}, \bar{B}_n X_{-1}$
<i>AM</i> ^(a)	+	–	$W_n X_{-1}, X_{-1}^*$
<i>AM</i> ^(b)	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$\Omega_v^{-1/2} W_n X_{-1}, \Omega_v^{-1/2} X_{-1}^*$
<i>AM</i> ^(c)	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$W_n X_{-1}, X_{-1}^*$
<i>WB</i>	+	A	y_+
<i>WB</i> ⁺	+	A	y_+, X_{-1}
<i>ABov</i>	+	H	$y_{i0}, \underline{x}_{i0}^j \dots \underline{x}_{iT}^j; y_{i0}, y_{i1}, \underline{x}_{i0}^j \dots \underline{x}_{iT}^j; \dots$

2b táblázat: GMM típusú becslőfüggvények dinamikus, véletlen hatású modellekre

Mintanagyság		Használt feltételek	Súlymátrix	Becslőfüggvény rövidítése
T	N			
4	25	3a) - 3j)	I	GMM-R1
4	50	3a) - 3j)	I	GMM-R1
10	25	3a) - 3j)	I	GMM-R1
10	50	3a) - 3j)	I	GMM-R1
4	25	3a) - 3g) és 3j)	\hat{W}	GMM-R2
4	50	3a) - 3k) ¹	\hat{W}	GMM-R3
10	25	3a), 3b), 3d) és 3e) ²	\hat{W}	GMM-R4

Megjegyzések: ¹ \hat{W} az empirikus momentumok becsült kovariancia mátrixa.

² csak $k = 1$ -re.

4. Szimulációs kísérletek

A szimulációs kísérletekhez az adatokat a következő módszer szerint generáltuk:

$$y_{it} = \alpha_i + \delta y_{it-1} + x_{it}^{(1)} \beta_1 + x_{it}^{(2)} \beta_2 + u_{it}, \quad (34)$$

$$y_{i0} = \alpha_i + \underline{x}_{i0}^j \beta + u_{i0},$$

ahol $u_{it} \sim N(0, 1)$, $x_{it}^{(k)} = x_{it-1}^{(k)} + \text{egyenletes}(-0.5, 0.5)$, $k = 1, 2$, és $\delta = \beta_1 = \beta_2 = 0.5$.

A rögzített- és véletlen hatású specifikációhoz az egyedhatásokat $\alpha_i = 1, \dots, N$, illetve $\alpha_i \sim N(0, 1)$ -ként generáltuk. A kísérletek során $T = 4, 10$ és $N = 25, 50$ mintanagyságokat választottunk. Végül a számítási idő korlátai miatt nagy minták esetén a Monte Carlo ismétlések száma 100-ra korlátozódott. A vizsgálat tárgya minden esetben δ becslőfüggvénye volt. A számítást a *Constrained Optimisor* használatával GAUSS-ban végeztük el.⁷ A rögzített- és véletlen hatású specifikációra vonatkozó vizsgálatok eredményei a függelékben az 1-4. és 5-7. ábrákon láthatók.⁸

4.1 Az rögzített hatású modell eredményei

A legkisebb mintanagyságnál ($N = 25$, $T = 4$) az egyszerű *OLS* becslőfüggvény azonnal mellőzhető a túl nagy torzítás miatt (1. ábra). Az *AB* becslőfüggvény, amely a kibővített instrumentumhalmazt használja, láthatólag nagyon megszervezi a kismintás torzítást, főleg a torzítás terjedelme miatt. A megmaradó szemi-konzisztens becslőfüggvények szempontjából úgy tűnik, nagyon kevés különbség van az *AR* és az egyszerű *AB* becslőfüggvények változatai között. A viszonylag kis torzítás és a stabilitás miatt azonban az első differenciákat használó modell *Within* becslőfüggvénye vagy egyszerű *OLS* becslőfüggvénye egyaránt alkalmazható. Végül azoknak a *GMM* típusú becslőfüggvényeknek, melyek az összes feltételt felhasználják és súlymátrixuként az egységmátrix szolgál (*GMM-F1*), nagyon hasonló az eredményük azokéhoz, melyeknél a feltételeknek csak egy része szerepel és súlymátrixuk ezek empirikus kovariancia mátrixa (*GMM-F2*). Valamivel kisebb torzítás és a torzítás kisebb terjedelme miatt az utóbbi előnyösebb lehet, ám bator mindkettőt felülmúlják az *AR* és *AB* becslőfüggvények.

Ha T -t rögzítjük és N -et ötvenig növeljük, hasonló eredményeket kapunk, nevezetesen azt, hogy az *AR* és az egyszerű *AB* becslőfüggvények a legjobbak, és rögtön utánuk következnek a *GMM* típusú becslőfüggvények. Bár, ugyanazon okokból, mint előbb, az (inkonzisztens) *Within* vagy *OLS* (Δ) becslőfüggvények valamelyikének alkalmazása is lehetséges. Fontos megállapítás még az, hogy a túlzott instabilitás miatt az AB^+ becslőfüggvények

⁷A programot a szerzők kérésre rendelkezésre bocsátják. $T = 4$ az a legkisebb mintanagyság, amely minden becslőfüggvénynek megfelel. A β_1 -re és β_2 -re vonatkozó eredményeket kérésre a szerzők rendelkezésre bocsátják. Időkorlátok miatt a véletlen hatású szimulációkat a legnagyobb mintanagyság esetén ($N = 50$ és $T = 10$) nem futtatuk le. Becslések szerint egy ilyen kísérlet lefuttatása Pentium 120-as személyi számítógépen több mint két hónapot venne igénybe.

⁸A számszerű eredmények megtalálhatók Harris és Mátyás [1996] munkájában, az A2 - A8. táblákban.

mellőzhetők. Továbbá, bár az egyedek számának növekedése lehetővé teszi a *GMM* becslőfüggvény számára az empirikus kovarianciamátrix használatával (*GMM-F3*) az összes feltétel alkalmazását (lásd 1b táblázat), úgy tűnik, ez nem javítja a *GMM* tulajdonságait ahhoz képest, amelyek az egységmátrixot használja (*GMM-F1*). Mindkettő kicsivel gyengébb az *AR* és *AB* becslőfüggvényeknél.

Az időszakok számának tízre való növelésével ($N = 25$ mellett) néhány figyelemreméltó következtetésre juthatunk. Először is, ez elég drasztikusan csökkenti az AB^+ becslőfüggvények, és meglehetősen váratlanul az *OLS* (Δ) becslőfüggvény teljesítményét is (3. ábra). Az eddigi mintáknál jól szereplő becslőfüggvények most is a legjobbak. A legkiválóbbak között azonban változás áll be, hiszen az *AB* becslőfüggvénnyel most valamivel kisebb torzítás érhető el, mint az *AR* becslőfüggvényekkel. Az *AB* becslőfüggvények mellett a *Within* becslőfüggvény általában továbbra is jól szerepel. A *GMM* típusú becslőfüggvények megint közvetlenül ezek után következnek, és bár az időszakok számának növekedése szigorúan korlátozza a *GMM-F4* által használható ortogonalitási feltételek számát (1b táblázat), ez a becslőfüggvény mégis jobb az egységmátrixot használó párjánál. A legnagyobb mintanagyságnál is hasonló eredményre jutunk, az egyszerű *AB* és *AR* becslőfüggvények teljesítménye a legjobb, bár a *Within* becslőfüggvény sem sokkal marad el tőlük. A *GMM* típusú becslőfüggvények továbbra is jó teljesítményt nyújtanak, bár az *AH* becslőfüggvények most megelőzik őket.

Mindent összefoglalva, a vizsgálatok illusztrálták az *OLS* és *Within* becslőfüggvények ismert torzításait (ámbar a legkisebb mintanagyságnál az első differenciákat használó modell *OLS* becslőfüggvénye viszonylag jól szerepelt), és a *Within* becslőfüggvény viszonylag kicsiny varianciáját (Kiviet [1994]). Az *AH* becslőfüggvényeket felülmúló *AR* növekvő hatásossága szintén egyértelmű volt (Arellano [1988]). A *Within* becslőfüggvény jó teljesítménye viszont meglepő, különösen az előző eredmények tükrében (lásd Nickell [1981] és Maddala [1991]).⁹ Az is kiderült, hogy valójában nincs különbség a becslt és az elméleti kovarianciamátrixot használó változatok között. Hasonlóan meglepő, hogy az eredeti *AR* és *AH* becslőfüggvények további instrumentumokkal történő bővítése csak kicsiny hatással van azok teljesítményére.

Azoknál a szemi-konzisztens becslőfüggvényeknél, melyek csak az exogén változók érvényes késleltetett értékeit (és ezek transzformációit) használják, (azaz az *ST* és *BN* becslőfüggvényeknél) előnyösebbek azok, melyek valamilyen formában a függő változó késleltetett értékeit is alkalmazzák. Kiseb mintáknál az egyszerű *AR* becslőfüggvény megfelelőnek tűnik, és ezt köz-

⁹Ez nem teljesen igaz, hiszen a szimulált (abszolút) eltérések becslései: 0.022; 0.008; 0.014 és 0.0038 voltak, a megfelelő egzakt aszimptotikus torzítások pedig Nickell [1981] (25) egyenletének felhasználásával rendre: 0.023; 0.007; 0.010 és 0.0025.

vetlenül az egyszerű AB és GMM típusú becslőfüggvények követik. Nagyobb mintáknál az AB becslőfüggvény kezd dominálni, és a GMM típusú becslőfüggvények teljesítménye is megnő (amiatt, hogy bár N növekedésével megnő a becsült paraméterek száma, a minta nagyobb keresztmetszeti komponense lehetővé teszi az elméleti momentumok jobb becslését).

A számítások megkönnyítése érdekében az egyszerű AR becslőfüggvényt célszerű választani, mert a standard szoftverekkel az AB instrumentális mátrixának programozása nehézségekbe ütközhet. Még könnyebb az egyszerű $Within$ és OLS (Δ) becslés elvégzése, ráadásul ezek a becslőfüggvények, főleg kismintában elég jó teljesítményt nyújtanak. Mi több, Nickell [1981] nyomán ezen becslőfüggvényeknél a valószínű torzítások meglehetősen pontosan kiszámíthatók. Végül, ha rendelkezésünkre áll egy optimalizáló programcsomag, a GMM típusú becslőfüggvények is vonzóknak mutatkoznak, főleg nagyobb mintáknál, és ha kétségeink vannak az igazi adatgeneráló folyamatra vonatkozó feltevésekkel kapcsolatban.

4.2 A véletlen hatású modell eredményei

A véletlen hatású specifikáció becslése sokkal nehezebbnek tűnik. A legkisebb mintanagyságnál például tartózkodni kell a szemi-konzisztens becslőfüggvények használatától, kivéve a GMM típusú WB^+ és AM becslőfüggvényeket, valószínűleg ebben a sorrendben (5. ábra). Az AM változatai között valójában nincs különbség. Az inkonzisztens OLS vagy $FGLS$ becslőfüggvények használata szintén lehetséges. Az abszolút torzítás szempontjából a GMM típusú becslőfüggvények jobbak, az előbbieket azonban általában stabilabbak (5. ábra). Megjegyzendő, hogy a különböző GMM típusú becslőfüggvények között nincs számottevő különbség, még akkor sem, ha a GMM -R2 becslőfüggvényénél számos feltételt el kell hagyni (2b. táblázat).

N -et ötvenre növelve (6. ábra) a GMM eljárások sokkal pontosabban tudják becsülni az empirikus momentumokat, és ennek következtében a teljesítményük is megnövekszik. Az ilyen méretű minták esetén ($T = 4$, $N = 50$) a GMM becslőfüggvények egyértelműen dominálnak. Bár N növelése megint csak lehetővé teszi gyakorlatilag az összes feltétel használatát a GMM típusú becslőfüggvények számára (2b. táblázat), a két GMM változat között nagyon kicsiny a különbség. A többi becslőfüggvényt tekintve, a WB^+ becslőfüggvény megint csak jól viselkedik, csak a GMM típusú becslőfüggvények mulják felül. Bár például a HT , AR és BN becslőfüggvények torzítása valamivel kisebb, mint az AM becslőfüggvényé, az utóbbi a kisebb terjedelem miatt mégis előnyösebb lehet.

Az időszakok számát tízre növelve a becslőfüggvények többségének teljesítménye jelentősen javul (7. ábra). A korábbi tanulmányokkal összehangban

(lásd például Arellano és Bond [1991] és Kiviet [1994]) például az AR és AB becslőfüggvények változatai is megfontolásra érdemesek. A legjobban teljesítő becslőfüggvények a WB és WB^+ becslőfüggvények (az utóbbi kicsit még jobb is), a legkisebb torzítás, a torzítások alacsony MSE értékei és kis terjedelme miatt. A GMM típusú becslőfüggvények továbbra is jól viselkednek. Mindamellett, T növekedése drasztikusan csökkenti a GMM -R4 által alkalmazható ortogonalitási feltételek számát (2b. táblázat), mely rossz irányban befolyásolja a teljesítőképességét, főleg GMM -R1-hez képest. Ilyen mintanagyság esetén lehetséges módszerek még a BN becslőfüggvények (főleg a c) változat) és az egyszerű AB becslőfüggvény, minthogy a többi becslőfüggvény vagy a túlzott torzítás, vagy a torzítás terjedelme miatt nem jöhet szóba. Végül, bár inkonzisztens, a *Within* becslőfüggvény továbbra is jól szerepel, csak a WB és WB^+ becslőfüggvények jobbak nála.

Mindent összevéve, a rögzített hatású becslőfüggvényekkel ellentétben a véletlen hatású szemi-konzisztens becslőfüggvények nem rosszabbak az inkonzisztens hagyományos becslőfüggvényeknél (a *Within* becslőfüggvény például csak $T = 10$, $N = 25$ -nél múlja felül a konzisztens becslőfüggvények többségét). Kis T -re a könnyebb számítás kedvéért, úgy tűnik, a választás az AM és az (inkonzisztens) OLS és $FGLS$ becslőfüggvények között történik. Optimalizáló programcsomag segítségével azonban mind a GMM típusú, mind a WB^+ becslőfüggvények használhatók. Több időszakra kiterjedő mintában egyértelmű győztes a WB^+ becslőfüggvény, melyet közvetlenül ennek egyszerűbb változata, WB követ. A GMM típusú becslőfüggvények használata továbbra is megfontolásra méltó, különösen, ha kétségeink vannak az igazi adatgeneráló folyamattal kapcsolatban. Ha viszont nem áll rendelkezésünkre optimalizáló programcsomag, továbbra is az egyszerű AB becslőfüggvény látszik megfelelőnek.

Érdekes eltérések mutatkoznak egy meghatározott becslőfüggvény különböző változatai között. Először is, szignifikáns eltérés van az egyszerű AR és AH becslőfüggvények, valamint az instrumentumhalmazt kiterjesztő párjuk között (mind AR -nél, mind AH -nál az összes mintára az utóbbinak jobb a teljesítménye). Bár az

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' \hat{u}_i^* \hat{u}_i^{*'} Z_i$$

használata (ahol \hat{u}_i^* az általánosított transzformált hibatag becsléseit jelenti) —lásd a 2. lábjegyzetet— nem nyújt további becslőfüggvényeket, ezek mégis nagyon közel állnak azon becslőfüggvények többségéhez, melyeknek van „becsült” párjuk. Végül a GMM típusú becslőfüggvényeket illetően, a rögzített hatású specifikációval ellentétben a „becsült” változat nem egyértelműen domináns az egységmátrixos párja felett. Valójában, „nagy” T -re

az utóbbi éppolyan jó, mint az előbbi, és gyakran felülmúlja azt alacsonyabb torzításban és nagyobb hatásosságban.

Négy becslőfüggvény (BN , HT , AM és ST) használja a GLS típusú IV a)-c) változatát. Az AM minden mintánál invariánsnak tűnik a választásra, és mint már megjegyeztük, hatásossága a másik három becslőfüggvényénél jobban növekszik. Ettől a becslőfüggvénytől eltekintve, nem jelentkezik semmilyen határozott tendencia sem valamely meghatározott becslőfüggvény, sem valamelyik mintanagyság esetén.

Érdekes kérdés, hogy ezek az eredmények hogyan viszonyulnak a korábbiakhoz. Az AB , AR és AH becslőfüggvényeket három tanulmány vizsgálta (Arellano és Bond [1991], Arellano és Bover [1993], akik csak az AH és AR becsléseket tanulmányozták, és Kiviet [1994]). Arellano és Bover (1993) egy tisztán $AR(1)$ folyamatot vizsgált, $T = 3$ -nál. A hibatag értékei standard normális eloszlásból vett (pszeudo) véletlen minták voltak. Az egyedhatások szinte (de az előzőtől független) normális eloszlásúak voltak, bár különböző varianciáikkal dolgoztak. A kezdeti értékek meghatározása a következő volt:

$$y_{i0} = \frac{1}{1-\delta} \alpha_i + \frac{1}{(1-\delta^2)^{1/2}} u_{i0} \quad (35)$$

$\delta = 0.5$, $\text{Var}(\alpha_i) = 1$ és $N = 100$ mellett a szimulált AH becslőfüggvény értékére 0.8-t kaptak, (viszonylag instabil) három alatti szórással. Az egy- és kétlépéses AB becslőfüggvények, melyek sokkal stabilabbak (0.24 szórással) és pontosabbak (közelítő értékeik 0.4762 és 0.4748), mint az AH becslőfüggvény, nagyon hasonló teljesítményt nyújtottak. Habár ezen becslőfüggvények torzítása szignifikánsan csökkent, amikor N -et 500-ra növelték, a torzítás δ valódi értékének csökkenő függvénye volt és az egyedi értékek varianciájával is változott, sorrendjük mégis változatlan maradt.

Arellano és Bond [1991] egy $N = 100$ és $T = 7$ nagyságú mintát vizsgált, és kiterjesztette a modellt egy szigorúan exogén változó bekapcsolásával (melyet 0.8 értékű AR paraméter generált), s melynek megfelelő koefficiense $\beta = 1$ volt. A hibatagokat standard normális eloszlásból vett független mintaelemek reprezentálták. Végül, bár a kezdeti értékeket nullára rögzítették, az első tíz megfigyelést kihagyták. $\delta = 0.5$ -nél az egy- és kétlépéses AB becslések közelítő értékei 0.4884 és 0.4920 voltak. Az egyszerű AH becslés a -2.4753 közelítő átlaggal és 45 feletti szórással nagyon gyenge teljesítményt nyújtott. Az egyszerű AR 0.5075 átlaggal (és 0.0821 szórással) már sokkal jobb becslést eredményezett. A torzítások általában δ átlagával arányosan csökkentek (0.2, 0.5 és 0.8 vizsgálatára került sor), és bár az egyes becslőfüggvényeknél tapasztalt torzítások $\delta = 0.2$ -re és $\delta = 0.8$ -ra nagyon hasonlóak voltak, a kisebb variancia miatt az AB becslőfüggvények előnyösebbnek tűntek.

Kiviet [1994] a szimulációs kísérleteknek egy sokkal szélesebb körét mutatta be, hiszen modellje egy exogén változót is tartalmazott. Az eredmények nagy terjedelmére való tekintettel a továbbiakban az olvasónak magára a tanulmányra kell hagyatkoznia. Az általános konklúzió azonban az volt, hogy az AH becslőfüggvények nagyon változékonyak, gyakran mutatnak nagy varianciát és gyenge teljesítményt (különösképp δ értékének változásaira érzékenyek). A jelen tanulmányban vizsgált becslőfüggvények közül megint az egyszerű egy- és kétlépéses AB és AR becslőfüggvények tűntek a leginkább megfelelőeknek.

Ezeket az eredményeket a jelenlegi kísérletek eredményeivel összehasonlítva mi sokkal nagyobb torzításokat tapasztaltunk. A növekvő torzítások első sorban a kisebb keresztmetszeti minta méreteknek tulajdoníthatók (úm. $N = 50$ viszonyítva $N = 100$ -hoz). Kísérleteink eredményei abban alátámasztják az előző vizsgálatok eredményeit, hogy rávilágítanak az AH becslőfüggvény megbízhatatlanságára (teljesítménye erőteljesen függ a mintanagyságtól és a paraméterek valódi értékeitől). Mi több, az eredményeink megerősítik az AB és AR becslőfüggvények viszonylagos előnyét AH -val szemben, bár a legtöbb esetben e kettő közötti különbség nagyon kicsinynek látszik (az AB becslőfüggvény alkalmasabb lehet a kisebb varianciák szempontjából, míg AR a programozás egyszerűsége miatt előnyösebb). Tanulmányunk azonban több más becslőfüggvényt is vizsgált, és bár az AR és AB becslőfüggvények viszonylag jól szerepeltek, a GMM és WB becslőfüggvények egyértelműen felülmúlták őket.

5. Alkalmazás egy fogyasztói keresleti modellre

A paneladatok különösen alkalmasak keresleti függvények becslésére azáltal, hogy az egyedi adatok használatával az aggregált szinten felmerülő identifikációs problémák elkerülhetők. A keresletelmélet legegyszerűbb formája feltételezi, hogy a fogyasztói vásárlások fontos meghatározója az ár és a jövedelem. Bár az elsődleges fogyasztói szükségletek kielégítésére rövid távon nincs hatással a jövedelem, az ár azonban befolyással lehet, s mindkettő hathat esetleg a vásárlások időzítésére. Megjegyzendő, hogy a késleltetett függő változó néhány esetben a megmaradó és talán a nem megfigyelhető változók hatásait is reprezentálhatja. Ebben az alkalmazásban a vizsgált változó egy ilyen elsődleges szükségletet kielégítő termék, a mosószer.

Az adatok a Roy Morgan Consumer Panel of Australia (CPA)-ból származnak, mely egy egész Ausztráliát átfogó, 2831 háztartás adataiból álló mintát tartalmaz, s amely mintainformációkat szolgáltat a fogyasztói vásárlásokról és személyi adatokról. Bár ez alapján sok termékcsoport vizsgálata

lehetséges, figyelmünk a mosószerre korlátozódott, mivel ez alapvető szükségleti cikk, és így a késleltetett függő változók használatával a legpontosabban modellezhetőnek tűnt. A területi eltérésekből eredő problémák elkerülése végett a paneltagok vásárlásaira irányuló vizsgálat pusztán Melbourne vonzáskörzetére korlátozódott. Mivel a mosószer nem gyakran vásárolt termék, a havi adatokat a kérdéses pénzügyi (1992/93) évben negyedéves adatokká összegeztük, egyrészt a szimulációs kísérlettel való összehasonlíthatóság kedvéért (úm. $T = 4$), de főként azért, hogy az adathalmazban csökkentsük a nullák (zavart okozó) előfordulását. A mintából kihagytuk azokat, akik egyik negyedévben sem vásároltak mosószert (ez 113-ra csökkentette a mintában szereplő egyedek számát). A mértékegység a negyedéves mosópor vásárlás kilogrammja és a kilogrammonkénti átlagos ár volt. Végül, bár ebben a munkában nem tettünk kísérletet a rögzített- vagy véletlen hatású modell használatának alátámasztására, az empirikus kísérletnél mégis csak az utóbit alkalmaztuk, elsősorban az adatbázisban szereplő egyedek nagy számára való tekintettel.

Azon becslőfüggvények eredményei, melyek az első differenciákra épített modellt vizsgálták, a 3a. táblázatban találhatóak, a többi pedig a 3b. táblázatban (az utóbbi konstans is tartalmaz). A priori arra lehet számítani, hogy a konstans (ha van) és a késleltetett függő változó pozitívan, az ár pedig negatívan befolyásolja az aktuális keresletet.

3a táblázat: Mosószerek fogyasztói keresletének (első differenciákra épülő) paraméterbecslése

Módszer	Késleltetett kereslet	Ár
ΔOLS	-0.491 (0.064)	-0.196 (0.093)
AH	0.836 (0.323)	-0.458 (0.167)
$AH^+(\Omega_\Delta)$	-0.478 (0.072)	-0.215 (0.098)
$AH^+(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	-0.488 (0.110)	-0.187 (0.166)
AR	-0.052 (0.139)	-0.324 (0.095)
$AR^+(\Omega_\Delta)$	-0.053 (0.198)	-0.324 (0.135)
$AR^+(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	-0.053 (0.560)	-0.324 (0.384)
$ST^{(b)}(\Omega_\Delta)$	-0.290 (0.516)	-0.169 (0.145)
$ST^{(c)}(\hat{\Omega}_\Delta^{-1/2})$	-0.078 (0.575)	-0.274 (0.152)
$ST^{(b)}(\hat{\Omega}_\Delta)$	-0.116 (1.185)	-0.224 (0.352)
$AB(\Omega_\Delta)$	0.298 (0.184)	-0.342 (0.131)
$AB^+(\Omega_\Delta)$	0.308 (0.581)	-0.343 (0.416)
$AB(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	0.322 (0.158)	-0.414 (0.117)
$AB^+(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	0.249 (0.480)	-0.195 (0.361)
$BN^{(\Delta)}$	0.040 (0.635)	-0.301 (0.158)
$BN^{(\Delta)}(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	0.040 (1.703)	-0.301 (0.441)

3b táblázat: Mosószeresek fogyasztói keresletének (szintekre épített) paraméterbecslése

Módszer	Késleltetett kereslet	Ár	Konstans
<i>OLS</i>	0.647 (0.045)	-0.158 (0.084)	1.929 (0.421)
<i>Within</i>	-0.349 (0.051)	-0.155 (0.068)	—
<i>FGLS</i>	0.733 (0.036)	-0.108 (0.072)	1.353 (0.355)
<i>BN</i> ^(a)	-0.165 (0.559)	-0.207 (0.130)	5.710 (2.396)
<i>BN</i> ^(b)	-0.226 (0.413)	-0.190 (0.107)	5.916 (1.647)
<i>BN</i> ^(c)	-0.010 (0.439)	-0.266 (0.128)	5.772 (1.851)
<i>HT</i> ^(a)	-0.223 (0.413)	-0.204 (0.128)	5.956 (1.801)
<i>HT</i> ^(b)	-0.209 (0.404)	-0.193 (0.106)	5.850 (1.616)
<i>HT</i> ^(c)	-0.064 (0.416)	-0.252 (0.123)	5.958 (1.784)
<i>AM</i> ^(a)	-0.102 (0.352)	-0.208 (0.095)	5.439 (1.466)
<i>AM</i> ^(b)	-0.102 (0.352)	-0.208 (0.095)	5.439 (1.466)
<i>AM</i> ^(c)	0.005 (0.352)	-0.230 (0.098)	5.345 (1.459)
<i>WB</i>	0.208 (0.233)	-0.185 (0.083)	3.973 (0.405)
<i>WB</i> ⁺	0.281 (0.202)	-0.180 (0.079)	3.634 (0.373)
<i>WB</i> ($\hat{P}_{Z\Omega}$)	0.226 (0.177)	-0.184 (0.098)	3.893 (0.902)
<i>WB</i> ⁺ ($\hat{P}_{Z\Omega}$)	0.286 (0.165)	-0.195 (0.089)	3.586 (0.827)
<i>ABov</i> ($\hat{\Omega}_{it}^+$)	0.413 (0.132)	-0.188 (0.047)	3.172 (0.667)
<i>ABov</i> ($\hat{\Omega}_{it}^+$)	-0.136 (0.316)	-0.222 (0.097)	5.571 (1.345)
<i>GMM</i> (<i>I</i>)	-0.008 (0.027)	-0.333 (0.199)	5.579 (0.850)
<i>GMM</i> (<i>W</i>) ²	-0.007 (0.125)	-0.634 (0.221)	10.131 (1.951)

Megjegyzések: A negyedéves adatok mosószeresekre vonatkoznak, Melbourne vonzaskörzetében, a Roy Morgan Research Consumer Panel of Australia által az 1992/93-as pénzügyi évben szolgáltatott adatokból származnak ($N=113$). A függő változó a vásárolt mosószeresek kilogrammjának negyedéves változása, a magyarázó változók pedig a késleltetett függő változó és az átlagár változása. A zárójelekben az aszimptotikus standard hibákat adtuk meg, az inkonzisztens becslőfüggvények standard hibái is inkonzisztensek. A dölten szedett paraméterek szignifikánsak a becsült standard hibákon alapuló kétoldali próba alapján, 5%-os szignifikancia szint mellett.

² Használt feltételek: 3k)-ig mind.

Amint azt a 3a. és 3b. táblázatok világosan illusztrálják, a különböző eljárások a vizsgált paraméterek rendkívül eltérő pontbecsléseit szolgáltatják. Az aszimptotikus standard hiba szempontjából vizsgálva, a késleltetett függő változó (kereslet) a becslőfüggvények többségénél inszignifikánsnak bizonyult. Az *ABov* becslőfüggvény ugyan szignifikáns együtthatót eredményezett, de a szimulációban nyújtott gyenge teljesítménye kétségessé teszi a becslőfüggvény érvényességét. Az *AR*⁺ becslőfüggvények szignifikánsan negatív eredményekre vezettek, de az *AB*⁺ becslőfüggvény szignifikáns és meglehetősen stabil, 0.3 feletti együtthatót eredményezett. A további becslőfüggvények közül sokat a téves előjelek miatt kell figyelmen kívül hagyni (leginkább a *GMM* változatait), bár úgy tűnik, az *AB* és *WB* becslőfüggvények egyaránt 0.2 és 0.3 közötti stabil együtthatókat eredményeznek.

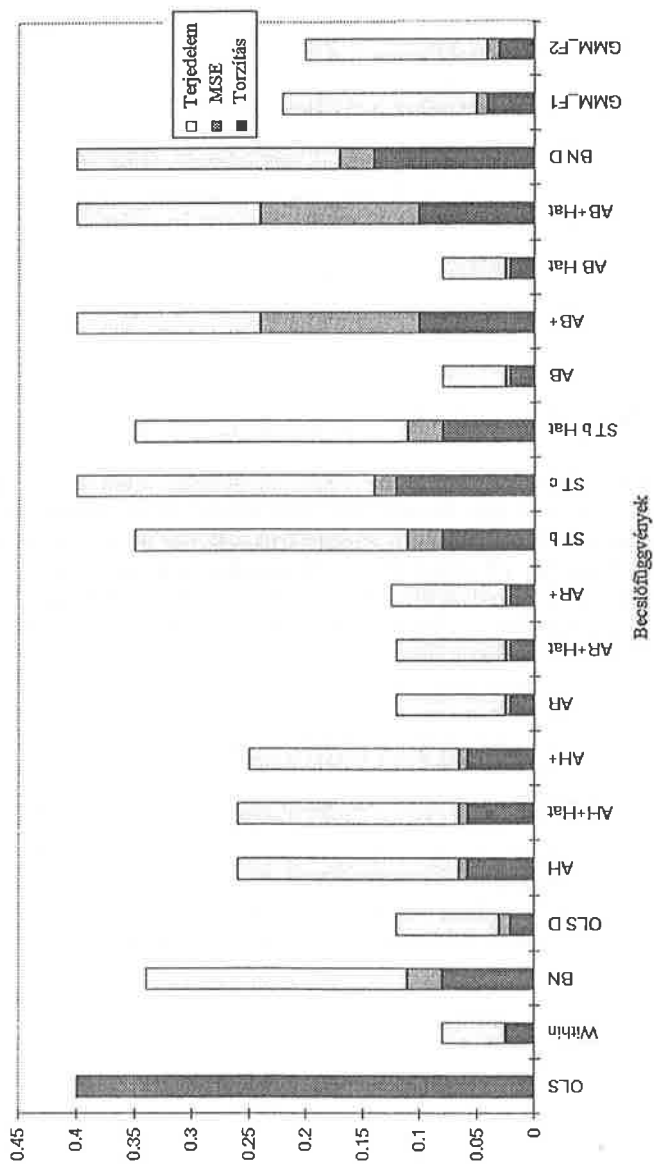
Az ár együtthatójában már nagyobb az egyetértés, hiszen az összes becslés szerint az ár negatív hatással van a keresletre. Mi több, a becslőfüggvények terjedelme szűkebb, kb. 0.2 és 0.6 közé esik (a $GMM(\hat{W})$ eljárás eredményezi a legnagyobb paraméterértéket). Bár néhány becslőfüggvény statisztikailag most is inkonzisztensnek bizonyul, ez leginkább mégis az első differenciákra épített modellnél tűnik fel. A megfelelő becslés megint kb. 0.2 körüli érték, melyet a (szignifikáns) becslőfüggvények szolgáltatnak, bár az első differenciákat használó becslőfüggvények kicsivel magasabb, 0.3-0.5 közötti értéket eredményeznek. Végül mindazok a becslőfüggvények, melyek a változók szintjeire épülnek, egyaránt statisztikailag szignifikáns, kb. 3.5 és 6 kilogramm közötti átlagos negyedéves mosószer-vásárlást becslnek. A $GMM(\hat{W})$ itt is „túl nagy” tűnő (10 feletti) becslést eredményez.

6. Következtetések

Ebben a tanulmányban a dinamikus panelmodellek két új becslőfüggvényét ajánlottuk, és a már létező számos becslőfüggvénnyel együtt értékeltük kismintás tulajdonságaikat. A rögzített hatású specifikációnál az új (GMM) becslőfüggvény jól szerepelt, és valószínűleg sok empirikus alkalmazásnál hasznos lesz. Mindazonáltal kis mintánál a GMM becslőfüggvényt kismértékben felülmúlja az AR és AB becslőfüggvények teljesítménye, melyek a számítás egyszerűsége miatt is előnyösebbek lehetnek. Bármilyen meglepő, azok a becslőfüggvények, melyek jól szerepeltek a rögzített hatású specifikációnál, már nem olyan jók a véletlen hatású modellben (főleg kevés időszakos minta esetén). A GMM típusú becslőfüggvények ilyen feltételek mellett a mintamérettől függetlenül általában megfelelőnek tűnnek. A másik javasolt új eljárás, a WB becslőfüggvény is nagyon vonzó kismintás tulajdonságokkal rendelkezik. Sőt, több időszakra kiterjedő mintáknál ennek a becslőfüggvénynek a legjobbak a kismintás tulajdonságai. Ezért ez a becslőfüggvény is sok empirikus alkalmazáshoz megfelelő lehet.

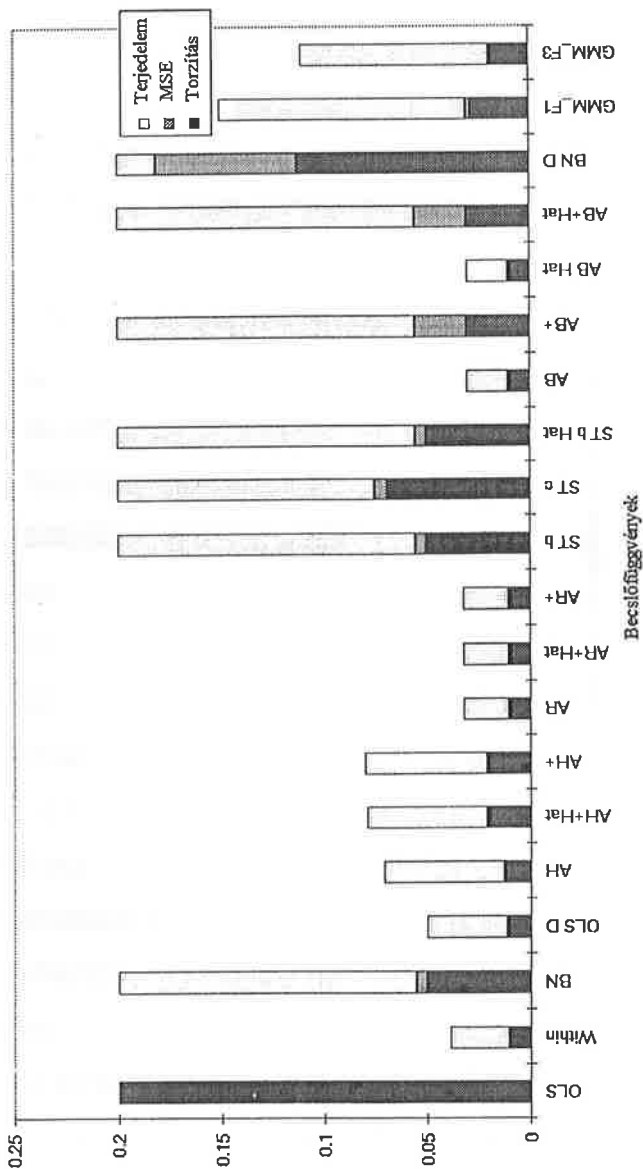
Végül, a becslőfüggvény kiválasztásának fontosságára egy alkalmazáson keresztül hívtuk fel a figyelmet, mely a mosószeres fogyasztói keresletét vizsgálta. Azt találtuk, hogy nemcsak a paraméterbecslések előjele és nagysága között van óriási különbség, hanem a becslt aszimptotikus standard hibák statisztikai szignifikanciái között is. Ez kiemeli az egyes problémáknál és adathalmazoknál a megfelelő becslőfüggvény kiválasztásának fontosságát.

1. ábra

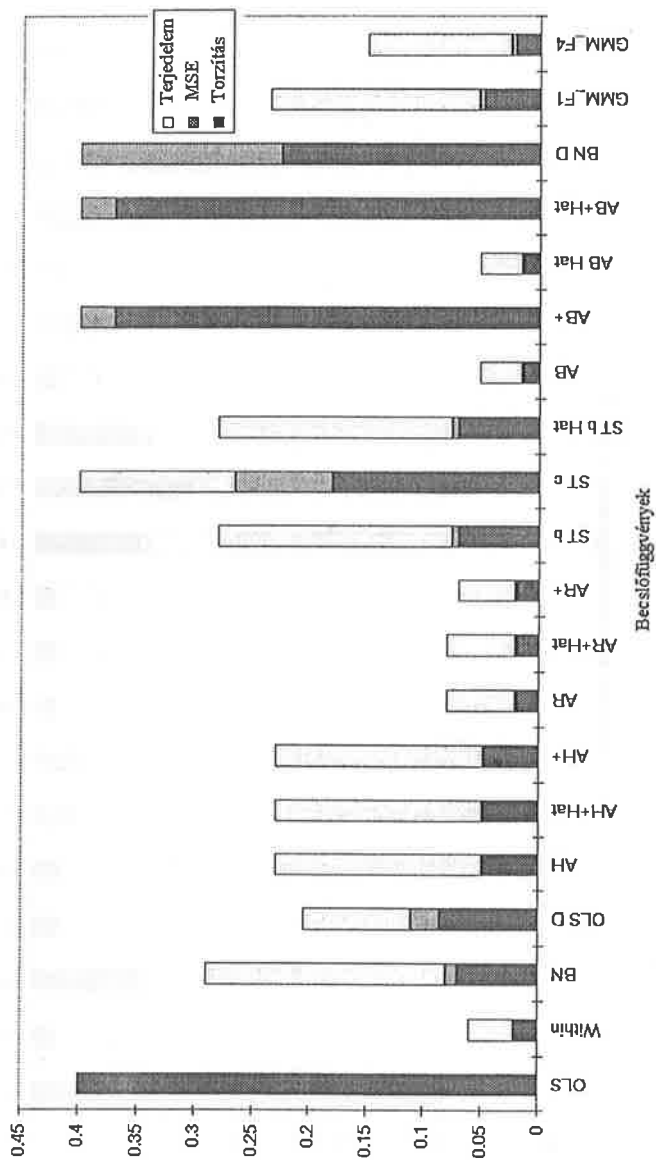
Rögzített hatású becslöfüggvények, $T = 4$, $N = 25$ 

2. ábra

Rögzített hatású becslőfüggvények, T = 4, N = 50

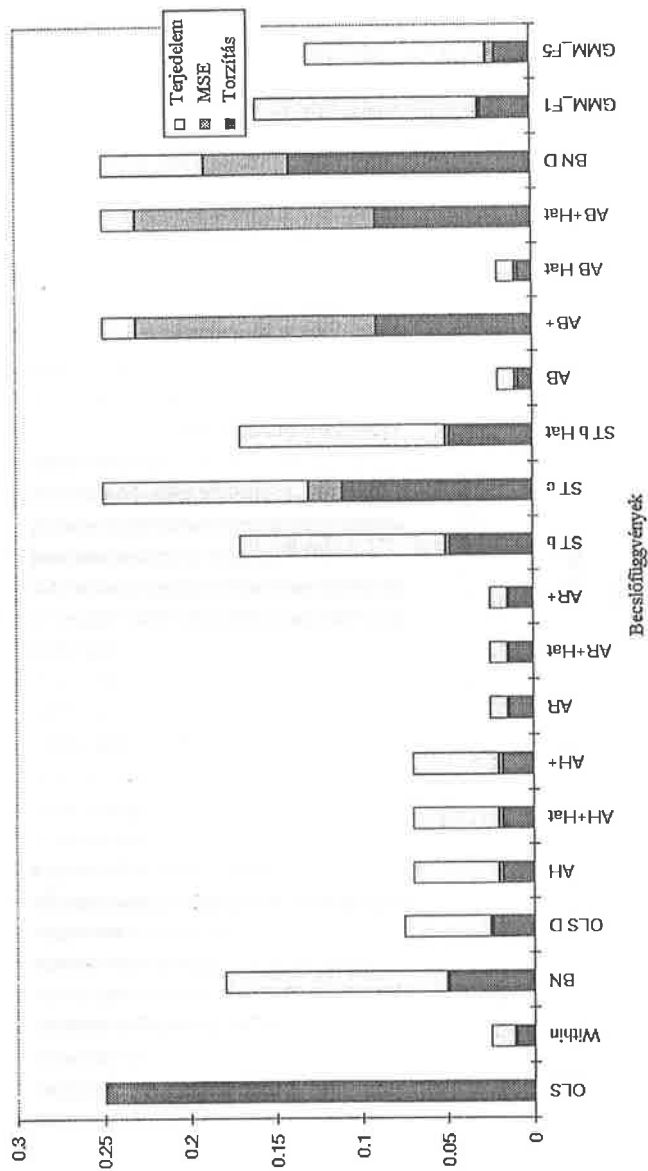


3. ábra

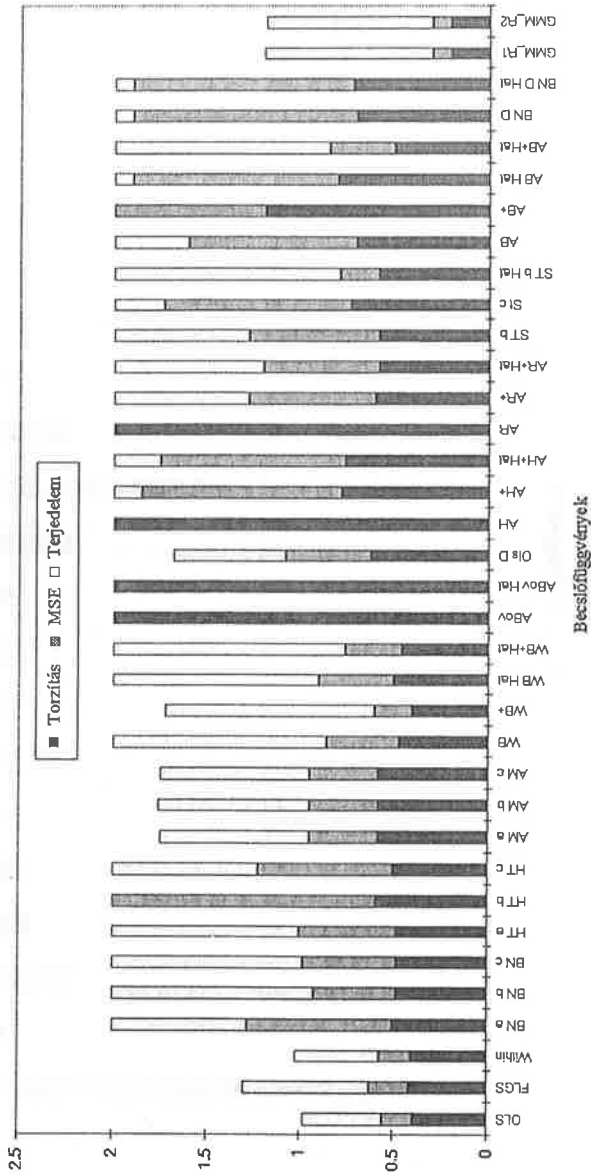
Rögzített hatású becslöfüggvények, $T = 10$, $N = 25$ 

4. ábra

Rögzített hatású becslőfüggvények, $T = 10$, $N = 50$

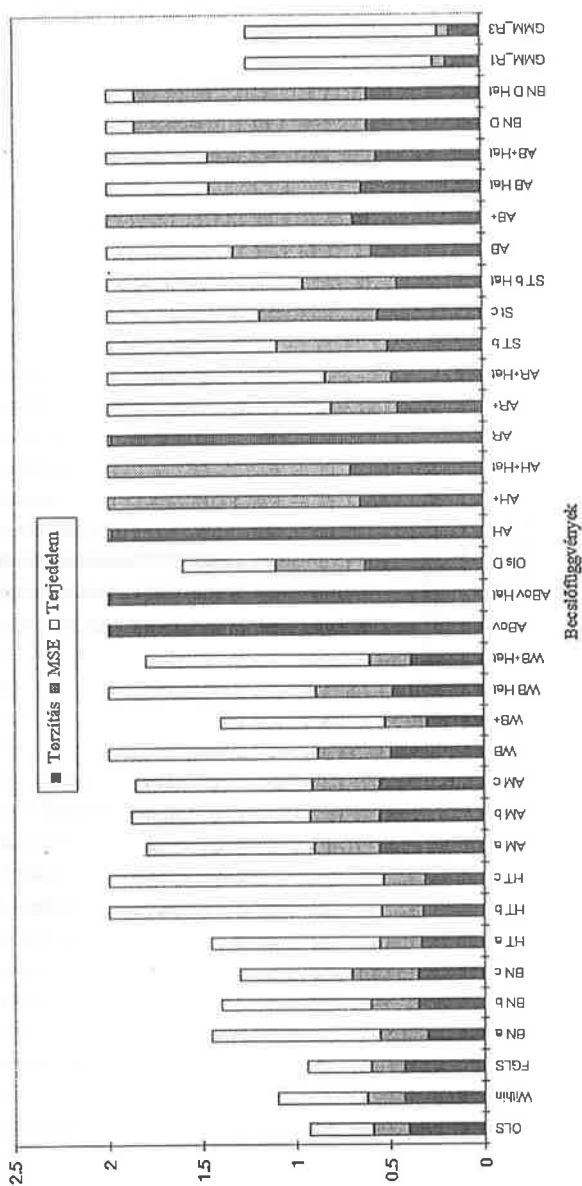


5. ábra

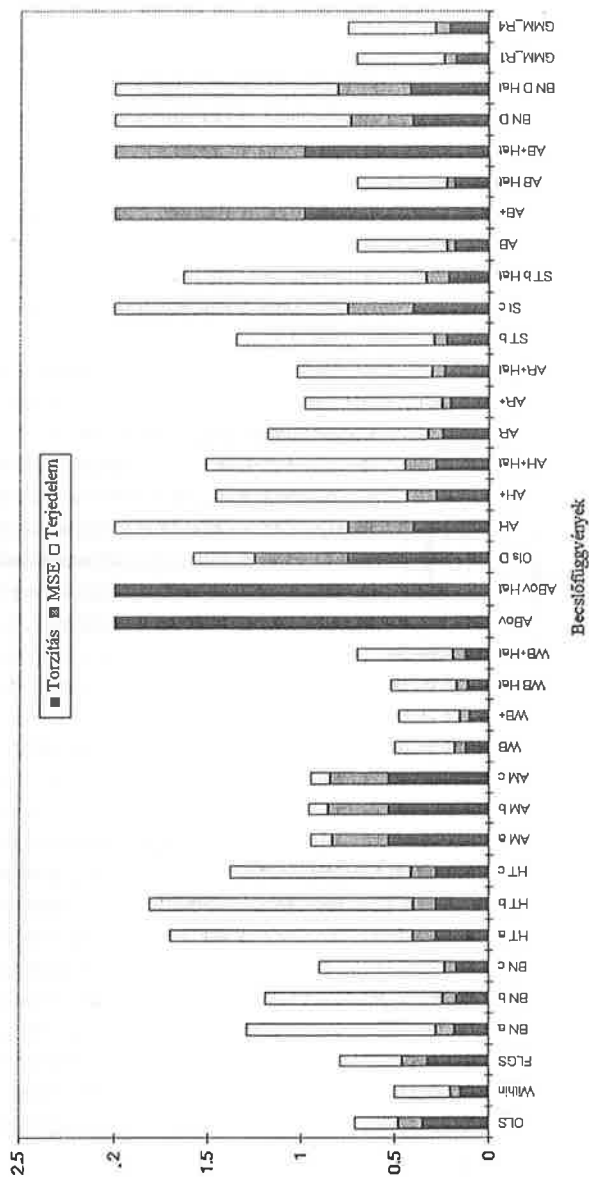
Véletlen hatású becslőfüggvények, $T = 4$, $N = 25$ 

6. ábra

Véletlen hatású becslőfüggvények, $T = 4$, $N = 50$



7. ábra

Véletlen hatású becsoffüggvények, $T = 10$, $N = 25$ 

Irodalom

1. Ahn, S. C. and Schmidt, P. (1993); Efficient Estimation of Dynamic Panel Data Models under Alternative Sets of Assumptions, mimeo Michigan State University.
2. Ahn, S. C. and Schmidt, P. (1995); Efficient Estimation of Models for Dynamic Panel Data, *Journal of Econometrics*.
3. Anderson, T. W. and Hsiao, C. (1982); Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data, *Journal of Econometrics*, Vol. 18, pp. 578-606.
4. Amemiya, T. and MaCurdy, T. E. (1986); Instrumental Estimation of an Error Components Model, *Econometrica*, Vol. 54, pp. 869-881.
5. Arellano, M. (1988); A Note on the Anderson-Hsiao Estimator for Panel Data, mimeo Institute of Economics, Oxford University.
6. Arellano, M. and Bond, S. (1991); Some Tests of Specification for Panel Data: Monte-Carlo Evidence and an Application to Employment Equations, *Review of Economic Studies*, Vol. 58, pp. 127-134.
7. Arellano, M. and Bover, O. (1993); Another Look at the Instrumental Variables Estimation of Error-Components Models, forthcoming, *Journal of Econometrics*.
8. Balestra, P. (1992); Fixed Effects Models and Fixed Coefficient Models, in (chpt 3) *The Econometrics of Panel Data*, Mátyás and Sevestre (eds.), 1992, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
9. Balestra, P. and Nerlove, M. (1966); Pooling Cross-Section and Time-Series Data in the Estimation of a Dynamic Model, *Econometrica*, Vol. 34, pp. 585-612.
10. Breusch, T. S., Mizon, G. E. and Schmidt, P. (1989); Efficient Estimation Using PanelData, *Econometrica*, Vol. 57, pp. 695-700.
11. Chamberlain, G. (1980); Analysis of Covariance with Qualitative Data, *Review of Economic Studies*, Vol. 47, pp. 225- 238.
12. Crépon, B., Kramarz, F. and Trogon, A. (1996); Parameters of Interest, Nuisance Parameter and Orthogonality Conditions: An Application to Error Component Models, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques.
13. Hansen, L. (1982); Large Sample Properties of Generalised Method of Moments Estimators, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 1029-1054.
14. Harris, M. N and Mátyás, L. (1996); A Comparative Analysis of Different Estimators for Dynamic Panel Data Models, Monash University, Melbourne, Australia.
15. Hausman, J. A. (1978); Specification Tests in Econometrics, *Econometrica*, Vol. 46, pp. 1251-1273.

16. Hausman, J. A. and Taylor, W. E. (1981); Panel Data and Unobservable Individual Effects, *Econometrica*, Vol. 49, pp. 1377-1398.
17. Hsiao, C. (1985); Benefits and Limitations of Using Panel Data, *Econometric Reviews*, Vol. 4, pp. 121-174.
18. Hsiao, C. (1986); *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press, Cambridge.
19. Kinal, T. W. (1980); The Existence of k -class Estimators, *Econometrica*, Vol. 48, pp. 241-249.
20. Kiviet, J. F. (1994); On Bias, Inconsistency and Efficiency of Various Estimators in Dynamic Panel Data Models, discussion paper Tinbergen Institute, Amsterdam-Rotterdam, TI 94-50.
21. Maddala, G. S. (1971); The Use of Variance Components Models in Pooling Cross-Section and Time Series Data, *Econometrica*, Vol. 39, pp. 341-358.
22. Mundlak, Y. (1978a); On the Pooling of Time Series and Cross Section Data, *Econometrica*, Vol. 46, pp. 69-85.
23. Mundlak, Y. (1978b); Models with Varying Coefficients: Integration and Extension, *Annales de l'INSEE*, 30-1, pp. 483-509.
24. Nerlove, M. (1967); Experimental Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relationships from a Time Series of Cross-Sections, *Economic Studies Quarterly*, Vol. 18, pp. 42-74.
25. Nerlove, M. (1971); Further Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relationships from a Time Series of Cross- Sections, *Econometrica*, Vol. 39, pp. 359-387.
26. Nickell, S. (1981); Biases in Models With Fixed Effects, *Econometrica*, Vol. 49, pp. 1417-1426.
27. Pagan, A. and Vella, F. (1989); Diagnostic Tests for Models Based Upon Individual Unit Data: A Survey, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 4, Supplement, pp. S29-S59.
28. Sevestre, P. and Trognon, A. (1985); A Note on Autoregressive Error Component Models, *Journal of Econometrics*, Vol. 29, pp. 231-245.
29. Sevestre, P., and Trognon, A. (1992); Linear Dynamic Models, in (chpt 6) *The Econometrics of Panel Data*, Mátyás and Sevestre (eds.), 1992, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
30. Wansbeek, T. and Bekker, P. (1993); Efficient Instrumental Variables Estimators in a Dynamic Panel Data Model, mimeo.
31. White, H. (1984); *Asymptotic Theory for Econometricians*, Academic Press, Orlando.

A COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENT ESTIMATORS
FOR DYNAMIC PANEL DATA MODELS

It has become increasingly obvious that the estimation of dynamic panel data models is one of the hot issues in econometric research nowadays as evidenced by the plethora of papers on the subject. It is well known that the usual techniques for estimating panel data models are inconsistent in the dynamic setting. Numerous consistent estimators have been proposed however in the literature. In this paper, two new estimators are offered (one each for the fixed and the random effects specification), and their small sample performance is compared with that of all of the existing estimators. The results of these experiments will provide valuable guidance to applied researchers as to which are the preferred estimator(s). Finally, the divergences in point estimates of all of these estimators is illustrated through an application to a consumer demand schedule of laundry detergent in the metropolitan district of Melbourne, Australia.

WAVELETEK ÉS ALKALMAZÁSUK AZ IDŐSOROK ELEMZÉSÉBEN

ZSEMBROVSZKY PETRO¹
MATÁV *Piacelemző Osztály*

A hagyományos Box-Jenkins idősoros statisztikai modellek (ARMA, ARIMA) csak olyan hosszú stacionárius idősorokon adnak megbízható eredményeket, amilyenek a legtöbb esetben nem állnak rendelkezésre. Ezért fordul a figyelem egyre inkább olyan módszerek felé, amelyek viszonylag rövid idősorokon is képesek hatékony elemzést adni és szilárd bázist biztosítani az előrejelzések számára. Az utóbbi években éppen ezért gyors fejlődésnek indult néhány, a tradicionálistól eltérő idősorelemzési irányzat: a wavelet elemzés, a fraktál analízis és a neurális hálózatok alkalmazása. Ez a cikk az említett módszerek közül a wavelet analízis elméleti alapjait és alkalmazási lehetőségeit mutatja be egy, a távközléshez kapcsolódó gazdasági idősor példáján.

A bevezetést követően először bemutatjuk a waveletek lényegét és kapcsolatukat más, többé-kevésbé ismert idősorelemzési módszerekkel, majd összefoglaljuk a waveletekkel szoros rokonságot mutató Fourier-analízis elemeit. Ezt követően soravesszük a wavelet elemzés alapjait, egy leggyakrabban alkalmazott módszerét, lehetséges továbbfejlesztéseit, alkalmazását, majd az említett számszerűen is kidolgozott feladatot. A cikket a fontosabb hivatkozások jegyzéke zárja.

1. A waveletekről általában

A waveletek² bizonyos matematikai követelményeket kielégítő függvények. E követelmények közül fontos megemlíteni azt, hogy az integráljuk 0 legyen, továbbá legyenek az időtartományban *lokalizáltak*, ami biztosítja, hogy az egyes időpontokhoz tartozó idősor-értékek jól leírhatók legyenek a waveletek segítségével. A gyakorlatban használt wavelet függvények emellett különböző számú eltűnő momentummal rendelkeznek.

A wavelet elemzés alapötlete, nevezetesen az, hogy az idősor alkalmas tulajdonságú függvények szuperponálásával közelíthető, nem új. Hasonló

¹A szerző ehelyütt szeretne köszönetet mondani Lois Lászlónak (BME) a tanulmány alapos és értékes bírálatáért.

²A wavelet angol szó hullámocskát jelent. Mivel a magyar nyelvű szakirodalomban még nem honosodott meg a fogalom, nem látjuk célszerűnek lefordítani.

elemzési módszer a múlt század kezdetétől létezik, amikor *Fourier* megmutatta, hogyan lehet szinusz és koszinusz bázisfüggvényekkel más függvényeket reprezentálni. Mivel a wavelet elemzés a Fourier elemzéshez áll közel, és mivel ez utóbbi valamelyest ismert a közgazdászok idősor-elemzési gyakorlatában, a továbbiakban a wavelet elemzés alapjait a Fourier-analízishez kapcsolva fejtjük ki.

A Fourier és wavelet módszerek közös jellemzője az, hogy lineáris transzformációk: a keresett függvényt a bázisfüggvények lineáris kombinációjával közelítik, illetve reprezentálják. A Fourier-transzformáció bázisfüggvényei szinusz és koszinusz függvények, ezért ezek csak a frekvenciatartományban lokalizáltak, az időtartományban nem. A waveletek, melyek hasonló bázisfüggvényekkel dolgoznak, időben (vagy térben) is lokalizáltak. A wavelet módszer fontos eleme a skála szerinti elemzés, ami annyit jelent, hogy a wavelet-algoritmuskok az adattranszformálást különböző skálán azaz különböző felbontásban végzik. Ez nagymértékben alkalmas diszkrét jellegű, hirtelen megszakításokat tartalmazó, nem-stacionárius jelekből álló idősorok elemzésére. Mivel a wavelet elemzés nem trigonometrikus függvényekre épül, a nem periodikus idősorok reprezentálásához kevesebb wavelet bázisfüggvény kell, mint amennyi szinusz-koszinusz kellene Fourier-analízis esetén.

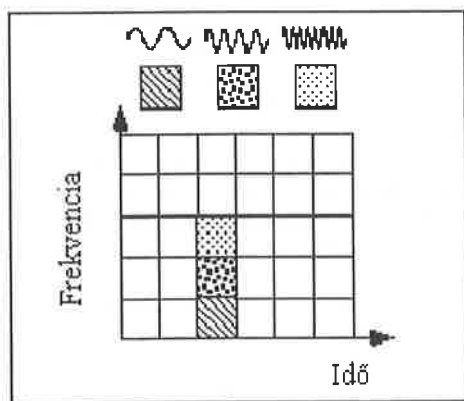
Ami a technikai megoldást illeti, jóllehet a Fourier-analízis elmélete már régen kialakult, az alkalmazások szempontjából az igazi áttörés azonban csak a számítógépek megjelenésével kezdődött. Számos algoritmust fejlesztettek ki a Fourier-analízis alkalmazásához, de a számítógépeknél a FFT (Fast Fourier Transform) diszkrét változata bizonyult a leghatékonyabbnak. A waveleteknél ennek a analógja a DWT (Discrete Wavelet Transform). Mivel mindkét módszer lényegi eleme az a transzformáció, amellyel az eredeti idősor adatait az új bázisba átviszik, a továbbiakban az említett két transzformációt hasonlítjuk össze.

A FFT és a DWT sok *hasonlóságot* mutat. Mindkettő olyan lineáris művelet, ami $\log_2 N$ (ahol N az idősor hossza, megfelelő számú 0-val kiegészítve) különféle hosszúságú együtthatókból álló adatstruktúrát generál, és melyet ez a művelet rendszerint kitölt és átalakít a különböző 2^n ($n = 0, 1, \dots, \log_2 N$) hosszúságú adatvektorokba. Mindkét transzformációban a bennük szereplő mátrixok hasonló matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek; mind a FFT, mind pedig a DWT esetén a lineáris transzformáció *ortonormált*, így a transzformáció matrixa is ortonormált, azaz a matrix inverze megegyezik transzponáltjával. A FFT transzformáció olyan bázist használ, amely szinusz és koszinusz függvényeket tartalmaz. A wavelet transzformációnál a megfelelő bázisfüggvények, az ún. waveletek, anya waveletek vagy elemző waveletek, hasonlóak bár, de bonyolultabbak. A két transzformáció más szempontból is hasonló. Mivel a bázisfüggvények mindkét esetben frekvencia-lokalizáltak, az

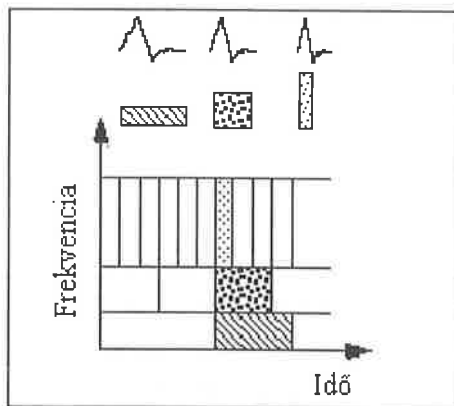
olyan, a frekvenciatartománybeli elemzésre épülő matematikai eszközök mint az energiaspektrum (periodogram) és skálagram (a későbbiekben definiáljuk), az elemzés lényeges részét képezik, és hasznosak lesznek a frekvencia kiválogatásánál, valamint az energiaeloszlás kiszámításánál.

A hasonlóságok mellett azonban a két módszer közt lényeges *eltérések* is vannak. Talán a leglényegesebb eltérés az, hogy szemben a Fourier-analízissel a wavelet függvények nem csak a frekvenciatartományon, de időben vagy térben is lokalizáltak. Ez a fajta lokalizáció, a wavelet frekvencia-lokalizálásával egyetemben, a wavelet tartományba való transzformáláskor sok, waveleteket használó függvényt és operátort ritkává tesz. Ez olyan hasznos alkalmazásokat eredményez mint az adatkompresszió, a kép sajtáságok felfedezése és a zaj eltávolítása az idősorokból. Jóllehet ezek a fogalmak elsődlegesen a jelfeldolgozásban játszanak komoly szerepet, az utolsó fejezetben éppen azt szeretnénk bemutatni, hogy maga a technika közgazdasági idősorok komponensekre való bontásában is jól alkalmazható.

Annak érdekében, hogy megmutassuk az idő-frekvencia felbontási különbségeket a wavelet és Fourier-transzformáció között, nézzük meg a bázis függvény lefedését az idő-frekvencia síkban. Az 1. ábrán a WFT-t (Window Fourier Transform) látjuk, ahol az ablak egy egyszerű négyzet hullám. A négyzet hullámú ablak úgy vágja le a szinusz vagy koszinusz függvényeket, hogy azok beférjenek a meghatározott szélességű ablakba. Mivel a WFT-ben minden frekvencia számára egy ablakot használunk, a felbontás azonos az idő-frekvencia sík minden helyén.



1. ábra: Fourier bázisfüggvények, idő-frekvencia mozaiklapok és az idő-frekvencia sík lefedése

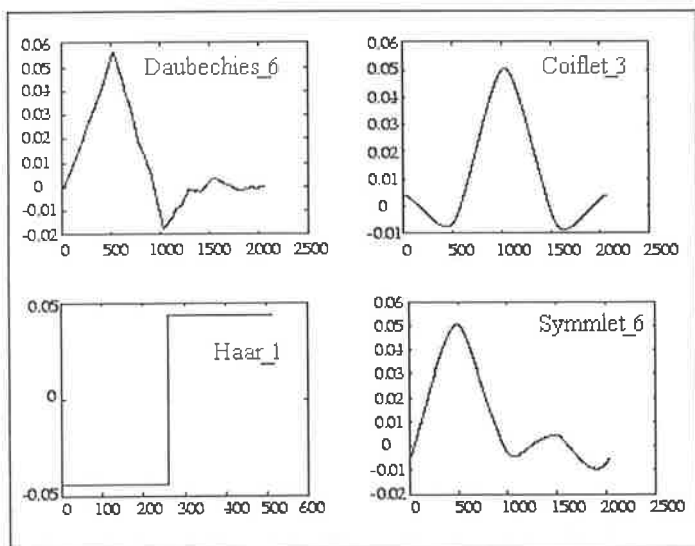


2. ábra: Daubechies wavelet bázis függvények, idő-frekvencia mozaiklapok és az idő-frekvencia sík lefedése.

A wavelet transzformáció előnye ezzel szemben az, hogy az ablakok változóak. Ahhoz hogy elkülönítsük a jel diszkontinuitását, nagyon rövid bázisfüggvényeket kellene alkalmazni. Ugyanakkor, a részletes frekvencia-analízishez nagyon hosszú bázisfüggvények kellene. A megoldás a rövid, magas frekvenciájú és hosszú, alacsony frekvenciájú bázisfüggvények egyidejű alkalmazása. Ezt a szerencsés eszközt a wavelet-transzformáció adja. A 2. ábra az idő-frekvencia sík lefedését mutatja be speciális, gyakran használt bázisfüggvények, a Daubechies wavelet bázisfüggvények segítségével.

A waveletek valójában tehát olyan alapfüggvények, amelyek lineáris kombinációival kikeverhetők az idősorok. A különböző alakú waveletek *családokat* alkotnak, ilyen pl. a már említett Daubechies család. Minden wavelet családon belül léteznek wavelet *osztályok*, melyek az együtthatók számával és az iterációs szinttel (lásd később) különbözhetnek meg. A wavelet-családon belül a waveleteket leggyakrabban az eltűnő momentumaik számával osztályozzák. Így például, a Coiflet wavelet családban léteznek a két és három eltűnő momentummal rendelkező Coiflet-ek. A 3. ábra néhány különböző wavelet családot mutat be.

A 3. ábrán látható waveletek közül a későbbiekben elsősorban a már említett Daubechies waveletekkel foglalkozunk. Az ugyanitt látható Haar-wavelet érdekessége az, hogy ez volt az első wavelet, amit a szakirodalom említett (1909), s ez első alkalmazója, Haar Alfréd magyar matematikus nevét viseli. A Haar-wavelet fontos tulajdonsága az, hogy kompakt tartójú, ami azt jelenti, hogy megszűnik egy véges időintervallumon kívül. Sajnos, a Haar-wavelet nem differenciálható folytonosan, ami korlátozza a felhasználását.



3. ábra: Néhány különböző wavelet család.

A wavelet név utáni szám az eltűnő momentumok számát fejezi ki.

2. A Fourier-analízis alapjai

A Fourier-analízis, mely már közgazdasági alkalmazásokban is létjogosultságot nyert, hatékony és jól bevált eszköz a stacionárius idősorok elemzésében. Ezért ahhoz, hogy a wavelet elemzés lényegét jobban megértsük, célszerűnek látjuk összefoglalni a Fourier-analízis alapfogalmait.

Ha az $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ diszkrét stacionárius folyamat, akkor dekompozíciójához szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációja alkalmazható. Formálisan:

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \lambda t + i \sin \lambda t) dZ(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \quad (2.1)$$

ahol $\{Z(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi\}$ ortogonális folyamat. A folyamat változójának variációját

$$\text{Var}\{X_t\} = \int_{-\pi}^{\pi} dF(\lambda), \quad (2.2)$$

ahol $E\{|dZ(\lambda)|^2\} = dF(\lambda)$. Az $F(\lambda)$ -t a folyamat *spektrális eloszlásfüggvényének* nevezzük. Ha $dF(\lambda) = f(\lambda) d\lambda$, akkor az $f(\lambda)$ a spektrális sűrűségfüggvény, vagy egyszerűen X_t *spektruma*. Az (2.2) összefüggés azt mutatja meg, hogy miképp kapcsolódik az X_t idősor varianciája a spektrum komponenseihez, maga a spektrum pedig azt, hogy az egyes frekvenciák milyen súllyal szerepelnek az X_t előállításában.

Ahhoz, hogy X_t -nek az $f(\lambda)$ spektrumát megfigyelések alapján meghatározzuk (becsüljük), a

$$d(\lambda_j) = d_j = \frac{1}{(2\pi N)^{1/2}} \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{i\lambda_j t}, \quad j = 0, 1, \dots, [N/2], \quad (2.3)$$

alakú transzformációt kell elvégezni. Ebből kapható az elemzés egyik legfontosabb eredménye, a *periodogram*, mely az

$$I_j = |d_j|^2, \quad (2.4)$$

kifejezéssel definiálható, és a spektrum aszimptotikusan torzítatlan becslőfüggvényének tekinthető. A periodogram azt mutatja meg, hogy a vizsgált idősorban milyen frekvenciájú hullámösszetevők milyen súllyal fordulnak elő.

Az a tény, hogy a spektrum, feltételezve hogy az X_t -k γ_u autokovarianciái összeadhatók, az

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \gamma_u e^{-i\lambda u} \quad (2.5)$$

kifejezéssel írható le, azt mutatja, hogy $f(\cdot)$ értékét az egyedi λ frekvencián olyan X_t értékek határozzák meg, amelyek a t széles tartományán szét vannak szórva. Ilymódon a spektrum komponensei az időben nem jól lokalizáltak, ami pedig azt jelenti, hogy néhány változás az X_t értékekben az összes d_j együttható megváltozásához vezethet.

3. Wavelet elemzés

A wavelet elmélet eredetét nehéz meghatározni. Kifejlődéséhez sok tudományterület járult hozzá. Az elmélet magja a jelfeldolgozás, a fizika és a matematika szintézise. A waveletek alkalmazási skálája széles és felhasználásuk rohamosan növekszik. De tulajdonképpen mi is a wavelet és miért olyan népszerű? Ezt a kérdést szeretnénk az alábbiakban kissé részletesebben megvizsgálni.

A wavelet elemzés alapja a $\psi(x)$ bázis-, elemző- vagy anya-wavelet, ami egy speciális tulajdonságokkal rendelkező függvény. Maguk a waveletek pedig

az anya-waveletek dilatációinak (ez egyaránt jelent kitágítást vagy zsugorítást) és translációinak (áthelyezések, eltolások) véges halmazai.

Néhány anya-wavelet tulajdonsága az, hogy nullává válik bizonyos intervallumon kívül (kompakt tartójú), ezzel biztosítva az idősor komponensekre való gyors bomlását. Az $\psi(x)$ elemző wavelet eltolásai (transzlációi) és skálázása (dilatációja) a wavelet ortogonális bázisát határozzák meg:

$$\psi_{(s,l)}(x) = 2^{-\frac{s}{2}} \psi(2^{-s}x - l),$$

ahol s, l egész számok. Ahhoz, hogy generáljuk pl. a Daubechies családhoz tartozó waveleteket, skáláznunk és dilatálnunk kell a $\psi(x)$ elemző waveletet s, l számok segítségével. Az s skála index a wavelet szélességét jelzi, az l hely index pedig a wavelet pozícióját adja meg. Meg kell említeni, hogy az elemző wavelet függvényeket kettő hatványaival skálázzuk és egész számmal toljuk el. A dilatációval és translációval képzett waveletek *önhasonlósága* teszi a wavelet bázisokat különösen érdekessé. Ha ugyanis az elemző (bázis-) függvény egyértelműen meghatározott, akkor ezáltal már a bázisról is mindezt tudunk.

Az elemző és skálázó függvények kapcsolatát az alábbi összefüggés adja meg:

$$\phi(x) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k c_{k+1} \psi(2x + k),$$

ahol $\phi(x)$ a ψ bázisfüggvény skálázó függvénye, és c_k -k a wavelet együtthatók. A wavelet együtthatóknak lineáris és kvadratikus követelményeket kell teljesíteniük a következő formában:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2, \quad \sum_{k=0}^{N-1} c_k c_l = 2\delta_{l,0},$$

ahol δ a Kronecker-féle delta függvény és l a lokalizálási index. Megjegyezzük, hogy a második feltétel a transzformáció ortonormáltóságát hivatott biztosítani. Az elemző waveletek és a megfelelő skálázó függvények tehát egymással szoros kapcsolatban állnak: az elemző waveletek az adott skálázó függvényekből kaphatók meg.

Szerencsés, ha a kutató az adott wavelet rendszerhez úgy választhatja meg definiáló együtthatóit, hogy azok jól illeszkedjenek az adott feladathoz. *Daubechies* olyan különleges családokat fejlesztett ki wavelet rendszerek számára, amelyek kiválóan alkalmasak polinomiális viselkedésű idősorok leírására.

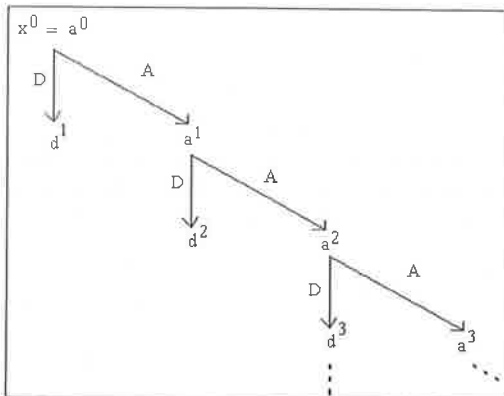
Daubechies a $\{c_0, \dots, c_n\}$ együtthatókat szűrőnek tekintette. Ezeket az együtthatókat a nyers adatvektorra alkalmazandó transzformációs mátrixba helyezzük el. Az együtthatókat két domináns séma szerint rendezzük. Az

egyik a mozgó átlaghoz hasonlóan aluláteresztő (simító) szűrőként működik, és közelítő információkat ad. A másik (feluláteresztő szűrő) az adatok különbségi (egyedi) információit emeli ki. Az együtthatók ezen kettős rendezését a jelfeldolgozási irodalomban *QMF (Quadrature Mirror Filter)* párnak hívják.

A wavelet együtthatómátrixot hierarchikus algoritmusban alkalmazzuk, melyet néha *piramis algoritmusnak* neveznek. A wavelet együtthatókat úgy rendezzük el, hogy a páratlan sorok aluláteresztő szűrőt tartalmaznak, a páros sorokban pedig különböző előjelű wavelet együtthatók helyezkednek el, melyek az adatokból a különbségi (egyedi) információkat tartalmazzák. Az együtthatómátrixot először a teljes hosszúságú adatvektorra alkalmazzuk, majd kiválasztjuk a simított részt, és a mátrixot újra alkalmazzuk addig amíg triviális számú simított adat nem marad. Egy-egy mátrix ismételt alkalmazása az adatok magasabb szintű felbontását hozza ki, miközben egyidejűleg a megmaradó adatokat simítja. A DWT kimenete a megmaradó közelítő komponens(ek)ből és felhalmozott különbségi információkból áll.

4. A DWT működésének főbb elemei

Ahhoz, hogy megértsük, mi is történik pontosan az adatokkal az egydimenziós DWT alatt, tekintsük át hogyan hat a DWT egy $N = 2^n$ hosszúságú, egymástól Δt távolságban megfigyelt x adatvektorra. A dekompozíció szemantikusan a 4. ábrán látható.

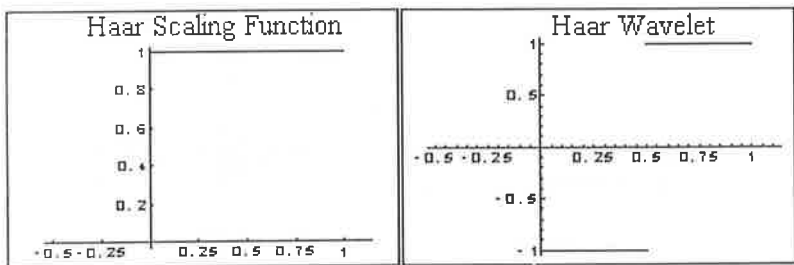


4. ábra: A DWT működési sémája

A DWT először az \mathbf{x} adatvektort két $N/2$ hosszúságú, $2\Delta t$ megfigyelési távolságú \mathbf{a}^1 , \mathbf{d}^1 részvektorra vágja ketté. A \mathbf{d}^1 vektor az \mathbf{x} vektor DWT-jának első eleme lesz, és a folyamatot az \mathbf{a}^1 -ből folytatjuk tovább, hogy megkaphassuk \mathbf{a}^2 -t és \mathbf{d}^2 -t. Ezt ismételjük addig, ameddig az n lépésben az \mathbf{a}^n és \mathbf{d}^n -ben egy pont nem marad, és az \mathbf{x} vektort a \mathbf{d}^1 , $\mathbf{d}^2, \dots, \mathbf{d}^n$, és \mathbf{a}^n vektor helyettesíti. Minden szinten a két részvektor hosszának összege megegyezik a szülővektor hosszával, ilymódon a \mathbf{d} vektorhossz összege plusz a végső \mathbf{a}^n pont ugyanakkora, mint az eredeti vektor N hossza. Mivel az első szinten \mathbf{x} vektor az \mathbf{a} szerepét játssza, célszerű néha az $\mathbf{x}=\mathbf{a}^0$ értelmezés. Az $\mathbf{a}^k \rightarrow \mathbf{a}^{k+1}$ transzformációt A -val, az $\mathbf{a}^k \rightarrow \mathbf{d}^{k+1}$ transzformációt pedig D -vel jelöljük. Fontos megjegyezni, hogy az A és a D ortogonálisak. A dekompozíció A fázisa lényegében az adatok átlagolásának felel meg az előző szinten. A frekvencia tartományban ez ekvivalens az előző szinten történő alacsony frekvenciájú szűréssel. A dekompozíció D fázisa lényegében a folyó szint átlagolt adatai és az előző szint adatai különbségének felel meg. Ez ekvivalens az előző szinten való magas frekvenciájú szűréssel.

Mivel az A és a D transzformáció ortogonális, az inverz algoritmus jól kondicionált. Ez azt jelenti hogy a transzponált matrixokat a mindenkori \mathbf{a} -ra és \mathbf{d} -re alkalmazva, az előző szinten levő \mathbf{a} vektor visszaállítható. (Megjegyezzük, hogy az eddig mondottak érvényesek az FFT algoritmusra is.)

Az A transzformáció mögött álló $\phi(t)$ függvény a skálázó függvény, a D mögötti $\psi(t)$ függvény pedig az anya- vagy elemző wavelet. Skálázó függvények és elemző waveletek csak az összekötő párokban fordulnak elő. Néhány párosítás az 5. és a 6. ábrákon látható.



5. ábra: Skálázó és elemző Haar-wavelet

Az algoritmus a $\psi(t)$ waveletet a $\phi(t)$ skálázó függvényből állítja elő. A rájuk vonatkozó követelmények:

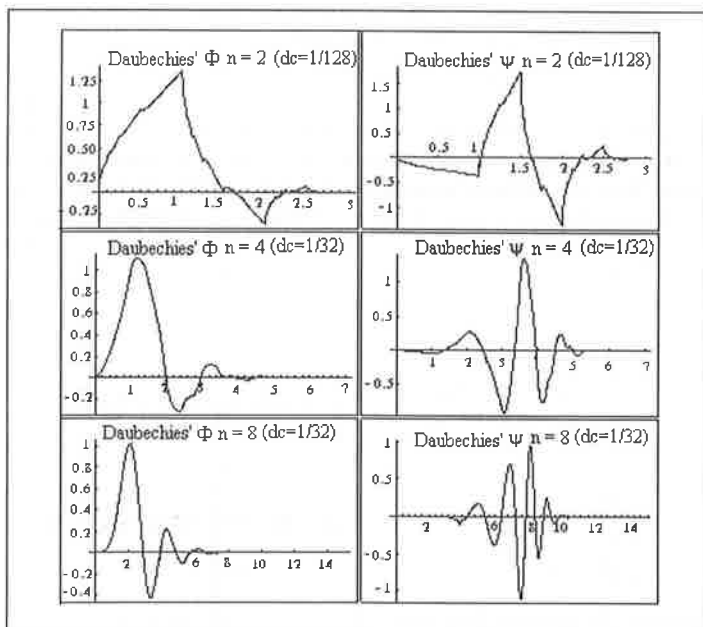
$$\int \phi(t) dt = 1 \quad (4.1)$$

és

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad (4.2)$$

konzisztensek az átlagolás és a különbség értelmezésének megfelelően. A továbbiakban a skálázó függvények és az elemző waveletek néhány alapvető tulajdonságáról lesz szó.

Mint azt már említettük, a skálázó függvények és elemző waveletek az idő- és a frekvencia tartományban egyaránt lokalizáltak. A gyakorlatban használt skálázó függvények és elemző waveletek $1/t$ -nél nagyobb sebességgel bomlanak az időben és egyidejűleg $1/f$ -nél nagyobb sebességű bomlással rendelkeznek a frekvencia tartományban.



6. ábra: Skálázó és elemző Daubechies waveletek

A waveletekkel kapcsolatban fontos fogalom a többszörös felbontású elemzés. Feltételezzük hogy a

$$\phi(t - k) \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

eltolások az adattartomány ortonormált bázisát alkotják (egy egység a k -ban Δt -nek felel meg). Ekkor a

$$\phi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}(t - k2^j)), \quad (4.3)$$

$j, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, eltolások 2^j nagyságú translációs lépessel bázist alkotnak a j -edik átlagolt tartomány számára. Bár az eltolt ϕ -k ortonormáltak egy-egy szinten belül (rögzített j), nem ortonormáltak a szintek között.

$$\int \phi_{jk}(t) \phi_{j'k'}(t) dt = \delta_{k,k'} \quad (4.4)$$

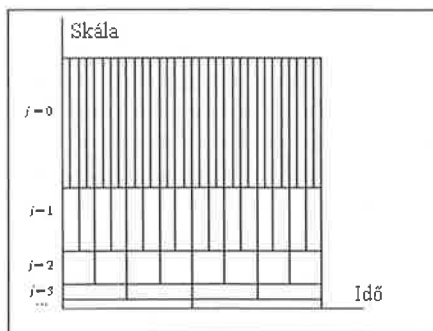
Ahhoz, hogy megkaphassuk a szintek közti ortonormált bázist, forduljunk a különbségi függvényhez - a wavelethez. Valóban, a $\psi(t)$ elemző wavelet

$$\psi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

skalázott eltolásai az L^2 ortonormált bázisát alkotják.

$$\int \psi_{jk}(t) \psi_{j'k'}(t) dt = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}. \quad (4.6)$$

Most elérkeztünk a wavelet elemzés egyik legfontosabb állításához, miszerint a DWT az adatelemzést különböző skálákon (oktávonként) végzi. Mivel a 2^j translációs lépés a szinthez (oktávhoz) kapcsolódik, a magas frekvenciájú események (j közel áll 0-hoz) kevés translációs lépés alatt értelmezhetőek. Alacsony frekvenciájú események viszont ($j \gg 0$) nagyobb időablakot követelnek. A wavelet bázis idő-frekvencia síkja a 7. ábrán látható.



7. ábra: Wavelet bázis idő-frekvencia síkja

Mivel a wavelet transzformáció komponenseit j -vel (ami skálát vagy frekvencia-szintet ad) és k -val (ami lokalizációt ad) indexeljük, ez azt jelenti

hogy a wavelet transzformáció az adatokat egyidejűleg az idő-frekvencia tartományban ábrázolja. Ez azt is jelenti, hogy az eredetileg egydimenziós tömböt két dimenzióssá transzformáljuk.

A (4.2) egyenlet szerint az elemző wavelet integrálja (nulladik momentuma) eltűnik. A gyakorlatban használt elemző waveletek legtöbb esetben több (mondjuk M) eltűnő momentummal rendelkeznek:

$$\int t^m \psi(t) dt = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M - 1,$$

Az eltűnő momentumok nagyobb száma a wavelet és skálázó függvény nagyobb simítottságával áll szoros kapcsolatban.

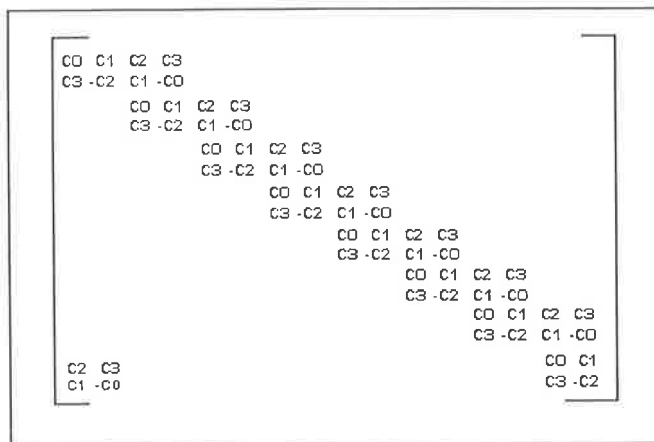
5. A Daubechies-féle Daub4 transzformáció

A Daub4 waveletet, amely a legkisebb a Daubechies családban, egyszerűsége miatt demonstrálásra és egyszerű alkalmazásokhoz gyakran használják. Ez a legkönnyebben megtanulható és a legjobban lokalizált wavelet transzformáció négy wavelet együtthatón alapszik. Daubechies a következő négytagú "bűvös" számhalmazt (együtthatókat) alkalmazta:

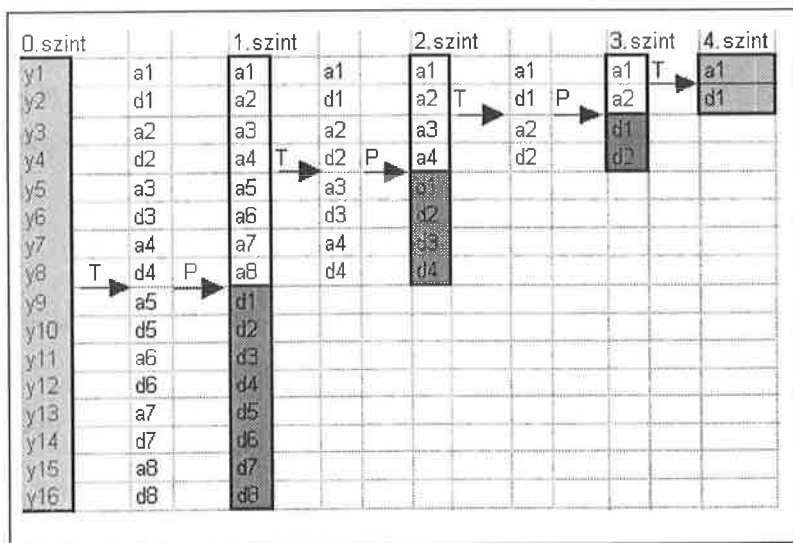
$$[c_0, c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{4\sqrt{2}} [1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}].$$

Ezekből a számokból építsük fel a $(2n \times 2n)$ méretű transzformációs mátrixot a bemenő adatvektor hosszához igazítva. A 8. ábrán a mátrix felépítése, a 9. ábrán pedig az algoritmus végrehajtása során kialakult adatvektorok szerkezete, és egyben a transzformáció lényege látható.

A transzformációs mátrixot (ez esetben a Daub4-et) az input $(y_1..y_{16})$ vektorra alkalmazzuk. Így megkapjuk a közelített (simított) $(a_1..a_8)$ adatvektort, amely át van lapolva az egyedi hatásokat tartalmazó különbségi $(d_1..d_8)$ adatokkal. Annak érdekében, hogy szétválasszuk a közelített és a különbségi adatokat, az eredményvektort átrendezzük (permutáljuk). A különbségi adatokat tároljuk, a közelítőket (simítottakat) pedig tovább transzformáljuk. Minden ismétlés a simított adatokat osztja két részre. Az eljárás bármelyik ponton félbeszakítható, de általában addig folytatjuk, amíg csak két pont nem marad. A végleges kimenet pontosan annyi adatpontot tartalmaz, amennyi a bemeneten volt.



8. ábra: A Daub4 transzformációs mátrix



9. ábra: A transzformáció végrehajtása (T – transzformálás, P – permutálás)

6. A waveletek alkalmazása

Közgazdasági idősorok elemzésénél klasszikus probléma a komponensekre való bontás: a trend, a szezonális komponens, az üzleti ciklus és a szabálytalan (véletlen) komponens szétválasztása. Mivel a dekompozíció nem egyértelmű és a komponensek sem függetlenek egymástól (mint ahogy azt a hagyományos dekompozíciós idősormodellek feltételezik), az egyes összetevők identifikálása nem egyszerű. Gazdasági idősorokban a szezonális komponenseket általában nem nehéz megtalálni. Először is többnyire jellemző az állandó periódus, ami havi adatok esetében 12 hónap. Másodszor, bizonyos feltételezések vagy az elmélet segít meghatározni az idősor szezonálisát. A hosszabb távú (egy évnél hosszabb ingadozású) ciklusok felkutatása már nehezebb feladat. Ezt a komponenset csak a szezonális komponens és a véletlen ingadozások kiküszöbölésével találhatjuk meg. Ugyancsak nehézséget jelent az egyes komponensek szétválasztásánál az, ha a szezonális komponens nem egészen szabályosan alakul. Mivel az idősorelemzés végső célja az előrejelzés, a dekompozíciót is ennek rendeljük alá. Általában ugyanis könnyebb előrejelezni az idősor egyes komponenseit mint az egész idősort. A wavelet elemzés ebben a dekompozícióban nyújt hasznos segítséget.

Az adatelemzés szempontjából a waveletek az adathalmaz által generált függvények ábrázolását segítik elő. Az adott 2^n méretű $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$ adatvektor a $[0, 1]$ -en, ami az

$$f(x) = y_k, \quad x \in [k/2^n, (k+1)/2^n] - \text{el} \quad (6.1)$$

definiált f függvényvel értelmezhető. Ez az f függvény négyzetesen integrálható és wavelet dekompozíciója

$$f(x) = c_{00}\phi(x) + \sum_j d_{jk}\psi_{jk}(x),$$

alakú, ahol $\phi(x)$ (lehet periodikus is) egy skálázó függvény.

Ha adott egy $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{N-1})$ sorozat, akkor ennek diszkrét Fourier-transzformáltja a

$$b_j = \sum_{l=0}^{N-1} a_l e^{-i(2\pi j/N)l}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.2)$$

által definiált másik $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ sorozat. A \mathbf{b} sorozat annak a sorozatnak a lineáris kombinációja, amelyik az időtartományból a frekvencia-tartományba vezet. Az \mathbf{a} és a \mathbf{b} a diszkrét Fourier-transzformáció *Fourier-együtthatói*. Hasonlóan, ha adott egy ψ_{jk} wavelet bázis, akkor az $N = 2^n$ dimenziójú \mathbf{y} adatvektorhoz rendelünk hozzá egy másik ugyanilyen dimenziójú

\mathbf{d} vektort (diszkrét wavelet transzformáció), amelyik \mathbf{y} vektorunkat az idő- és frekvenciatarományban ábrázolja. A \mathbf{d} vektor azokat az együtthatókat tartalmazza, amelyek az \mathbf{y} -t a kiválasztott wavelet bázisból előállítják. A \mathbf{d} elemei a

$$\mathbf{d} = (c_{00}, d_{10}, d_{11}, d_{20}, \dots, d_{n-1, 2^{n-1}}) \quad (6.3)$$

elrendezésben helyezkednek el, aholis c_{00} a skálázó függvény együtthatója. A c_{00} -án kívül van még egy másik 0-ás szintű d_{00} együttható, két 1-es szintű együttható (d_{10}, d_{11}) és általában 2^j számú j szintű $d_{j0}, d_{j1}, \dots, d_{j, 2^j - 1}$ együttható. (Az utolsó szint az $(n-1)$). Legvégül kiszámítjuk a \mathbf{d} skálagramját, ami a wavelet analógja a Fourier-analízisben szereplő periodogramnak. Ha a \mathbf{d} az \mathbf{y} diszkrét wavelet transzformációjának együtthatóvektora, akkor a \mathbf{d} "energiát" a j -edik szinten az

$$E(j) = \sum_{k=0}^{2^j - 1} d_{jk}^2, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (6.4)$$

képlet definiálja.

A \mathbf{d} skálagram a

$$(c_{00}^2, E(0), E(1), \dots, E(n-1)) \quad (6.5)$$

módon definiált energia-vektor. A DWT \mathbf{d} skálagramja az idősor különböző frekvenciájú ciklusokra való bontásához használható.

A gazdasági idősorokban legegyszerűbb esetben a 12 havi szezonális komponenst és a hosszútávú trendet keressük. Ezért célszerű egy \mathbf{x} gazdasági adatsor wavelet együtthatóinak skálagramjában két csúcspontot keresni. A 2^n dimenziójú $\mathbf{x} = (x_t)$ idősor dekompozíciója során leggyakrabban két ugyanolyan dimenziójú adathalmaz kapható: $\mathbf{y} = (y_t)$, és $\mathbf{z} = (z_t)$. Mindkettő külön-külön (x_t) ingadozásait ábrázolja különböző frekvenciákon.

Ha az \mathbf{x} wavelet dekompozíciójának j -edik alacsony szintjén a legtöbb d_{jk} együttható nagy, akkor ez azt jelenti hogy hosszú periódusú, alacsony frekvenciájú komponens van jelen az \mathbf{x} -ben. Ha ellenben a j -edik magas szinten a legtöbb együttható nagy, akkor rövid periódusú, magas frekvenciájú komponens található.

Vágjuk most ketté a $\mathbf{d} - t$ $\mathbf{d}^{(1)}$ -re és $\mathbf{d}^{(2)}$ -re, majd mindkét részre alkalmazzuk a ψ^{-1} inverz wavelet transzformációt. Ezáltal \mathbf{x} két komponensét azonosítottuk. Sőt, feltételezzük, hogy a \mathbf{d} skálagram két csúcspontja a $j_1 < j_2$ szinten van. Osszuk most a szintek $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ halmazát a két $\mathbf{A} = \{0, 1, \dots, j\}$ és $\mathbf{B} = \{j+1, \dots, n-1\}$ részhalmazra úgy, hogy az \mathbf{A} halmazban levő szintek a j_1 (első csúcspont szintje) körül, a \mathbf{B} halmaz szintjei pedig a j_2 (második csúcspont szintje) körül helyezkedjenek el. Ekkor a $\mathbf{d}^{(1)}$ és $\mathbf{d}^{(2)}$

a következőképpen definiálható:

$$\mathbf{d}^{(1)} = (c_{00}, d_{00}, d_{10}, d_{11}, \dots, d_{j0}, \dots, d_{j, 2^{n-1}-1}, 0, \dots, 0) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = (0, \dots, d_{j+1,1}, \dots, d_{j+1, 2^{j+1}-1}, \dots, d_{n-1, 2^{n-1}-1}) \quad (6.7)$$

és a komponensek, amelyekre \mathbf{x} -et bontottuk, a következők:

$$\mathbf{y} = \psi^{-1} \mathbf{d}^{(1)} \quad \text{és} \quad \mathbf{z} = \psi^{-1} \mathbf{d}^{(2)} \quad (6.8)$$

Általában az \mathbf{y} a gazdasági adatsor hosszú távú trendjét képviseli, ami gyakran összefügg más, a gazdaság üzleti ciklusait tükröző mutatókkal is. A \mathbf{z} gazdasági idősorok esetén leggyakrabban a 12 havi szezonális viselkedést követi, a szezonális ingadozás jellemző komponensének tekinthető, Természetesen, amennyiben a skálagramnak több csúcspontja is van, az idősorban több ciklus is azonosítható.

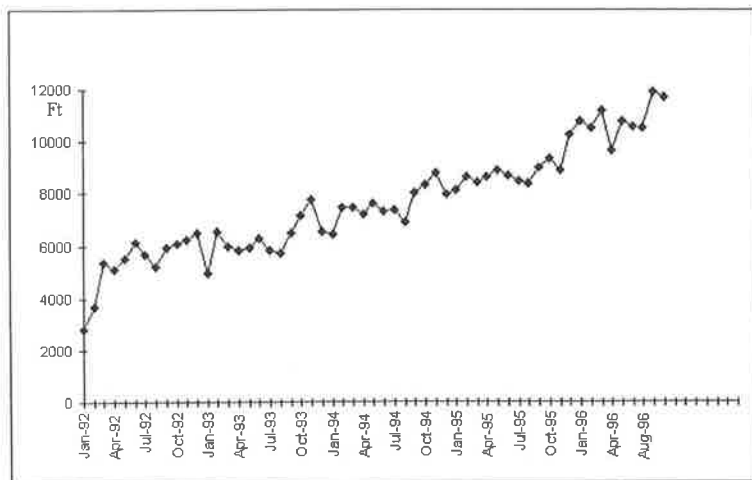
7. Illusztratív példa

Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogy hogyan lehet DWT és a skálagram segítségével egy idősor komponenseit megtalálni és szétválasztani. A vizsgált idősor a távközlési piacon kialakult átlagos számlaértéket ábrázolja havi gyakorisággal 1992 és 1996 között (57 hónap). Az idősor, melyen a DWT működését demonstráljuk, a 10. ábrán látható.

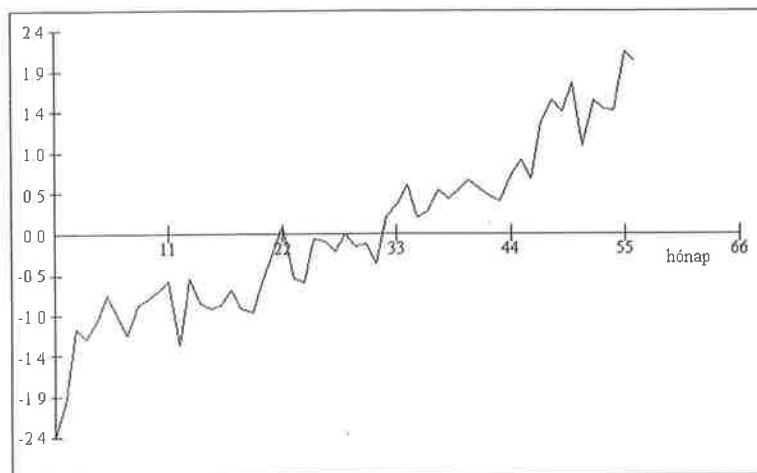
Az egyszerűség kedvéért a megadott időorból kivonjuk annak átlagát, elosztjuk a szórásával, és a megmaradt zero-átlagú és egységnyi varianciájú idősorhoz (11. ábra) alkalmazunk diszkrét wavelet transzformációt.

Az elemzéshez először wavelet bázist kell választani; legyen ez a DAUB/4. A bemenő adatok és az eredmények egy részét (első 24 megfigyelés) az 1. táblázatban mutatjuk be. Mivel a DWT-hez a kiinduló adatsor hossza 2^n kell hogy legyen, a hiányzó számok 0-val pótolhatók. Így feladatunkban a DWT munka- és eredményvektor hossza 64 lett.

A "fogyar" oszlopban az eredeti adatsor, a "z-score" - ban a standardizált adatsor, a "Daub4DWT"-ben a DWT együtthatók, a "Band33-64"-tól a "Band1-4"-ig az együtthatókból visszanyert részletes idősorok található "frekvenciasáv" bontásban. Az utolsó 5 oszlop adatai az együtthatók oszlopaiból az inverz transzformációval kaphatók. A kiinduló adatsor (ebben az esetben a z-score) az utolsó 5 oszlop soronkénti összege. A skálagram, mely a "Daub4DWT" oszlopból (6.3 képlet) számítható ki a (6.5) képlet szerint, a 12. ábrán látható. A c_{00} -ás szint (állandó komponens) az ábrán nem szerepel.



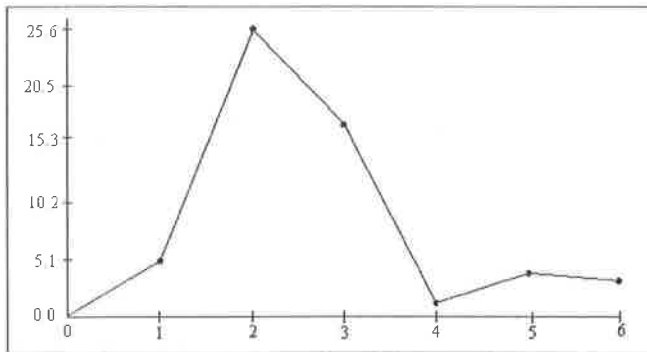
10. ábra: Az átlagos számlaérték alakulása



11. ábra: A standardizált számlaérték idősorának alakulása

ho	month	fogyar	" z-score"	" Daub4 DWT"	" Band 33-64"	" Band 17-32"	" Band 9-16"	" Band 5-8"	" Band 1-4"
1	Jan-92	2784	-2.39928	-3.0364E-07	-0.437469268	-0.616778002	0.01240274	-1.1201808	-0.2372561
2	Feb-92	3700	-1.94273	2.192150081	-0.45146374	-0.332716769	-0.12224553	-0.7301934	-0.3061107
3	Mar-92	5345	-1.12283	3.218991505	0.271007485	-0.291471107	-0.22629278	-0.5038855	-0.3721699
4	Apr-92	5120	-1.23498	-3.899122795	-0.060896159	0.002409894	-0.29973901	-0.441257	-0.4354937
5	May-92	5540	-1.02564	1.380779799	0.038540934	0.22859746	-0.38138476	-0.3347708	-0.4995412
6	Jun-92	6130	-0.73157	0.093319788	0.242247489	0.081116546	-0.10216009	-0.3919641	-0.5608133
7	Jul-92	5650	-0.97081	0.230637471	-0.056815113	0.033759798	0.08036964	-0.4052995	-0.622829
8	Aug-92	5205	-1.19261	-3.88682671	-0.237383302	-0.061065875	0.16620444	-0.3747772	-0.6855884
9	Sep-92	5905	-0.84372	0.683840079	0.125661334	-0.143172288	0.27794857	-0.3560066	-0.7481486
10	Oct-92	6070	-0.76148	-0.088244205	-0.022800061	0.116153289	0.13194572	-0.1788441	-0.8079333
11	Nov-92	6220	-0.68672	0.197943759	-0.113129778	0.28399244	0.05500597	-0.0441226	-0.8684617
12	Dec-92	6480	-0.55713	-0.142365139	0.312670303	-0.035350664	0.04712931	0.0481579	-0.9297338
13	Jan-93	4955	-1.31722	-0.09611798	-0.274812519	-0.224153676	0.02074725	0.1518105	-0.9908066
14	Feb-93	6525	-0.5347	0.677306438	0.274027931	0.010065402	0.02080961	0.2130221	-1.0526231
15	Mar-93	5955	-0.8188	-0.082665889	-0.134884296	0.130936052	0.0137862	0.2856057	-1.1142403
16	Apr-93	5830	-0.8811	-0.17304763	-0.087489797	0.012810726	-0.00032296	0.3695613	-1.1756582
17	May-93	5910	-0.84123	0.495450913	-0.000756411	-0.04127582	-0.0125335	0.4504698	-1.2371296
18	Jun-93	6260	-0.66678	-0.147593094	0.172269257	-0.102790817	-0.04528699	0.2422272	-0.9331976
19	Jul-93	5825	-0.88359	-0.395695829	-0.033026779	-0.162315367	-0.07253602	0.1114624	-0.7271752
20	Aug-93	5735	-0.92845	-0.125647549	-0.188646371	-0.084634805	-0.09428057	0.0581754	-0.6190623
21	Sep-93	6476	-0.55912	0.135214665	0.102684061	-0.043718241	-0.11750004	-0.0158717	-0.4847146
22	Oct-93	7155	-0.22069	-0.661675785	0.037789952	0.241848623	-0.03961556	-0.012441	-0.4482765
23	Nov-93	7764	0.082842	-0.10987374	0.025176483	0.461861636	0.01117821	-0.0297705	-0.3856035
24	Dec-93	6534	-0.53021	0.195455946	-0.155182806	-0.045354986	0.03488124	-0.06786	-0.2966958

1. táblázat: Kiinduló adatok és DWT transzformáció



12. ábra: Skálagram

ho	fogyar	z-score	Daub4 DWT	scalogram	trendlow	Daub4 InvDWT	sezonhigh	Daub4 InvDWT
1	2784	-2.399281	-3.0364E-007	9.2197E-014	-3.0364E-007	-1.357436968	0	-1.041844521
2	3700	-1.94273	2.192150081	4.80552198	2.192150081	-1.036304136	0	-0.9064260214
3	5345	-1.122832	3.218991505	25.5650649	3.218991505	-0.8760753992	0	-0.2467564255
4	5120	-1.234976	-3.899122795	17.075877	-3.899122795	-0.8767507581	0	-0.3582252858
5	5540	-1.02564	1.380779799	1.03963567	1.380779799	-0.8343119945	0	-0.1913282434
6	6130	-0.731573	0.093319788	4.12766886	0.093319788	-0.9527773267	0	0.2212039393
7	5650	-0.970814	0.230637471	2.04349377	0.230637471	-1.028128536	0	0.05731433675
8	5205	-1.19261	-3.88682671		-3.88682671	-1.060365623	0	-0.1322447417
9	5905	-0.843718	0.683840079		0	-1.104155105	0.68384008	0.2604376227
10	6070	-0.761478	-0.088244205		0	-0.966774222	-0.0882442	0.2252989531
11	6220	-0.686716	0.197943759		0	-0.9125843511	0.19794376	0.2258686344
12	6480	-0.557127	-0.142365139		0	-0.8815758914	-0.14236514	0.3244489588
13	4955	-1.317215	-0.09611798		0	-0.8389961499	-0.09611798	-0.4782189552
14	6525	-0.534698	0.677306438		0	-0.8396010199	0.67730644	0.3049029427
15	5955	-0.818797	-0.082665889		0	-0.8286346081	-0.08266589	0.00983795207
16	5830	-0.881099	-0.17304763		0	-0.8060969146	-0.17304763	-0.07500203277
17	5910	-0.841225	0.495450913		0	-0.7866597367	0.49545091	-0.05456573095
18	6260	-0.666779	-0.147593094		0	-0.6909704432	-0.14759309	0.02419144097
19	5825	-0.883591	-0.395695829		0	-0.6157128425	-0.39569583	-0.2678781691
20	5735	-0.928449	-0.125647549		0	-0.5608869346	-0.12564755	-0.3675617523
21	6476	-0.559121	0.135214665		0	-0.5005863712	0.13521466	-0.05853422667
22	7155	-0.220694	-0.661675785		0	-0.4807175005	-0.66167578	0.240023027
23	7764	0.0828424	-0.10987374		0	-0.4153739742	-0.10987374	0.4982163442
24	6534	-0.530212	0.195455946		0	-0.3645557923	0.19545595	-0.1656565537
25	6450	-0.572079	-0.412630169		0	-0.31520454	-0.41263017	-0.256874948

2. táblázat: Az idősor komponenseinek szétválasztása

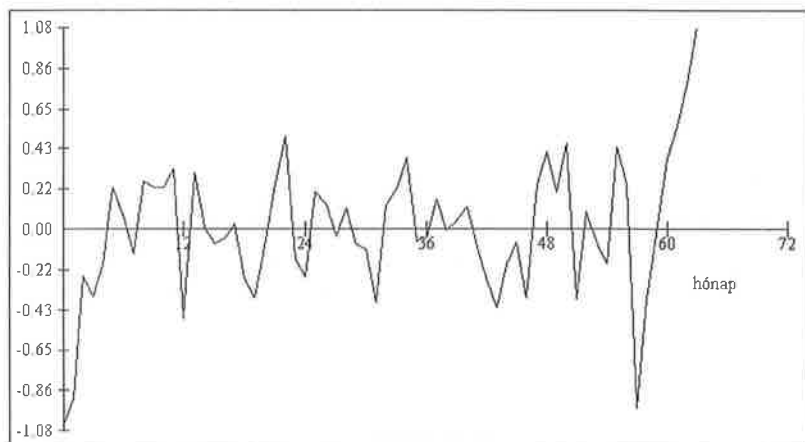
A grafikonon két csúcspont vehető észre: a 2 és 5 szinten. Ekkor a (6.6)-os és a (6.7)-es magyarázat szerint d -t felosztjuk $d^{(1)}$ -re és $d^{(2)}$ -re. A $d^{(1)}$ -be 0,1,2,3 szintű együtthatók a $d^{(2)}$ -be pedig 4,5,6 szintű együtthatók kerülnek. Az így felosztott két együtthatóhalmazra külön-külön alkalmazunk inverz DWT transzformációt. Az eljárás lebonyolításának módja a 2. táblázatban követhető. (A táblázat ezúttal is csak az első 24 értékre vonatkozó eredményeket mutatja.)

A TRENDLOW oszlopban a $d^{(1)}$ a SEZONHIGH oszlopban a $d^{(2)}$ együtthatók találhatók. Ezekből kaphatók inverz transzformáció után azok az adatsorok, amelyek a táblázatban közvetlenül a megfelelő együtthatóoszlop után következnek. A Daub4InvDWT nevű 7. oszlop a számított hosszútávú komponens, a 9. oszlop pedig a szezonális ingadozások standardizált, becslött idősorát mutatja. (A kettő összege minden időpontban kiadja a z-score 3. oszlopban található megfigyeléseit.) A szezonális normalizált idősor a 13. ábrán látható. Érdeemes figyelni arra, hogy a szezonális komponens ez esetben —eltérően a szokásostól— nem mutat teljesen szabályos, ismétlődő formát.

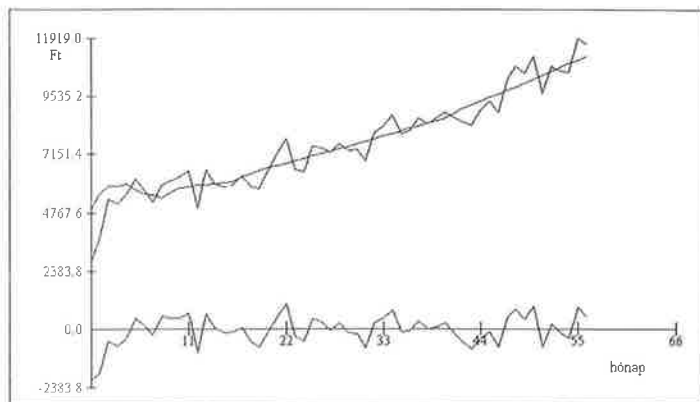
Az eredeti idősorra visszatérve (visszafelé alkalmazva a standardizálást) most már megkaphatók az x_t idősor azonosított komponensei. A x , y és z összevont diagramja a 14. ábrán látható, ahol a felső tört görbe az eredeti adatsort (FOGYAR), simított görbe a trendet és az alsó tört görbe a szezonális komponenst ábrázolja. Ez valójában az elemzés végeredménye.

A diagramból jól látható, hogy a fogyasztói ár növekvő tendenciát mutat és minden évben ismétlődő, bár nem teljesen szabályos ingadozásoknak van kitéve.

Ezzel a kis bevezető jellegű példával azt mutattuk meg, hogy a wavelet analízis alkalmas az idősorok belső struktúrájába való betekintésre, és ezáltal az elemzés, valamint az előrejelzés hasznos eszköze lehet.



13. ábra: A standardizált változó szezonális idősora



14. ábra: Az átlagos számlaérték idősorának komponensei

Irodalom

1. Arino, M. A.: Time series forecasts via wavelets: an application to car sales in the Spanish market., Discussion Paper 95-30, ISDS, Duke University, 1996.
2. Arino, M. A. and Vidacovic B.: On wavelet scalograms and their applications in economic time series, Discussion Paper, 95-21, ISDS, Duke University, 1995.
3. Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets. SIAM, CBMS-NST Conference Series, 61, 1992.
4. Graps, A.: An Introduction to Wavelets. IEEE Computational Science and Engineering, Vol. 2, num. 2, 1995.
5. Morettin, P. A.: From Fourier to Wavelet Analysis of Time Series. Department of Statistics, University of Sao Paulo, 1996.
6. Pintér I.: Beszédjelek perceptuális wavelet-reprezentációja és zajos beszéd tisztítása. Híradástechnika, XLV, 1994, szept.

WAVELETS AND THEIR APPLICATION IN ANALYZING TIME SERIES

Wavelets are mathematical functions that cut up data into different frequency components, and then study each component with a resolution matched to its scale. They have advantages over traditional Fourier methods in analyzing physical situations where the signal contains discontinuities and sharp spikes. This paper introduces wavelets to the interested economic persons outside of the digital signal processing field. We shortly mention about prehistory of wavelets, compare wavelet

transform with the well known Fourier transform. For the purpose of best understanding we introduce effective Daubechies algorithm for Fast Wavelet Transform (FWT) with application to telecommunication time series. We use scalogramm to separate the final result into low and high frequency components.

A VÉLETLEN ADAGOLÁSI SZABÁLY ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK PIACI FELTÉTELEI

TASNÁDI ATTILA

Ph.D. hallgató, BKE Matematika Tanszék

A klasszikus duopol modellekben az ár vagy pedig a kínált mennyiség a döntési változó. A másik változó értéke a modell összefüggései alapján meghatározható. A Bertrand-Edgeworth típusú modellekben ezzel szemben mindkét duopolista szimultán módon hozza meg az ár és a mennyiségi döntéseit. Mivel a két változó egyszerre döntési változó, problémát okoz, hogy önmagában a keresleti görbe ismerete nem elégséges a magasabb áron kínáló duopolista keresletének meghatározásához. Ezt a problémát egy úgynevezett adagolási szabály bevezetésével szokták feloldani. A Bertrand-Edgeworth duopólium részletes ismertetése megtalálható többek között Tirole [12] művének 5. fejezetében. Az általunk vizsgált véletlen adagolási szabály a Bertrand-Edgeworth típusú modelleknél előszeretettel használt két adagolási szabály egyike. A másik a hatékony adagolási szabály, amellyel most külön nem kívánunk foglalkozni. A továbbiakban csak duopol szituációkat vizsgálunk.

Először egy rövid áttekintést adunk a Bertrand-Edgeworth duopóliumokról, hogy érzékelhető legyen az adagolási szabályok szerepe. Majd kitérünk külön az adagolás fogalmára. Ezek után rátérünk a véletlen adagolási szabály irodalomban fellelhető levezetési módjaira. Végezetül pedig egy alternatív levezetési módot adunk a véletlen adagolási szabályra megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében.

1. Bertrand-Edgeworth duopóliumok

A Bertrand-Edgeworth duopóliumokban az ár és a mennyiség egyszerre döntési változók. A modellnek létezik homogén és differenciált termékű változata. Mi a továbbiakban a homogén termékű esetet vizsgáljuk. A differenciált változatot illetően lásd Benassy-t [4].

A parciális megközelítésben a fogyasztói oldal az aggregált keresleti görbével adott. Ez további információk hiányában egy alulspecifikált modellt eredményez. Nevezetesen a parciális elemzés keretei között maradván, az aggregált keresleti görbe önmagában nem nyújt elegendő támpontot a magasabb áron kínáló vállalat keresletének meghatározásához. Az információ hiányát

egy úgynevezett adagolási szabály segítségével pótolhatjuk. Az aggregált keresleti görbe az adagolási szabállyal együttesen már elegendő információt hordoz mindkét vállalat értékesítésének meghatározásához. Megjegyzendő, hogy az aggregált keresleti görbe ismerete akkor elégséges, ha az alacsonyabb áron kínáló duopolista lefedi az egész piacot. Ez a helyzet áll fenn a Bertrand duopóliumban. Azonban a Bertrand-Edgeworth duopólium esetében az alacsonyabb áron kínáló vállalat nem képes vagy nem érdekelt a piac teljes lefedésében. Az előbbi viselkedés oka lehet a kapacitások korlátos volta, míg az utóbbi viselkedést okozhatja egy U-alakú határkölségfüggvény.

Számtalan elképzelhető adagolási szabály lehetséges. Az irodalomban a két leggyakrabban alkalmazott adagolási szabály a hatékony és a véletlen adagolási szabály.

2. Adagolási szabályok

Adjunk egy, az elemzéseinknek megfelelő definíciót az adagolási szabályra. Ehhez előbb vezessük be a $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ jelölést a megengedett keresleti függvények halmazára.

2.1 Definíció. Adagolási szabálynak nevezzük azt a leképezést, amely az aggregált keresleti görbe, a vállalatok árainak és kínált mennyiségeinek ismerete alapján megadja az egyes termelők által értékesíthető termék mennyiségeket. Formálisan egy duopol piacon adagolási szabály egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ alakú leképezés.

A véletlen adagolási szabály esetében az alacsonyabb áron kielégített kereslet és az összkereslet aránya állandó. Az alábbi definícióból látható, hogy ez az arány $1 - q_i/D(p_i)$. Emiatt a véletlen adagolási szabályt az irodalomban arányos adagolási szabálynak is nevezik. A véletlen jelző használatának oka a következő szakaszban válik világossá.

2.2 Definíció. Egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ adagolási szabályt *véletlennek* nevezünk, ha $\forall j \in [1..2]$:

$$h_j(D, p_1, p_2, q_1, q_2) := \begin{cases} D(p_j) & \text{ha } p_j < p_i, i \neq j; \\ \frac{q_i}{q_1 + q_2} D(p_j) & \text{ha } p_j = p_i, i \neq j; \\ \max\left(0, \left(1 - \frac{q_i}{D(p_i)}\right) D(p_j)\right) & \text{ha } p_j > p_i, i \neq j. \end{cases}$$

2.3 Definíció. A magasabb áron kínáló vállalat terméke iránti fogyasztói keresletet *reziduális keresletnek* nevezzük. Jele $D_{i..}$.

3. A véletlen adagolási szabály alkalmazhatósága

Tisztázandó kérdés, hogy milyen piaci helyzetekben lehet a véletlen adagolási szabályt alkalmazni. Sajnos, az irodalomban sok helyütt heurisztikus, pongyola vagy pontatlan levezetések találhatók. Ezért ebben a szakaszban az irodalomban található levezetéseket tekintjük át, és ott, ahol szükséges, az adott levezetést pontosítjuk.

A levezetések szükségessé teszik a modellünkben a fogyasztói oldal részletezését. Mint már említettük, a keresleti görbe nem nyújt számunkra elegendő információt. A fogyasztói oldalt az egyéni keresleti görbék megadásával gazdagítjuk. Ekkor meg kell még adnunk, hogy az alacsonyabb áron kínáló vállalat mely fogyasztókat szolgálja ki előbb. Nyilván a reziduális keresletet azok a fogyasztók fogják majd alkotni, akik az alacsonyabb áron nem jutottak a termékhez. A véletlen adagolási szabályt azt feltételezi, hogy a kiszolgálás sorrendje véletlenszerű. Ezzel a véletlen adagolási szabály elnevezés is értelmet nyert.

3.1 Azonos egyéni keresleti görbék

A következő gondolatmenet megtalálható Wolfstetter [15] művében. Tegyük fel, hogy mindegyik fogyasztó keresleti görbéje azonos ($d(p)$) továbbá, hogy $I < \infty$ véges sokan vannak, valamint mindegyik fogyasztó ugyanakkora eséllyel jut az alacsonyabbik áron a termékhez. Legyen az első termelő ára az alacsonyabbik, azaz $p_1 < p_2$ és kínálata q_1 . A számunkra érdekes esetben $q_1 < I \cdot d(p_1)$. Nyilván $M := \left\lfloor \frac{q_1}{d(p_1)} \right\rfloor$ személy szolgálható ki maradéktalanul. Ha $d(p_1)$ nem osztója q_1 -nek, akkor lesz egy olyan személy, akinek a kereslete csak részben elégíthető ki az alacsonyabb áron. Ekkor ezt a fogyasztót határfogyasztónak nevezzük.

Nézzük először azt az esetet, amikor $d(p_1)$ osztója q_1 -nek. Ekkor a reziduális kereslet $D_r(p) = (I - M)d(p) = \left(1 - \frac{M}{I}\right)D(p) = \left(1 - \frac{q_1}{I d(p_1)}\right)D(p)$. Azaz valóban a véletlen adagolási szabályt kaptuk.

Ha $d(p_1)$ nem osztója q_1 -nek, akkor és csak is akkor kapjuk meg pontosan a véletlen adagolási szabályt, ha a határfogyasztó a véletlen adagolási szabály szerint fogyaszt. Ez csak speciális hasznossági függvény esetében következhet be. Egy fogyasztó korlátozott kínálat mellett hasznosság maximalizációs döntésének vizsgálatával, többek között Howard [9] és Neary és Roberts [11] foglalkoztak. Ők viszont nem teremtettek kapcsolatot az optimális döntés és az adagolási szabályok között. Ez egy külön tanulmány tárgya lehet. Most beérjük azzal, hogy ha a fogyasztók száma nagy, akkor megközelítőleg a véletlen adagolási szabály valósul meg, ekkor ugyanis a határfogyasztó döntése elhanyagolhatóvá válik.

3.2 A fogyasztók eloszlása atommentes

Egy másik megközelítés szerint, ha a fogyasztók ár szerinti eloszlásmértéke atommentes¹, akkor (egy segédfeltevés mellett) megkapható a véletlen adagolási szabály. Ez a megközelítés található meg Allen és Hellwig [1] valamint Gelman és Salop [8] műveiben.

A fogyasztók halmazán adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér. Az egyes fogyasztók keresletét a $d : \mathbb{R}_{++} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ függvény írja le, ahol $d(p, a)$ az $a \in \Omega$ fogyasztó p ár melletti kereslete. Ekkor az aggregált kereslet $D(p) = \int_{\Omega} d(p, a) d\mu(a)$. A véletlen adagolási szabály biztosításához fel kell tételeznünk, hogy nincs szignifikáns különbség az alacsonyabb áron kiszolgált és a kiszolgáltatlan fogyasztók között. Formálisan legyen $A_1 \subset A$ azon fogyasztók halmaza, akiket kiszolgáltak az alacsonyabb áron, és legyen $B_1 = A \setminus A_1$ a maradék fogyasztók halmaza. Ekkor a $\forall p \in \mathbb{R}_{++}$:

$$\int_{A_1} d(p, a) d\mu(a) = \mu(A_1)D(p) \quad (1)$$

és

$$\int_{B_1} d(p, a) d\mu(a) = \mu(B_1)D(p) \quad (2)$$

feltevések szükségesegek.

Belátjuk, hogy az (1) és a (2) feltevések valóban biztosítják a véletlen adagolási szabály megvalósulását. Most is tegyük fel, hogy $p_1 < p_2$. Nyilván a $D(p_1) > q_1$ eset az érdekes, különben a reziduális kereslet értéke nulla. Ekkor $q_1 = \int_{A_1} d(p_1, a) d\mu(a) = \mu(A_1)D(p_1)$, az (1) feltevés miatt. Átalakítva $\mu(A_1) = q_1/D(p_1)$. Ezt és a (2) feltevést felhasználva a másik vállalat kereslete

$$\int_{B_1} d(p_2, a) d\mu(a) = \mu(B_1)D(p_2) = (1 - \mu(A_1))D(p_2) = \left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)}\right) D(p_2),$$

ami pontosan a véletlen adagolási szabály szerinti reziduális kereslettel egyezik meg.

A fenti megközelítés kétségkívül nagyon elegáns, mégis kritizálható. Egyrészt az atommentes eloszlásmérték feltételezése megszámlálhatónál több fogyasztót tételez fel. Másrészt az (1) és (2) feltevések nem igazán szemléletesek. Könnyen igazolható, hogy például amennyiben az összes fogyasztó keresleti görbéje azonos, akkor ez utóbbi két feltétel teljesül. Továbbá kritizálható még, hogy a fenti megközelítésből nem vonható le aszimptotikus

¹ Az $A \subset \Omega$ egy atom az $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben, ha $\mu(A) > 0$ és a $B \subset A$ tartalmazásból következik, hogy $\mu(A) = \mu(B)$ vagy $\mu(B) = 0$. A μ mértéket atommentesnek mondjuk, ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nem tartalmaz atomot.

következtetés, vagyis a modell véges, de sok fogyasztó esetében semmiféle következtetésre nem jogosít fel. Ezt a három kifogást kiküszöböli a következő szakaszban megszámlálható sok fogyasztóra bemutatott levezetés.

3.3 Véletlen minta

Egy heurisztikus indoklást ad Osborne [10] a véletlen adagolási szabály alkalmazhatóságára. A feltételeket külön kiemeljük, mivel a későbbiek során még használni fogjuk.

3.1 Feltevés. Mindegyik fogyasztó pontosan $0 < \alpha < \infty$ mennyiséget hajlandó vásárolni, mégpedig legfeljebb rezervációs árán (r). Azaz keresleti görbéje

$$d(p) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } p \leq r; \\ 0, & \text{ha } p > r \end{cases}$$

alakú. Az ilyen alakú keresleti görbéket a továbbiakban α paraméterű elfajult keresleti görbéknek nevezzük.

3.2 Feltevés. Mindegyik fogyasztó ugyanakkora eséllyel juthat az olcsóbbik termékhez. Ez definiál egy valószínűségi mértéket a fogyasztók terén.

A levezetés szerint a 3.1, 3.2 feltevések és $\alpha = 1$ paraméterérték mellett, ha az adagolási szabályt úgy próbáljuk meghatározni, hogy egy véletlen minta alapján rendeljük hozzá az alacsonyabb (p_1) áron vásárolni kívánó fogyasztókat a q_1 kínálathoz, akkor bármely rezervációs áron a fogyasztók $q_1/D(p_1)$ hányada lesz kiszolgálva az alacsonyabb áron. Ezzel az érveléssel az a baj, hogy valójában nem mintavételről van szó, ugyanis a mintaelemszám nem kicsi az alapsokaság elemszámához képest, mivel a $D(p_1)$ fogyasztóból egy q_1 elemű minta vételéről lenne szó. Az, hogy ez a heurisztikus érvelés megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében mégis helyes eredményhez vezet, a következő szakaszban leírt hipergeometriai eloszlásra vonatkozó háttérelslási tétel miatt igaz.

3.4 A kiszolgálás valószínűsége azonos

Egy másik heurisztikus indoklás a véletlen adagolási szabály alkalmazhatóságára található Tirole [12] művében (a 213-214 oldalon). A baj az, hogy azok a feltételek, amelyek mellett heurisztikusan érvel nincsenek a művében pontosan leírva. Feltevése szerint minden egyes fogyasztó azonos valószínűséggel juthat hozzá az alacsonyabb árú termékhez. Tegyük fel, hogy most is teljesül a 3.1 feltevés, méghozzá $\alpha = 1$ paraméter mellett. Ha most azt mondjuk, hogy mindenki $q := q_1/D(p_1)$ valószínűséggel juthat hozzá az alacsonyabb áron a termékhez, akkor véges sok fogyasztó esetében nyilván ilyen módon egyáltalán nem biztos, hogy pontosan q_1 darab terméket osztunk szét.

A fenti gondolatmenet helytálló, ha kontinuum sok fogyasztó van. Célszerű a feladatot a $[0, 1]$ intervallumra transzformálni. Legyen $X = [0, 1]$ azon fogyasztók halmaza, akik az alacsonyabb áron vásárolni szeretnének. Vezessük be továbbá az $Y := \{0, 1\}$ jelölést. Jelölje $M \subset Y^X$ az összes $X \rightarrow Y$ Borel mérhető leképezések halmazát. M a $[0, 1]$ Borel halmazaihoz tartozó karakterisztikus függvények halmaza. Egy adott $f \in M$ függvény $f(x)$ helyen felvett értéke ($x \in X$) megadja, hogy az x fogyasztó hozzájutott-e az alacsonyabb áron a termékhez. Az $\int_A f d\lambda$ érték megadja, hogy összesen az A -beli fogyasztók hányad része jutott a p_1 áron a termékhez (ahol $f \in M$, $A \in \mathcal{B}(X)$) és λ a Lebesgue-Borel mérték). Ahhoz, hogy pontosan annyi terméket osszunk szét, mint amennyi a kínálat az $\int_X f d\lambda = q$ feltételnek kell teljesülnie.

Tekintsük az $\Omega_t := Y = \{0, 1\}$ alaphalmazokat és a hozzá tartozó $\mathcal{A}_t := \mathcal{P}(\{0, 1\})$ σ -algebrákat, ahol t befutja a $[0, 1]$ intervallumot. Definiáljuk az $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ mérhető téren a μ_t valószínűségi mértéket az alábbi módon:

$$\mu_t(B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } B = \emptyset; \\ q, & \text{ha } B = \{1\}; \\ 1 - q, & \text{ha } B = \{0\}; \\ 1, & \text{ha } B = \Omega_t. \end{cases} \quad (3)$$

Jelöljön továbbá $\xi_t : \Omega_t \rightarrow \{0, 1\}$ olyan valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_t(\omega) = \omega$. Legyenek az így definiált μ_t valószínűségi mértékek függetlenek egymástól. A függetlenségük miatt egyértelműen létezik (lásd például Bauer [3] 9.2 tételét) az $(Y^X, \mathcal{P}(Y^X))$ mérhető téren egy olyan μ valószínűségi mérték, amelyre:

$$\forall J \subset [0, 1] : |J| < \infty, Pr_{\cdot, J}(\mu) = \prod_{t \in J} \mu_t,$$

ahol a Pr egy projekciós operátor. A μ mértéket explicite nem tudjuk megadni, de ez nem is szükséges a probléma megoldásához.

Vezessük be az $r := \frac{D(p_2)}{D(p_1)}$ jelölést. Legyenek a fogyasztók úgy rendezve, hogy a legalább p_2 rezervációs árú fogyasztók a $[0, r]$ intervallumon helyezkedjenek el. Ekkor $\int_0^r f d\lambda$ értéke megadja, hogy a magasabb rezervációs árú fogyasztók hányad része jutott hozzá a p_1 áron a termékhez. A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye alapján $\eta_n := \sum_{i=1}^n \xi_{t_i} r \frac{1}{n} \rightarrow qr$ egy valószínűséggel, ha $n \rightarrow \infty$, ahol $t_i \in [r \frac{i-1}{n}, r \frac{i}{n}]$. Az η_n egy Riemann-féle integrálközelítő összeg. Ezért ha $f \in Y^X$ a ξ valószínűségi változó egy realizációja, akkor f Riemann-féle integrálja 1 valószínűséggel létezik és méghozzá 1 valószínűséggel qr . Az eredmény helyes, ugyanis speciálisan ha $r = 1$, akkor az integrál értéke q , vagyis valóban pontosan $qD(p_1)$ mennyiségű alacsonyabb áron kínált termék talál gazdára. Tehát beláttuk, hogy $\frac{D(p_2) - D_r(p_2)}{D(p_1)} = qr$, amely átalakításával megkapható az alábbi tétel:

3.3 Tétel. A 3.1, 3.2 és $I = \aleph_1$ feltételek mellett a reziduális kereslet 1 valószínűséggel:

$$D_r(p_2) = D(p_2)(1 - q) = D(p_2) \left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)} \right), \quad (4)$$

ahol $p_1 < p_2$, $p_1 \in \mathbb{R}_+$, $p_2 \in \mathbb{R}_+$ és $q_1 \leq D(p_1)$.

4. Megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esete

Ebben a szakaszban a véletlen adagolási szabályt vezetjük le megszámlálható sok fogyasztó esetében a 3.1 és 3.2 feltételek mellett.

4.1 Végés számú fogyasztók esete elfajult keresleti görbék mellett

Tegyük fel egyelőre, hogy a fogyasztók száma véges azaz $I < \infty$. Legyenek a d_i egyéni keresleti görbék $1/I$ paraméterű elfajult keresleti görbék. Az egyéni keresleti görbék horizontális összegzéséből kapott aggregált keresleti görbét jelölje a $Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ leképezés, ahol $Q := \sum_{i=1}^I d_i$.

4.1 Jelölés. Vezessük be a $H_k(N, M, n) = \frac{\binom{M}{n} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ jelölést. Azaz $H(N, M, n)$ az N, M, n paraméterű hipergeometriai valószínűségi eloszlást jelöli.

4.2 Tétel. Legyen $p_1 < p_2$, $p_1 \in \mathbb{R}_+$, $p_2 \in \mathbb{R}_+$, q_1 az alacsonyabb áron kínált termékmennyiség. Teljesüljön a 3.1 feltétel $1/I$ paraméterrel, továbbá álljanak fenn a 3.2, $I < \infty$ és $q_1 < D(p_1)$ feltételek. Ha még $I \cdot q_1 \in \mathbb{N}$ is fennáll, akkor a reziduális kereslet eloszlása az alábbi:

$$D_r(p_2) = \frac{1}{I} H(I \cdot Q(p_1), I \cdot Q(p_2), I \cdot q_1). \quad (5)$$

Bizonyítás. A Q keresleti görbét úgy is megkaphatjuk, hogy a fogyasztókat rezervációs áraik szerint csökkenőleg sorbarendezzük. Minden fogyasztó pontosan $1/I$ egységet igényel. A sorban elfoglalt pozíciójuk alapján indexelt fogyasztói indexhalmazt jelölje \mathcal{I} . Azon fogyasztók halmazát, akik hajlandóak megadni a p_2 összeget jelölje M_2 , míg azon fogyasztók halmazát, akik a magasabb árért nem veszik meg a terméket, de az alacsonyabb árért még igen, jelölje M_1 . Formálisan $M_1 := \{i \in \mathcal{I} : p_1 \leq r_i < p_2\}$ és $M_2 := \{i \in \mathcal{I} : p_2 \leq r_i\}$. Nyilván $Q(p_1) - Q(p_2) = |M_1|/I$, $Q(p_2) = |M_2|/I$ és $M_1 \cup M_2 \subseteq \mathcal{I}$. Az M_2 halmazba tartozó fogyasztók p_2 -nél olcsóbban is

hozzájuthatnak a termékhez. Jelölje a ξ valószínűségi változó azon M_2 halmazbeli fogyasztók számát, akik p_1 áron hozzájutnak a termékhez. Az ilyen fogyasztók száma $I \cdot q_1$. Mivel feltettük, hogy mindegyik fogyasztó személyes értékítéletétől függetlenül egyenlő eséllyel indul a termék megszerzésére, ezért összesen $\binom{|M_1|+|M_2|}{I \cdot q_1}$ féleképpen szerezhetik az $M_1 \cup M_2$ halmazbeli (vagyis a p_1 áron vásárolni szándékozó) fogyasztók a q_1 darab olcsóbbik terméket. ξ nyilván hipergeometriai eloszlású, ezért

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{|M_2|}{k} \cdot \binom{|M_1|}{I \cdot q_1 - k}}{\binom{|M_1|+|M_2|}{I \cdot q_1}}$$

Figyelembe véve M_1 és M_2 jelentését a tételt bebizonyítottuk. \square

4.3 Megjegyzés. A reziduális kereslet várható értéke pontosan a véletlen adagolási szabályt adja.

4.4 Megjegyzés. A $I \cdot q_1 \in \mathbb{N}$ feltétel azért szükséges, mert különben a reziduális kereslet értéke, még attól is függne, hogy az a fogyasztó, akinek kereslete csak részben teljesíthető p_1 áron, a magasabb vagy az alacsonyabb rezervációs áru fogyasztók köréből kerül ki. Vezessük be a $\tilde{q}_1 = \lfloor I \cdot q_1 \rfloor$ jelölést. A későbbiekben szükségünk lesz arra a könnyen igazolható megállapításra, hogy ha I elég nagy, akkor a reziduális kereslet eloszlása

$$D_r(p_2) \approx \frac{1}{I} H(I \cdot Q(p_1), I \cdot Q(p_2), \tilde{q}_1). \quad (6)$$

4.2 A hipergeometriai eloszlás egy határeloszlása

A megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztóra való áttéréshez szükségünk lesz a hipergeometriai eloszlás egy speciális határeloszlására, amelyben a „selejtarány” mellett a kiválasztási arány is állandó marad. Tekintettel arra, hogy az alábbi tétel bizonyítása nem szerepel standard valószínűségszámítási könyvekben, a tétel egy bizonyítását is megadjuk.

4.5 Tétel. Legyen $x_k := \frac{k - \mu(N, M, n)}{\sigma(N, M, n)}$, ahol $\mu(N, M, n) := n \frac{M}{N}$ és $\sigma(N, M, n) := \sqrt{n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N}}$. Tegyük fel hogy M és n értékei eleget tesznek az alábbi összefüggésnek:

$$\frac{M}{N} \rightarrow r, \quad \frac{n}{N} \rightarrow q, \quad \text{ha } N \rightarrow \infty, \quad \text{ahol } r, q \in (0, 1). \quad (7)$$

Ha $N \rightarrow \infty$ és

$$|x_k| := \frac{|k - \mu(N, M, n)|}{\sigma(N, M, n)} \text{ korlátos,} \quad (8)$$

akkor

$$H_k(N, M, n) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k-n(N, M, n)}{\sigma(N, M, n)} \right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma(N, M, n)}} \quad (9)$$

Bizonyítás. A bizonyítás során szükségünk lesz a Stirling-formulára:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (10)$$

ahol O egy olyan függvény, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(f(n))}{f(n)} = K, \text{ ahol } K \text{ konstans.} \quad (11)$$

Továbbá felhasználjuk az alábbi összefüggést:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \text{ ha } |x| < 1. \quad (12)$$

Vezessük be még a következő jelölést:

$$y_k := x_k \sigma(N, M, n), \quad (13)$$

ekkor nyilván $k = n \frac{M}{N} + y_k$ és $n - k = n \frac{N-M}{N} - y_k$.

A bevezetett jelöléseket felhasználva és (10)-et alkalmazva: $H_k(N, M, n) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{M(N-M)n(N-n)}}{\sqrt{\left(n \frac{M}{N} + y_k \right) \left(M \frac{N-n}{N} - y_k \right) \left(n \frac{N-M}{N} - y_k \right) \left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) N}} \cdot \frac{M^M (N-M)^{N-M} n^n (N-n)^{N-n}}{\left(n \frac{M}{N} + y_k \right)^{n \frac{M}{N} + y_k} \left(M \frac{N-n}{N} - y_k \right)^{M \frac{N-n}{N} - y_k} \left(n \frac{N-M}{N} - y_k \right)^{n \frac{N-M}{N} - y_k} \left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right)^{n \frac{N-M}{N} - y_k}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) \left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) N} \quad (14)$$

ahol a Stirling formulából adódó O tagokat már elhagytuk, ezek (7) és (8) miatt mind nullához tartanak, ha $N \rightarrow \infty$. A nevező y_k -t is tartalmazó tagjait hozzuk $(1 \pm \frac{y_k}{n})$ alakra. Egyszerűsítések elvégzése után csoportosítsuk (14)-et egy négytagú szorzattá:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{NNN}{nM(N-M)(N-n)}} \cdot \frac{1}{M^M (N-M)^{N-M} n^n (N-n)^{N-n} N^{N-n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y_k}{n \frac{M}{N}} \right) \left(1 - \frac{y_k}{M \frac{N-n}{N}} \right) \left(1 - \frac{y_k}{n \frac{N-M}{N}} \right) \left(1 + \frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}} \right)} \cdot \frac{1}{\left(n \frac{M}{N} + y_k \right)^{n \frac{M}{N} + y_k} \left(M \frac{N-n}{N} - y_k \right)^{M \frac{N-n}{N} - y_k} \left(n \frac{N-M}{N} - y_k \right)^{n \frac{N-M}{N} - y_k} \left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right)^{n \frac{N-M}{N} - y_k}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) \left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) N} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y_k}{n \frac{M}{N}} \right)^{n \frac{M}{N} + y_k} \left(1 - \frac{y_k}{M \frac{N-n}{N}} \right)^{M \frac{N-n}{N} - y_k} \left(1 - \frac{y_k}{n \frac{N-M}{N}} \right)^{n \frac{N-M}{N} - y_k} \left(1 + \frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}} \right)^{n \frac{N-M}{N} - y_k}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) \left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k \right) N}$$

Az első tag nyilván $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(N,M,u)}}$. Továbbá (7) és (8) miatt a második tag 1-hez tart, ha $N \rightarrow \infty$. Egyszerű átalakításokkal meggyőződhetünk arról, hogy a harmadik tényező értéke 1. A legtöbb megfontolást a negyedik tag igényli:

$$\begin{aligned} & \exp\left(\left(n\frac{M}{N} + y_k\right) \log\left(1 + \frac{y_k}{n\frac{M}{N}}\right)\right) * \\ & \exp\left(\left(M\frac{N-n}{N} - y_k\right) \log\left(1 - \frac{y_k}{M\frac{N-n}{N}}\right)\right) * \\ & \exp\left(\left(n\frac{N-M}{N} - y_k\right) \log\left(1 - \frac{y_k}{n\frac{N-M}{N}}\right)\right) * \\ & \exp\left(\left(\frac{(N-n)(N-M)}{N} + y_k\right) \log\left(1 + \frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}}\right)\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Most (12) alkalmazásával, figyelembe véve, hogy (7) és (8) miatt az O tagot elhagyhatjuk, ha $N \rightarrow \infty$, akkor (15) egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{1}{2}y_k^2\left(\frac{N}{nM} + \frac{N}{M(N-n)} + \frac{N}{n(N-M)} + \frac{N}{(N-n)(N-M)}\right)\right) * \\ & \exp\left(-\frac{1}{2}y_k^3\left(\frac{N^2}{(nM)^2} - \frac{N^2}{M^2(N-n)^2} - \frac{N^2}{n^2(N-M)^2} + \frac{N^2}{(N-n)^2(N-M)^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Az y_k^2 mögött szereplő szorzótényező, mint azt egyszerű átalakításokkal ellenőrizhetjük, éppen $1/\sigma^2(N, M, n)$. Az y_k^3 mögötti szorzó tényező pedig nullához tart, ha $N \rightarrow \infty$. Így y_k jelentését figyelembe véve bebizonyítottuk a tételt. \square

4.6 Megjegyzés. A bizonyítás a Moivre-Laplace tételre Baróti, Bognár, Fejes Tóth és Mogoródi [2]-ben adott bizonyítás ötleteire támaszkodik.

4.7 Megjegyzés. A 4.5 tétel Feller [6] könyvében mint kitűzött feladat szerepel.

4.3 Megszámlálható számosságú fogyasztók esete elfajult keresleti görbék mellett

Gondoljuk végig, hogy mit is várunk a megszámlálható esettől. Tartsuk meg továbbra is a 3.1 és a 3.2 feltételeket. Ha a keresleti görbéről feltesszük, hogy monoton csökkenő és $D(0) < \infty$, akkor ebből következően az egyes fogyasztók kereseteinek végtelenül kicsivé kell válnia, mert különben a $D(0)$ értéke végtelen lenne. Ezért a megszámlálható esetet a 4.2 tétel segítségével a fogyasztók számának végtelenbe tartásával kaphatjuk meg. Megjegyzendő, hogy egy folytonos keresleti görbe tetszőlegesen közelíthető elfajult egyéni keresleti görbék aggregálásával, ha a fogyasztók számát, az α paramétert és a rezervációs árakat megfelelően választjuk.

Most rátérünk a megszámlálható eset tárgyalására. Jelölje az áttekinthetőbb jelölés érdekében I helyett i a fogyasztók számát. Tegyük fel hogy $p_1 < p_2$ és ekkor legyen $M_i = i \cdot Q_i(p_2)$, $N_i = i \cdot Q_i(p_1)$, $n_i = [i \cdot q_1]$, $r_i := \frac{M_i}{N_i} = \frac{Q_i(p_2)}{Q_i(p_1)}$ és $s_i := \frac{n_i}{N_i} \approx \frac{q_1}{Q_i(p_1)}$. Tegyük fel továbbá, hogy az $r = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i$, $q = \lim_{i \rightarrow \infty} s_i$ és a $D(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(p)$ ($\forall p \in \mathbb{R}_+$) határértékek léteznek.

Amennyiben csak megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztónk van, akkor a 4.4 megjegyzés és a 4.5 tétel alapján megoldható a feladat.

4.8 Tétel. *A fenti feltételek mellett a reziduális kereslet ($p_1 < p_2$):*

$$D_r(p_2) = D(p_2)(1 - q). \tag{17}$$

Bizonyítás. A 4.2 tétel és 4.4 megjegyzés alapján a véges eset hipergeometriai eloszlással leírható. Legyen $\mu_i = s_i r_i$ és $\sigma_i^2 = s_i(1 - s_i)r_i(1 - r_i)$. A 4.5 tétel alapján megfelelő feltételek esetén

$$H_k(N_i, M_i, n_i) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(k - N_i \mu_i)^2}{N_i \sigma_i^2}}}{\sqrt{2\pi N_i \sigma_i}}. \tag{18}$$

Első lépésként meghatározzuk, hogy a terméket magasabb áron is megvásárolni hajlandó fogyasztók hányad része jut hozzá alacsonyabb áron a termékhez. Ezért végrehajtjuk az $x = k/N_i$ transzformációt. Ha $\eta \sim N(N_i \mu_i, \sigma_i \sqrt{N_i})$, akkor a $\xi_i = \eta/N_i \sim N(\mu_i, \sigma_i/\sqrt{N_i})$. De ha $i \rightarrow \infty$, akkor ξ_i szórása nullához tart. Tehát ha ξ_i határeloszlását ξ -vel jelöljük, akkor a ξ konstans valószínűségi változó, mégpedig $\mu := \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i$ állandóval. Tehát $\frac{D(p_2) - D_r(p_2)}{D(p_1)} = \mu = qr$ eredményhez jutottunk. Ebből már egyszerű átrendezéssel belátható a tétel, \square

5. Összefoglalás

Áttekinítettük a véletlen adagolási szabály levezetési módjait. Ráműtattunk az egyes levezetések hiányosságaira. Majd megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében egy levezetést adtunk a véletlen adagolási szabályra. A levezetéshez szükséges feltételek az egyenlő esély elve és az egyéni keresleti görbék elfajult volta.

A megszámlálható esetre adott levezetésnek számos előnye mellett ugyanakkor hátránya is van a harmadik szakaszban adott négy levezetéssel szemben.

Az első módszerrel (harmadik szakasz első pontja) szemben nem tételezi fel a keresleti görbék azonosságát. Viszont csak elfajult egyéni keresleti görbék mellett érvényes a levezetés. Ez utóbbi nyilván szintén egy erős megszorítás.

A második módszerrel szemben nincs szükség kontinuum sok fogyasztóra, nem igényli az ott szükséges két feltételt továbbá adott a hipergeometriai eloszlás illetve ennek normális határeloszlása segítségével a véges esettel való közelítés lehetősége.

A harmadik és negyedik levezetések pontatlanok voltak. A harmadik eset pontosítása tulajdonképpen a megszámlálható esetre adott levezetéshez vezetne. A negyedik eset levezetése mint látható tulajdonképpen a fogyasztók számosságának eltérésétől eltekintve a megszámlálható esettel azonos feltételeket igényel.

Irodalom

1. Allen, B. - M. Hellwig (1986): Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets. *Review of Economic Studies* 53, 175-204.
2. Baróti, Gy. - J. Bognár - G. Fejes Tóth - J. Mogyoródi (1995): Valószínűség-számítás, tizenegyedik kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
3. Bauer, H. (1991): Wahrscheinlichkeitstheorie, negyedik kiadás. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
4. Benassy, J-P. (1986): On the existence of Bertrand-Edgeworth equilibria with differentiated commodities. In: *Contributions to Mathematical Economics*, szerk. W. Hildenbrand és A. Mas-Collel, North-Holland, 57-78.
5. Dasgupta, P. - E. Maskin (1986): The existence of equilibria in discontinuous games, II. *Review of Economic Studies* 53, 27-41.
6. Feller, W. (1978): Bevezetés a valószínűség-számításba és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
7. Friedman, J. W. (1983): *Oligopoly theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
8. Gelman, J. R. - S. C. Salop (1983): Judo economics: capacity limitation and coupon competition. *Bell Journal of Economics* 14, 315-325.
9. Howard, D. H. (1977): Rationing, quantity constraints and consumption theory. *Econometrica* 45, 399-412.
10. Osborne, M. J. (1997): *Lectures on the theory of industrial organization*. Kézirat, McMaster University, Hamilton, Canada.
11. Neary, J. P. - K. W. S. Roberts (1980): The theory of household behaviour under rationing. *European Economic Review* 13, 25-42.
12. Tirole, J. (1988): *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

13. Varian, H. R. (1992): *Microeconomic Analysis*, third edition. W.W.Norton and Company, New York.
14. Vives, X. (1986): Rationing Rules and Bertrand-Edgeworth Equilibria in Large Markets. *Economics Letters* 21, 113-116
15. Wolfstetter, E. (1993): *Oligopoly and Industrial Organization*. Humboldt-Universität zu Berlin, Discussion Paper, Berlin.

RANDOM RATIONING RULE IN CERTAIN MARKET SITUATIONS

In Bertrand-Edgeworth type duopolies a rationing rule is needed for a full specification of the model as long as our analysis is of partial nature. In the literature one of the two most commonly used rationing rules is the so-called random rationing rule. We consider market situations, in which the random rationing rule is reasonable. We will describe a special market situation with countable many consumers, which will lead to the random rationing rule.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Beszámoló a Gazdaságmodellezési Társaság V. Szakértői Konferenciájáról

A Gazdaságmodellezési Társaság ötödik Szakértői konferenciáját tartotta Mátrafüreden 1998. szeptember 28-30. között az Avar Szállóban. A konferenciabusz – a két évvel ezelőtti esettel ellentétben – időben és technikai gondok nélkül indult a Központi Statisztikai Hivatal elől, majd a Keleti Pályaudvartól és érkezett meg a konferencia helyszínére.

A konferenciát Mészéna György, a GMT elnöke nyitotta meg. Az előadások plenáris üléseken folytak a szerda déli ebédig, ami egyben a kétnapos ülészak záróeseménye volt. A konferencia – szinte maradéktalanul – a nyomtatott program szerint zajlott le.

Az előző GMT konferenciáinkkal szemben külön színfoltot jelentett, hogy sikerült meghívunk egy tisztán elméleti matematikust – aki persze az alkalmazások felé mindig is nyitott volt – Tusnády Gábor akademikust a főként gazdasági problémákkal és annak modellezési kérdéseivel foglalkozó tudományos ülésre. A "Mutáció és szelekció" című előadásában a dinamikus rendszerek kaotikus viselkedéséről hallottunk, amit az evolúció és genetikai optimalizálási modellekkel kapcsolatban tapasztalt. Legfontosabb üzenete a konferencia homo economicusainak az volt, hogy sose feledkezzenek el homo ludensi mivoltukról, mert e nélkül nincs igazi tudomány.

Ezt Rudas Tamás és Verdes Emese előadása követte, akik a kontingenctiáblák illeszkedésének vizsgálatára egy új mérőszámot vezettek be, és annak az ún. logisztikus regresszióra történő alkalmazását mutatták be. Az első nap tudományos ülészakát a Gyöngyösi Zeneiskola női zenekarának kellemes esti hangversenye zárta.

A kedd délelőtti programot Füstös László - Kovács Erzsébet - Mészéna György - Simonné Mosolygó Nóra: "Háromdimenziós faktoranalízis és társadalomtudományi alkalmazása" című három írásvetítés előadása nyitotta meg. Mészéna György ismertette a háromdimenziós faktoranalízis Tucker-féle elméleti modelljét. Ezen modell egy érdekes alkalmazását mutatta be Kovács Erzsébet az értékek és életmód változásainak a feltérképezésénél – ábrákkal illusztrálva. (A modellezés TUCKALS3 programmal történt.)

Augusztinovics Mária egészen más problémakört érintett a "Globalizáció és az európai szociális modell" című gondolatébresztő előadásában.

Mihályffy László "A külső információ időszerűségének problémája folyamatos reprezentatív megfigyeléseknél" címmel beszélt egy korrekciós eljárásról – az általánosított iteratív skálázások módszeréről –, amelyet a KSH munkatárs-felméréseinél rendszeresen használnak.

Sági Zoltán a "Többkritériumú döntéstámogatás tender értékelésekhez" című előadásban egy több döntéshozós modellosztályt tárgyalt, amelyben a szempontrendszert kritériumfával írta le.

A délutáni program a Gazdaságmodellezési Társaság Közgyűlésével kezdődött. A résztvevők az előre kiküldött napirendi pontokat tárgyalták; sok érdekes felvetés hangzott el.

Ezután Vörös József "Hatékony befektetések néhány tulajdonsága" címmel tartott előadást. Ebben a hatékony felület megkeresését egy parametrikus programozási problémaként tárgyalta.

Rapcsák Tamás "Informatikai tanderek kiértékelése központosított közbeszerzési eljárásokban" címmel mutatott be egy esettanulmányt, amelyet a Miniszterelnökség Közbeszerzési és Gazdasági Igazgatósága rendelt meg 1997-ben az MTA SZTAKI-tól. Végre egy olyan modellről hallhattunk, amelyet a közigazgatásban eredményesen alkalmaztak.

A nap záróeseménye kerekasztal-beszélgetés volt Chikán Attila gazdasági miniszterrel – társaságunk alapító tagjával – arról, hogyan vehet részt a Gazdaságmodellezési Társaság a gazdasági stratégia megalapozásában.

A Konferencia második napja egy kötetlen eszmecserével párosuló állófogadással zárult.

A szerda délelőtti szekcióban Brüll Károly az APEH SZTADI adatrendszerének a gazdasági kutatásokban és elemzésekben történő felhasználási lehetőségeit ismertette, majd Varga Sára a jövedelem-felvételnél a hiányzó adatok pótlásáról, Kovács Erzsébet a biztosítási sűrűségről, végül Pauler Gábor a Neuro-Fuzzy rendszerekről tartott előadást.

A jól sikerült szakértői konferenciát egy közös ebéd zárta.

Horváth Gézané