

DINAMIKUS PANELMODELLEK BECSLŐ- FÜGGVÉNYEINEK ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE¹

MARK N. HARRIS – MÁTYÁS LÁSZLÓ

Melbourne-i Egyetem – BKE és Párizs XII. Egyetem

Napjainkban egyre nyilvánvalóbbá válik, amint ezt a témában írott tanulmányok bősége is mutatja, hogy a dinamikus panelmodellek becslése az ökonometriai kutatások egyik legfontosabb területe. Közismert, hogy a panelmodellek szokásos becslési eljárásai dinamikus esetben inkonzisztensek. Az irodalom persze számos konzisztens becslőfüggvényt javasol. Ebben a tanulmányban két új becslőfüggvényt ajánlunk (egyét a rögzített-, egyet a véletlen hatású specifikációra), és ezek kismintás tulajdonságait hasonlítjuk össze az összes már létező becslőfüggvényével. Reméljük, hogy e kísérletek eredményei segítséget nyújtanak az alkalmazott kutatók számára a legelőnyösebb becslőfüggvény(ek) kiválasztásában. Végül, az összes becslőfüggvény pontbecsléseinek eltéréseit illusztrálándó, bemutatunk egy alkalmazást, mely az ausztráliai Melbourne vonzáskörzetének mosószerre vonatkozó fogyasztói keresletét vizsgálja.

1. Bevezetés

Az elmúlt években lényegesen bővült az elérhető paneladatok köre, ugyanakkor nagy fejlődést tapasztalhattunk azokban az eszközökben is, melyek az alkalmazott kutatók rendelkezésére állnak. Mindezek következtében a panelmodellek ökonometriája az utóbbi időben nagyon népszerűvé vált. Mi több, a gazdasági változókat részleges egyensúlyi helyzetbe hozó eljárások egyes formáival foglalkozó gazdasági elméletek mérhetetlenül hosszú sorából adódóan is egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy nagy figyelmet kell szentelni a dinamikus panelmodellek becslésének. Ezek olyan panelmodellek, melyek magyarázó változó(k)ként az endogén változó(k) késleltetett értékét (értékeit)

¹A becslőfüggvény (estimator) az itt vizsgált esetekben gyakran nem fejezhető ki zárt alakban, ám ez nem változtat lényegén, nevezetesen azon, hogy hozzárendelési szabályt, függvényt jelent. Ezt a továbbiakban a becslőfüggvény értelmezésénél célszerű mindig szem előtt tartani.

A szerzők köszönetet mondanak Ritchard Longmire-nak és Kónya Lászlónak a kutatáshoz nyújtott segítségért. Az eredetileg angol nyelven írt cikket Töröcsik Timea, a BKE IV. évf. hallgatója fordította magyarra.

is tartalmazzák. Ez a téma sok újkeletű elméleti és szimulációs tanulmány központi kérdésévé vált (lásd például Arellano és Bond [1991], Arellano és Bover [1993], Kiviet [1994], Ahn és Schmidt [1993, 1995], és Crépon és mások [1996] munkáit).

A paneladatokat általában meg nem figyelt egyedenkénti (és esetleg időbeli) heterogenitás jellemzi. Ezen heterogenitás formalizálására a két leggyakrabban használt modellspecifikáció a *rögzített-* és a *véletlen* hatású modell. Míg az utóbbi feltételezi, hogy az egyedhatások egy meghatározott eloszlás realizációi, az előbbi rögzített paraméterként tekinti ezeket. Sok a vita az irodalomban arról, hogy melyik az „előnyösebb” specifikáció (lásd például Mundlak [1978a, b] és Hsiao [1985, 1986]), mi azonban ebben a tanulmányban mindkét specifikáció becslőfüggvényeit vizsgálni fogjuk.

A dinamikus panelmodellek becslése a heterogenitás specifikációjától függetlenül sem könnyű. A rögzített hatású specifikációnál a probléma abban jelentkezik, hogy a panel adatbázisokat általában viszonylag rövid idősorok alkotják. Így a rögzített hatású dinamikus modell legkisebb négyzetek módszerével (*OLS*) való becslését a szokásos Hurwitz típusú torzítás jellemzi (Nickell [1981]). A véletlen hatású specifikációnál a becslt kovariancia mátrixot felhasználó (megvalósítható) általánosított legkisebb négyzetek módszer — (*F*)*GLS* — az egyenlet reziduumaival és a késleltetett függő változó közötti korreláció következtében (Sevestre és Trognon [1985]) szintén torzított.

Mindkét specifikációra találhatók azonban konzisztens becslőfüggvények. Ezek a becslőfüggvények többnyire az instrumentális változók (*IV*) alakját öltik. Az *IV* becslések tartalmazznak bizonyos ortogonalitási feltételeket, elsősorban olyanokat, melyek kimondják, hogy az „instrumentumok” az egyenlet hibatagjaival aszimptotikusan korrelálatlanok. Az ilyen ortogonalitási feltételek szélesebb körének alkalmazása a Momentumok Általánosított Módszerével (*GMM*) készített becslések területére vezet. A *GMM* becslések esetén az érdeklődés éppen az ilyen feltételek maximális (és optimális) számának meghatározása felé fordul (Ahn és Schmidt [1993, 1995] és Crépon és mások [1996]).

Ennek a cikknek az elsődleges célja a meglévő *IV/GMM* becslőfüggvények kismintás tulajdonságainak összehasonlítása. Emellett két új becslőfüggvényt is ajánlunk, (egyét a rögzített-, egyet pedig a véletlen hatású specifikációra), és összehasonlítjuk ezek kismintás tulajdonságait a már meglévő becslőfüggvényekével. Ezen eredmények ismeretében az alkalmazott kutató joggal bízhat abban, hogy a saját adatainak legjobban megfelelő becslőfüggvényt használja.

A tanulmány felépítése a következő: a 2. és 3. fejezet a modellspecifikációval, a dinamikus rögzített- és véletlen hatású modellek „hagyományos” és (szemi-)konzisztens becslőfüggvényeivel foglalkozik. A 4. fejezet ismerteti a szimulációs kísérleteket, és elemzi a kapott eredményeket. A becslések közötti

különbségeket egy példán, a mosószer- vásárlásra készített modell becslésain keresztül (a Roy Morgan Research Centre's Consumer Panel of Australia által a Melbourne vonzáskörzetében realizálódott fogyasztói vásárlásokat tartalmazó adatok felhasználásával) az 5. fejezet illusztrálja. Végül a 6. fejezet néhány összefoglaló következtetést tartalmaz.

2. A rögzített hatású dinamikus panelmodell

2.1 A modell

Tételezzük fel, hogy az y_{it} eredményváltozó lineáris függvénye a változó saját előző időszaki realizációjának, az egyidejű egyedi jellemzőnek és x_{it} -nek, ismeretlen δ és β paraméterekkel. Így azt írhatjuk, hogy

$$y_{it} = \alpha_i + \delta y_{it-1} + \underline{x}'_{it} \underline{\beta} + u_{it}, \quad (1)$$

ahol az α_i -k az *egyedhatások* (állandók minden i -re), és u_{it} a szokásos fehér zaj hibatagok. Vagy mátrix alakban:

$$\underline{y} = D\underline{\alpha} + \delta \underline{y}_{-1} + X\underline{\beta} + \underline{u}, \quad (2)$$

ahol $D = I_N \otimes \underline{L}_T$ és \underline{L}_T a $T \times 1$ -es egységvektor.

Az (1) és (2) egyenlet becslése szokásosan (azaz amikor nincs késleltetett változó (LDV)), közvetlenül *OLS* becsléssel történik (Least Squares Dummy Variable Estimator – LSDV), ami a jól ismert *Within* becslőfüggvényhez vezet. Általában feltesszük (lásd pl. Balestra [1992]), hogy

HF1: az x változók nem sztochasztikusak és az u_{it} hibatagokkal korrelálatlanok;

HF2: a hibatagok várható értéke nulla;

HF3: a hibatagok autokorreláció mentesek;

HF4: az egyedhatások időben állandók.

Mivel a paneladatokat jellemző módon rövid idősorok alkotják, ezért a gyakorlati alkalmazások szempontjából az $N \rightarrow \infty$ és T véges, szemi-aszimptotikus eset vizsgálata a fontos. Az (1) – (2) dinamikus modellek esetén az *OLS* és a *Within* becslőfüggvények, sajnos, szemi-inkonzisztensek, így olyan módszereket kell keresni, amelyek véges T esetében is konzisztenciát biztosítanak. (A probléma elméleti megközelítésére lásd Nickell [1981] és Sevestre és Trognon [1985], szimuláción alapuló vizsgálatára pedig Nerlove [1967, 1971] tanulmányait.)

2.2 Az instrumentális változók (IV) módszere

A *Balestra-Nerlove becslőfüggvény* ($BN^{(1)}$). Balestra és Nerlove [1966] megmutatta, hogy véletlen hatású autoregresszív modellben, ha instrumentumok gyanánt késleltetett exogén változókat használunk, a paraméterek konzisztens becslőfüggvényéhez juthatunk. Ez a módszer rögzített hatású specifikációkra alkalmazható (lásd pl. Sevestre és Trognon [1992]). A δ , $\underline{\alpha}$ és $\underline{\beta}$ IV becslőfüggvényei a (2) modell alábbi transzformációjával kaphatók:

$$Z'\underline{y} = Z'\tilde{X}_D\underline{\gamma}_D + Z'\underline{u}, \quad (3)$$

ahol $\tilde{X}_D = (\underline{y}_{-1} : X : D)$, $\underline{\gamma}_D = (\delta : \underline{\beta}' : \underline{\alpha}')'$ és $Z = (X_{-1} : X : D)$.

Amint ezek az összefüggések megvannak, a BN becslőfüggvény megkapható, ha (3)-ra a GLS -t alkalmazzuk úgy, hogy a transzformált modell hibatagjának, $Z'\underline{u}$ -nak kovariancia mátrixaként a $\sigma_u^2 Z(Z'Z)^{-1}Z'$ kifejezést használjuk.

Az állandó hatású specifikáció további becslőfüggvényei az első differenciák felhasználásával készülnek:

$$\underline{\Delta y} = \underline{\Delta X}\underline{\gamma} + \underline{\Delta u}, \quad (4)$$

ahol $\underline{\Delta y}_{it} = y_{it} - y_{it-1}$ (és így tovább), $\underline{\Delta X} = (\underline{\Delta y}_{-1} : \underline{\Delta X})$ és $\underline{\gamma} = (\delta : \underline{\beta}')'$. Ez az eljárás kedvelt, mivel több ortogonalitási feltételt tartalmaz, azaz felhasználja HF1-HF4-t (lásd később), és az eljárás HF4 által kiküszöböli az egyedhatásokat. Mindamellet az első differenciák alkalmazása maga is okoz problémákat. Először is a most transzformált modell OLS becslőfüggvénye még mindig nem konzisztens, mert a $\underline{\Delta y}_{-1}$ késleltetett endogén változó korrelált a modell maradékvektorával, $\underline{\Delta u}$ -val. Másodsor, ha az eredeti u_{it} hibák „jól viselkednek” (azaz teljesítik HF2-t és HF3-t), akkor a transzformált $\underline{\Delta u}_{it}$ első rendű mozgó átlagolású folyamatot (MA[1]) fog követni (lásd később).

Az Anderson-Hsiao (AH) és Arellano (AR) becslőfüggvény. Anderson és Hsiao [1982] a (4) IV becslőfüggvényében mind y_{it-2} -t, mind $\underline{\Delta y}_{it-2}$ -t ajánlja $\underline{\Delta y}_{it-1}$ megfelelő instrumentumaiként. Mindazonáltal néhány esetben az utóbbi nem eredményez eléggé hatásos becslőfüggvényt, ezért y_{it-2} a megfelelőbb instrumentum (Arellano [1988]). Emellett $\underline{\Delta y}_{it-2} = y_{it-2} - y_{it-3}$ instrumentumként való használata a becslési célok érdekében szükségessé teszi a vizsgált időperiódus rövidítését (szemben y_{it-2} használatával). Ez pedig a már amúgy is „rövid” idősor további megnyirbálását jelentheti. Ezek szerint

az instrumentumokat a következőképp definiáljuk:

$$\begin{aligned} Z_{it}^{AR} &= (y_{it-2} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}), \\ Z_{it}^{AH} &= (y_{it-2} - y_{it-3} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Az egyszerű AH és AR módszer a transzformált

$$Z' = \Delta \underline{y} = Z' \Delta \bar{X} \underline{\gamma} + Z' \Delta \underline{u} \quad (6)$$

modell OLS-sel történő becslésével kapható meg. Ha az instrumentális változók száma megegyezik a magyarázó változók számával, akkor az eredményül kapott becslőfüggvénynek —általában— nem lesznek véges momentumai (Kinal [1980]). Ekkor az AH és AR becslőfüggvények kismintás tulajdonságai kiegészítő instrumentális változók, például ΔX_{-1} bevezetésével javíthatók. A kiterjesztett instrumentumhalmaz a következő:

$$\begin{aligned} Z_{it}^{AR^+} &= (y_{it-2} : \underline{x}'_{it-1} - \underline{x}'_{it-2} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}), \\ Z_{it}^{AH^+} &= (y_{it-2} - y_{it-3} : \underline{x}'_{it-1} - \underline{x}'_{it-2} : \underline{x}'_{it} - \underline{x}'_{it-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Mivel az instrumentumok száma meghaladja az exogén magyarázó változókét, (6) GLS-sel becsülhető, ha a transzformált hibatagjainak kovariancia mátrixaként $Z' \Omega_{\Delta} Z$ -t használjuk. Jegyezzük meg, hogy az első differencia képzés miatt $\text{Var}(\Delta \underline{u}) = \sigma_u^2 \Omega_{\Delta}$ és

$$\Omega_{\Delta} = I_N \otimes \Sigma_{\Delta} = I_N \otimes \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

A Sevestre-Trognon ($ST^{(b)}$ és $ST^{(c)}$) becslőfüggvények. Sevestre és Trognon [1992] szintén (5) használatát javasolták, de úgy, hogy az instrumentumok alkalmazása előtt a $\Omega_{\Delta}^{1/2}$ -del való szorzással a modellt skalár kovariancia mátrixú modellé alakítják. A transzformáció után is fennáll azonban a korreláció a késleltetett endogén változó és a transzformált hibatagok között. Mi több, mivel (5) balról való szorzása olyan maradékokhoz vezet, melyek az u_{it} -k lineáris kombinációi, $\Omega_{\Delta}^{1/2} \Delta \underline{y}_{-1}$ egyedüli érvényes instrumentumai mind $\Omega_{\Delta}^{1/2} \Delta X$, mind ΔX folyó és késleltetett értékei lesznek.²

²Lásd a 10. oldalon található b) és c) módszereket

Habár ezek a becslőfüggvények hatásosabbak lesznek azoknál, amelyek *ugyanazeket az instrumentumokat használják* a nem transzformált modellben (Sevestre és Trognon [1992] és White [1984]), például az Anderson-Hsiao becslőfüggvénnyel való közvetlen összehasonlításuk nem célszerű, mivel különböző instrumentumokat alkalmaznak.

Az *Arellano-Bond egy lépéses IV (AB) becslőfüggvény*. Ha az idősróról feltesz-
szük, hogy $t = 0$ -nál kezdődik, a Δy_{it-1} változót csak $t \geq 2$ -re definiálhatjuk.
 $t = 2$ -re Δy_{it-1} egyetlen érvényes instrumentális változója y_{i0} (ne feledjük,
hogy $t = 2$ -nél $\Delta u_{it} = u_{i2} - u_{i1}$, ami ezért y_{i0} -tól független). $t = 3$ -ra
azonban érvényes instrumentumainak köre kibővül y_{i1} -gyel. Ez a triangulá-
ris kiterjesztés folytatódik az egymást követő periódusokban, meghatározva
éáltal az instrumentális változók egész körét, pl. $t = 4$ -re:

$$Z_i^{AB} = (Z_i^* : \Delta X_i) = \begin{pmatrix} y_{i0} & & & & 0 & \underline{x}'_{i2} - \underline{x}'_{i1} \\ & y_{i0} & y_{i1} & & 0 & \underline{x}'_{i3} - \underline{x}'_{i2} \\ & & & & y_{i0} & y_{i1} & y_{i2} & \underline{x}'_{i3} - \underline{x}'_{i2} \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Továbbmenve, ha felteszük, hogy az x -ek szigorúan exogének (HF1), akkor ezek minden időegyenletnek valódi instrumentális változói lesznek, és az instrumentumok köre tovább bővül:

$$Z_i^{*+} = \begin{pmatrix} y_{i0} \ \underline{x}'_{i0} \cdots \underline{x}'_{iT} & & & 0 \\ & y_{i0} \ y_{i1} \ \underline{x}'_{i0} \cdots \underline{x}'_{iT} & & \\ 0 & & & y_{i0} \ y_{i1} \ y_{i2} \ \underline{x}'_{i0} \cdots \underline{x}'_{iT} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$Z_i^{AB+} = (Z_i^{*+} : \Delta X_i).$$

Az instrumentumok mátrixait minden egyedre $Z = (Z'_i : \dots : Z'_N)'$ -ben összegyűjtve, az Arellano és Bond [1991] becslőfüggvények a (6) transzformált modellre alkalmazott GLS típusú becslőfüggvényként kaphatók.

Az instrumentumként a függő változó kisleletett értékeit használó IV becslőfüggvények közül az AB becslőfüggvény szemi-aszimptotikusan a leg-
hatásosabb (Sevestre és Trognon [1992]), de a GMM becslőfüggvények köré-
ben ezeknél hatásosabbak is levezethetők (lásd később). Mindkét AB becslő-
függvény számításánál felmerülhetnek azonban problémák, melyeknek okai:
az instrumentális mátrix mérete (különösen T növekedésével), két időszak-
nyi veszteség, valamint az, hogy a (9) és (10) típusú mátrixokat a standard
ökonometriai programcsomagokkal nehéz kezelni.

A *Balestra-Nerlove féle első differencia becslőfüggvény* ($BN^{(1)}$). A Balestra-
Nerlove becslőfüggvény szintén alkalmazható az első differenciákra felírt mol-
dellben, ahol Δy_{-1} instrumentális változói egyszerűen a ΔX_{-1} -ek. A teljes

instrumentumhalmaz a következő:

$$Z = (\Delta X_{-1} : \Delta X), \quad (11)$$

ami abban különbözik a korábban már ismertetett ST becslőfüggvényektől, hogy (6)-ra közvetlenül GLS becslést alkalmazunk.

Az első differenciákra felírt modell kétlépéses IV becslőfüggvényei. White [1984] nyomán a HF2 és HF3 feltételek enyhíthetők, és a $Z'\Omega_{\Delta}Z$ mátrix, mely több fenti becslőfüggvényhez szükséges, konzisztens módon becsülhető a következő módon:

$$\hat{\Omega}_{\Delta Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' \Delta \hat{u}_i \Delta \hat{u}_i' Z_i, \quad (12)$$

mivel, független egyedeket feltételezve, az Ω_{Δ} kovariancia mátrix blokk-diagonális. Annak ellenére, hogy

$$E \left(\sum_{i=1}^N Z_i' \Delta \hat{u}_i \Delta \hat{u}_i' Z_i \right) = E (Z' \Delta u \Delta u' Z),$$

ez a két becslőfüggvény $Z'\Omega_{\Delta}Z$ -re számszerűen el fog térni egymástól.³ A becslőfüggvények többségénél a paraméterbecslések végeredményei közötti eltérés nagyon kicsiny volt (10^{-3} nagyságrendű).

A $\Delta \hat{u}_i$ reziduumvektor γ egy konzisztens induló becsléséből származik, ahol Ω_{Δ} (5) szerint alakul. A különféle becslőfüggvények egy- és kétlépéses változatai aszimptotikusan ekvivalensek lesznek, ha az u_{it} -k függetlenek és homoszkedasztikusak (Arellano és Bond [1991]). Megjegyezzük azt is, hogy azoknál az eljárásoknál, amelyeknél erre szükség volt, Ω_{Δ} becslése közvetlenül az

$$\hat{\Omega}_{\Delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta \hat{u}_i \Delta \hat{u}_i'$$

felhasználásával történt.

2.3 A Momentumok Általánosított Módszere (GMM)

Hansen nagy hatású írása [1982] óta az alkalmazott ökonometrikusok előszeretettel használják a GMM becslőfüggvényt (hasznos összefoglalásként

³Tekintsünk egy egyszerű, exogén változókat nem tartalmazó $AR(1)$ modell AB becslőfüggvényét két egyedre és a $t = 0, 1, 2$ esetre: $Z' \Delta u \Delta u' Z = (y_{10} \Delta u_{12})^2 + (y_{20} \Delta u_{22})^2 + 2y_{10} \Delta u_{12} y_{20} \Delta u_{22} \neq \sum_i Z_i' \Delta u_i \Delta u_i' Z_i = (y_{10} \Delta u_{12})^2 + (y_{20} \Delta u_{22})^2$.

lásd Pagan és Vella [1989] írását). A becslés technikája nagyon széles körű, magában foglal sok más jól ismert módszert (például az *IV* becslőfüggvényt) is. A *GMM* lényege az, hogy felhasználja az elméleti momentumok tulajdonságait, melyeket a becslés céljából a mintabeli megfelelőikkel helyettesít. Egyebek között Ahn és Schmidt (1995) ill. Crépon és mások [1996] legújabb munkáinak köszönhetően megkülönböztetett figyelem fordul a dinamikus hibakomponensű panelmodellek *GMM* becslőfüggvényei felé, habár ez a módszer rögzített hatású dinamikus modellekre szintén alkalmazható.

Először is, határozzuk meg a kezdeti értékeket a következőképpen:

$$y_{i0} = \alpha_i + \underline{x}'_{i0}\underline{\beta} + u_{i0}. \quad (13)$$

Megjegyezzük, hogy az exogén változókhoz tartozó $\underline{\beta}$ paramétervektort az (1)-től (13) egyenletig azonosnak feltételeztük. Az (1) és (13) egyenletekben a HF1-HF4 kikötéseken túl egy sor implicit ortogonalitási feltétel fejeződik ki, úgy mint:

$$(2a) \quad E(y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta}) = 0$$

$$(2b) \quad E((y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})^2) = \sigma_0^2$$

$$(2c) \quad E((y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})(y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})) = 0, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(2d) \quad E(y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta}) = 0, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(2e) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})(y_{is} - \alpha_i - \delta y_{is-1} - \underline{x}'_{is}\underline{\beta})) = 0 \\ (t, s = 1, \dots, T, t \neq s)$$

$$(2f) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})^2) = \sigma_u^2, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(2g) \quad E((y_{i0} - \alpha_i - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (k, t = 1, \dots, T)$$

$$(2h) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{i0}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 1, \dots, T)$$

$$(2i) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 1, \dots, T)$$

$$(2j) \quad E((y_{it} - \alpha_i - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it} \underline{\beta}) x_{is}^k) = 0, \\ (\forall k, t \neq s, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, T)$$

Ezt a tíz ortogonalitási feltételt becslési (*GMM*) célokból a megfigyelt változókkal és a paraméterekkel kifejezett identifikációs összefüggésekké alakítjuk. Látható, hogy a fentebb ismertetett *IV* becslőfüggvények is eme identifikáló egyenletek egy részén alapulnak. A rögzített hatású specifikációra vonatkozó becslőfüggvények többsége használható a véletlen hatású modell esetére is (mivel az egyedhatásokat — akár rögzített, akár véletlen a specifikáció —, az első differenciák képzése kiküszöböli). Ezért az ortogonalitási feltételek és az *IV* becslőfüggvények közötti összefüggéseket a későbbiekben részletezzük.

Ha az azonosságok mindegyikét felírtuk, az a kérdés merül fel, hogy ezek közül hányat érdemes használni. Aszimptotikus hatásossági megfontolások azt javasolják, hogy mindet. Mindazonáltal Crépon és mások [1996] megmutatták, hogy nem jelent hatásosságvesztést, ha azokat az egyenleteket figyelmen kívül hagyjuk, melyekben a lényeges paraméterek (α_i , β , és δ) valamelyike nem szerepel. Sőt, úgy is át lehet rendezni az egyenletek egy részét, hogy ne kelljen minden zavaró (a vizsgálat szempontjából érdektelen) paramétert becsülni. A teljes paramétervektort $\underline{\gamma}_D^+$ -ként definiálva, mely $\underline{\gamma}_D^+ = (\underline{\alpha}' : \underline{\beta}' : \delta)$ -t, a lényeges paramétereket éppúgy tartalmazza, mint a zavarókat, a *GMM* becslőfüggvény az alábbi célfüggvény minimalizálásával kapható meg:

$$\hat{\underline{\gamma}}_D^+ = \min_{\underline{\gamma}_D^+} m_N(\underline{\gamma}_D^+){}' \hat{W}^{-1} m_N(\underline{\gamma}_D^+), \quad (14)$$

ahol $m_N = N^{-1} \sum_i m_i(\underline{\gamma}_D^+)$, $W = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(N^{-\frac{1}{2}} \sum_i m_i) = \text{cov}(m_N)$, és

$$\hat{W} = N^{-1} \sum_i m_i(\underline{\gamma}_D^+) m_i(\underline{\gamma}_D^+){}',$$

melyet $\underline{\gamma}_D^+$ egy kezdeti konzisztens paraméterbecslése helyén értékelünk.

Nehézséget jelent az, hogy ha az ortogonalitási feltételek száma nő (különösen T növekedésével), a \hat{W} mátrix oszlopai között növekvő kollinearitás érvényesül, ami oda vezet, hogy a \hat{W} mátrix nem lesz invertálható. Ebben az esetben néhány feltételt el kell hagyni, ami nem okoz gondot, mivel a kikötések közötti erős korrelációs kapcsolat miatt ennek hatása a hatásosságra valószínűleg kicsiny lesz. A *GMM* becslőfüggvény által használható ortogonalitási kritériumok maximális száma a mintanagyságtól, mind N -től, mind T -től függ. Az 1a. táblázat azokat a feltételeket mutatja, amelyeket az ebben a tanulmányban vizsgált mintáknál felhasználtunk, míg az 1b. táblázat az *IV* típusú becslőfüggvényeket összegzi.

1a táblázat: GMM típusú becslőfüggvények dinamikus állandó hatású modellekre

Mintanagyság		Használt feltételek	Súly- mátrix	Becslőfv. rövidítése
T	N			
4	25	2a) - 2j)	I	GMM-F1
4	50	2a) - 2j)	I	GMM-F1
10	25	2a) - 2j)	I	GMM-F1
10	50	2a) - 2j)	I	GMM-F1
4	25	2a) - 2g) és 2i) ¹	\hat{W}	GMM-F2
4	50	2a) - 2j)	\hat{W}	GMM-F3
10	25	2a), 2b), 2d) és 2f)	\hat{W}	GMM-F4
10	50	2a), 2b), 2d), 2f), 2i) ² és 2g)	\hat{W}	GMM-F5

Megjegyzések: ¹ \hat{W} az empirikus momentumok becsült kovariancia mátrixa.
²2i) csak $k = 1$ -re.

1b táblázat: IV típusú becslőfüggvények dinamikus állandó hatású modellekre, $N \rightarrow \infty$, véges T

Módszer	Kon- zisz- tencia	A modell becslése		Instrumentum(ok) y_{it-1} -re vagy Δy_{it-1} -re
		szintek alapján	első differenciák alapján	
OLS	–	+	+	y_{it-1} vagy Δy_{it-1}
$Within$	–	+	–	y_{it-1}
$BN^{(L)}$	+	+	–	X_{-1}
AH	+	–	+	y_{it-2}
AR	+	–	+	Δy_{it-2}
AH^+	+	–	+	$y_{it-2}, \Delta X_{-1}$
AR^+	+	–	+	$\Delta y_{it-2}, \Delta X_{-1}$
$ST^{(h)}$	+	–	+	$\Omega_{\Delta}^{-1/2} \Delta X_{-1}$
$ST^{(c)}$	+	–	+	ΔX_{-1}
AB	+	–	+	$y_{i0}; y_{i0}, y_{i1}; \dots$
AB^+	+	–	+	$y_{i0}, \underline{x}_{i0}^T, \dots, \underline{x}_{iT}^T; y_{i0}, y_{i1}, \underline{x}_{i0}^T, \dots, \underline{x}_{iT}^T$
$BN^{(D)}$	+	–	+	ΔX_{-1}

3. A véletlen hatású dinamikus panelmodell

3.1 A modell

A véletlen hatású specifikációban az (1)-ben található α_i -ket úgy kezeljük, mint amelyek egy meghatározott eloszlás független, véletlen realizációi, így a hibtag „összetetté” válik, hiszen $v_{it} = \alpha_i + u_{it}$. Ugyanúgy, mint a rögzített hatású specifikációnál, a statikus véletlen hatású panelmodell hagyományos

becslőfüggvényei (*Within* és *OLS*) dinamikus esetben szemi-konzisztensek (Sevestre és Trognon [1985]).

A dinamikus véletlen hatású modell szemi-konzisztens becslőfüggvényei hasonlóképpen bizonyos hipotézisekre épülnek, melyek nem feltétlenül azonosak minden becslőfüggvényre.

HR1: Az u_{it} -k és az y_{i0} korrelálatlanok $\forall t, i$ -re.

HR2: Az u_{it} -k és az α_i korrelálatlanok $\forall t, i$ -re.

HR3: Az u_{it} -k korrelálatlanok $\forall t, i$ -re.

HR4: Az u_{it} hibatagok várható értéke nulla, és σ_u^2 a varianciája.

HR5: Az α_i egyedhatások várható értéke nulla és varianciája σ_α^2 .

HR6: Az x változók nem sztochasztikusak, és az egyedenkénti várható értékek korrelálatlanok mind az u_{it} -kel, mind az α_i -kel, $\forall t, i$ -re.

HR7: Az x változók nem sztochasztikusak, és korrelálatlanok mind az u_{it} -kel, mind az α_i -kel, $\forall t, i$ -re.

A késleltetett változók szerepeltetése következtében HR6 és HR7 ismét csak nem teljesül. Hausman és Taylor (1981) nyomán —lásd később— az utóbbi könnyen módosítható, ha megengedjük, hogy az x változók egy része α_i -vel korreláljon. Ez ugyanakkor közvetlenül hat az érvényes instrumentumok kiválasztására, és fölöslegesen bonyolítja a későbbi tárgyalást. Az egyenletek hibatagjaira vonatkozó feltételekből adódóan az összetett hibatag variancia-kovariancia mártixa a következő lesz:

$$\Omega_v = V(v) = I_N \otimes E(\underline{v}_i \underline{v}_i') = I_N \otimes \Sigma_v, \quad (15)$$

$$\Sigma_v = \sigma_\alpha^2 J_T + \sigma_u^2 I_T = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \rho \\ \rho & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $\rho = \sigma_\alpha^2 / (\sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2)$ a csoporton belüli korrelációs együttható.

3.2 IV becslőfüggvények

Ahogy korábban már említettük, az első differenciákra épített modell összes IV becslőfüggvénye hasonlóan alkalmazható mind véletlen, mind rögzített hatású specifikációknál. Ezért már csak a szintekre épített véletlen hatású modell becslésének áttekintése maradt hátra.

A *Balestra-Nerlove (BN)*, *Hausman-Taylor (HT)*, *Amemiya-MaCurdy (AM)* és *Breusch-Mizon-Schmidt (BMS)* kétlépéses IV becslőfüggvények. A statikus véletlen hatású panelmodellnél jónéhány becslőfüggvény javasolta a modell szférikus alakítását, a *GLS*-nél szokásos, az $\Omega_v^{-1/2}$ -del való, balról történő szorzás segítségével. Ez a transzformáció általában megfelelően alkalmazható dinamikus modellekre is.⁴

Bármilyen is a becslőfüggvény, ha Ω_v ismeretlen, a szokásos *Megvalósítható Általánosított Legkisebb Négyzetek (FGLS)* problémája jelentkezik. Csakugyan, (1) *OLS* regressziójának reziduumaiból Ω_v nem becsülhető, mert a paraméterbecslések szemi-inkonzisztensek lesznek, hiszen Ω_v bármely becslőfüggvénye a \hat{u} reziduumokon alapulna. Aszimptotikusan \hat{u} bármely szemi-konzisztens becslőfüggvénye (és így Ω_v -é is) alkalmazható, habár a különböző módszerek kismintás eltéréseket okozhatnak. Ha Ω_v -re konzisztens becslőfüggvényt találtunk és meghatároztunk egy megfelelő instrumentumhalmazt (Z), három becslőfüggvény közül választhatunk.

- (1) szorzása balról Z' -vel, majd becslés *GLS*-sel, $\text{Var}(Z'\underline{y}) = Z'\Omega_v Z$ használatával.
- (1) skalár-modellé transzformálása $\Omega_v^{-1/2}$ -del való szorzással. Újabb transzformáció a (transzformált) modellnek $Z'\Omega_v^{-1/2}$ -del való balról szorzásával. Végül $\text{Var}(Z'\Omega_v^{-1/2}\underline{y}) = Z'\Omega_v^{-1} Z$ használatával a kétszer transzformált modell *GLS* becslése.
- Ugyanaz mint b), kivéve, hogy a második fokozatban a nem transzformált Z instrumentumhalmaz kerül alkalmazásra ($\Omega_v^{-1/2} Z$ helyett), és $\text{Var}(Z'\Omega_v^{-1/2}\underline{y}) = Z'Z$.

Az *Általánosított Balestra-Nerlove (G-BNran)* kétlépéses IV becslőfüggvény. A Balestra és Nerlove [1966] becslőfüggvény instrumentumhalmazként szintén folyóidőszaki és (egy időszaki) késleltetett exogén változókat használ.

A *Hausman-Taylor (HT)* IV becslőfüggvény. Hausman és Taylor [1981] az X mátrixot $X = (X_1 : X_2)$ módon particionálja, ahol X_1 korrelálatlan az egyedhatásokkal, ám X_2 az. Dinamikus panelmodelleknél a késleltetett függő változó X_2 -nek felel meg, és HR7-t feltételezve a megmaradó magyarázó változók (e tanulmány jelölései szerint X) a Hausman-Taylor-féle X_1 -nek felelnek meg.

A G-BNran becslőfüggvényhez hasonló logikát követve X késleltetett értékei mellett a *HT* becslőfüggvény is figyelembe veszi az eredeti exogén változók mint érvényes instrumentumok várható értékeit és az azoktól való

⁴A Breusch-Mizon-Schmidt becslőfüggvény kivétel (lásd később).

eltéréseket. Amint Breusch, Mizon és Schmidt ([1989], 696. old.) megmutatja, ez a következő instrumentumok alkalmazását jelenti:

$$Z = (W_n X_{-1} : \overline{B}_n X_{-1} : X). \quad (17)$$

Az *Amemiya-MaCurdy (AM) IV* becslőfüggvény. Ha az x -ek szigorúan exogén változók, mind múlt-, mind folyó- és jövőbeni értékeik érvényes instrumentumokká válnak. Így az Amemiya és MaCurdy [1986] becslőfüggvény tovább bővíti az instrumentumhalmazt X^* beiktatásával, melyet az alábbiak szerint definiálunk:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{11}^{(2)} & \dots & x_{11}^{(k)} & \dots & x_{1T}^{(1)} & \dots & x_{1T}^{(k)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{21}^{(2)} & \dots & x_{21}^{(k)} & \dots & x_{2T}^{(1)} & \dots & x_{2T}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N1}^{(1)} & x_{N1}^{(2)} & \dots & x_{N1}^{(k)} & \dots & x_{NT}^{(1)} & \dots & x_{NT}^{(k)} \end{pmatrix} \otimes \underline{L}_{T'}. \quad (18)$$

Jegyezzük meg, hogy X^* minden oszlopa *csak egy* t -re vonatkozó x_{it} értékeket tartalmaz, szemben X -szel, mely x_{it} értékeit $t = 1, \dots, T$ -re tartalmazza. Valójában X $(T+1)$ -szer kerül alkalmazásra, T -szer, mint X^* , és egyszer, mint $W_n X$. A dinamikus modellnél mindemellett szükség van X_{-1}^* -re is, ami az alábbi lesz:

$$X_{-1}^* = \begin{pmatrix} x_{10}^{(1)} & x_{10}^{(2)} & \dots & x_{10}^{(k)} & \dots & x_{1T}^{(1)} & \dots & x_{1T}^{(k)} \\ x_{20}^{(1)} & x_{20}^{(2)} & \dots & x_{20}^{(k)} & \dots & x_{2T}^{(1)} & \dots & x_{2T}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N0}^{(1)} & x_{N0}^{(2)} & \dots & x_{N0}^{(k)} & \dots & x_{NT}^{(1)} & \dots & x_{NT}^{(k)} \end{pmatrix} \otimes \underline{L}_{T'}. \quad (19)$$

A dinamikus modellre ezért a teljes AM instrumentumhalmaz:

$$Z = (W_n X_{-1} : X_{-1}^* : X). \quad (20)$$

Az *AM* becslőfüggvény, ha konzisztens, legalább olyan hatásos, mint a *HT* becslőfüggvény (Amemiya és MaCurdy [1986], 871-872. old.).

A *Breusch-Mizon-Schmidt (BMS) IV* becslőfüggvény. A *BMS* becslőfüggvény (Breusch, Mizon és Schmidt [1989]) szintén kiterjeszti az instrumentumok körét. A dinamikus modellben ez $(W_n \underline{y}_{-1})^*$ beiktatását jelenti, melynek definíciója hasonló a (19)-ben szereplő X^* -hoz. Dinamikus modellben ezek a kiegészítő instrumentumok nem érvényesek, minthogy ez a forrása a *Within* becslőfüggvény inkonzisztenciájának is. Ezért ebben az esetben a *BMS* és *AM* becslőfüggvények azonosak.

A Wansbeek-Bekker (WB) IV becslőfüggvény. Bár a javasolt IV becslőfüggvények véges T -re és $N \rightarrow \infty$ -re konzisztensek, véges N -re még mindig torzítottak. A kismintás torzításon kívül a becslőfüggvények a szemi-aszimptotikus hatásosság szempontjából rendelkezhetnek kedvező tulajdonságokkal; ezt aknázza ki Wansbeek és Bekker [1993].

A WB Anderson és Hsiao (1982) megközelítését terjeszti ki olymódon, hogy az instrumentumok között a független változó késleltetett és jövőbeli értékei (valamint ezek lineáris kombinációi) is szerepelnek. Az y változót $t = 1$ -től $t = T$ időszakig értelmezve a WB becslőfüggvény instrumentumként figyelembe veszi \underline{y}_+ lineáris függvényeit, ahol \underline{y}_+ a $t = 1$ -től $t = T$ -ig az egyes egyedekre vonatkozó megfigyelésekből máglyázott vektor. A lineáris függvényeket az A_i $(T + 1) \times T$ méretű mátrix határozza meg, melyből megkapjuk a teljes instrumentumhalmazt, $A' \underline{y}_+$ -t (ahol $A = I_N \otimes A_i$). Az A -ra előírt korlátozások a következők:

$$A_{\underline{L}'} = 0 \quad \text{és} \quad E(\underline{y}'_+ A \underline{u}) = \text{tr} A E(\underline{u} \underline{u}'_+) = 0. \quad (22)$$

Ezek biztosítják az egyedhatások kiküszöbölését valamint a becslőfüggvény konzisztenciáját.

Wansbeek és Bekker [1993] megmutatták, hogy ezek a feltételek egyben meghatározzák A szerkezetét is, mégpedig úgy, hogy sorait összegezve éppúgy nullát kapunk, mint a legalacsonyabb T kvázi-diagonális elemeinek összegzéseként (nevezetesen a bal alsó elem nulla). Egy változó A mátrix segítségével való transzformálásának néhány esetben „szokásos” értelmezése lesz, míg más esetekben nem (példaként lásd Wansbeek és Bekker [1993] tanulmányát). A teljes WB-féle instrumentumhalmaz ezért a következő:

$$Z = (A' \underline{y}_+ : X), \quad (23)$$

és $(Z'u)$ kovariancia mátrixaként $\sigma_u^2(Z'Z)$ -t használva a WB becslőfüggvény a GLS-nek a transzformált modellre történő alkalmazásával kapható meg.⁵

$$Z'y = Z'\tilde{X}\gamma + Z'u. \quad (24)$$

A becslőfüggvény szemi-aszimptotikus kovariancia mátrixa a következő:

$$\sigma_u^2 \left(\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\tilde{X}' P_Z \tilde{X})^{-1} \right), \quad (25)$$

ahol $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$, ami (23) alapján A függvénye. A optimális értéke az, amelyik minimalizálja (25)-t, ugyanakkor kielégíti a reá vonatkozó korlátozásokat. Valójában ezektől a feltételektől eltekintve A nincs közelebből

⁵Megjegyezzük, hogy ez a kifejezés a $(Z'Z)$ varianciának csak egy közelítése, amelyik az igazi varianciától $E(\underline{y}'_+ \underline{u}) \neq 0$ mértékben tér el, ám ezt a keresztkorrelációt nem vettük figyelembe.

meghatározva. Az egyszerű AR(1) modell WB becslőfüggvénye a megfelelő A korlátozott optimalizálása révén kapható meg (Wansbeek és Bekker [1993]). Ha azonban a modell exogén változókat is tartalmaz, numerikus módszereket kell alkalmazni, hiszen a becslőfüggvény varianciája mátrix, nem pedig skalár.

Ha csak a paramétervektor kovariancia mátrixával foglalkozunk (és nem egyes elemeinek kovarianciájával), az optimális WB becslőfüggvény korlátozott optimalizálás révén kapható meg, ahol σ_u^2 -t konstansnak tekintve azt az A -t keressük, amelyik minimalizálja (25) nyomát, és eleget tesz a (22) korlátozásoknak. Megjegyezzük, hogy az érvényes instrumentumok köre nemcsak $A'y_+$ -nal terjeszthető ki, hanem például $A'X_+$ -szel is (WB illetve WB^+), azaz:

$$Z^+ = (A'y_+ : A'X_+ : X). \quad (26)$$

Ezek a becslőfüggvények olyan modellekre is alkalmazhatók, ahol az hibatagok kovariancia mátrixára vonatkozó skalár kovariancia mátrix feltételt feloldottuk. A GLS alkalmazásával (24)-re a megfelelő becslőfüggvények most is megkaphatók, de $(Z'u)$ kovarianciája most $(Z'\Omega_u Z)$, ahol Ω_u nem adott. A korlátozatlan WB becslőfüggvény kovariancia mátrixa:

$$\text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\tilde{X}' P_{Z\Omega} \tilde{X})^{-1}, \quad (27)$$

ahol $P_{Z\Omega} = Z(Z'\Omega_u Z)^{-1}Z'$, és a P_{ZW} inverzének becslése a (12) egyenlet alapján \underline{u}_T előzetesen becsült értékeiből történik. A korlátozatlan WB becslőfüggvény (27) nyomának minimalizálásával újra megkapható, feltéve, hogy A eleget tesz a szükséges korlátozásoknak. A korlátozatlan WB^+ ugyanaz, mint fent, kivéve hogy $P_{Z\Omega}$ helyett $P_{Z\Omega}^+$ -t használ, melynek definíciója nyilvánvaló.

Az Arellano és Bover ($ABov$) IV becslőfüggvény. A WB becslőfüggvényhez hasonlóan az Arellano és Bover [1993] becslőfüggvény is a T egyenletek rendszerét transzformálja. A nonszinguláris transzformáció a következőképpen adott:

$$H_i = \begin{pmatrix} K \\ \underline{L}_T/T \end{pmatrix}, \quad (28)$$

ahol K a Wansbeek és Bekker féle A -hoz hasonlít abban, hogy $K\underline{L}_T = 0$, ahol K valamilyen $(T-1)$ rangú $(T-1) \times T$ -s mátrix. K lehet például a Within csoport operátor első $(T-1)$ sora, vagy az első differencia operátor. Mivel az első $(T-1)$ transzformált hiba,

$$\underline{v}_i^+ = H_i \underline{v}_i = \begin{pmatrix} K \underline{v}_i \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

nem tartalmaz α_i -t, erre az első $(T-1)$ egyenletre az összes exogén változó érvényes instrumentum. Mi több, a v_{it} maradékok autokorrelálatlanságát feltételezve az Arellano-Bond becslőfüggvény nyomán az $(y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{iT-1})$ szintén érvényes instrumentum. Ámbátor ez a feltevés K -ra több strukturális megköttést igényel, melynek most még felső triangulárisnak is kell lennie (Arellano és Bover [1993] 16. old). Ez definiálja az érvényes instrumentumok mátrixát:

$$Z_i = \begin{pmatrix} (\underline{x}'_i, y_{i0}) & & & & 0 \\ & (\underline{x}'_i, y_{i0}, y_{i1}) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (\underline{x}'_i, y_{i0}, \dots, y_{iT-2}) & \\ 0 & & & & \underline{x}'_i \end{pmatrix}, \quad (30)$$

ahol $\underline{x}'_i = (\underline{x}'_{i0} : \dots : \underline{x}'_{iT})$. Legyen $Z = (Z'_1 : \dots : Z'_N)'$ és $H = I_N \otimes H_i$. Ekkor az *A-Bov* becslőfüggvény megkapható a transzformált modell *GLS* becsléseiből:

$$Z' H \underline{y} = Z' H \tilde{X} \gamma + Z' H \underline{v}, \quad (31)$$

ahol $V(Z' H \underline{v}) = Z' H \Omega_v H' Z$. Arellano és Bover a működést tekintve azt állítja, hogy feltéve, hogy a kapott K kielégíti a fenti feltételeket, az *Abov* becslőfüggvény K választására nézve invariáns.⁶

Az előző becslőfüggvényekhez hasonlóan a transzformált rendszer $\Omega^+ = H \Omega_v H'$ kovarianciáját előzetes szemi-konzisztens becslőfüggvények reziduumaiból kell becsülni. White [1984] nyomán Arellano és Bover (uo. 6. old.) a következőt javasolja:

$$\hat{\Omega}_{II'}^+ = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{v}_i^+ \hat{v}_i^{+'}, \quad (32)$$

ahol \hat{v}_i^+ -k a $H_i \underline{v}_i$ -k előzetes szemi-konzisztens becslései, és $\hat{\Omega}_{II'}^+$ az Ω^+ korlátozatlan becslőfüggvénye. A hibatagokra vonatkozó szokásos feltevések mellett a korlátozott becslőfüggvény:

$$\hat{\Omega}_v^+ = H \hat{\Omega}_v H', \quad (33)$$

ahol $\hat{\Omega}_v = I_N \otimes (\hat{\sigma}_v^2 J_T + \hat{\sigma}_u^2 I_T)$, és $\hat{\sigma}_v^2$, $\hat{\sigma}_u^2$ konzisztens becslőfüggvényei σ_v^2 -nak illetve σ_u^2 -nak.

GMM becslőfüggvények. A dinamikus panelmodellek *GMM* becslőfüggvényének terén az utóbbi időben fontos előrelépés történt. Ezek közül a legjelentősebbek Alm és Schmidt [1995] és Crépon és mások [1996] munkái. A HR1-HR7 feltételezések a kezdeti értékek specifikációjával együtt (a (20) egyenlet

⁶Ezt az eredményt használva az első differencia operátort az egymást követő szimulációs kísérletekben alkalmaztuk (lásd a 4. fejezetet).

szerint) lehetővé teszik a paraméterek és az adatok segítségével kifejezett ortogonalitási feltételek felállítását:

$$(3a) \quad E(y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta}) = 0$$

$$(3b) \quad E((y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})^2) = \sigma_0^2$$

$$(3c) \quad E((y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})(y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})) = \sigma_{\alpha}^2, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(3d) \quad E(y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta}) = 0, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(3e) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})(y_{is} - \delta y_{is-1} - \underline{x}'_{is}\underline{\beta})) = \sigma_{\alpha}^2, \quad (\forall t \neq s)$$

$$(3f) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})^2) = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_u^2, \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$(3g) \quad E(y_{i0}(y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})) = c, \quad (t = 1, \dots, T, c \text{ konstans.})$$

$$(3h) \quad E((y_{i0} - \underline{x}'_{i0}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 0, \dots, T)$$

$$(3i) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{i0}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 0, \dots, T)$$

$$(3j) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{it}^k) = 0, \quad (\forall k, t = 1, \dots, T)$$

$$(3k) \quad E((y_{it} - \delta y_{it-1} - \underline{x}'_{it}\underline{\beta})x_{is}^k) = 0, \quad (\forall k, t \neq s)$$

Az *IV* becslőfüggvények csak azokon a feltételeken alapulnak, amelyek a vizsgált paraméterekben lineárisak (vö. *AB* becslőfüggvény és *g*) feltétel fent), míg Ahn és Schmidt [1995] a nem-lineáris feltételekre fordítja a figyelmet (mint 3f)). Bár, ahogyan Crépon és mások [1996] rámutatnak, ezek a becslőfüggvények mellőzik az elsőrendű momentumokat (3a) és 3d)) a csökkenő hatásosság árán is.

A fenti 3a) - 3k) feltételek különböző részalmazaira számos *GMM* becslőfüggvény építhető (Ahn és Schmidt [1993]). Mindazonáltal a numerikus megfontolások nagymértékben befolyásolhatják a használható feltételek számát. (2b táblázat).

A szintekre épített véletlen hatású specifikációra vonatkozó *IV* típusú becslőfüggvényeket a 2a táblázat foglalja össze. (Érdeemes utalni az első differenciákat használó becslőfüggvényekre, melyek az 1b táblázatban láthatók). A *GMM* típusú becslőfüggvényeknél használható ortogonalitási feltételek számát itt is *N* és *T* határozza meg. Ezen *GMM* típusú becslőfüggvények összefoglalását a 2b táblázat tartalmazza.

2a táblázat: IV típusú becslőfüggvények dinamikus, véletlen hatású modellekre, $N \rightarrow \infty$, T véges

Módszer	Konzisztencia	Szférikus modellé alakítás	y_{it-1} instrumentuma(i)
<i>OLS</i>	–	–	y_{it-1}
<i>Within</i>	–	W_n	y_{it-1}
<i>FGLS</i>	–	$\Omega_v^{-1/2}$	y_{it-1}
<i>G – BNran^(a)</i>	+	–	X_{-1}
<i>G – BNran^(b)</i>	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$\Omega_v^{-1/2} X_{-1}$
<i>G – BNran^(c)</i>	+	$\Omega_v^{-1/2}$	X_{-1}
<i>HT^(a)</i>	+	–	$W_n X_{-1}, \bar{B}_n X_{-1}$
<i>HT^(b)</i>	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$\Omega_v^{-1/2} W_n X_{-1}, \Omega_v^{-1/2} \bar{B}_n X_{-1}$
<i>HT^(c)</i>	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$W_n X_{-1}, \bar{B}_n X_{-1}$
<i>AM^(a)</i>	+	–	$W_n X_{-1}, X_{-1}^*$
<i>AM^(b)</i>	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$\Omega_v^{-1/2} W_n X_{-1}, \Omega_v^{-1/2} X_{-1}^*$
<i>AM^(c)</i>	+	$\Omega_v^{-1/2}$	$W_n X_{-1}, X_{-1}^*$
<i>WB</i>	+	A	y_+
<i>WB⁺</i>	+	A	y_+, X_{-1}
<i>ABov</i>	+	H	$y_{i0}, \underline{x}'_{i0} \dots \underline{x}'_{iT}; y_{i0}, y_{i1}, \underline{x}'_{i0} \dots \underline{x}'_{iT}; \dots$

2b táblázat: GMM típusú becslőfüggvények dinamikus, véletlen hatású modellekre

Mintanagyság		Használt feltételek	Súlymátrix	Becslőfüggvény rövidítése
T	N			
4	25	3a) - 3j)	I	GMM-R1
4	50	3a) - 3j)	I	GMM-R1
10	25	3a) - 3j)	I	GMM-R1
10	50	3a) - 3j)	I	GMM-R1
4	25	3a) - 3g) és 3j)	\bar{W}	GMM-R2
4	50	3a) - 3k) ¹	\bar{W}	GMM-R3
10	25	3a), 3b), 3d) és 3e) ²	\bar{W}	GMM-R4

Megjegyzések: ¹ \bar{W} az empirikus momentumok becsült kovariancia mátrixa.

² csak $k = 1$ -re.

4. Szimulációs kísérletek

A szimulációs kísérletekhez az adatokat a következő módszer szerint generáltuk:

$$y_{it} = \alpha_i + \delta y_{it-1} + x_{it}^{(1)} \beta_1 + x_{it}^{(2)} \beta_2 + u_{it}, \quad (34)$$

$$y_{i0} = \alpha_i + \underline{x}'_{i0} \underline{\beta} + u_{i0},$$

ahol $u_{it} \sim N(0, 1)$, $x_{it}^{(k)} = x_{it-1}^{(k)} + \text{egyenletes}(-0.5, 0.5)$, $k = 1, 2$, és $\delta = \beta_1 = \beta_2 = 0.5$.

A rögzített- és véletlen hatású specifikációhoz az egyedhatásokat $\alpha_i = 1, \dots, N$, illetve $\alpha_i \sim N(0, 1)$ -ként generáltuk. A kísérletek során $T = 4, 10$ és $N = 25, 50$ mintanagyságokat választottunk. Végül a számítási idő korlátai miatt nagy minták esetén a Monte Carlo ismétlések száma 100-ra korlátozódott. A vizsgálat tárgya minden esetben δ becslőfüggvénye volt. A számítást a *Constrained Optimisor* használatával GAUSS-ban végeztük el.⁷ A rögzített- és véletlen hatású specifikációra vonatkozó vizsgálatok eredményei a függelékben az 1-4. és 5-7. ábrákon láthatók.⁸

4.1 Az rögzített hatású modell eredményei

A legkisebb mintanagyságnál ($N = 25, T = 4$) az egyszerű *OLS* becslőfüggvény azonnal mellőzhető a túl nagy torzítás miatt (1. ábra). Az *AB* becslőfüggvény, amely a kibővített instrumentumhalmazt használja, láthatólag nagyon megsemmeni a kismintás torzítást, főleg a torzítás terjedelme miatt. A megmaradó szemi-konzisztens becslőfüggvények szempontjából úgy tűnik, nagyon kevés különbség van az *AR* és az egyszerű *AB* becslőfüggvények változatai között. A viszonylag kis torzítás és a stabilitás miatt azonban az első differenciákat használó modell *Within* becslőfüggvénye vagy egyszerű *OLS* becslőfüggvénye egyaránt alkalmazható. Végül azoknak a *GMM* típusú becslőfüggvényeknek, melyek az összes feltételt felhasználják és súlymátrixuként az egységmátrix szolgál (*GMM-F1*), nagyon hasonló az eredményük azokéhoz, melyeknél a feltételeknek csak egy része szerepel és súlymátrixuk ezek empirikus kovariancia mátrixa (*GMM-F2*). Valamivel kisebb torzítás és a torzítás kisebb terjedelme miatt az utóbbi előnyösebb lehet, ám bátor mindkettőt felülmúlják az *AR* és *AB* becslőfüggvények.

Ha T -t rögzítjük és N -et ötvenig növeljük, hasonló eredményeket kapunk, nevezetesen azt, hogy az *AR* és az egyszerű *AB* becslőfüggvények a legjobbak, és rögtön utánuk következnek a *GMM* típusú becslőfüggvények. Bár, ugyanazon okokból, mint előbb, az (inkonzisztens) *Within* vagy *OLS* (Δ) becslőfüggvények valamelyikének alkalmazása is lehetséges. Fontos megállapítás még az, hogy a túlzott instabilitás miatt az AB^+ becslőfüggvények

⁷A programot a szerzők kérésre rendelkezésre bocsátják. $T = 4$ az a legkisebb mintanagyság, amely minden becslőfüggvénynek megfelel. A β_1 -re és β_2 -re vonatkozó eredményeket kérésre a szerzők rendelkezésre bocsátják. Időkorlátok miatt a véletlen hatású szimulációkat a legnagyobb mintanagyság esetén ($N = 50$ és $T = 10$) nem futtatunk le. Becslések szerint egy ilyen kísérlet lefuttatása Pentium 120-as személyi számítógépen több mint két hónapot venne igénybe.

⁸A számszerű eredmények megtalálhatók Harris és Mátyás [1996] munkájában, az A2 - A8. táblákban.

mellőzhetőek. Továbbá, bár az egyedek számának növekedése lehetővé teszi a *GMM* becslőfüggvény számára az empirikus kovarianciamátrix használatával (*GMM-F3*) az összes feltétel alkalmazását (lásd 1b táblázat), úgy tűnik, ez nem javítja a *GMM* tulajdonságait ahhoz képest, amelyek az egységmátrixot használja (*GMM-F1*). Mindkettő kicsivel gyengébb az *AR* és *AB* becslőfüggvényeknél.

Az időszakok számának tízre való növelésével ($N = 25$ mellett) néhány figyelemreméltó következtetésre juthatunk. Először is, ez elég drasztikusan csökkenti az AB^+ becslőfüggvények, és meglehetősen váratlanul az *OLS* (Δ) becslőfüggvény teljesítményét is (3. ábra). Az eddigi mintáknál jól szereplő becslőfüggvények most is a legjobbak. A legkiválóbbak között azonban változás áll be, hiszen az *AB* becslőfüggvénnyel most valamivel kisebb torzítás érhető el, mint az *AR* becslőfüggvényekkel. Az *AB* becslőfüggvények mellett a *Within* becslőfüggvény általában továbbra is jól szerepel. A *GMM* típusú becslőfüggvények megint közvetlenül ezek után következnek, és bár az időszakok számának növekedése szigorúan korlátozza a *GMM-F4* által használható ortogonalitási feltételek számát (1b táblázat), ez a becslőfüggvény mégis jobb az egységmátrixot használó párjánál. A legnagyobb mintanagyságnál is hasonló eredményre jutunk, az egyszerű *AB* és *AR* becslőfüggvények teljesítménye a legjobb, bár a *Within* becslőfüggvény sem sokkal marad el tőlük. A *GMM* típusú becslőfüggvények továbbra is jó teljesítményt nyújtanak, bár az *AH* becslőfüggvények most megelőzik őket.

Mindent összefoglalva, a vizsgálatok illusztrálták az *OLS* és *Within* becslőfüggvények ismert torzításait (ánbár a legkisebb mintanagyságnál az első differenciákat használó modell *OLS* becslőfüggvénye viszonylag jól szerepelt), és a *Within* becslőfüggvény viszonylag kicsiny varianciáját (Kiviet [1994]). Az *AH* becslőfüggvényeket felülmúló *AR* növekvő hatásossága szintén egyértelmű volt (Arellano [1988]). A *Within* becslőfüggvény jó teljesítménye viszont meglepő, különösen az előző eredmények tükrében (lásd Nickell [1981] és Maddala [1991]).⁹ Az is kiderült, hogy valójában nincs különbség a becslt és az elméleti kovarianciamátrixot használó változatok között. Hasonlóan meglepő, hogy az eredeti *AR* és *AH* becslőfüggvények további instrumentumokkal történő bővítése csak kicsiny hatással van azok teljesítményére.

Azoknál a szemi-konzisztens becslőfüggvényeknél, melyek csak az exogén változók érvényes késleltetett értékeit (és ezek transzformációit) használják, (azaz az *ST* és *BN* becslőfüggvényeknél) előnyösebbek azok, melyek valamilyen formában a függő változó késleltetett értékeit is alkalmazzák. Kisebb mintáknál az egyszerű *AR* becslőfüggvény megfelelőnek tűnik, és ezt köz-

⁹Ez nem teljesen igaz, hiszen a szimulált (abszolút) eltérések becslései: 0.022; 0.008; 0.014 és 0.0038 voltak, a megfelelő egzakt aszimptotikus torzítások pedig Nickell [1981] (25) egyenletének felhasználásával rendre: 0.023; 0.007; 0.010 és 0.0025.

vetlenül az egyszerű AB és GMM típusú becslőfüggvények követik. Nagyobb mintáknál az AB becslőfüggvény kezd dominálni, és a GMM típusú becslőfüggvények teljesítménye is megnő (amiatt, hogy bár N növekedésével megnő a becsült paraméterek száma, a minta nagyobb keresztmetszeti komponense lehetővé teszi az elméleti momentumok jobb becslését).

A számítások megkönnyítése érdekében az egyszerű AR becslőfüggvényt célszerű választani, mert a standard szoftverekkel az AB instrumentális mátrixának programozása nehézségekbe ütközhet. Még könnyebb az egyszerű $Within$ és OLS (Δ) becslés elvégzése, ráadásul ezek a becslőfüggvények, főleg kismintában elég jó teljesítményt nyújtanak. Mi több, Nickell [1981] nyomán ezen becslőfüggvényeknél a valószínű torzítások meglehetősen pontosan kiszámíthatók. Végül, ha rendelkezésünkre áll egy optimalizáló programcsomag, a GMM típusú becslőfüggvények is vonzóknak mutatkoznak, főleg nagyobb mintáknál, és ha kétségeink vannak az igazi adatgeneráló folyamatra vonatkozó feltevésekkel kapcsolatban.

4.2 A véletlen hatású modell eredményei

A véletlen hatású specifikáció becslése sokkal nehezebbnek tűnik. A legkisebb mintanagyságnál például tartózkodni kell a szemi-konzisztens becslőfüggvények használatától, kivéve a GMM típusú WB^+ és AM becslőfüggvényeket, valószínűleg ebben a sorrendben (5. ábra). Az AM változatai között valójában nincs különbség. Az inkonzisztens OLS vagy $FGLS$ becslőfüggvények használata szintén lehetséges. Az abszolút torzítás szempontjából a GMM típusú becslőfüggvények jobbak, az előbbieket azonban általában stabilabbak (5. ábra). Megjegyzendő, hogy a különböző GMM típusú becslőfüggvények között nincs számottevő különbség, még akkor sem, ha a GMM -R2 becslőfüggvényénél számos feltételt el kell hagyni (2b. táblázat).

N -et ötvenre növelve (6. ábra) a GMM eljárások sokkal pontosabban tudják becsülni az empirikus momentumokat, és ennek következtében a teljesítményük is megnövekszik. Az ilyen méretű minták esetén ($T = 4$, $N = 50$) a GMM becslőfüggvények egyértelműen dominálnak. Bár N növelése megint csak lehetővé teszi gyakorlatilag az összes feltétel használatát a GMM típusú becslőfüggvények számára (2b. táblázat), a két GMM változat között nagyon kicsiny a különbség. A többi becslőfüggvényt tekintve, a WB^+ becslőfüggvény megint csak jól viselkedik, csak a GMM típusú becslőfüggvények múlják felül. Bár például a HT , AR és BN becslőfüggvények torzítása valamivel kisebb, mint az AM becslőfüggvényé, az utóbbi a kisebb terjedelem miatt mégis előnyösebb lehet.

Az időszakok számát tízre növelve a becslőfüggvények többségének teljesítménye jelentősen javul (7. ábra). A korábbi tanulmányokkal összehangban

(lásd például Arellano és Bond [1991] és Kiviet [1994]) például az AR és AB becslőfüggvények változatai is megfontolásra érdemesek. A legjobban teljesítő becslőfüggvények a WB és WB^+ becslőfüggvények (az utóbbi kicsit még jobb is), a legkisebb torzítás, a torzítások alacsony MSE értékei és kis terjedelme miatt. A GMM típusú becslőfüggvények továbbra is jól viselkednek. Mindamellett, T növekedése drasztikusan csökkenti a GMM -R4 által alkalmazható ortogonalitási feltételek számát (2b. táblázat), mely rossz irányban befolyásolja a teljesítőképességét, főleg GMM -R1-hez képest. Ilyen mintanagyság esetén lehetséges módszerek még a BN becslőfüggvények (főleg a c) változat) és az egyszerű AB becslőfüggvény, minthogy a többi becslőfüggvény vagy a túlzott torzítás, vagy a torzítás terjedelme miatt nem jöhet szóba. Végül, bár inkonzisztens, a *Within* becslőfüggvény továbbra is jól szerepel, csak a WB és WB^+ becslőfüggvények jobbak nála.

Mindent összevéve, a rögzített hatású becslőfüggvényekkel ellentétben a véletlen hatású szemi-konzisztens becslőfüggvények nem rosszabbak az inkonzisztens hagyományos becslőfüggvényeknél (a *Within* becslőfüggvény például csak $T = 10$, $N = 25$ -nél múlja felül a konzisztens becslőfüggvények többségét). Kis T -re a könnyebb számítás kedvéért, úgy tűnik, a választás az AM és az (inkonzisztens) OLS és $FGLS$ becslőfüggvények között történik. Optimalizáló programcsomag segítségével azonban mind a GMM típusú, mind a WB^+ becslőfüggvények használhatók. Több időszakra kiterjedő mintában egyértelmű győztes a WB^+ becslőfüggvény, melyet közvetlenül ennek egyszerűbb változata, WB követ. A GMM típusú becslőfüggvények használata továbbra is megfontolásra méltó, különösen, ha kétségeink vannak az igazi adatgeneráló folyamattal kapcsolatban. Ha viszont nem áll rendelkezésünkre optimalizáló programcsomag, továbbra is az egyszerű AB becslőfüggvény látszik megfelelőnek.

Érdekes eltérések mutatkoznak egy meghatározott becslőfüggvény különböző változatai között. Először is, szignifikáns eltérés van az egyszerű AR és AH becslőfüggvények, valamint az instrumentumhalmazt kiterjesztő párjuk között (mind AR -nél, mind AH -nál az összes mintára az utóbbinak jobb a teljesítménye). Bár az

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' \hat{u}_i^* \hat{u}_i^{*'} Z_i$$

használata (ahol \hat{u}_i^* az általánosított transzformált hibatag becsléseit jelenti) —lásd a 2. lábjegyzetet— nem nyújt további becslőfüggvényeket, ezek mégis nagyon közel állnak azon becslőfüggvények többségéhez, melyeknek van „becsült” párjuk. Végül a GMM típusú becslőfüggvényeket illetően, a rögzített hatású specifikációval ellentétben a „becsült” változat nem egyértelműen domináns az egységmátrixos párja felett. Valójában, „nagy” T -re

az utóbbi éppolyan jó, mint az előbbi, és gyakran felülmúlja azt alacsonyabb torzításban és nagyobb hatásosságban.

Négy becslőfüggvény (BN , HT , AM és ST) használja a GLS típusú IV a)-c) változatát. Az AM minden mintánál invariánsnak tűnik a választásra, és mint már megjegyeztük, hatásossága a másik három becslőfüggvényénél jobban növekszik. Ettől a becslőfüggvénytől eltekintve, nem jelentkezik semmilyen határozott tendencia sem valamely meghatározott becslőfüggvény, sem valamelyik mintanagyság esetén.

Érdekes kérdés, hogy ezek az eredmények hogyan viszonyulnak a korábbiakhoz. Az AB , AR és AH becslőfüggvényeket három tanulmány vizsgálta (Arellano és Bond [1991], Arellano és Bover [1993], akik csak az AH és AR becsléseket tanulmányozták, és Kiviet [1994]). Arellano és Bover (1993) egy tisztán $AR(1)$ folyamatot vizsgált, $T = 3$ -nál. A hibatag értékei standard normális eloszlásból vett (pszeudo) véletlen minták voltak. Az egyedhatások szinte (de az előzőtől független) normális eloszlásúak voltak, bár különböző varianciáikkal dolgoztak. A kezdeti értékek meghatározása a következő volt:

$$y_{i0} = \frac{1}{1 - \delta} \alpha_i + \frac{1}{(1 - \delta^2)^{1/2}} u_{i0}, \quad (35)$$

$\delta = 0.5$, $\text{Var}(\alpha_i) = 1$ és $N = 100$ mellett a szimulált AH becslőfüggvény értékére 0.8-t kaptak, (viszonylag instabil) három alatti szórással. Az egy- és kétlépéses AB becslőfüggvények, melyek sokkal stabilabbak (0.24 szórással) és pontosabbak (közelítő értékeik 0.4762 és 0.4748), mint az AH becslőfüggvény, nagyon hasonló teljesítményt nyújtottak. Habár ezen becslőfüggvények torzítása szignifikánsan csökkent, amikor N -et 500-ra növelték, a torzítás δ valódi értékének csökkenő függvénye volt és az egyedi értékek varianciájával is változott, sorrendjük mégis változatlan maradt.

Arellano és Bond [1991] egy $N = 100$ és $T = 7$ nagyságú mintát vizsgált, és kiterjesztette a modellt egy szigorúan exogén változó bekapcsolásával (melyet 0.8 értékű AR paraméter generált), s melynek megfelelő koefficiense $\beta = 1$ volt. A hibatagokat standard normális eloszlásból vett független mintaelemek reprezentálták. Végül, bár a kezdeti értékeket nullára rögzítették, az első tíz megfigyelést kihagyták. $\delta = 0.5$ -nél az egy- és kétlépéses AB becslések közelítő értékei 0.4884 és 0.4920 voltak. Az egyszerű AH becslés a -2.4753 közelítő átlaggal és 45 feletti szórással nagyon gyenge teljesítményt nyújtott. Az egyszerű AR 0.5075 átlaggal (és 0.0821 szórással) már sokkal jobb becslést eredményezett. A torzítások általában δ átlagával arányosan csökkentek (0.2, 0.5 és 0.8 vizsgálatára került sor), és bár az egyes becslőfüggvényeknél tapasztalt torzítások $\delta = 0.2$ -re és $\delta = 0.8$ -ra nagyon hasonlóak voltak, a kisebb variancia miatt az AB becslőfüggvények előnyösebbnek tűntek.

Kiviet [1994] a szimulációs kísérleteknek egy sokkal szélesebb körét mutatta be, hiszen modellje egy exogén változót is tartalmazott. Az eredmények nagy terjedelmére való tekintettel a továbbiakban az olvasónak magára a tanulmányra kell hagyatkoznia. Az általános konklúzió azonban az volt, hogy az AH becslőfüggvények nagyon változékonyak, gyakran mutatnak nagy varianciát és gyenge teljesítményt (különösképp δ értékének változásaira érzékenyek). A jelen tanulmányban vizsgált becslőfüggvények közül megint az egyszerű egy- és kétlépéses AB és AR becslőfüggvények tűntek a leginkább megfelelőnek.

Ezeket az eredményeket a jelenlegi kísérletek eredményeivel összehasonlítva mi sokkal nagyobb torzításokat tapasztaltunk. A növekvő torzítások első sorban a kisebb keresztmetszeti minta méreteknek tulajdoníthatók (úm. $N = 50$ viszonyítva $N = 100$ -hoz). Kísérleteink eredményei abban alátámasztják az előző vizsgálatok eredményeit, hogy rávilágítanak az AH becslőfüggvény megbízhatatlanságára (teljesítménye erőteljesen függ a mintanagyságtól és a paraméterek valódi értékeitől). Mi több, az eredményeink megerősítik az AB és AR becslőfüggvények viszonylagos előnyét AH -val szemben, bár a legtöbb esetben e kettő közötti különbség nagyon kicsinynek látszik (az AB becslőfüggvény alkalmasabb lehet a kisebb varianciák szempontjából, míg AR a programozás egyszerűsége miatt előnyösebb). Tanulmányunk azonban több más becslőfüggvényt is vizsgált, és bár az AR és AB becslőfüggvények viszonylag jól szerepeltek, a GMM és WB becslőfüggvények egyértelműen felülmúlták őket.

5. Alkalmazás egy fogyasztói keresleti modellre

A paneladatok különösen alkalmasak keresleti függvények becslésére azért, hogy az egyedi adatok használatával az aggregált szinten felmerülő identifikációs problémák elkerülhessenek. A keresletelmélet legegyszerűbb formája feltételezi, hogy a fogyasztói vásárlások fontos meghatározója az ár és a jövedelem. Bár az elsődleges fogyasztói szükségletek kielégítésére rövid távon nincs hatással a jövedelem, az ár azonban befolyással lehet, s mindkettő hathat esetleg a vásárlások időzítésére. Megjegyzendő, hogy a késleltetett függő változó néhány esetben a megmaradó és talán a nem megfigyelhető változók hatásait is reprezentálhatja. Ebben az alkalmazásban a vizsgált változó egy ilyen elsődleges szükségletet kielégítő termék, a mosószer.

Az adatok a Roy Morgan Consumer Panel of Australia (CPA)-ból származnak, mely egy egész Ausztráliát átfogó, 2831 háztartás adataiból álló mintát tartalmaz, s amely mintainformációkat szolgáltat a fogyasztói vásárlásokról és személyi adatokról. Bár ez alapján sok termékcsoport vizsgálata

lehetséges, figyelmünk a mosószerre korlátozódott, mivel ez alapvető szükségleti cikk, és így a késleltetett függő változók használatával a legpontosabban modellezhetőnek tűnt. A területi eltérésekből eredő problémák elkerülése végett a paneltagok vásárlásaira irányuló vizsgálat pusztán Melbourne vonzáskörzetére korlátozódott. Mivel a mosószer nem gyakran vásárolt termék, a havi adatokat a kérdéses pénzügyi (1992/93) évben negyedéves adatokká összegeztük, egyrészt a szimulációs kísérlettel való összehasonlíthatóság kedvéért (úm. $T = 4$), de főként azért, hogy az adathalmazban csökkentsük a nullák (zavart okozó) előfordulását. A mintából kihagytuk azokat, akik egyik negyedévben sem vásároltak mosószert (ez 113-ra csökkentette a mintában szereplő egyedek számát). A mértékegység a negyedéves mosópor vásárlás kilogrammja és a kilogrammonkénti átlagos ár volt. Végül, bár ebben a munkában nem tettünk kísérletet a rögzített- vagy véletlen hatású modell használatának alátámasztására, az empirikus kísérletnél mégis csak az utóbit alkalmaztuk, elsősorban az adatbázisban szereplő egyedek nagy számára való tekintettel.

Azon becslőfüggvények eredményei, melyek az első differenciákra épített modellt vizsgálták, a 3a. táblázatban találhatóak, a többi pedig a 3b. táblázatban (az utóbbi konstans is tartalmaz). A priori arra lehet számítani, hogy a konstans (ha van) és a késleltetett függő változó pozitívan, az ár pedig negatívan befolyásolja az aktuális keresletet.

3a táblázat: Mosószerek fogyasztói keresletének (első differenciákra épülő) paraméterbecslése

Módszer	Késleltetett kereslet	Ár
ΔOLS	-0.491 (0.064)	-0.196 (0.093)
AH	0.836 (0.323)	-0.458 (0.167)
$AH^+(\Omega_\Delta)$	-0.478 (0.072)	-0.215 (0.098)
$AH^+(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	-0.488 (0.110)	-0.187 (0.166)
AR	-0.052 (0.139)	-0.324 (0.095)
$AR^+(\Omega_\Delta)$	-0.053 (0.198)	-0.324 (0.135)
$AR^+(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	-0.053 (0.560)	-0.324 (0.384)
$ST^{(b)}(\Omega_\Delta)$	-0.290 (0.516)	-0.169 (0.145)
$ST^{(c)}(\hat{\Omega}_{\Delta}^{-1/2})$	-0.078 (0.575)	-0.274 (0.152)
$ST^{(b)}(\hat{\Omega}_{\Delta})$	-0.116 (1.185)	-0.224 (0.352)
$AB(\Omega_\Delta)$	0.298 (0.184)	-0.342 (0.131)
$AB^+(\Omega_\Delta)$	0.308 (0.581)	-0.343 (0.416)
$AB(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	0.322 (0.158)	-0.414 (0.117)
$AB^+(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	0.249 (0.480)	-0.195 (0.361)
$BN^{(\Delta)}$	0.040 (0.635)	-0.301 (0.158)
$BN^{(\Delta)}(\hat{\Omega}_{\Delta Z})$	0.040 (1.703)	-0.301 (0.441)

3b táblázat: Mosószeres fogyasztói keresletének (szintekre épített) paraméterbecslése

Módszer	Késleltetett kereslet	Ár	Konstans
<i>OLS</i>	0.647 (0.045)	-0.158 (0.084)	1.929 (0.421)
<i>Within</i>	-0.349 (0.051)	-0.155 (0.068)	—
<i>FGLS</i>	0.733 (0.036)	-0.108 (0.072)	1.353 (0.355)
<i>BN</i> ^(a)	-0.165 (0.559)	-0.207 (0.130)	5.710 (2.396)
<i>BN</i> ^(b)	-0.226 (0.413)	-0.190 (0.107)	5.916 (1.647)
<i>BN</i> ^(c)	-0.010 (0.439)	-0.266 (0.128)	5.772 (1.851)
<i>HT</i> ^(a)	-0.223 (0.413)	-0.204 (0.128)	5.956 (1.801)
<i>HT</i> ^(b)	-0.209 (0.404)	-0.193 (0.106)	5.850 (1.616)
<i>HT</i> ^(c)	-0.064 (0.416)	-0.252 (0.123)	5.958 (1.784)
<i>AM</i> ^(a)	-0.102 (0.352)	-0.208 (0.095)	5.439 (1.466)
<i>AM</i> ^(b)	-0.102 (0.352)	-0.208 (0.095)	5.439 (1.466)
<i>AM</i> ^(c)	0.005 (0.352)	-0.230 (0.098)	5.345 (1.459)
<i>WB</i>	0.208 (0.233)	-0.185 (0.083)	3.973 (0.405)
<i>WB</i> ⁺	0.281 (0.202)	-0.180 (0.079)	3.634 (0.373)
<i>WB</i> ($P_{Z\Omega}$)	0.226 (0.177)	-0.184 (0.098)	3.893 (0.902)
<i>WB</i> ⁺ ($P_{Z\Omega}$)	0.286 (0.165)	-0.195 (0.089)	3.586 (0.827)
<i>ABov</i> (Ω_{Hv}^+)	0.413 (0.132)	-0.188 (0.047)	3.172 (0.667)
<i>ABov</i> (Ω_v^+)	-0.136 (0.316)	-0.222 (0.097)	5.571 (1.345)
<i>GMM</i> (<i>I</i>)	-0.008 (0.027)	-0.333 (0.199)	5.579 (0.850)
<i>GMM</i> (<i>W</i>) ²	-0.007 (0.125)	-0.634 (0.221)	10.131 (1.951)

Megjegyzések: A negyedéves adatok mosószeresre vonatkozóan, Melbourne vonzaskörzetében, a Roy Morgan Research Consumer Panel of Australia által az 1992/93-as pénzügyi évben szolgáltatott adatokból származnak ($N=113$). A függő változó a vásárolt mosószeres kilogrammjának negyedéves változása, a magyarázó változók pedig a késleltetett függő változó és az átlagár változása. A zárójelekben az aszimptotikus standard hibákat adtuk meg, az inkonzisztens becslőfüggvények standard hibái is inkonzisztensek. A dőlten szedett paraméterek szignifikánsak a becslt standard hibákon alapuló kétoldali próba alapján, 5%-os szignifikancia szint mellett.

² Használt feltételek: 3k)-ig mind.

Amint azt a 3a. és 3b. táblázatok világosan illusztrálják, a különböző eljárások a vizsgált paraméterek rendkívül eltérő pontbecsléseit szolgáltatják. Az aszimptotikus standard hiba szempontjából vizsgálva, a késleltetett függő változó (kereslet) és a becslőfüggvények többségénél inszignifikánsnak bizonyult. Az *ABov* becslőfüggvény ugyan szignifikáns együtthatót eredményezett, de a szimulációban nyújtott gyenge teljesítménye kétségessé teszi a becslőfüggvény érvényességét. Az *AR*⁺ becslőfüggvények szignifikánsan negatív eredményekre vezettek, de az *AB*⁺ becslőfüggvény szignifikáns és meglehetősen stabil, 0.3 feletti együtthatót eredményezett. A további becslőfüggvények közül sokat a téves előjelek miatt kell figyelmen kívül hagyni (leginkább a *GMM* változatait), bár úgy tűnik, az *AB* és *WB* becslőfüggvények egyaránt 0.2 és 0.3 közötti stabil együtthatókat eredményeznek.

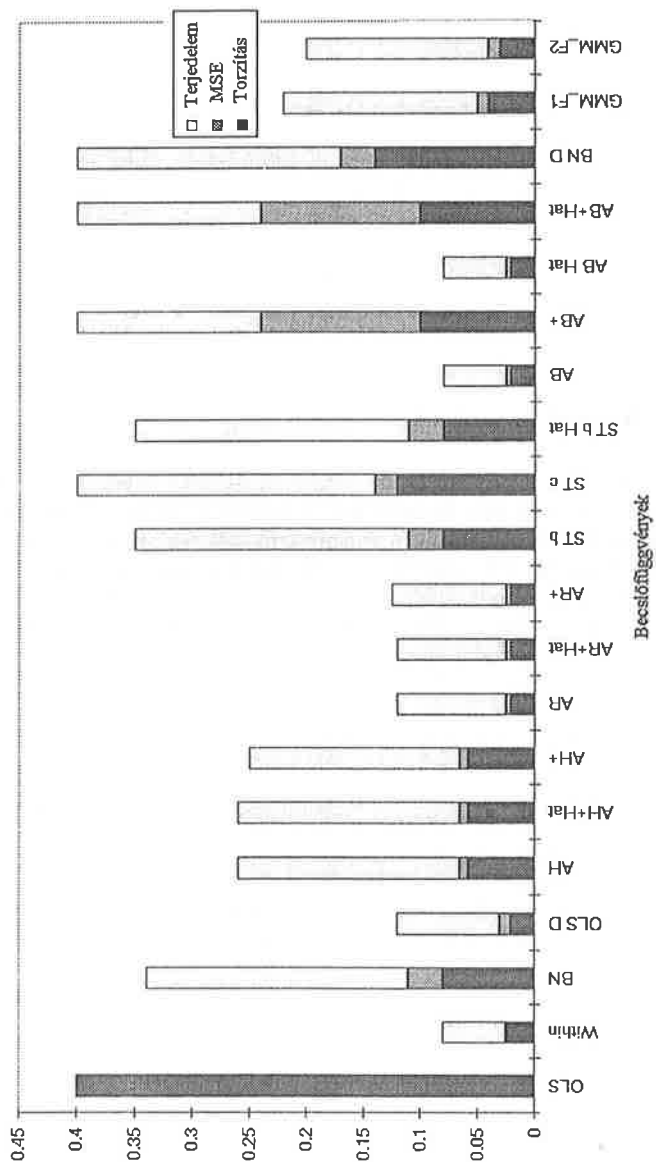
Az ár együtthatójában már nagyobb az egyetértés, hiszen az összes becslés szerint az ár negatív hatással van a keresletre. Mi több, a becslőfüggvények terjedelme szűkebb, kb. 0.2 és 0.6 közé esik (a $GMM(\hat{W})$ eljárás eredményezi a legnagyobb paraméterértéket). Bár néhány becslőfüggvény statisztikailag most is inkonzisztensnek bizonyul, ez leginkább mégis az első differenciákra épített modellnél tűnik fel. A megfelelő becslés megint kb. 0.2 körüli érték, melyet a (szignifikáns) becslőfüggvények szolgáltatnak, bár az első differenciákat használó becslőfüggvények kicsivel magasabb, 0.3-0.5 közötti értéket eredményeznek. Végül mindazok a becslőfüggvények, melyek a változók szintjeire épülnek, egyaránt statisztikailag szignifikáns, kb. 3.5 és 6 kilogramm közötti átlagos negyedéves mosószer-vásárlást becslünk. A $GMM(\hat{W})$ itt is „túl nagy” tűnő (10 feletti) becslést eredményez.

6. Következtetések

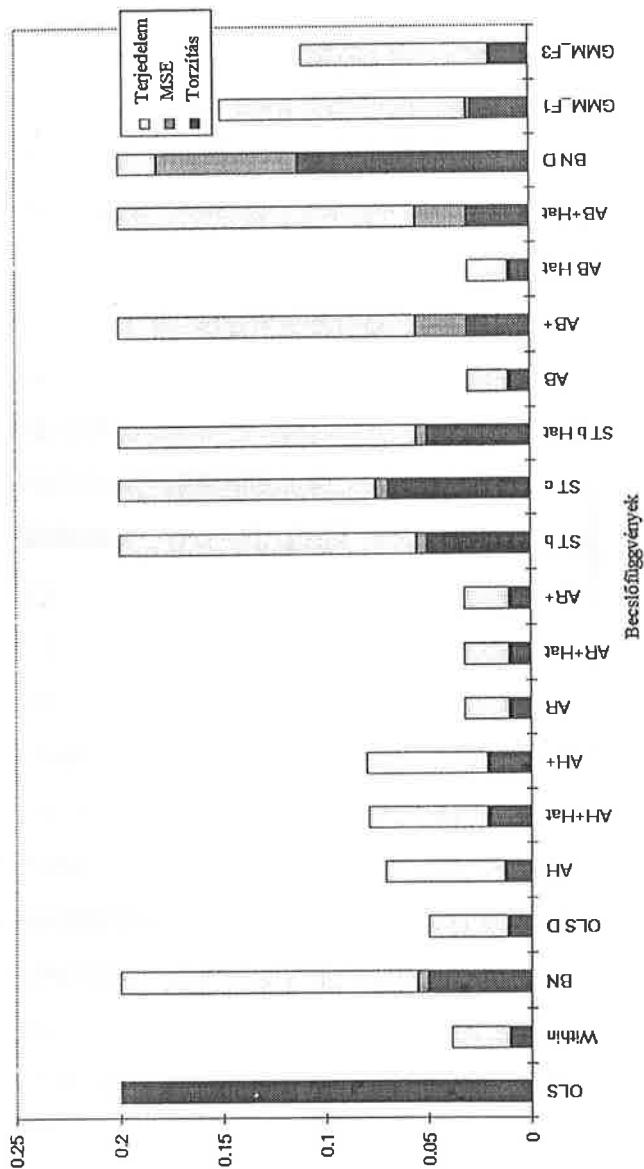
Ebben a tanulmányban a dinamikus panelmodellek két új becslőfüggvényét ajánlottuk, és a már létező számos becslőfüggvénnyel együtt értékeltük kismintás tulajdonságaikat. A rögzített hatású specifikációnál az új (GMM) becslőfüggvény jól szerepelt, és valószínűleg sok empirikus alkalmazásnál hasznos lesz. Mindazonáltal kis mintánál a GMM becslőfüggvényt kismértékben felülmúlja az AR és AB becslőfüggvények teljesítménye, melyek a számítás egyszerűsége miatt is előnyösebbek lehetnek. Bármilyen meglepő, azok a becslőfüggvények, melyek jól szerepeltek a rögzített hatású specifikációnál, már nem olyan jók a véletlen hatású modellben (főleg kevés időszakos minta esetén). A GMM típusú becslőfüggvények ilyen feltételek mellett a mintamérettől függetlenül általában megfelelőnek tűnnek. A másik javasolt új eljárás, a WB becslőfüggvény is nagyon vonzó kismintás tulajdonságokkal rendelkezik. Sőt, több időszakra kiterjedő mintáknál ennek a becslőfüggvénynek a legjobb a kismintás tulajdonságai. Ezért ez a becslőfüggvény is sok empirikus alkalmazáshoz megfelelő lehet.

Végül, a becslőfüggvény kiválasztásának fontosságára egy alkalmazáson keresztül hívtuk fel a figyelmet, mely a mosószeres fogyasztói keresletét vizsgálta. Azt találtuk, hogy nemcsak a paraméterbecslések előjele és nagysága között van óriási különbség, hanem a becslt aszimptotikus standard hibák statisztikai szignifikanciái között is. Ez kiemeli az egyes problémáknál és adathalmazoknál a megfelelő becslőfüggvény kiválasztásának fontosságát.

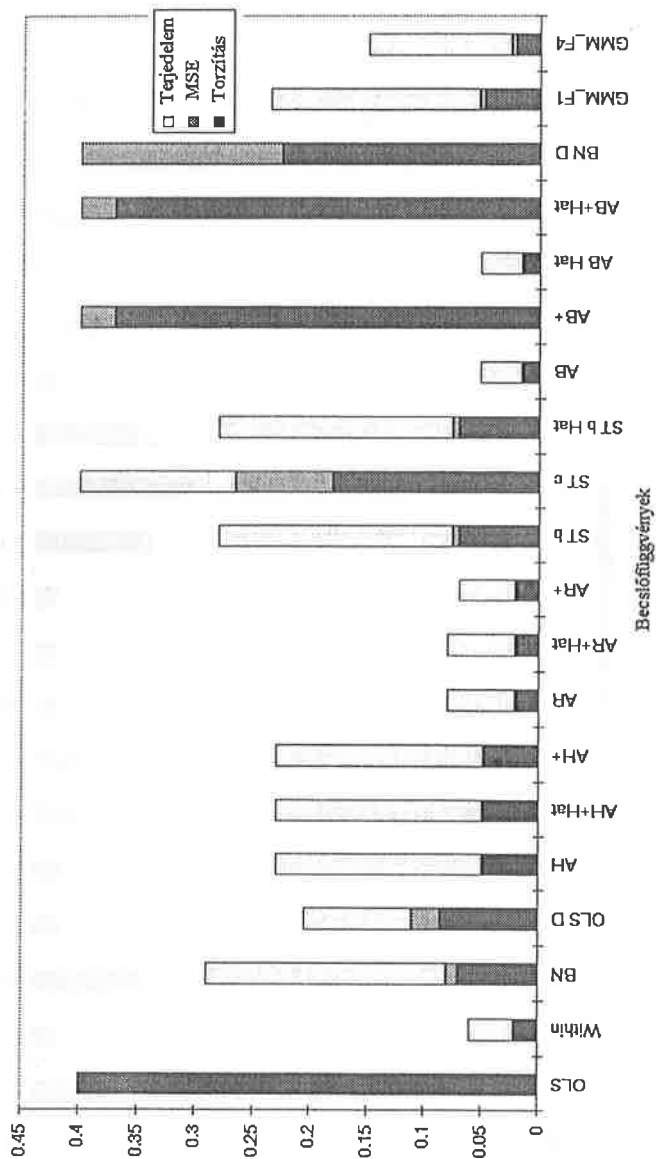
1. ábra

Rögzített hatású beesőfüggvények, $T = 4$, $N = 25$ 

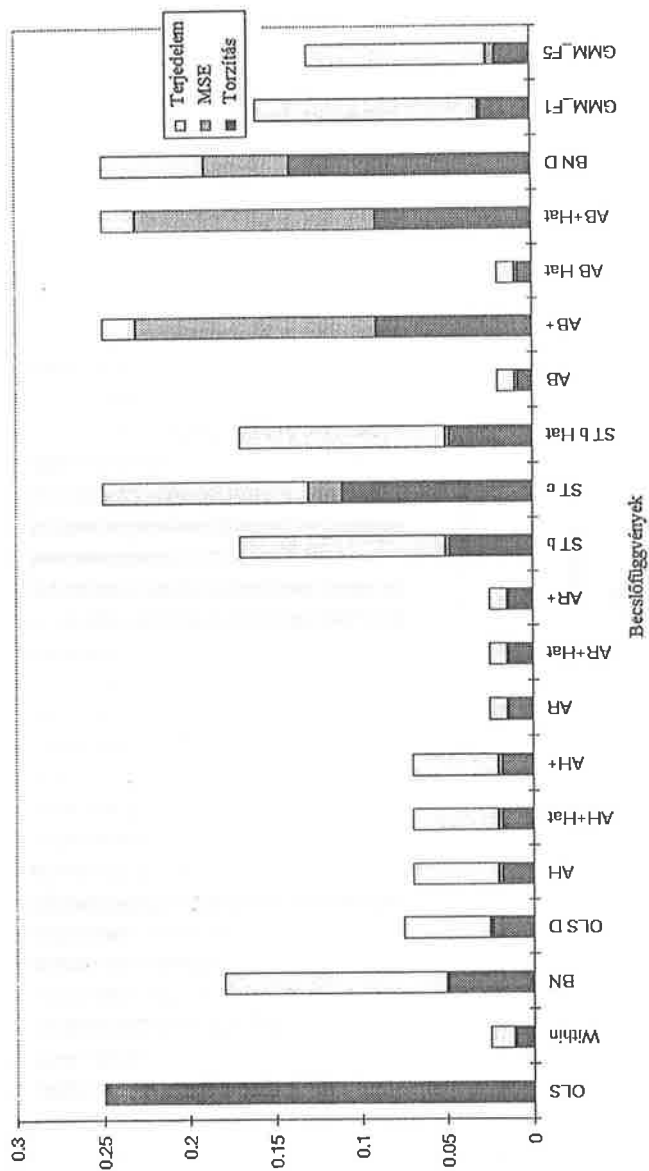
2. ábra
Rögzített hatású becslőfüggvények, T = 4, N = 50



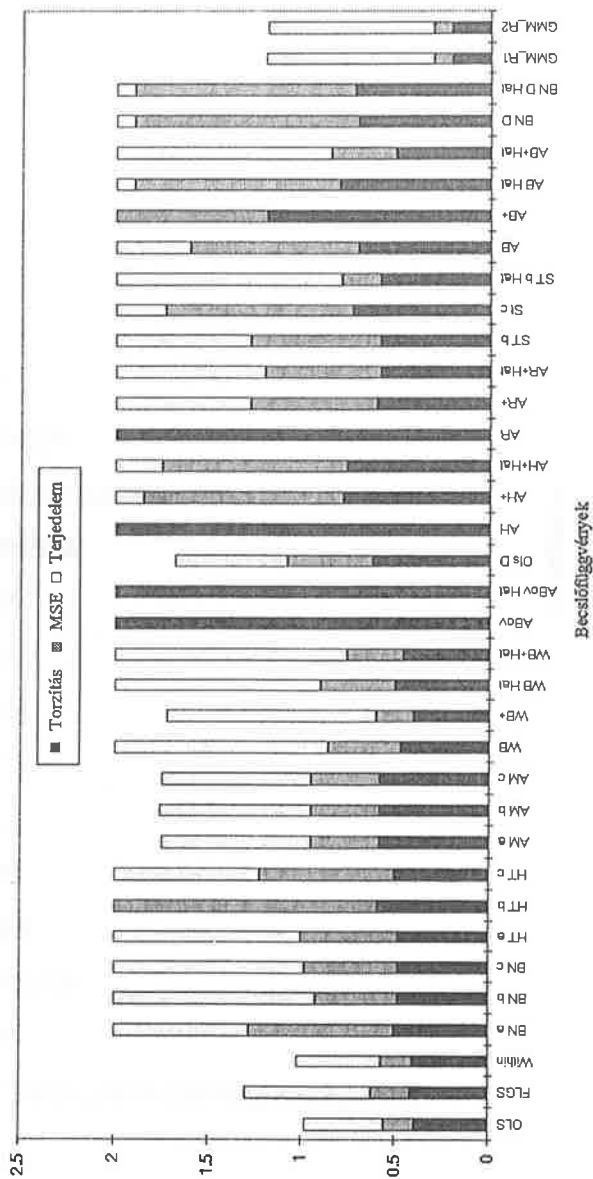
3. ábra
Rögzített hatású becslőfüggvények, $T = 10$, $N = 25$



4. ábra
Rögzített hatású becslőfüggvények, $T = 10$, $N = 50$

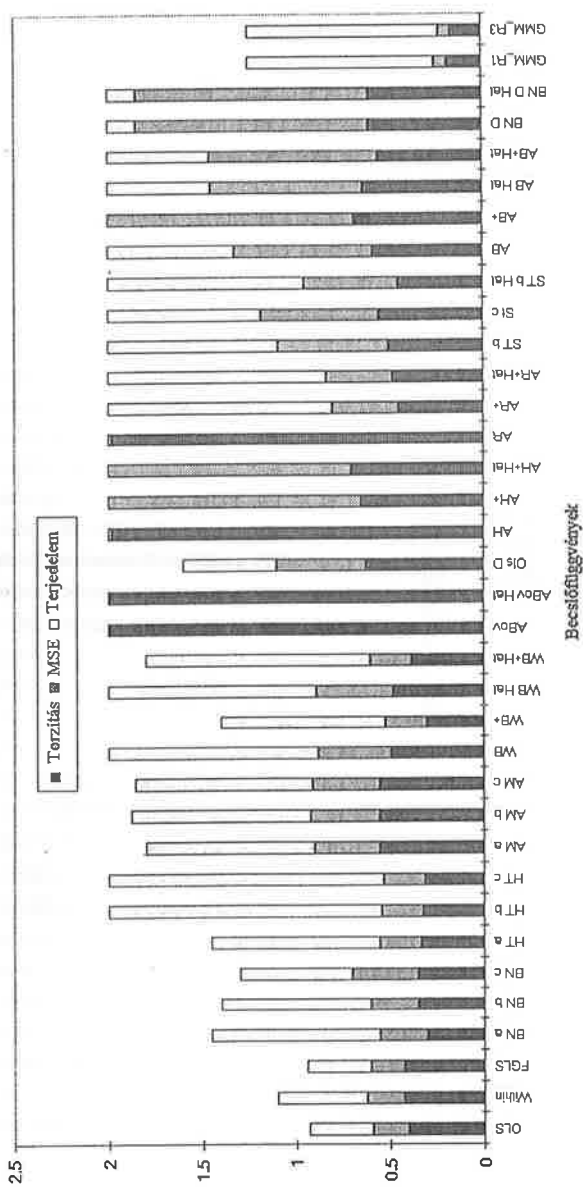


5. ábra

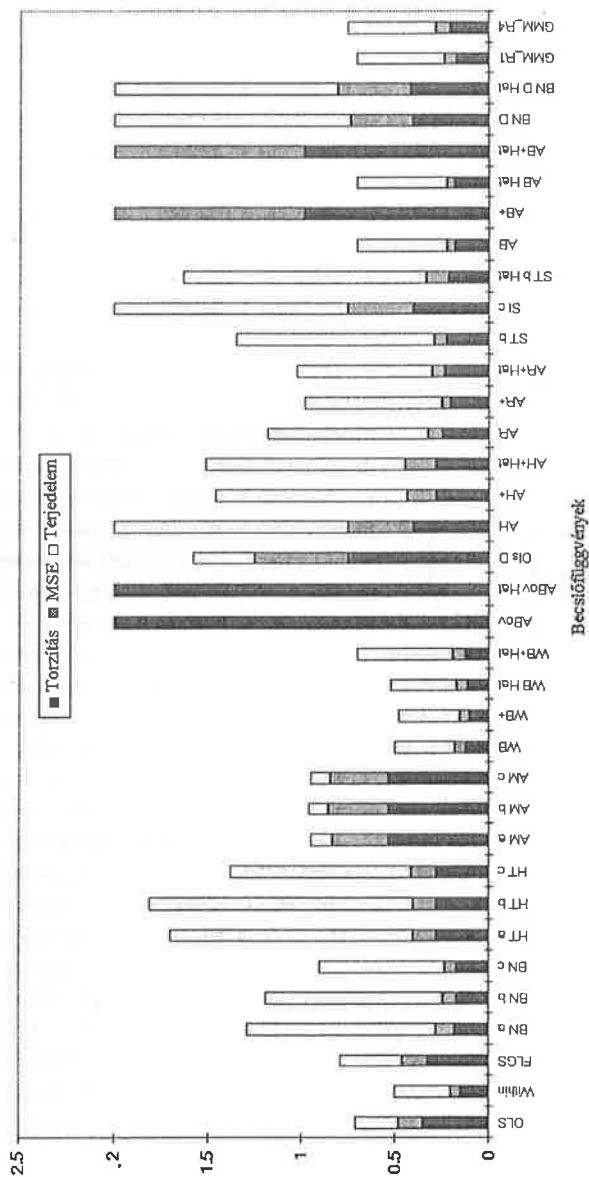
Véletlen hatású becslőfüggvények, $T = 4$, $N = 25$ 

6. ábra

Véletlen hatású becslőfüggvények, $T = 4$, $N = 50$



7. ábra

Véletlen hatású becsoffüggvények, $T = 10$, $N = 25$ 

Irodalom

1. Ahn, S. C. and Schmidt, P. (1993); Efficient Estimation of Dynamic Panel Data Models under Alternative Sets of Assumptions, mimeo Michigan State University.
2. Ahn, S. C. and Schmidt, P. (1995); Efficient Estimation of Models for Dynamic Panel Data, *Journal of Econometrics*.
3. Anderson, T. W. and Hsiao, C. (1982); Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data, *Journal of Econometrics*, Vol. 18, pp. 578-606.
4. Amemiya, T. and MaCurdy, T. E. (1986); Instrumental Estimation of an Error Components Model, *Econometrica*, Vol. 54, pp. 869-881.
5. Arellano, M. (1988); A Note on the Anderson-Hsiao Estimator for Panel Data, mimeo Institute of Economics, Oxford University.
6. Arellano, M. and Bond, S. (1991); Some Tests of Specification for Panel Data: Monte-Carlo Evidence and an Application to Employment Equations, *Review of Economic Studies*, Vol. 58, pp. 127-134.
7. Arellano, M. and Bover, O. (1993); Another Look at the Instrumental Variables Estimation of Error-Components Models, forthcoming, *Journal of Econometrics*.
8. Balestra, P. (1992); Fixed Effects Models and Fixed Coefficient Models, in (chpt 3) *The Econometrics of Panel Data*, Mátyás and Sevestre (eds.), 1992, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
9. Balestra, P. and Nerlove, M. (1966); Pooling Cross-Section and Time-Series Data in the Estimation of a Dynamic Model, *Econometrica*, Vol. 34, pp. 585-612.
10. Breusch, T. S., Mizon, G. E. and Schmidt, P. (1989); Efficient Estimation Using PanelData, *Econometrica*, Vol. 57, pp. 695-700.
11. Chamberlain, G. (1980); Analysis of Covariance with Qualitative Data, *Review of Economic Studies*, Vol. 47, pp. 225- 238.
12. Crépon, B., Kramarz, F. and Trogon, A. (1996); Parameters of Interest, Nuisance Parameter and Orthogonality Conditions: An Application to Error Component Models, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques.
13. Hansen, L. (1982); Large Sample Properties of Generalised Method of Moments Estimators, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 1029-1054.
14. Harris, M. N and Mátyás, L. (1996); A Comparative Analysis of Different Estimators for Dynamic Panel Data Models, Monash University, Melbourne, Australia.
15. Hausman, J. A. (1978); Specification Tests in Econometrics, *Econometrica*, Vol. 46, pp. 1251-1273.

16. Hausman, J. A. and Taylor, W. E. (1981); Panel Data and Unobservable Individual Effects, *Econometrica*, Vol. 49, pp. 1377-1398.
17. Hsiao, C. (1985); Benefits and Limitations of Using Panel Data, *Econometric Reviews*, Vol. 4, pp. 121-174.
18. Hsiao, C. (1986); *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press, Cambridge.
19. Kinal, T. W. (1980); The Existence of k -class Estimators, *Econometrica*, Vol. 48, pp. 241-249.
20. Kiviet, J. F. (1994); On Bias, Inconsistency and Efficiency of Various Estimators in Dynamic Panel Data Models, discussion paper Tinbergen Institute, Amsterdam-Rotterdam, TI 94-50.
21. Maddala, G. S. (1971); The Use of Variance Components Models in Pooling Cross-Section and Time Series Data, *Econometrica*, Vol. 39, pp. 341-358.
22. Mundlak, Y. (1978a); On the Pooling of Time Series and Cross Section Data, *Econometrica*, Vol. 46, pp. 69-85.
23. Mundlak, Y. (1978b); Models with Varying Coefficients: Integration and Extension, *Annales de l'INSEE*, 30-1, pp. 483-509.
24. Nerlove, M. (1967); Experimental Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relationships from a Time Series of Cross-Sections, *Economic Studies Quarterly*, Vol. 18, pp. 42-74.
25. Nerlove, M. (1971); Further Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relationships from a Time Series of Cross- Sections, *Econometrica*, Vol. 39, pp. 359-387.
26. Nickell, S. (1981); Biases in Models With Fixed Effects, *Econometrica*, Vol. 49, pp. 1417-1426.
27. Pagan, A. and Vella, F. (1989); Diagnostic Tests for Models Based Upon Individual Unit Data: A Survey, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 4, Supplement, pp. S29-S59.
28. Sevestre, P. and Trognon, A. (1985); A Note on Autoregressive Error Component Models, *Journal of Econometrics*, Vol. 29, pp. 231-245.
29. Sevestre, P., and Trognon, A. (1992); Linear Dynamic Models, in (chpt 6) *The Econometrics of Panel Data*, Mátyás and Sevestre (eds.), 1992, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
30. Wansbeek, T. and Bekker, P. (1993); Efficient Instrumental Variables Estimators in a Dynamic Panel Data Model, mimeo.
31. White, H. (1984); *Asymptotic Theory for Econometricians*, Academic Press, Orlando.

A COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENT ESTIMATORS
FOR DYNAMIC PANEL DATA MODELS

It has become increasingly obvious that the estimation of dynamic panel data models is one of the hot issues in econometric research nowadays as evidenced by the plethora of papers on the subject. It is well known that the usual techniques for estimating panel data models are inconsistent in the dynamic setting. Numerous consistent estimators have been proposed however in the literature. In this paper, two new estimators are offered (one each for the fixed and the random effects specification), and their small sample performance is compared with that of all of the existing estimators. The results of these experiments will provide valuable guidance to applied researchers as to which are the preferred estimator(s). Finally, the divergences in point estimates of all of these estimators is illustrated through an application to a consumer demand schedule of laundry detergent in the metropolitan district of Melbourne, Australia.

