A VÉLETLEN ADAGOLÁSI SZABÁLY ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK PIACI FELTÉTELEI

TASNÁDI ATTILA
Ph.D. hallgató, BKE Matematika Tanszék

A klasszikus duopol modellekben az ár vagy pedig a kínált mennyiség a döntési változó. A másik változó értéke a modell összefüggései alapján meghatározható. A Bertrand-Edgeworth típusú modellekben ezzel szemben mindkét duopolista szimultán módon hozza meg az ár és a mennyiségi döntéseit. Mivel a két változó egyszerre döntési változó, problémát okoz, hogy önmagában a keresleti görbe ismerete nem elégséges a magasabb áron kínáló duopolista keresletének meghatározásához. Ezt a problémát egy úgynevezett adagolási szabály bevezetésével szokták feloldani. A Bertrand-Edgeworth duopólium részletes ismertetése megtalálható többek között Tirole [12] művének 5. fejezetében. Az általunk vizsgált véletlen adagolási szabály a Bertrand-Edgeworth típusú modelleknél előszeretettel használt két adagolási szabály egyike. A másik a hatékony adagolási szabály, amellyel most külön nem kívánunk foglalkozni. A továbbiakban csak duopol szituációkat vizsgálunk.

Először egy rövid áttekintést adunk a Bertrand-Edgeworth duopóliumokról, hogy érzékelhető legyen az adagolási szabályok szerepe. Majd kitérünk külön az adagolás fogalmára. Ezek után rátérünk a véletlen adagolási szabály irodalomban fellelhető levezetési módjaira. Végezetül pedig egy alternatív levezetési módot adunk a véletlen adagolási szabályra megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében.

1. Bertrand-Edgeworth duopóliumok

A Bertrand-Edgeworth duopóliumokban az ár és a mennyiség egyszerre döntési változók. A modellnek létezik homogén és differenciált termékű változata. Mi a továbbiakban a homogén termékű esetet vizsgáljuk. A differenciált változatot illetően lásd Benassy-t [4].

A parciális megközelítésben a fogyasztói oldal az aggregált keresleti görbével adott. Ez további információk hiányában egy alulspecifikált modellt eredményez. Nevezetesen a parciális elemzés keretei között maradva, az aggregált keresleti görbe önmagában nem nyújt elegendő támpontot a magasabb áron kínáló vállalat keresletének meghatározásához. Az információ hiányát egy úgynevezett adagolási szabály segítségével pótolhatjuk. Az aggregált keresleti görbe az adagolási szabállyal együttesen már elegendő információt hordoz mindkét vállalat értékesítésének meghatározásához. Megjegyzendő, hogy az aggregált keresleti görbe ismerete akkor elégséges, ha az alacsonyabb áron kínáló duopolista lefedi az egész piacot. Ez a helyzet áll fenn a Bertrand duopóliumban. Azonban a Bertrand-Edgeworth duopólium esetében az alacsonyabb áron kínáló vállalat nem képes vagy nem érdekelt a piac teljes lefedésében. Az előbbi viselkedés oka lehet a kapacitások korlátos volta, míg az utóbbi viselkedést okozhatja egy U-alakú határköltségfüggvény.

Számtalan elképzelhető adagolási szabály lehetséges. Az irodalomban a két leggyakrabban alkalmazott adagolási szabály a hatékony és a véletlen adagolási szabály.

2. Adagolási szabályok

Adjunk egy, az elemzéseinknek megfelelő definíciót az adagolási szabályra. Ehhez előbb vezessük be a $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{R}_+}$ jelölést a megengedett keresleti függvények halmazára.

*2.1 Definíció. Adagolási szabály*nak nevezzük azt a leképezést, amely az aggregált keresleti görbe, a vállalatok árainak és kínált mennyiségeinek ismerete alapján megadja az egyes termelők által értékesíthető termék mennyiségeket. Formálisan egy duopol piacon adagolási szabály egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$ alakú leképezés.

A véletlen adagolási szabály esetében az alacsonyabb áron kielégített kereslet és az összkereslet aránya állandó. Az alábbi definícióból látható, hogy ez az arány $1 - q_i/D(p_i)$. Emiatt a véletlen adagolási szabályt az irodalomban arányos adagolási szabálynak is nevezik. A véletlen jelző használatának oka a következő szakaszban válik világossá.

2.2 Definíció. Egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$ adagolási szabályt *véletlen*nek nevezünk, ha $\forall j \in [1..2]$:

$$h_j(D, p_1, p_2, q_1, q_2) := \begin{cases} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j < p_i, \ i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1+q_2} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j = p_i, \ i \neq j; \\ \max\left((1 - \frac{q_i}{D(p_i)}) D(p_j), 0 \right) & \text{ha} \quad p_j > p_i, \ i \neq j. \end{cases}$$

2.3 Definíció. A magasabb áron kínáló vállalat terméke iránti fogyasztói keresletet *reziduális kereslet*nek nevezzük. Jele D_r.

3. A véletlen adagolási szabály alkalmazhatósága

Tisztázandó kérdés, hogy milyen piaci helyzetekben lehet a véletlen adagolási szabályt alkalmazni. Sajnos, az irodalomban sok helyütt heurisztikus, pongyola vagy pontatlan levezetések találhatók. Ezért ebben a szakaszban az irodalomban található levezetéseket tekintjük át, és ott, ahol szükséges, az adott levezetést pontosítjuk.

A levezetések szükségessé teszik a modellünkben a fogyasztói oldal részletezését. Mint már említettük, a keresleti görbe nem nyújt számunkra elegendő információt. A fogyasztói oldalt az egyéni keresleti görbék megadásával gazdagítjuk. Ekkor meg kell még adnunk, hogy az alacsonyabb áron kínáló vállalat mely fogyasztókat szolgálja ki előbb. Nyilván a reziduális keresletet azok a fogyasztók fogják majd alkotni, akik az alacsonyabb áron nem jutottak a termékhez. A véletlen adagolási szabály azt feltételezi, hogy a kiszolgálás sorrendje véletlenszerű. Ezzel a véletlen adagolási szabály elnevezés is értelmet nyert.

3.1 Azonos egyéni keresleti görbék

A következő gondolatmenet megtalálható Wolfstetter [15] művében. Tegyük fel, hogy mindegyik fogyasztó keresleti görbéje azonos ($d(p)$) továbbá, hogy $I < \infty$ véges sokan vannak, valamint mindegyik fogyasztó ugyanakkora eséllyel jut az alacsonyabbik áron a termékhez. Legyen az első termelő ára az alacsonyabbik, azaz $p_1 < p_2$ és kínálata q_1. A számunkra érdekes esetben $q_1 < I \cdot d(p_1)$. Nyilván $M := \left\lfloor \frac{q_1}{d(p_1)} \right\rfloor$ személy szolgálható ki maradéktalanul. Ha $d(p_1)$ nem osztója q_1-nek, akkor lesz egy olyan személy, akinek a kereslete csak részben elégíthető ki az alacsonyabb áron. Ekkor ezt a fogyasztót határfogyasztónak nevezzük.

Nézzük először azt az esetet, amikor $d(p_1)$ osztója q_1-nek. Ekkor a reziduális kereslet $D_r(p) = (I-M)d(p) = (1-\frac{M}{I})D(p) = (1-\frac{q_1}{D(p_1)})D(p)$. Azaz valóban a véletlen adagolási szabályt kaptuk.

Ha $d(p_1)$ nem osztója q_1-nek, akkor és csak is akkor kapjuk meg pontosan a véletlen adagolási szabályt, ha a határfogyasztó a véletlen adagolási szabály szerint fogyaszt. Ez csak speciális hasznossági függvény esetében következhet be. Egy fogyasztó korlátozott kínálat melletti hasznosság maximalizációs döntésének vizsgálatával, többek között Howard [9] és Neary és Roberts [11] foglalkoztak. Ők viszont nem teremtettek kapcsolatot az optimális döntés és az adagolási szabályok között. Ez egy külön tanulmány tárgya lehet. Most beérjük azzal, hogy ha a fogyasztók száma nagy, akkor megközelítőleg a véletlen adagolási szabály valósul meg, ekkor ugyanis a határfogyasztó döntése elhanyagolhatóvá válik.

3.2 A fogyasztók eloszlása atommentes

Egy másik megközelítés szerint, ha a fogyasztók ár szerinti eloszlásmértéke atommentes[1], akkor (egy segédfeltevés mellett) megkapható a véletlen adagolási szabály. Ez a megközelítés található meg Allen és Hellwig [1] valamint Gelman és Salop [8] műveiben.

A fogyasztók halmazán adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mértéktér. Az egyes fogyasztók keresletét a $d : I\!R_{++} \times \Omega \to I\!R_{++}$ függvény írja le, ahol $d(p, a)$ az $a \in \Omega$ fogyasztó p ár melletti kereslete. Ekkor az aggregált kereslet $D(p) = \int_\Omega d(p, a)d\mu(a)$. A véletlen adagolási szabály biztosításához fel kell téteteleznünk, hogy nincs szignifikáns különbség az alacsonyabb áron kiszolgált és a kiszolgálatlan fogyasztók között. Formálisan legyen $A_1 \subset A$ azon fogyasztók halmaza, akiket kiszolgáltak az alacsonyabb áron, és legyen $B_1 = A \setminus A_1$ a maradék fogyasztók halmaza. Ekkor a $\forall p \in I\!R_{++}$:

$$\int_{A_1} d(p, a)d\mu(a) = \mu(A_1)D(p) \tag{1}$$

és

$$\int_{B_1} d(p, a)d\mu(a) = \mu(B_1)D(p) \tag{2}$$

feltevések szükségesek.

Belátjuk, hogy az (1) és a (2) feltevések valóban biztosítják a véletlen adagolási szabály megvalósulását. Most is tegyük fel, hogy $p_1 < p_2$. Nyilván a $D(p_1) > q_1$ eset az érdekes, különben a reziduális kereslet értéke nulla. Ekkor $q_1 = \int_{A_1} d(p_1, a)d\mu(a) = \mu(A_1)D(p_1)$, az (1) feltevés miatt. Átalakítva $\mu(A_1) = q_1/D(p_1)$. Ezt és a (2) feltevést felhasználva a másik vállalat kereslete

$$\int_{B_1} d(p_2, a)d\mu(a) = \mu(B_1)D(p_2) = (1 - \mu(A_1))D(p_2) = \left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)}\right) D(p_2),$$

ami pontosan a véletlen adagolási szabály szerinti reziduális kereslettel egyezik meg.

A fenti megközelítés kétségkívül nagyon elegáns, mégis kritizálható. Egyrészt az atommentes eloszlásmérték feltételezése megszámlálhatónál több fogyasztót tételez fel. Másrészt az (1) és (2) feltevések nem igazán szemléletesek. Könnyen igazolható, hogy például amennyiben az összes fogyasztó keresleti görbéje azonos, akkor ez utóbbi két feltétel teljesül. Továbbá kritizálható még, hogy a fenti megközelítésből nem vonható le aszimptotikus

[1] Az $A \subset \Omega$ egy atom az $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben, ha $\mu(A) > 0$ és a $B \subset A$ tartalmazásból következik, hogy $\mu(A) = \mu(B)$ vagy $\mu(B) = 0$. A μ mértéket atommentesnek mondjuk, ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nem tartalmaz atomot.

következtetés, vagyis a modell véges, de sok fogyasztó esetében semmiféle következtetésre nem jogosít fel. Ezt a három kifogást kiküszöböli a következő szakaszban megszámlálható sok fogyasztóra bemutatott levezetés.

3.3 Véletlen minta

Egy heurisztikus indoklást ad Osborne [10] a véletlen adagolási szabály alkalmazhatóságára. A feltételeket külön kiemeljük, mivel a későbbiek során még használni fogjuk.

3.1 Feltevés. Mindegyik fogyasztó pontosan $0 < \alpha < \infty$ mennyiséget hajlandó vásárolni, mégpedig legfeljebb rezervációs árán (r). Azaz keresleti görbéje

$$d(p) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha} \quad p \leq r \,; \\ 0, & \text{ha} \quad p > r \end{cases}$$

alakú. Az ilyen alakú keresleti görbéket a továbbiakban α paraméterű elfajult keresleti görbéknek nevezzük.

3.2 Feltevés. Mindegyik fogyasztó ugyanakkora eséllyel juthat az olcsóbbik termékhez. Ez definiál egy valószínűségi mértéket a fogyasztók terén.

A levezetés szerint a 3.1, 3.2 feltevések és $\alpha = 1$ paraméterérték mellett, ha az adagolási szabályt úgy probáljuk meghatározni, hogy egy véletlen minta alapján rendeljük hozzá az alacsonyabb (p_1) áron vásárolni kívánó fogyasztókat a q_1 kínálathoz, akkor bármely rezervációs áron a fogyasztók $q_1/D(p_1)$ hányada lesz kiszolgálva az alacsonyabb áron. Ezzel az érveléssel az a baj, hogy valójában nem mintavételről van szó, ugyanis a mintaelemszám nem kicsi az alapsokaság elemszámához képest, mivel a $D(p_1)$ fogyasztóból egy q_1 elemű minta vételéről lenne szó. Az, hogy ez a heurisztikus érvelés megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében mégis helyes eredményhez vezet, a következő szakaszban leírt hipergeometriai eloszlásra vonatkozó határeloszlási tétel miatt igaz.

3.4 A kiszolgálás valószínűsége azonos

Egy másik heurisztikus indoklás a véletlen adagolási szabály alkalmazhatóságára található Tirole [12] művében (a 213-214 oldalon). A baj az, hogy azok a feltételek, amelyek mellett heurisztikusan érvel nincsenek a művében pontosan leírva. Feltevése szerint minden egyes fogyasztó azonos valószínűséggel juthat hozzá az alacsonyabb árú termékhez. Tegyük fel, hogy most is teljesül a 3.1 feltevés, méghozzá $\alpha = 1$ paraméter mellett. Ha most azt mondjuk, hogy mindenki $q := q_1/D(p_1)$ valószínűséggel juthat hozzá az alacsonyabb áron a termékhez, akkor véges sok fogyasztó esetében nyilván ilyen módon egyáltalán nem biztos, hogy pontosan q_1 darab terméket osztunk szét.

A fenti gondolatmenet helytálló, ha kontinuum sok fogyasztó van. Célszerű a feladatot a $[0,1]$ intervallumra transzformálni. Legyen $X = [0,1]$ azon fogyasztók halmaza, akik az alacsonyabb áron vásárolni szeretnének. Vezessük be továbbá az $Y := \{0,1\}$ jelölést. Jelölje $M \subset Y^X$ az összes $X \to Y$ Borel mérhető leképezések halmazát. M a $[0,1]$ Borel halmazaihoz tartozó karakterisztikus függvények halmaza. Egy adott $f \in M$ függvény $f(x)$ helyen felvett értéke ($x \in X$) megadja, hogy az x fogyasztó hozzájutott-e az alacsonyabb áron a termékhez. Az $\int_A f d\lambda$ érték megadja, hogy összesen az A-beli fogyasztók hányad része jutott a p_1 áron a termékhez (ahol $f \in M$, $A \in \mathcal{B}(X)$ és λ a Lebesgue-Borel mérték). Ahhoz, hogy pontosan annyi terméket osszunk szét, mint amennyi a kínálat az $\int_X f d\lambda = q$ feltételnek kell teljesülnie.

Tekintsük az $\Omega_t := Y = \{0,1\}$ alaphalmazokat és a hozzá tartozó $\mathcal{A}_t := \mathcal{P}(\{0,1\})$ σ-algebrákat, ahol t befutja a $[0,1]$ intervallumot. Definiáljuk az $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ mérhető téren a μ_t valószínűségi mértéket az alábbi módon:

$$\mu_t(B) = \begin{cases} 0, & \text{ha } B = \emptyset; \\ q, & \text{ha } B = \{1\}; \\ 1-q, & \text{ha } B = \{0\}; \\ 1, & \text{ha } B = \Omega_t. \end{cases} \tag{3}$$

Jelöljön továbbá $\xi_t : \Omega_t \to \{0,1\}$ olyan valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_t(\omega) = \omega$. Legyenek az így definiált μ_t valószínűségi mértékek függetlenek egymástól. A függetlenségük miatt egyértelműen létezik (lásd például Bauer [3] 9.2 tételét) az $(Y^X, \mathcal{P}(Y^X))$ mérhető téren egy olyan μ valószínűségi mérték, amelyre:

$$\forall J \subset [0,1] : |J| < \infty, Pr_J(\mu) = \prod_{t \in J} \mu_t,$$

ahol a Pr egy projekciós operátor. A μ mértéket explicite nem tudjuk megadni, de ez nem is szükséges a probléma megoldásához.

Vezessük be az $r := \frac{D(p_2)}{D(p_1)}$ jelölést. Legyenek a fogyasztók úgy rendezve, hogy a legalább p_2 rezervációs árú fogyasztók a $[0,r]$ intervallumon helyezkedjenek el. Ekkor $\int_0^r f d\lambda$ értéke megadja, hogy a magasabb rezervációs árú fogyasztók hányad része jutott hozzá a p_1 áron a termékhez. A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye alapján $\eta_n := \sum_{i=1}^n \xi_{t_i} r\frac{1}{n} \to qr$ egy valószínűséggel, ha $n \to \infty$, ahol $t_i \in [r\frac{i-1}{n}, r\frac{i}{n}]$. Az η_n egy Riemann-féle integrálközelítő összeg. Ezért ha $f \in Y^X$ a ξ valószínűségi változó egy realizációja, akkor f Riemann-féle integrálja 1 valószínűséggel létezik és méghozzá 1 valószínűséggel qr. Az eredmény helyes, ugyanis speciálisan ha $r = 1$, akkor az integrál értéke q, vagyis valóban pontosan $qD(p_1)$ mennyiségű alacsonyabb áron kínált termék talál gazdára. Tehát beláttuk, hogy $\frac{D(p_2) - D_r(p_2)}{D(p_1)} = qr$, amely átalakításával megkapható az alábbi tétel:

3.3 Tétel. *A 3.1, 3.2 és $I = \aleph_1$ feltételek mellett a reziduális kereslet 1 valószínűséggel:*

$$D_r(p_2) = D(p_2)(1-q) = D(p_2)\left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)}\right), \tag{4}$$

ahol $p_1 < p_2$, $p_1 \in \mathbb{R}_+$, $p_2 \in \mathbb{R}_+$ és $q_1 \leq D(p_1)$.

4. Megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esete

Ebben a szakaszban a véletlen adagolási szabályt vezetjük le megszámlálható sok fogyasztó esetében a 3.1 és 3.2 feltételek mellett.

4.1 Véges számú fogyasztók esete elfajult keresleti görbék mellett

Tegyük fel egyelőre, hogy a fogyasztók száma véges azaz $I < \infty$. Legyenek a d_i egyéni keresleti görbék $1/I$ paraméterű elfajult keresleti görbék. Az egyéni keresleti görbék horizontális összegzéséből kapott aggregált keresleti görbét jelölje a $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. leképezés, ahol $Q := \sum_{i=1}^{I} d_i$.

4.1 Jelölés. Vezessük be a $H_k(N, M, n) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ jelölést. Azaz $H(N, M, n)$ az N, M, n paraméterű hipergeometriai valószínűségi eloszlást jelöli.

4.2 Tétel. *Legyen $p_1 < p_2$, $p_1 \in \mathbb{R}_+$, $p_2 \in \mathbb{R}_+$, q_1 az alcsonyabb áron kínált termékmennyiség. Teljesüljön a 3.1 feltétel $1/I$ paraméterrel, továbbá álljanak fenn a 3.2, $I < \infty$ és $q_1 < D(p_1)$ feltételek. Ha még $I \cdot q_1 \in \mathbb{N}$ is fennáll, akkor a reziduális kereslet eloszlása az alábbi:*

$$D_r(p_2) = \frac{1}{I} H(I \cdot Q(p_1), I \cdot Q(p_2), I \cdot q_1). \tag{5}$$

Bizonyítás. A Q keresleti görbét úgy is megkaphatjuk, hogy a fogyasztókat rezervációs áraik szerint csökkenőleg sorbarendezzük. Minden fogyasztó pontosan $1/I$ egységet igényel. A sorban elfoglalt pozíciójuk alapján indexelt fogyasztói indexhalmazt jelölje $\mathcal{I}$. Azon fogyasztók halmazát, akik hajlandóak megadni a p_2 összeget jelölje M_2, míg azon fogyasztók halmazát, akik a magasabb árért nem veszik meg a terméket, de az alacsonyabb árért még igen, jelölje M_1. Formálisan $M_1 := \{i \in \mathcal{I} : p_1 \leq r_i < p_2\}$ és $M_2 := \{i \in \mathcal{I} : p_2 \leq r_i\}$. Nyilván $Q(p_1) - Q(p_2) = |M_1|/I$,$Q(p_2) = |M_2|/I$ és $M_1 \cup M_2 \subseteq \mathcal{I}$. Az M_2 halmazba tartozó fogyasztók p_2-nél olcsóbban is hozzájuthatnak a termékhez. Jelölje a ξ valószínűségi változó azon M_2 halmazbeli fogyasztók számát, akik p_1 áron hozzájutnak a termékhez. Az ilyen fogyasztók száma $I \cdot q_1$. Mivel feltettük, hogy mindegyik fogyasztó személyes értékítéletétől függetlenül egyenlő eséllyel indul a termék megszerzésére, ezért összesen $\binom{|M_1|+|M_2|}{I \cdot q_1}$ féleképpen szerezhetik az $M_1 \cup M_2$ halmazbeli (vagyis a p_1 áron vásárolni szándékozó) fogyasztók a q_1 darab olcsóbbik terméket. ξ nyilván hipergeometriai eloszlású, ezért

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\binom{|M_2|}{k} \cdot \binom{|M_1|}{I \cdot q_1 - k}}{\binom{|M_1|+|M_2|}{I \cdot q_1}}$$

Figyelembe véve M_1 és M_2 jelentését a tételt bebizonyítottuk. □

4.3 Megjegyzés. A reziduális kereslet várható értéke pontosan a véletlen adagolási szabályt adja.

4.4 Megjegyzés. A $I \cdot q_1 \in I\!N$ feltétel azért szükséges, mert különben a reziduális kereslet értéke, még attól is függne, hogy az a fogyasztó, akinek kereslete csak részben teljesíthető p_1 áron, a magasabb vagy az alacsonyabb rezervációs áru fogyasztók köréből kerül ki. Vezessük be a $\tilde{q}_1 = \lfloor I \cdot q_1 \rfloor$ jelölést. A későbbiekben szükségünk lesz arra a könnyen igazolható megállapításra, hogy ha I elég nagy, akkor a reziduális kereslet eloszlása

$$D_r(p_2) \approx \frac{1}{I} H(I \cdot Q(p_1), I \cdot Q(p_2), \tilde{q}_1). \tag{6}$$

4.2 A hipergeometriai eloszlás egy határeloszlása

A megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztóra való áttéréshez szükségünk lesz a hipergeometriai eloszlás egy speciális határeloszlására, amelyben a „selejtarány" mellett a kiválasztási arány is állandó marad. Tekintettel arra, hogy az alábbi tétel bizonyítása nem szerepel standard valószínűségszámítási könyvekben, a tétel egy bizonyítását is megadjuk.

4.5 Tétel. *Legyen* $x_k := \frac{k-\mu(N,M,n)}{\sigma(N,M,n)}$, *ahol* $\mu(N,M,n) := n\frac{M}{N}$ *és* $\sigma(N,M,n) := \sqrt{n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N}}$. *Tegyük fel hogy M és n értékei eleget tesznek az alábbi összefüggésnek:*

$$\frac{M}{N} \to r, \frac{n}{N} \to q, \text{ha } N \to \infty, \text{ ahol } r, q \in (0,1). \tag{7}$$

Ha $N \to \infty$ és

$$|x_k| := \frac{|k - \mu(N,M,n)|}{\sigma(N,M,n)} \text{ korlátos,} \tag{8}$$

akkor

$$H_k(N,M,n) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu(N,M,n)}{\sigma(N,M,n)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma(N,M,n)}. \tag{9}$$

Bizonyítás. A bizonyítás során szükségünk lesz a Stirling-formulára:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n})), \tag{10}$$

ahol O egy olyan függvény, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{O(f(n))}{f(n)} = K, \text{ ahol } K \text{ konstans.} \tag{11}$$

Továbbá felhasználjuk az alábbi összefüggést:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \text{ ha } |x| < 1. \tag{12}$$

Vezessük be még a következő jelölést:

$$y_k := x_k \sigma(N,M,n), \tag{13}$$

ekkor nyilván $k = n\frac{M}{N} + y_k$ és $n - k = n\frac{N-M}{N} - y_k$.

A bevezetett jelöléseket felhasználva és (10)-et alkalmazva: $H_k(N,M,n) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{M(N-M)n(N-n)}}{\sqrt{(n\frac{M}{N}+y_k)(M\frac{N-n}{N}-y_k)(n\frac{N-M}{N}-y_k)(\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k)N}} \cdot \frac{M^M (N-M)^{N-M} n^n (N-n)^{N-n}}{(n\frac{M}{N}+y_k)^{n\frac{M}{N}+y_k} (M\frac{N-n}{N}-y_k)^{M\frac{N-n}{N}-y_k} (n\frac{N-M}{N}-y_k)^{n\frac{N-M}{N}-y_k}} \cdot \frac{1}{(\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k)^{\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k} N^N} \tag{14}$$

ahol a Stirling formulából adódó O tagokat már elhagytuk, ezek (7) és (8) miatt mind nullához tartanak, ha $N \to \infty$. A nevező y_k-t is tartalmazó tagjait hozzuk $(1 \pm \frac{y_k}{a})$ alakra. Egyszerűsítések elvégzése után csoportosítsuk (14)-et egy négytagú szorzattá:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{NNN}{nM(N-M)(N-n)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{y_k}{n\frac{M}{N}})(1-\frac{y_k}{M\frac{N-n}{N}})(1-\frac{y_k}{n\frac{N-M}{N}})(1+\frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}})}} \cdot$$

$$\frac{M^M (N-M)^{N-M} n^n (N-n)^{N-n} N^{-N}}{(n\frac{M}{N}+y_k)^{n\frac{M}{N}+y_k} (M\frac{N-n}{N}-y_k)^{M\frac{N-n}{N}-y_k} (n\frac{N-M}{N}-y_k)^{n\frac{N-M}{N}-y_k} (\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k)^{\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k}} \cdot$$

$$\frac{1}{(1+\frac{y_k}{n\frac{M}{N}})^{n\frac{M}{N}+y_k} (1-\frac{y_k}{M\frac{N-n}{N}})^{M\frac{N-n}{N}-y_k} (1-\frac{y_k}{n\frac{N-M}{N}})^{n\frac{N-M}{N}-y_k} (1+\frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}})^{\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k}}$$

Az első tag nyilván $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(N,M,n)}$. Továbbá (7) és (8) miatt a második tag 1-hez tart, ha $N \to \infty$. Egyszerű átalakításokkal meggyőződhetünk arról, hogy a harmadik tényező értéke 1. A legtöbb megfontolást a negyedik tag igényli:

$$\begin{gathered}
\exp\left(\left(n\tfrac{M}{N}+y_k\right)\log\left(1+\tfrac{y_k}{n\frac{M}{N}}\right)\right)*\\
\exp\left(\left(M\tfrac{N-n}{N}-y_k\right)\log\left(1-\tfrac{y_k}{M\frac{N-n}{N}}\right)\right)*\\
\exp\left(\left(n\tfrac{N-M}{N}-y_k\right)\log\left(1-\tfrac{y_k}{n\frac{N-M}{N}}\right)\right)*\\
\exp\left(\left(\tfrac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k\right)\log\left(1+\tfrac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}}\right)\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Most (12) alkalmazásával, figyelembe véve, hogy (7) és (8) miatt az O tagot elhagyhatjuk, ha $N \to \infty$, akkor (15) egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\begin{gathered}
\exp\left(\tfrac{1}{2}y_k^2\left(\tfrac{N}{nM}+\tfrac{N}{M(N-n)}+\tfrac{N}{n(N-M)}+\tfrac{N}{(N-n)(N-M)}\right)\right)*\\
\exp\left(-\tfrac{1}{2}y_k^3\left(\tfrac{N^2}{(nM)^2}-\tfrac{N^2}{M^2(N-n)^2}-\tfrac{N^2}{n^2(N-M)^2}+\tfrac{N^2}{(N-n)^2(N-M)^2}\right)\right).
\end{gathered} \tag{16}$$

Az y_k^2 mögött szereplő szorzótényező, mint azt egyszerű átalakításokkal ellenőrizhetjük, éppen $1/\sigma^2(N,M,n)$. Az y_k^3 mögötti szorzó tényező pedig nullához tart, ha $N \to \infty$. Így y_k jelentését figyelembe véve bebizonyítottuk a tételt. □

4.6 Megjegyzés. A bizonyítás a Moivre-Laplace tételre Baróti, Bognár, Fejes Tóth és Mogyoródi [2]-ben adott bizonyítás ötleteire támaszkodik.

4.7 Megjegyzés. A 4.5 tétel Feller [6] könyvében mint kitűzött feladat szerepel.

4.3 Megszámlálható számosságú fogyasztók esete elfajult keresleti görbék mellett

Gondoljuk végig, hogy mit is várunk a megszámlálható esettől. Tartsuk meg továbbra is a 3.1 és a 3.2 feltételeket. Ha a keresleti görbéről feltesszük, hogy monoton csökkenő és $D(0) < \infty$, akkor ebből következően az egyes fogyasztók keresleteinek végtelenül kicsivé kell válnia, mert különben a $D(0)$ értéke végtelen lenne. Ezért a megszámlálható esetet a 4.2 tétel segítségével a fogyasztók számának végtelenbe tartásával kaphatjuk meg. Megjegyzendő, hogy egy folytonos keresleti görbe tetszőlegesen közelíthető elfajult egyéni keresleti görbék aggregálásával, ha a fogyasztók számát, az α paramétert és a rezervációs árakat megfelelően választjuk.

Most rátérünk a megszámlálható eset tárgyalására. Jelölje az áttekinthetőbb jelölés érdekében I helyett i a fogyasztók számát. Tegyük fel hogy $p_1 < p_2$ és ekkor legyen $M_i = i \cdot Q_i(p_2)$, $N_i = i \cdot Q_i(p_1)$, $n_i = \lfloor i \cdot q_1 \rfloor$, $r_i := \frac{M_i}{N_i} = \frac{Q_i(p_2)}{Q_i(p_1)}$ és $s_i := \frac{n_i}{N_i} \approx \frac{q_1}{Q_i(p_1)}$. Tegyük fel továbbá, hogy az $r = \lim_{i\to\infty} r_i$, $q = \lim_{i\to\infty} s_i$ és a $D(p) = \lim_{i\to\infty} Q_i(p)$ ($\forall p \in \mathbb{R}_+$) határértékek léteznek.

Amennyiben csak megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztónk van, akkor a 4.4 megjegyzés és a 4.5 tétel alapján megoldható a feladat.

4.8 Tétel. *A fenti feltételek mellett a reziduális kereslet* ($p_1 < p_2$)*:*

$$D_r(p_2) = D(p_2)(1 - q). \tag{17}$$

Bizonyítás. A 4.2 tétel és 4.4 megjegyzés alapján a véges eset hipergeometriai eloszlással leírható. Legyen $\mu_i = s_i r_i$ és $\sigma_i^2 = s_i(1 - s_i)r_i(1 - r_i)$. A 4.5 tétel alapján megfelelő feltételek esetén

$$H_k(N_i, M_i, n_i) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(k - N_i\mu_i)^2}{N_i\sigma_i^2}}}{\sqrt{2\pi N_i}\sigma_i}. \tag{18}$$

Első lépésként meghatározzuk, hogy a terméket magasabb áron is megvásárolni hajlandó fogyasztók hányad része jut hozzá alacsonyabb áron a termékhez. Ezért végrehajtjuk az $x = k/N_i$ transzformációt. Ha $\eta \sim \mathrm{N}(N_i\mu_i, \sigma_i\sqrt{N_i})$, akkor a $\xi_i = \eta/N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i/\sqrt{N_i})$. De ha $i \to \infty$, akkor ξ_i szórása nullához tart. Tehát ha ξ_i határeloszlását ξ-vel jelöljük, akkor a ξ konstans valószínűségi változó, mégpedig $\mu := \lim_{i\to\infty} \mu_i$ állandóval. Tehát $\frac{D(p_2) - D_r(p_2)}{D(p_1)} = \mu = qr$ eredményhez jutottunk. Ebből már egyszerű átrendezéssel belátható a tétel. □

5. Összefoglalás

Áttekintettük a véletlen adagolási szabály levezetési módjait. Rámutattunk az egyes levezetések hiányosságaira. Majd megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében egy levezetést adtunk a véletlen adagolási szabályra. A levezetéshez szükséges feltételek az egyenlő esély elve és az egyéni keresleti görbék elfajult volta.

A megszámlálható esetre adott levezetésnek számos előnye mellett ugyanakkor hátránya is van a harmadik szakaszban adott négy levezetéssel szemben.

Az első módszerrel (harmadik szakasz első pontja) szemben nem tételezi fel a keresleti görbék azonosságát. Viszont csak elfajult egyéni keresleti görbék mellett érvényes a levezetés. Ez utóbbi nyilván szintén egy erős megszorítás.

A második módszerrel szemben nincs szükség kontinuum sok fogyasztóra, nem igényli az ott szükséges két feltételt továbbá adott a hipergeometriai eloszlás illetve ennek normális határeloszlása segítségével a véges esettel való közelítés lehetősége.

A harmadik és negyedik levezetések pontatlanok voltak. A harmadik eset pontosítása tulajdonképpen a megszámlálható esetre adott levezetéshez vezetne. A negyedik eset levezetése mint látható tulajdonképpen a fogyasztók számosságának eltérésétől eltekintve a megszámlálható esettel azonos feltételeket igényel.

Irodalom

1. Allen, B. - M. Hellwig (1986): Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets. Review of Economic Studies 53, 175-204.
2. Baróti, Gy. - J. Bognár - G. Fejes Tóth - J. Mogyoródi (1995): Valószínűségszámítás, tizenegyedik kiadás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
3. Bauer, H. (1991): Wahrscheinlichkeitstheorie, negyedik kiadás. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
4. Benassy, J-P. (1986): On the existence of Bertrand-Edgeworth equilibria with differentiated commodities. In: Contributions to Mathematical Economics, szerk. W. Hildenbrand és A. Mas-Collel, North-Holland, 57-78.
5. Dasgupta, P. - E. Maskin (1986): The existence of equilibria in discontinous games, II. Review of Economic Studies 53, 27-41.
6. Feller, W. (1978): Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
7. Friedman, J. W. (1983): Oligopoly theory. Cambridge University Press, Cambridge.
8. Gelman, J. R. - S. C. Salop (1983): Judo economics: capacity limitation and coupon competition. Bell Journal of Economics 14, 315-325.
9. Howard, D. H. (1977): Rationing, quantity constraints and consumption theory. Econometrica 45, 399-412.
10. Osborne, M. J. (1997): Lectures on the theory of industrial organization. Kézírat, McMaster University, Hamilton, Canada.
11. Neary, J. P. - K. W. S. Roberts (1980): The theory of household behaviour under rationing. European Economic Review 13, 25-42.
12. Tirole, J. (1988): The Theory of Industrial Organization. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

13. Varian, H. R. (1992): Microeconomic Analysis, third edition. W.W.Norton and Company, New York.
14. Vives, X. (1986): Rationing Rules and Bertrand-Edgeworth Equilibria in Large Markets. Economics Letters 21, 113-116
15. Wolfstetter, E. (1993): Oligopoly and Industrial Organization. Humboldt-Universität zu Berlin, Discussion Paper, Berlin.

RANDOM RATIONING RULE IN CERTAIN MARKET SITUATIONS

In Bertrand-Edgeworth type duopolies a rationing rule is needed for a full specification of the model as long as our analysis is of partial nature. In the literature one of the two most commonly used rationing rules is the so-called random rationing rule. We consider market situations, in which the random rationing rule is reasonable. We will describe a special market situation with countable many consumers, which will lead to the random rationing rule.