SZOMSZÉDOS RELÁCIÓK[1]

MAGYARKÚTI GYULA
BKÁE Matematika Tanszék, Budapest

A gazdaság szereplőinek ízlését bizonyos relációk segítségével lehet jellemezni. Azt kutatjuk, hogy mit jelent az ízlések hasonlósága és hogyan lehet ezt topológiai eszközök segítségével megragadni olyan módon, hogy egymáshoz közeli relációk bizonyos tulajdonságai azonosak legyenek.

1 Bevezetés

A gazdaság szereplőinek ízlését preferencia relációk segítségével szokás jellemezni. Mivel adott halmazon értelmezett relációk voltaképpen a szorzathalmaz részhalmazai, ezért ha az ízlések hasonlóságának intuitív fogalmát matematikai eszközökkel szeretnénk kezelni, akkor ezen halmazok „közelségének" fogalmát kell megragadnunk. Általában egy halmaz elemeinek közelségét a halmazon bevezetett topológia segítségével fogjuk meg. Ilyenkor azt gondoljuk, hogy $x_n \to x$ azt fejezi ki, hogy az x_n elég nagy indexekre közel van az x-hez. Ennek az analógiának a fenntartásával a relációk közelségéhez a relációk halmazán tehát a szorzathalmaz bizonyos részhalmazainak halmazán kell bevezetnünk topológiát. Persze a preferencia relációk halmazán sokféleképpen tudunk topológiát bevezetni. Akkor mondhatjuk, hogy közgazdasági szempontból is értelmes fogalmat kapunk, ha a relációknak a közgazdasági szempontból releváns tulajdonságai közeli preferenciáról közelire áttérve megőrződnek. A matematikai nyelvre visszatérve ez azt jelenti, hogy például tranzitív relációk ilyen értelemben vett határértéke is tranzitív legyen. Matematikai szempontból — a későbbi jól kezelhetőség érdekében — olyan topológia bevezetésére lenne szükség, amely lehetőség szerint minél szebb tulajdonságú. Azt fogjuk megmutatni, hogy mód van olyan topológia bevezetésére, amely a fenti értelemben közgazdaságilag releváns és a kapott preferencia tér kompakt szeparábilis metrikus tér lesz. Ilyen topológia könnyen jellemezhető és a természetes várományos a zárt konvergencia topológia.

Nézzük most részletesebben, hogy hogyan juthatunk el a zárt konvergencia topológiához. Megvizsgáljuk először külön-külön a problémát reflexivitás majd tranzitivitás szempontjából.

2 Definíciók és jelölések

Legyen az egész dolgozatban X egy halmaz és $R \subseteq X \times X$ egy reláció. Ezt egyszerűen (X, R) módon jelöljük.

[1]Beérkezett: 1998. szeptember 19. A kutatást részben a Soros Alapítvány támogatta.

Definíció 2.1 *Definiáljuk a reláció tartóját:*

$$\operatorname{supp}(X,R) := \left\{ z \in X : \begin{array}{l} \exists x \in X, \text{ hogy } (x,z) \in R \text{ ; vagy} \\ \exists y \in X, \text{ hogy } (z,y) \in R \end{array} \right\}.$$

Világos, hogy a reláció metszeteivel is meg lehet fogni a fogalmat:

$$\operatorname{supp}(X,R) := \bigcup_{x\in R} R_x \cup \bigcup_{y\in R} R^y,$$

ahol a reláció x*-metszete* és y*-metszete* a következőképpen van definiálva:

$$R_x := \{z \in X : (x,z) \in R\} \quad \text{és} \quad R^y := \{z \in X : (z,y) \in R\}.$$

Definíció 2.2 *Azt mondjuk, hogy az (X,R) reláció relatív reflexív, ha $(x,y) \in R \Rightarrow (x,x) \in R$ és $(y,y) \in R$.*

Akkor érdekes a relatív reflexivitás, ha a reláció tartója nem az egész X. Ellenkező esetben, nyiván a reflexivitást kapjuk vissza. Most definiáljuk a reláció azon legbővebb részhalmazát, ahová megszorítva a relációt, már reflexív relációt kapunk.

Definíció 2.3 *Az (X,R) reláció reflexiv magja a*

$$\operatorname{ref}(X,R) := \{x \in X : (x,x) \in R\}$$

halmaz.

A pontos fogalmazás érdekében irjuk fel, a jól ismert *Kuratowski–limesz* fogalmát is.

Definíció 2.4 *Legyen (X,τ) egy topológikus tér és $A_n \subseteq X$.*

- *Az A_n halmazok Kuratowski–értelemben vett limesz inferiorja azon $x \in X$ pontok halmaza, amelyekre igaz, hogy minden $U \in \tau(x)$ környezet esetén az $U \cap A_n \neq \emptyset$ véges sok n-től eltekintve. Ezt a halmazt* $\operatorname{Li} A_n$*-nel jelöljük.*
- *Az A_n halmazok Kuratowski–értelemben vett limesz szuperiorja azon $x \in X$ pontok halmaza, amelyekre igaz, hogy minden $U \in \tau(x)$ környezet esetén az $U \cap A_n \neq \emptyset$ végtelen sok n-re. Ezt a halmazt* $\operatorname{Ls} A_n$*-nel jelöljük.*
- *Amennyiben $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Ls} A_n$, akkor azt mondjuk, hogy az A_n halmazsorozat Kuratowski-értelemben konvergál a közös $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Ls} A_n$ halmazhoz.*

Pusztán jelöléstechnikai kérdés, de $\operatorname{Li} A_n$ és $\operatorname{Ls} A_n$ jelöléssel azt szeretném hangsúlyozni, hogy nem pontsorozat, hanem halmazsorozat limesz szuperiorjáról és limesz inferiorjáról van szó.

Világos, hogy amennyiben a τ topológia a tér diszkrét topológiája, úgy a klasszikus limesz szuperior és limesz inferior fogalmakat kapjuk.

3 Reflexivitás

Állítás 3.1 *Az (X, R) egy reláció pontosan akkor relatív reflexív, ha*

$$\operatorname{ref}(X, R) = \operatorname{supp}(X, R).$$

Világos, hogy $\operatorname{ref}(X, R) \subseteq \operatorname{supp}(X, R)$ mindig teljesül, ezért a fenti tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az (X, R) reláció relatív reflexivitásának szükséges és elegséges feltétele az, hogy minden $x \in \operatorname{supp}(X, R)$ esetén $(x, x) \in R$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a reláció relatív reflexiv és $z \in \operatorname{supp}(X, R)$. Ekkor vagy

- $\exists x \in X$, hogy $(x, z) \in R$;
- $\exists y \in X$, hogy $(z, y) \in R$;

Mindkét esetben a relatív reflexivitás miatt $(z, z) \in R$, ami azt jelenti, hogy $z \in \operatorname{ref}(X, R)$. Tehát $\operatorname{supp}(X, R) \subseteq \operatorname{ref}(X, R)$, másik irányú tartalmazás viszont triviális.

Tegyük most fel, hogy $\operatorname{supp}(X, R) \subseteq \operatorname{ref}(X, R)$, és legyen $(x, y) \in R$. Világos, hogy ekkor $x, y \in \operatorname{supp}(X, R)$, ezért $(x, x) \in R$ és $(y, y) \in R$ is fennáll, ami azt jelenti, hogy (X, R) valóban relatív reflexiv. $\square$

Fontos, de könnyű látni, hogy ha (X, R) egy relatív reflexív reláció, akkor az $A := \operatorname{supp}(X, R)$ jelöléssel (A, R) reláció reflexív. Fordítva, ha $A \subseteq X$ mellett kiindulunk egy (A, R) relációból, akkor ezt tekinthetjük az egész X-en értelmezett (X, R) relációnak is hiszen $R \subseteq A \times A \subseteq X \times X$. Ha az (A, R) reláció reflexiv, akkor az így nyert (X, R) reláció is relatív reflexiv. Ez azt jelenti, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az X részhalmazain értelmezett reflexív relációk és az egész X-en értelmezett relatív reflexív relációk között, és ezt a megfeleltetést a supp operátor adja, amely egy az egészen értelmezett relatív reflexív relációhoz a fentiek szerint bijektív módon rendel egy az X valamely részhalmazán értelmezett, de már reflexiv relációt. Ilyen módon áttérhetünk a részhalmazokon értelmezett reflexiv relációk vizsgálatáról az egészen értelmezett relatív reflexiv relációk vizsgálatára.

Most rátérünk annak vizsgálatára, hogy milyen feltételek mellett következtethetünk az egész X-en értelmezett reláció relatív reflexivitására, amennyiben tudjuk, hogy valamilyen értelemben hozzá közeli reláció szintén relatív reflexív. Nézzünk először egy könnyű állítást:

Tétel 3.2 *Legyen (X, τ) topológikus tér és $F_n \subseteq X \times X$ olyan halmazok, amelyre fennáll, hogy*

$$\operatorname{Ls} F_n \supseteq F, \quad (\operatorname{Li} F_n \supseteq F).$$

Ekkor

$$\operatorname{Ls}(\operatorname{supp} F_n) \supseteq \operatorname{supp} F, \quad (\operatorname{Li}(\operatorname{supp} F_n) \supseteq \operatorname{supp} F).$$

Bizonyítás: Legyen $x \in \operatorname{supp} F$, azaz létezik, mondjuk $y \in X$, hogy $(x, y) \in F$. A Ls definíciója miatt ekkor minden $U \in \tau(x)$ esetén az $(U \times X) \cap F_n \neq \emptyset$ végtelen sok n-re, ami azt jelenti, hogy létezik $x_{n_k} \in \operatorname{supp} F_{n_k}$ részsorozat amelyre még $x_{n_k} \in U$ is teljesül. Eszerint tehát $x \in \operatorname{Ls}(\operatorname{supp} F_n)$.
A Li-re vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható. □

Tétel 3.3 *Legyen (X, τ) topológikus tér és $F_n \subseteq X \times X$ relatív reflexiv relációk sorozata X-en, amelyre*

$$\operatorname{Ls} F_n = F.$$

Ekkor (X, F) is relatív reflexiv reláció.

Bizonyítás: $(x, y) \in F$. Meg kell mutatnunk, hogy $(x, x) \in F$ és $(y, y) \in F$. Legyen V az (x, x) valamely környezete az $X \times X$ szorzat topológiában. Ekkor a szorzat topológia definíciója szerint létezik $U \in \tau(x)$, hogy $U \times U \subseteq V$. De az előző állítás miatt $x \in \operatorname{Ls}(\operatorname{supp} F_n)$, létezik tehát olyan részsorozat, hogy $x_{n_k} \in \operatorname{supp} F_{n_k}$ és $x_{n_k} \in U$. No de az F_{n_k} relatív reflexivitása szerint $(x_{n_k}, x_{n_k}) \in F_{n_k}$, így

$$(x_{n_k}, x_{n_k}) \in (U \times U) \cap F_{n_k} \subseteq V \cap F_{n_k},$$

ami azt jelenti, hogy $F_n \cap V$ végtelen sok n-re nem üres halmaz. Mivel V tetszőleges környezete lehet az (x, x) pontnak, ez utóbbi éppen azt jelenti, hogy $(x, x) \in F$. Az $(y, y) \in F$ bizonyítása a fentivel analóg módon történik. □

4 Tranzitivitás

Az előzőekhez hasonlóan a részhalmazokon értelmezett tranzitiv relációk köréből először át fogunk térni az egész X-en értelmezett relációk körébe. A kapott fogalom a negatív tranzitivitás gyengítése lesz.

Definíció 4.1 *Azt mondjuk, hogy az (X, R) reláció negatív tranzitív[2], ha*

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \notin R \\ (y, z) \notin R \end{array} \right\} \Rightarrow (x, z) \notin R.$$

Nyilvánvaló, hogy az (X, R^c) komplementer reláció pontosan akkor negatív tranzitív, ha (X, R) tranzitív.
Ha egy negatív tranzitív reláció alaphalmaza valamely halmaz részhalmaza, akkor ha a relációt a bővebb halmaz relációjának tekintjük, akkor a reflexivitáshoz hasonlóan a negatív tranzitivitás sem marad meg. Világos ugyanis, hogy ha olyan (x, z) párból indulunk ki, amelyre $(x, z) \in R$, és találunk egy a tartón kívüli y elemet, akkor $(x, y) \notin R$ és $(y, z) \notin R$. Ennek megfelelően most is gyengítenünk kell a fogalmat.

[2]Találóbb lenne a co-tranzitív elnevezés, de a nemzetközi standardtól nem szeretnék eltérni.

Definíció 4.2 *Legyen (X, R) egy reláció. Azt mondjuk, hogy ez relatív negatív tranzitív, ha minden $y \in \operatorname{supp}(X, R)$ esetén*

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \notin R \\ (y,z) \notin R\end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \notin R.$$

Most is teljesen nyilvánvaló, hogy az ha az egész halmazon értelmezett relációról áttérünk a tartóra leszorított relációra, akkor a relatív negatív tranzitivitás negatív tranzitivitásba megy át, és fordítva. Pontosabban, ha (X, R) egy reláció, akkor $A := \operatorname{supp}(X, R)$ jelölés mellett az (A, R) reláció negatív tranzitív. Fordítva, ha $A \subseteq X$ mellett kiindulunk egy (A, R) negatív tranzitív relációból, akkor az egész X-en értelmezett (X, R) reláció is relatív negatív tranzitív. Azt kaptuk tehát, hogy az az operátor, amely az egész halmazon értelmezett relatív reflexív relációkhoz reflexív relációkat rendelt, most a relatív negatív tranzitív relációk esetén negatív tranzitív relációt eredményez.

Most tovább tárgyalva a reflexivitás és tranzitivitás közti analógiát, azt mutatjuk meg, hogy negatív tranzitív relációk Kuratowski–féle limesze negatív tranzitív relációt ad.

Tétel 4.3 *Legyen (X, τ) topologikus tér és $F_n \subseteq X \times X$ relatív negatív tranzitív relációk sorozata X-en, amelyre*

$$\operatorname{Ls} F_n = \operatorname{Li} F_n = F.$$

Ekkor (X, F) is relatív negatív tranzitív reláció.

Bizonyítás: Tegyük fel –indirekt–, hogy valamely $y \in \operatorname{supp} F$ esetén $(x, y) \notin F$, $(y, z) \notin F$, mégis $(x, z) \in F$. Ekkor minden $U_1 \in \tau(x)$ és minden $U_2 \in \tau(z)$ esetén létezik $(x_n, z_n) \in (U_1 \times U_2) \cap F_n$ minden $n \geq N$ esetén. Legyen $V \in \tau(y)$ is tetszőleges környezet. Láttuk korábban, hogy $y \in \operatorname{Li}(\operatorname{supp} F_n)$, ezért feltehető, hogy minden $n \geq N$ esetén létezik $y_n \in \operatorname{supp} F_n$ és $y_n \in V$. No de az F_n halmazok relatív negatív tranzitivitása miatt az

$$(x_n, y_n) \notin F_n \text{ és } (y_n, z_n) \notin F_n$$

közül legalább az egyik nem teljesülhet, hiszen egyébként $(x_n, z_n) \notin F_n$ következne. Ebből viszont már következik, hogy vagy létezik $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in F_{n_k}$ részsorozat, vagy létezik $(y_{n_k}, z_{n_k}) \in F_{n_k}$ részsorozat. Az előbbi nem lehet, hiszen ekkor az (x, y) tetszőleges $U_1 \times V$ környezete végtelen sok F_n-beli pontot tartalmazna, azaz $(x, y) \in \operatorname{Ls} F_n = F$. Az $(y_{n_k}, z_{n_k}) \in F_{n_k}$ esetből teljesen hasonlóan az következne, hogy $(y, z) \in F$, tehát ellentmondást kaptunk. $\square$

5 Alkalmazás

Az előző két szakasz eredményeit a következőképpen foglalhatjuk össze.

Következmény 5.1 *Legyen az (X, F_n) relációk relatív reflexívek és relatív negatív tranzitívek, valamint tegyük fel, hogy az $F_n \subseteq X \times X$ halmaz Kuratowski–értelmeben konvergál valamely $F \subseteq X \times X$ halmazhoz. Ekkor az (X, F) reláció is relatív reflexív és relatív negatív tranzitív.*

Definiáljuk egy kicsit szokatlan módon a preferencia reláció fogalmát eleve folytonosnak:

Definíció 5.2 *Legyen (X, τ) topológikus tér, valamint $A \subseteq X$. Az $(A, \succ)$ relációt preferencia relációnak nevezzük, ha*

- *A zárt halmaz,*
- *$\succ \subseteq A \times A$ nyílt halmaz,*
- *$\succ$ irreflexív,*
- *$\succ$ tranzitív.*

Az X összes részhalmazain értelmezett összes preferencia relációi halmazát jelöljük $\mathcal{P}$-vel.

Most már definiálhatunk egy konvergencia fogalmat a Kuratowski–limesz segítségével a (folytonos) preferenciák $\mathcal{P}$ halmazán.

Tétel 5.3 *Tekintsük az $(A_n, \succ_n) \in \mathcal{P}$ preferenciákat. Legyen*

$$F_n := (A_n \times A_n) \setminus \succ_n$$

komplementer reláció. Ekkor nyilván

- *F_n zárt $A_n \times A_n$-ben, ezért $X \times X$-ben is,*
- *(A_n, F_n) reflexív, ezért (X, F_n) relatív reflexív,*
- *(A_n, F_n) negatív tranzitív, ezért (X, F_n) relatív negatív tranzitív.*

Amennyiben az F_n halmazok Kuratowski-értelemben konvergálnak valamely F halmazhoz az $X \times X$ szorzat topológikus térben, akkor azt mondjuk, hogy az $(A_n, \succ_n)$ preferencia relációk sorozata konvergens. Ebben az esetben definiáljuk a sorozat $(A, \succ)$ határértékét a következőképpen:

$$A := \operatorname{supp}(X, F), \quad \succ := (A \times A) \setminus F.$$

Láttuk, hogy (X, F) relatív reflexív, ezért (A, F) reflexiv, ezért a komplementerére $(A, \succ)$ irreflexív.
Láttuk, hogy (X, F) relatív negatív tranzitív, ezért (A, F) negatív tranzitív, ezért $(A, \succ)$ tranzitív.
Látható, hogy akármilyen halmazok Kuratowski–limsupja zárt halmaz, tehát F zárt, ezért A is az. Így F zárt az $A \times A$ halmaz relatív topológiájában, ezért $\succ$ nyílt.

Azt kaptuk tehát, hogy a határértékül definiált $(A, \succ)$ reláció valóban preferencia reláció. Vegyük még észre azt is, hogy az A tartót az F relatív reflexiv volta miatt definiálhattuk volna

$$A := \{x \in X, (x, x) \in F\}$$

módon is.

Persze természetes módon merül fel a kérdés, hogy mondjunk olyan feltételeket, hogy a fenti konvergencia a $\mathcal{P}$ valamely topologizálásából származó konvergencia-fogalom legyen, sőt olyan feltételekre vágyunk, hogy minél szebb tulajdonságai legyenek ennek a topologikus térnek. Tudjuk például, hogy ha a kiindulásul vett (X, τ) topologikus tér kompakt metrikus tér, akkor az $X \times X$ is ilyen a szorzat topológiával, és kompakt metrikus tér zárt részhalmazai a Hausdorff metrikával ellátva kompakt metrikus teret ad, amely konvergencia fogalma egybeesik a Kuratowski–limesszel. Tehát, ha kompakt metrikus térből indulunk ki, akkor a preferenciákon az imént bevezetett konvergencia fogalom szintén egy kompakt metrikus tér konvergenca fogalma.

Persze rögtön látszik, hogy első nekifutásra sikerült túlontúl erős feltételeket találni, hiszen (X, τ) kompaktsága, még $\mathbb{R}^n$ egy nem korlátos részhalmazán sem teljesül, ami pedig mindenképp része a klasszikus esetnek. Felmerülhetne valamilyen kompaktifikáció, de ott nehéz lenne a bejövő képzetes elemeknek közgazdasági tartalmat adni, bár valamilyen ügyes interpretáció elképzelhető, és még az is lehetséges, hogy közelebb vinne a tartalom megértéséhez.

A másik lehetőség, hogy definiáljuk az $X \times X$ zárt részhalmazain a zárt konvergencia topológiát. Ahhoz, hogy T2 teret kapjunk, tehát a sorozat határértéke egyértelmű legyen, azt kell feltenni, hogy az (X, τ) lokálisan kompakt. Ismert, hogy ha még szeparábilitást is feltesszük az (X, d) lokálisan kompakt metrikus térről, akkor a zárt konvergencia topológia egy kompakt metrizálható topológiát ad, melynek konvergenciája szintén a Kuratowski-limesszel esik egybe. Ezt a kérdéskört is tartalmazó részletes monográfia például [5]. Világos, hogy ez utóbbi sokkal inkább megfelel vizsgálatainknak. Tehát fennáll a következő tétel.

Tétel 5.4 *Megadható olyan topológia, amellyel ellátva $\mathcal{P}$-t kompakt metrikus teret kapunk és ebben a topológiában*

$$(A_n, \succ_n) \to (A, \succ) \iff \operatorname{Li} F_n = \operatorname{Ls} F_n = F$$

ahol $F_n := (A_n \times A_n) \setminus \succ_n$ *és* $F := (A \times A) \setminus \succ$.

Irodalom

1. Barten P.A., and Böhm, V., 1982, Consumer Theory, in: K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 1, (North–Holland Amsterdam).

2. Bridges, S. D. and Mehta B. G., 1995, Representations of Preference Orderings. *Lecture notes in economics and mathematical systems* **422**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
3. Dancs, S., 1980, Halmazértékű topológiák, Kézirat.
4. Eilenberg, S., 1941, Ordered Topological Spaces, *American Journal of Mathematics* **63**, 39–45.
5. Hildenbrand, W., 1974, Core and equilibra of a large economy, Princeton, N. J., Princeton University Press.
6. Kreps, D.M., 1990, A course in microeconomic theory, Princeton, N. J., Princeton University Press.
7. Rader, T., 1963, The Existence of Utility Function to Represent Preferences, *Review of Economic Studies* **31**, 229-232.
8. Schmeidler, D., 1971, A condition for completnes of partial preference relation, *Econometrica* **39**, 403-404.
9. Sonnenschein, H., 1965, The Relationship Between Transitive Preference and the Structure of the Choice Space, *Econometrica* **33**, 624-634.
10. Uzawa, H., 1960, Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption *Proceedings of a Symposium on Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford: Stanford University Press.

NEIGHBORING PREFERENCES

The tastes of economic agents are described by preference relations. The intuitive concept of 'similar' tastes is therefore made precise mathematically by a topology on the set of all preferences. We need a topology that is metrizable, separable or even compact. Such a topology exists and can easily be characterized. The natural candidate for a topology on the set of all preference relations is the closed convergence topology.