

KAKUKK-ALGORITMUS TANULÁSI STRATÉGIA A MEGBÍZÓ-ÜGYNÖK MODELLBEN¹

KERÉNYI PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

A tanulmányban a Kakukk-algoritmust (Cuckoo Search) követő tanulási stratégia teljesítményét vizsgáljuk a megbízó-ügynök modellben. Felállítunk egy standard megbízó-ügynök keretrendszert, ahol az előállított outputból történő részesedéssel (lineáris szerződés) az ügynök ösztönözhető, és elkerülhető az erkölcsi kockázat. A modellben a megbízó nem ismeri sem az ügynök hasznossági függvényét, sem pedig a sztochasztikus környezet tulajdonságait, de a szerződéskötésből és az előállított output megfigyeléséből álló folyamatot iterálva, folyamatosan javítva a szerződés paramétereit kitanulja és optimalizálja a saját célfüggvényét. Monte-Carlo szimulációs módszertant alkalmazva arra a következtetésre jutunk, hogy a megbízó-ügynök problémára jellemző, és a tanulást nehezítő, nem folytonos hasznossági függvény és sztochasztikus környezet ellenére a Kakukk-algoritmus a korábbi tanulási algoritmusoknál pontosabban képes meghatározni a megbízó hasznossági függvényének maximumát.

Kulcsszavak: megbízó-ügynök probléma, lineáris szerződés, ismételt játék, Kakukk-algoritmus. *JEL kódok:* C61, C63, C73, D86

1 Bevezetés

A megbízó-ügynök probléma során az eszköz (vállalat, know-how, információ stb.) tulajdonosa (megbízó) megbízza az ügynököt, hogy az ő nevében eljárva és döntéseket hozva az eszköz használatával minél több outputot állítson elő. A két szereplő azonban különböző szempontok alapján hozza meg a döntéseket, amik érdekonfliktushoz vezetnek. Fontos kérdés, hogy a megbízó hogyan tudja ösztönözni az ügynököt, hogy a számára optimális döntéseket hozza meg. Egy lehetséges és elterjedt ösztönzési mechanizmus a megbízó és az ügynök közötti lineáris szerződés, ahol a szereplők kifizetése két részből áll, egy fix, illetve egy változó részből, ahol a változó rész az output lineáris függvénye. Stiglitz [1974] a részesaratásnál használt lineáris szerződést vizsgálja ösztönzési szempontból. Ennél a szerződésnél a földbérlet (ügynök) egy fix bérleti díjat fizet a földtulajdonosnak (megbízó) a föld használatáért, majd a földön megtermelt javakból egy előre rögzített arányban részesedik. Holmström és Milgrom [1991] a menedzszerszerződések ösztönzési hatásait elemzi.

¹A szerző a Budapesti Corvinus Egyetem Gazdaságinformatika Doktori Iskola PhD hallgatója, a Pallas Athéné Domus Educationis Alapítvány ösztöndíjasa. E-mail: peter.kerenyi@uni-corvinus.hu. Beérkezett: 2017. október 27.

Ezekben a szerződéseken a vállalat tulajdonosa (megbízó) a menedzsernek (ügynök) egy fix fizetést ad, majd a vállalat által megtermelt profit egy előre meghatározott részét bónuszként fizeti ki. Hazai kutatók közül Csóka et al. [2015] a potenciálisan nem fizető vevővel rendelkező vállalkozások hitelezése során megjelenő morális kockázatot vizsgálja szerződéselméleti és ösztönzési szempontból, Berlinger et al. [2017] az állami támogatás és a morális kockázat viszonyát elemzi, Kóczy és Kiss [2017] pedig a Nobel-éremdíjas Oliver Hart és Bengt Holmström szerződéselméleti munkásságát mutatja be.

A megbízó-ügynök keretrendszerben a megbízó feladata egy olyan lineáris szerződés felajánlása az ügynök számára, amivel elérhető, hogy az ügynök olyan minőségű munkát végezzen, amivel maximalizálja nem csak saját, hanem a megbízó hasznosságát függvényét is. Ha a megbízó ismeri a saját és az ügynöke céljait, azaz a hasznosságát függvényeket, valamint a bizonytalan környezet jellemzőit, akkor analitikus úton meghatározhatók a szerződés optimális paraméterei.

A valóságban azonban a megbízó nem ismeri sem az ügynök hasznosságát függvényét, sem pedig a zajos környezet pontos jellemzőit. Jelen tanulmányban arra keressük a választ, hogy hogyan és milyen módon érheti el mégis a megbízó, hogy kitalálja, kitanulja az optimális paramétereket. Abból a feltetelezésből indulunk ki, hogy a megbízónak lehetősége van a szerződéskötés után megfigyelni az ügynök tevékenységének outputját, ami kapcsolatban van az ügynök erőfeszítésével, majd egy új, finomított szerződést ajánlani az ügynöknek.

Axelrod [1987] a fogoly-dilemmát vizsgálja ilyen iteratív játék segítségével. Szabó és Tóke [1998] evolúciós modellezést használ az iteratív fogoly-dilemma vizsgálatára négyzetes hálóknban, Szabó et al. [2005] pedig további kétdimenziós hálókat használ ezen kérdés elemzésére. Roth és Erev [1995] megerősítéses tanulást (reinforcement learning), Rose és Willemain [1996] genetikus algoritmust, Camerer és Hua Ho [1999] pedig tapasztalattal súlyozott vonzerő tanulást (experience weight attraction learning) használ a megbízó-ügynök probléma megoldására. Arifovic és Karaivanov [2010] szimulációs módszertant használva különböző tanulási, evolúciós algoritmusokat hasonlít össze a megbízó-ügynök probléma esetén, és elemzi ezen algoritmusok tulajdonságait, majd arra a következtetésre jut, hogy a társadalmi-evolúciós tanuló algoritmus (tanulás másoktól, learning from others) gyorsabban konvergál az optimális megoldás közelébe, mint az egyéni tanulást végző (cselekvés általi tanulás, learning by doing) algoritmusok.

A különböző tanuló stratégiák teljesítményét, és azt, hogy mennyire alkalmazkodnak egy adott problémához, nagyban befolyásolják a célfüggvény tulajdonságai. A tanuló stratégiáknak problémát jelenthet, ha a célfüggvény nem folytonos, mert ilyenkor a nagy szakadás megnehezíti a paraméterek finomítását. További és az előzőnél nagyobb problémát jelenthet, ha a célfüggvénynek lokális szélsőértékei vannak, mert ilyenkor az iteratív tanuló eljárások könnyedén egy ilyen lokális szélsőértékbe konvergálhatnak. Az optimum megtalálásában további probléma lehet, hogy a zajos környezetben nehezen megfigyelhető a célfüggvény elméleti értéke. Megfelelő iteratív eljárásokkal

azonban a valóságra sok esetben jobban hasonlító, a megbízó számára ismeretlen hasznossági függvények és sztochasztikus környezet is vizsgálhatók.

A tanulmányban Arifovic és Karaivanov [2010] nyomán a megbízó-ügynök mechanizmustervezési feladatot a Yang és Deb [2009] által kifejlesztett, a parazita kakukk madár viselkedését modellező Kakukk-algoritmussal (Cuckoo Search) oldjuk meg. A Kakukk-algoritmust sikeresen alkalmazzák más, feltételes optimalizációs problémáknál, mint a projekt ütemezés és hozzárendelés Tein és Ramli [2010]), a szerkezet optimalizációs problémák (Gandomi et al. [2013]) vagy a hátizsák probléma (Layeb [2011]). Kutatások alapján a Kakukk-algoritmus más optimalizációs-tanulási algoritmusoknál jobb teljesítményt nyújt (Yang et al. [2012], Yang és Deb [2014]). Célunk, hogy a megbízó-ügynök probléma esetén összehasonlítsuk ezen algoritmikus stratégia teljesítményét a korábban megfogalmazott stratégiákkal szemben, és ezáltal egy, akár a gyakorlatban is használható módszert mutassunk be az ügynökök ösztönzésére.

A vizsgálatot Monte-Carlo szimulációs eszközökkel végezzük. A 2. fejezetben bemutatott, Arifovic és Karaivanov [2010] által is használt keretrendszer adja meg a szereplők hasznossági függvényeit és a feltételes szélsőérték feladatot. A 3. fejezetben a Kakukk-algoritmus által kijelölt stratégiát implementáljuk a megbízóra, majd az így meghatározott szabályok és a 4. fejezetben bemutatott paraméterek alapján szimuláljuk a megbízó és az ügynök közötti ismételt játékot. A 5. fejezetben a Kakukk-algoritmus és az Arifovic és Karaivanov [2010] tanulmányban a legjobb teljesítményt nyújtó Social Evolutionary Learning (SEL) stratégiát hasonlítjuk össze különböző szempontok alapján. Arra a következtetésre jutunk, hogy a Kakukk-algoritmus a SEL-hez hasonlóan jól alkalmazkodik a megbízó-ügynök problémához és alkalmas az optimum meghatározására, viszont a SEL-hez képest pontosabb, és gyorsabban konvergál az optimumhoz. A 6. fejezetben a Kakukk-algoritmus érzékenységét vizsgáljuk mind a modell, mind pedig az algoritmus paramétereinek függvényében, és azt tapasztaljuk, hogy ezen paraméterekre az algoritmus robusztus.

Összességében elmondható, hogy a Kakukk-algoritmus jól használható olyan megbízó-ügynök problémák esetén, amikor lehetőség van az előállított output gyakori megfigyelésre és a szerződéses paraméterek ismételt megváltoztatására. Ilyen gyakorlati alkalmazás lehet a időben változó paraméterű lineáris szerződéssel történő optimális ösztönzésre az online tartalmakat, mint például a videómegosztó portálok (Youtube, Twitch stb.), a kérdés-válasz fórumok (Yahoo Answers, StackOverflow stb.) vagy az értékelő oldalak (Epinion, TripAdvisor stb.) tartalmait előállító felhasználók ösztönzése a jobb (több, gyorsabb) tartalmak előállítására és ezáltal a bevételek növelésére. Másik ilyen alkalmazás lehet a taxisofőrök ösztönzése (Uber stb.). Ebben az esetben a taxitársaságnak a sofőrök az online rendszerhez való csatlakozásért napi díjat fizetnek, majd adott arányban részesednek az online platform által szervezett fuvarok díjaiból.

2 Modell keret

A dolgozatban az algoritmusok összehasonlíthatósága miatt Arifovic és Karivanov [2010] által is használt standard lineáris szerződés modellt használjuk. A célfüggvények ismeretében analitikus módon kiszámíthatók a szerződés optimális paraméterei, amit referenciaként használunk az algoritmus teljesítményének mérésére.

A termelés outputja $y(z) := z + \varepsilon$, ahol $z \in \mathbb{R}$ az ügynök erőfeszítésének mértéke, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ pedig egy véletlen zaj. Az ügynök erőfeszítésének mértékét a megbízó nem képes megfigyelni, pusztán az output alapján következtethet rá. A megbízó kifizetése ekkor $\pi(y) := (1-s) \cdot y + f$, ahol s a megbízó részesedése az outputból ($s \in [0, 1]$, változó rész), $f \in \mathbb{R}$ pedig a fix rész. A megbízó költsége egyenlő az ügynök kifizetésével: $c(y(z)) := s \cdot y(z) - f$. A megbízó kockázatsemleges, ezért ő várható értékben optimalizál. Az ügynök hasznossági függvénye legyen konstans abszolút kockázatelutasítási (CARA) függvény négyzetes erőfeszítés költséggel:

$$u(z) := -e^{-\gamma \cdot (c(y(z)) - \frac{1}{2} \cdot z^2)}, \quad (1)$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}^+$ a kockázatelutasítási paraméter. Ekkor az ügynök várható hasznossága:

$$E(u(z)) = -e^{-\gamma \cdot (s \cdot z - f - \frac{1}{2} \cdot z^2 - \frac{\gamma}{2} \cdot s^2 \cdot \sigma^2)}. \quad (2)$$

A megbízó várható kifizetése:

$$E(\pi(y)) = E((1-s) \cdot y(z) + f) = E((1-s) \cdot (z + \varepsilon) + f) = (1-s) \cdot z + f. \quad (3)$$

A megbízó feladatát a következőképpen írhatjuk fel:

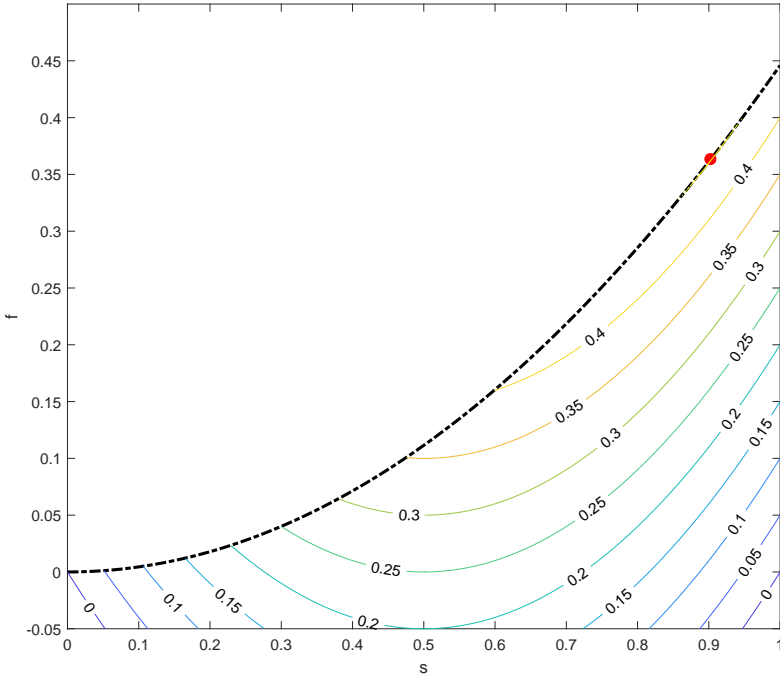
$$\max_{s, f} E(\pi(y)) \quad (4)$$

s.t.

$$z = \arg \max_{\hat{z}} E(u(\hat{z})) \quad (\text{ICC})$$

$$E(u(z)) \geq u(\bar{w}) \quad (\text{PC})$$

A megbízó feladata tehát a szokásos megbízó-ügynök mechanizmustervezési feladat megoldása (pl. Bolton és Dewatripont [2005] [pp. 137-139]). A megbízó maximalizálja a várható profitját (kockázatsemleges) azon korlátok mellett, hogy az ügynök a saját hasznossági függvénye alapján a saját hasznát maximalizálja és ennek függvényében választja meg az erőfeszítés szintjét (ICC, incentive compatibility constraint, ösztönzési korlát), illetve, hogy az ügynök várható hasznossága meghaladja a külső opciójának a hasznosságát (példánkban ez a külső opció kifizetése egyenlő 0-val), azaz az ügynöknek egyáltalán megérje részt venni a játékban, elfogadni a szerződést (PC, participation constraint, részvételi korlát). A feltételes szélsőérték feladatot szemlélteti az 1. ábra.



1. ábra. A megbízó várható kifizetésének közömbösségi görbéi az $S \times F$ stratégiatérben $\sigma = 0,6$ és $\gamma = 0,3$ paraméterek mellett. A PC korlát fekete szaggatott vonallal, az elméleti optimum piros ponttal jelölve.

A feladatot visszafelé oldjuk meg (részletes levezetés ld. A. melléklet), azaz adott (s, f) párhoz kiszámítjuk az ügynök optimális z^* erőfeszítés szintjét (megoldjuk az ICC korlátot), majd ezután optimalizáljuk a megbízó cél-függvényét. Ez alapján $z^* = s$.

A feladat végső megoldásaként adódik az optimális szerződés két paramétere:

$$s^* = \frac{1}{1 + \gamma \cdot \sigma^2} \tag{5}$$

$$f^* = \frac{1 - \gamma \cdot \sigma^2}{2 \cdot (1 + \gamma \cdot \sigma^2)^2} \tag{6}$$

Az output szórásából (σ) és az ügynök kockázatelutasításának mértékéből (γ) ismert hasznossági függvények mellett az optimális szerződéses paraméterek kiszámíthatók, és a későbbi fejezetekben az így kapott elméleti optimumokat használjuk referenciaként az algoritmusaink teljesítményének mérésére.

3 Kakukk-algoritmus implementálása

A 2009-ben Xin-She Yang és Suash Deb által kifejlesztett Kakukk-algoritmus a parazita kakukkmadár viselkedését alapul véve próbálja megtalálni a cél-függvény optimális megoldását. A Kakukk-algoritmus jól használható olyan

célfüggvények globális szélsőértékének meghatározására, amely célfüggvények nem folytonosak. A megbízó-ügynök probléma iteratív megoldása során ezt az eljárást implementáljuk.

Az iteratív játék szimulációjában az algoritmus minden fordulóban $m := (s; f)$, $s \in S$, $f \in F$ paraméterpárokat (ezeket nevezzük a későbbiekben stratégiáknak) ajánl az azonos hasznossági függvénnyel rendelkező ügynököknek. A stratégiákat minden esetben egy G stratégiatérből választja, amely stratégiatérből minden $m \in G$ stratégia rendelkezik egy rátermettségi értékkel. A stratégiák rátermettségi értéke kezdetben 0, majd a fordulóok során ezeket az értékeket folyamatosan finomítja az algoritmus. A $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ függvény segítségével az algoritmus megkapja egy adott stratégia aktuális rátermettségi értékét. Egy m stratégiát egy fordulóban J darab ügynöknek ajánl, akik meghatározzák a stratégiához tartozó z^* optimális erőfeszítés szintet, előállítanak egy $y_i = s + \varepsilon_j$ outputot. Ezen outputokat átlagolva az algoritmus kiszámítja a stratégiához tartozó $\hat{\pi} = f + (1 - s) \cdot (s + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varepsilon_j)$ átlagos megbízó kifizetést. Végül az m stratégiához tartozó rátermettségi értéket ezzel a $\hat{\pi}$ értékkel pontosítja, mégpedig úgy, hogy megnézi, hogy a korábbi fordulóban, amikor ugyanezen stratégiát ajánlotta, milyen $\hat{\pi}$ értékeket tapasztalt, majd ezeket az értékeket átlagolja. Így a stratégia rátermettsége a várható kifizetés torzítatlan becslése lesz.

Az algoritmus minden $t = 1, \dots, T$ fordulóban egy N elemű $b \in G^N$ stratégiákat tartalmazó vektorral dolgozik. Első lépésként az előző fordulóban meghatározott $b_{i,t-1}$ stratégiákból Lévy-repüléssel $g_{i,t}$ stratégiákat készít. A Lévy-repülés egy olyan véletlen bolyongás, ahol a növekmények vastag szélű eloszlást követnek, így nagy valószínűséggel a $g_{i,t}$ stratégiák a $b_{i,t-1}$ stratégiák közelében maradnak, de normális eloszlásnál nagyobb valószínűséggel távolodnak el az eredeti stratégiától. A Lévy-repülés szimulálására Mantegna [1994] algoritmusát használjuk, ahol két paraméterrel (α és β) definiálható a bolyongás.

$$g_{i,t} := b_{i,t-1} + l_{i,t} \cdot N(0, 1), \quad (7)$$

ahol

$$l_{i,t} := \alpha \cdot \left(\frac{u}{|v|} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot (b_{i,t-1} - \hat{b}_{t-1}) \cdot z \quad (8)$$

$$\hat{b}_{t-1} := \max_i b_{i,t-1} \quad (9)$$

$$u \sim N(0, 1) \cdot \left(\frac{\Gamma(1 + \beta) \cdot \sin(\beta\pi/2)}{\Gamma(\frac{1+\beta}{2}) \cdot \beta \cdot 2^{(\beta-1)/2}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (10)$$

$$v \sim N(0, 1) \quad (11)$$

$$z \sim N(0, 1) \quad (12)$$

Egy $g_{i,t}$ stratégia legenerálását tekintjük egy műveletnek. Egy fordulóban a stratégiagenerálás $O(N)$ futási idejű, azaz a stratégiák számának lineáris függvénye.

A $g_{i,t}$ stratégiákat az algoritmus felajánlja az ügynököknek, és kiszámítja, illetve pontosítja a hozzájuk tartozó rátermettségi értékeket. Ezeket a $g_{i,t}$ stratégiákat rátermettségük alapján összehasonlítja az előző fordulóból származó $b_{i,t-1}$ stratégiákkal, és a rátermettebbeket rakja a $h_{i,t}$ gazdastratégiáknak nevezett stratégiákba:

$$h_{i,t} := \begin{cases} g_{i,t}, & \text{ha } \varphi(b_{i,t-1}) < \varphi(g_{i,t}) \\ b_{i,t-1}, & \text{ha } \varphi(b_{i,t-1}) \geq \varphi(g_{i,t}). \end{cases} \quad (13)$$

Egy műveletnek tekintjük egy stratégia egy ügynöknek történő felajánlását és a rátermettségi érték frissítését a megfigyelt outputtal. Ennek a fázisnak a futási ideje $O(N \cdot J)$, azaz a stratégia- és az ügynökszám szorzatának lineáris függvénye.

A forduló második lépésében ezekhez a $h_{i,t}$ gazdastratégiákhoz $c_{i,t}$ kakukkstratégiákat generál az algoritmus. A $c_{i,t}$ kakukkstratégiák p valószínűséggel megegyeznek a $h_{i,t}$ gazdastratégiákkal, ezzel modellezve azt a természetben előforduló eseményt, amikor a gazdamadár felfedezi a fészkébe került kakukktojást és még a kakukkfióka kikelése előtt kilöki a fészkeből. $1 - p$ valószínűséggel viszont kikel a kakukkfióka és versenyez a gazdamadár fiókájával a túlélésért. Ezeket a kakukkstratégiákat a gazdastratégiákból egyetlen eloszlású torzított véletlen bolyongással (biased random walk) állítja elő az algoritmus.

$$c_{i,t} := \begin{cases} h_{i,t}, & p \\ h_{i,t} + r_{i,t}, & 1 - p, \end{cases} \quad (14)$$

ahol

$$r_{i,t} := u \cdot (h_{j,t} - h_{k,t}), \quad (15)$$

$$u \sim U[0, 1], \quad (16)$$

j és k egyetlen eloszlású véletlen egész az $[1; N]$ intervallumból. Ezt a folyamatot (stratégiagenerálás) ismét egy műveletnek tekintve, ennek a fázisnak a futási ideje $O(N)$, azaz a stratégiák számának lineáris függvénye.

Az algoritmus ezeket a $c_{i,t}$ kakukkstratégiákat ajánlja az ügynököknek és az outputok megfigyelése után frissíti a stratégiák rátermettségi értékeit. Végül ezeket a $h_{i,t}$ gazdastratégiákat és $c_{i,t}$ kakukkstratégiákat páronként versenyeztetve meghatározza az adott forduló győztes $b_{i,t}$ stratégiáit:

$$b_{i,t} := \begin{cases} h_{i,t}, & \varphi(c_{i,t}) < \varphi(h_{i,t}) \\ c_{i,t}, & \varphi(c_{i,t}) \geq \varphi(h_{i,t}) \end{cases} \quad (17)$$

Ismét egy műveletnek tekintjük egy stratégia egy ügynöknek történő felajánlását és a rátermettségi érték frissítését a megfigyelt outputtal. Ennek a fázisnak a futási ideje $O(N \cdot J)$, azaz a stratégia- és az ügynökszám szorzatának lineáris függvénye.

A Kakukk-algoritmus tanulási stratégiát követve egy forduló futási ideje $2 \cdot O(N) + 2 \cdot O(N \cdot J) = O(N \cdot J)$, azaz a stratégia- és az ügynökszám szorzatának lineáris függvénye.

A szimuláció egy realizációja során a fenti lépésekből álló folyamatot iteráljuk a T időkorlátig.

4 Szimulációs paraméterek

Az algoritmus teljesítményének tesztelését a 2. fejezetben bemutatott (4) példán végezzük. Vizsgálatunk során először egy referencia szimulációt végzünk, majd komparatív statika segítségével megvizsgáljuk, hogy a különböző paraméterek milyen hatással vannak a teljesítményre. A referencia szimuláció eredményeit összevetjük a SEL algoritmus eredményeivel, ezért kezdetben az Arifovic és Karaivanov [2010] tanulmányban használt és ott a legjobb eredményt elérő paraméterbeállításokat használjuk.

A modellparamétereket a szimulációban minden futás során változtatjuk, hogy kiszűrjük ezek hatását az eredményekből. Az ügynök kockázatelutasítási paraméterét (γ) 0, 2 és 3 értékek között egyenletes lépésközzel választjuk, az outputra rakódó zaj szórását (σ) pedig a 0 (ekkor tökéletesen megfigyelhető az ügynök erőfeszítése) és 0,6 közötti intervallumból választjuk egyenlő lépésközzel.

A 6. fejezetben megvizsgáljuk és elemezzük, hogy az algoritmus mennyire robusztus ezen modellparaméterekre. A szimuláció során törekszünk az Arifovic és Karaivanov [2010] tanulmánnyal vett összehasonlíthatóságra és a reprezentativitásra, ezért az egyes beállításokat 70 különböző véletlen mag mellett futtatjuk le, azaz így összesen $15 \times 7 \times 70 = 7350$ futtatást végzünk. Egy-egy futás során $T = 1200$ fordulót szimulálunk. A (4) feladat diszkretizálásaként a G stratégiateret egy 0,01 finomságú $[0; 1] \times [-0,05; 0,5]$ ráccsal közelítjük. A G stratégiatér dimenzióinak széleit úgy határozzuk meg, hogy minden modellbeállítás mellett az $(s^*; f^*)$ analitikus optimum a rács szélein belül legyen.

Az algoritmus paraméterei közül a stratégiák számát (N) és az ügynökök számát (J) kezdetben 30-nak, illetve 10-nek választjuk (az Arifovic és Karaivanov [2010] tanulmányhoz hasonlóan), de a 6. fejezetben ezen paraméterekre vett érzékenységet is megvizsgáljuk. A SEL algoritmustól különböző, csak a Kakukk-algortimushoz szükséges paramétereknél a Lévy-repülés α skála paraméterét a G stratégiatér finomságával megegyező méretűre, azaz 0,01-re állítjuk, a valószínűség eloszlást meghatározó β paramétert pedig kezdetben 1-nek választjuk, ami pont Cauchy-eloszlást eredményez. A kakukktojás felfedezésének valószínűségét szimbolizáló p paramétert kezdetben 0,25-re állítjuk. A 6. fejezetben a β és a p paraméterre vett érzékenységet is vizsgáljuk.

A referencia szimulációban használt futtatási paramétereket az 1. táblázat foglalja össze.²

²A szimulációkat a MATLAB R2017a programmal futtatjuk. A kódok elérhetőek a MATLAB közösség fájlcsere oldalán: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/66251-cuckoo-search-learning-strategy-in-the-principal-agent-model>

Paraméter	Érték
<i>Modell</i>	
Kockázatelutasítás paraméter, γ	15 egyenletes távolságú pont a $[0,2; 3]$ -ből
Output szórása, σ	7 egyenletes távolságú pont a $[0; 0,6]$ -ből
<i>Szimuláció</i>	
Véletlen magok száma, <i>seed</i>	70 egyenletes eloszlású véletlen a $[1; 10000]$ -ből
Stratégiatér elemszáma, $ G $	$101 \cdot 56 = 5656$
Rácsfinomság, d	0,1
Fordulók száma, T	1200
<i>Kakukk</i>	
Stratégiák száma, N	30
Ügynökök száma stratégiánként, J	10
Lévy-repülés skála paramétere, α	0,01
Lévy-repülés eloszlás paramétere, β	1
Kakukktojás felfedezés valószínűsége, p	0,25

1. táblázat. A referencia szimulációban használt paraméterek és azok értékei

5 Elemzés

Elemzésünk során a 3. fejezetben bemutatott Kakukk-algoritmus, illetve az Arifovic és Karaivanov [2010] tanulmányban használt SEL algoritmus (részletes implementációt ld. B. melléklet) által kijelölt stratégiák alapján lefuttatott véletlen szimulációkat hasonlítjuk össze. A két implementáció futási időben nem különbözik egymástól, mindkét esetben egy forduló futási ideje $O(N \cdot J)$, azaz a stratégia- és ügynökszám szorzatának lineáris függvénye (ld. 3. fejezet és B. Melléklet). Megvizsgáljuk, hogy a szimulációk mekkora hányadában használják az optimális stratégiától adott távolságon belüli stratégiákat, illetve azt, hogy az időben ezek az arányok hogyan változnak. További elemzési szempont az algoritmusok optimális értékhez való konvergenciája és a konvergencia sebessége.

Bár a feltételes szélsőérték feladatnak – (4) feladat – csak egy globális maximuma van és nincsenek lokális maximumai, az optimum megtalálása tanuló algoritmus segítségével mégsem egyszerű feladat. A specifikált feladatban a célfüggvény nem folytonos, a PC korlát mentén szakad és utána 0 értéket vesz fel. Ráadásul a maximum ezen a PC görbén helyezkedik el, ami azt jelenti, hogy közvetlen környezetében már hirtelen 0-ra esik a célfüggvény értéke és így az iterációs tanuló algoritmus nehezen tudja kikapasztalni ezt a maximumot (ld. 1. ábra). További problémát jelenthet az outputra rakódó zaj, ami nehezíti a stratégiák pontos rátermettségének meghatározását.

Az algoritmus teljesítményének teszteléséhez először Arifovic és Karaivanov [2010] által is használt két mértéket definiálunk. Az első egy stratégia távolsága az optimális stratégiától, amit az euklideszi távolsággal mérünk:

$$d_e(m) := |m^* - m| = |(s^*, f^*) - (s, f)| = \sqrt{(s^* - s)^2 + (f^* - f)^2}. \quad (18)$$

A teljesítmény mérésére használt második mértékünk az optimális stratégia várható kifizetésének és az adott stratégia adott fordulóban tapasztalt

rátermettségének abszolút eltérése százalékos formában:

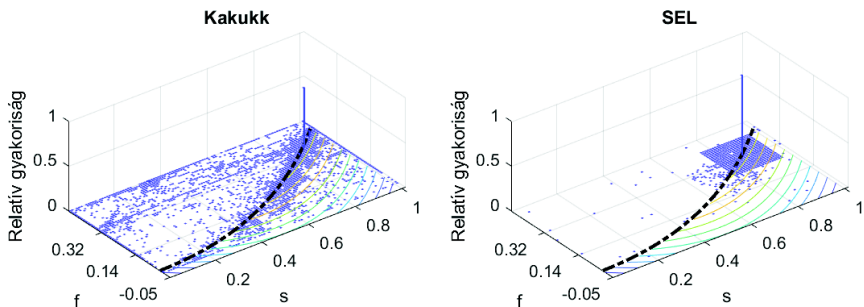
$$d_{\pi}(m_{i,t}) := \left| \frac{\varphi(m_{i,t})}{E(\pi^*)} - 1 \right|. \quad (19)$$

Először azon stratégiák távolságait vizsgáljuk, melyeket az algoritmus az utolsó fordulókban kap végeredményül (ld. 2. táblázat). Az esetek 86,44%-ában a Kakukk-algoritmus az optimális stratégiát kapja, de az esetek túlnyomó részében is (94,30%) mindössze az optimum 0,05-os környezetében van az eredmény. A kifizetések tekintetében még jobb teljesítményt nyújt ez az algoritmus, itt az esetek 98,53%-ban az utolsó fordulóban használt stratégiák rátermettségi értéke az optimális várható kifizetés 1%-os környezetén belül található. Az eredmények alapján a kis távolságok esetén (0 vagy 0,01) a Kakukk-algoritmus diktálta stratégia valamivel felülmúlja a SEL stratégia teljesítményét. Ez alapján azt állíthatjuk, hogy a Kakukk-algoritmus képes alkalmazkodni a megbízó-ügynök problémához.

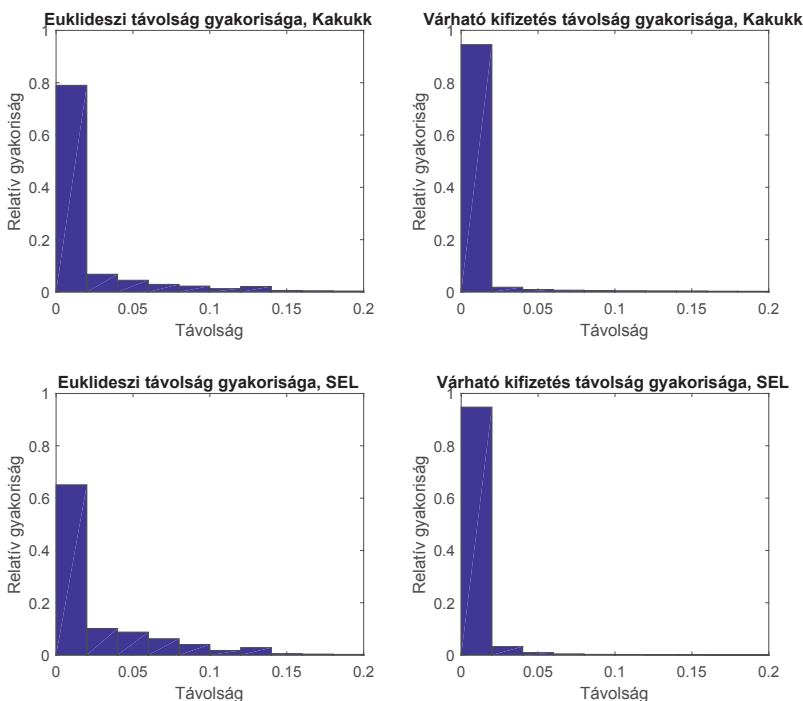
	Utolsó fordulóban az optimáltól x távolságon belül lévő stratégiák aránya, %				Utolsó fordulóban az optimáltól $x\%$ -on belül lévő kifizetések aránya, %			
	$x = 0$	$x = 0,01$	$x = 0,05$	$x = 0,1$	$x = 0\%$	$x = 1\%$	$x = 5\%$	$x = 10\%$
Kakukk	86,44	86,60	94,30	97,63	14,16	98,53	98,85	98,89
SEL	29,72	70,34	86,15	97,63	14,00	96,29	99,91	99,99

2. táblázat. Az utolsó fordulóban adott x távolságon belül lévő stratégiák aránya, %

Ezt az állításunkat tovább erősíti, hogy ha nem csak az utolsó fordulóban használt stratégiákat, hanem a teljes futás során használt összes stratégiát vizsgáljuk. Egy adott futás során ($seed = 2017$, $\sigma = 0,3$, $\gamma = 0,6$) használt stratégiák relatív gyakoriságát mutatja a 2. ábra. Látható, hogy az adott futás során az algoritmusok a G stratégiátér csak egy kis részét játsszák ki, és ezek közül is messze kiemelkedik egy stratégia a maga 60%-hoz, illetve 80%-hoz közeli relatív gyakoriságával. A teljes szimuláció során használt összes stratégia távolságainak relatív gyakoriságát mutatja a 3. ábra. Ez jelentősen nem különbözik a SEL eredményektől. A 2. ábra alapján látható, hogy a SEL stratégia során a megbízó a stratégiátér csak egy kisebb részét használja, mint a Kakukk esetben, de az optimális stratégiát nem találja meg pontosan, egy, az optimális kifizetéshez nagyon közeli kifizetést eredményező másik szuboptimális stratégia eltéríti az algoritmust, és az végül ide konvergál. Mindezekből arra következtethetünk, hogy az algoritmus már jóval az utolsó forduló előtt rendszeresen használja az utolsó fordulóban használt stratégiákat, és viszonylag hamar kitanulhatja az optimálisához közeli paramétereket.



2. ábra. Egy tipikus futás során ($seed = 2017$, $\sigma = 0,6$, $\gamma = 0,3$) használt stratégiák eloszlása az $S \times F$ stratégiatérben. Az optimális stratégia $s = 0,9$ és $f = 0,36$. A Kakukk-algoritmus esetén leggyakrabban (65,24%) használt stratégia (0,9; 0,36), SEL esetén leggyakrabban (89,11%) használt stratégia (0,85; 0,32)



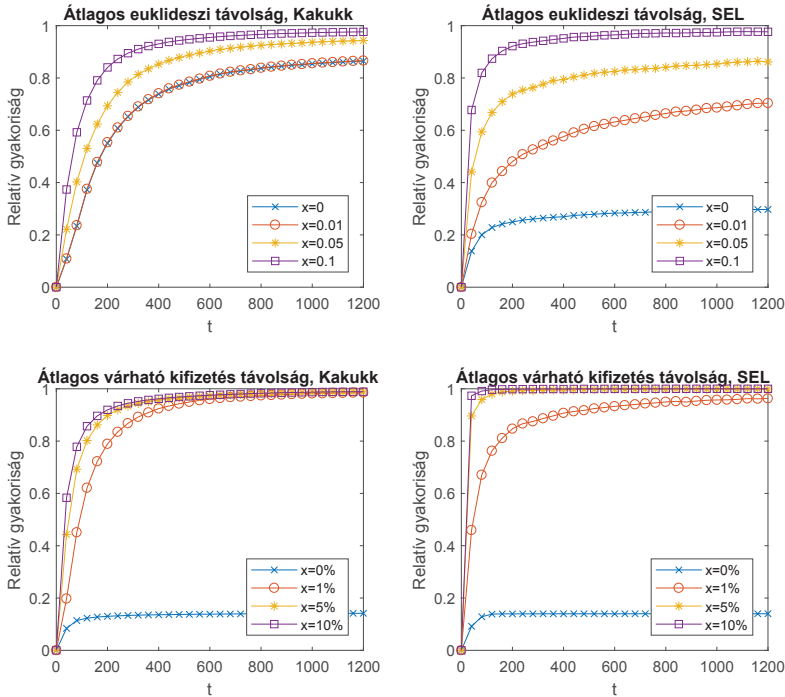
3. ábra. A szimuláció során használt stratégiák és azok rátermettségi értékeinek optimumtól vett távolságainak eloszlása.

Az algoritmus fordulónak függvényében vizsgálva a távolságarányokat, a 4. ábrán azt láthatjuk, hogy átlagosan az utolsó fordulóban tapasztalható távolságarányokat az 500. fordulót megelőzően éri el a Kakukk-algoritmus, innentől kezdve jelentős javulás már nem figyelhető meg. Ugyanez a jelenség a SEL esetén már jóval hamarabb bekövetkezik. Ahhoz, hogy ezt a kérdést alaposabban megvizsgálhassuk, Arifovic és Karaivanov [2010] nyomán

definiálunk egy konvergencia kritériumot. Ha létezik $\tau \in [1; T - L]$, hogy

$$\frac{1}{L} \sum_{t=\tau+1}^{\tau+L} 1 \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 \{ d(b_{i,t}) < x \} \right) > q \right\} > r \quad (20)$$

feltétel teljesül, akkor az algoritmus az adott paraméterek mellett d mérték szerint τ fordulótól (L, q, r, x, d) konvergens. A legkisebb ilyen τ az algoritmus konvergencia-kezdőpontja. Azaz, ha egy futás során létezik egy τ időpont, amit követő L fordulóból álló részsorozatra igaz, hogy a részsorozaton belül több mint a fordulók q százalékában az adott fordulóban szereplő stratégiák r százaléka a d mérték szerint x távolságon belül van az optimumhoz képest, akkor az algoritmus τ lépéstől (L, q, r, x, d) konvergens, és a legkisebb τ a konvergencia-kezdőpont.



4. ábra. A szimuláció során használt stratégiák és azok rátermettségi értékeinek adott távolságon belüli átlagos aránya az egyes fordulóban

A $(200, 90\%, 90\%, x, d)$ konvergencia definíciót használva a szimulációs eredményekre azt kapjuk, hogy az algoritmusok a szimulációk jelentős részében konvergensnek. A Kakukk-algoritmust használó futások 84,84%-ban van olyan 200 forduló hosszú időszak, amikor több, mint 180 fordulóban (90%) legalább 27 stratégia (90%) pontosan az optimális stratégia. Ilyen esetekben az átlagos konvergencia kezdőpont a 474. fordulóban van, azaz az algoritmus már ebben a fordulóban szinte tökéletesen megtanulja az ügynökök hasznossági függvényét és innentől az optimális szerződést ajánlja nekik. A

SEL algoritmust használó futásoknál ugyanez az eredmény már jóval alacsonyabb teljesítményt tükröz, itt mindössze 30,19% a pontosan az optimumba konvergáló futások aránya. A távolság növelésével a SEL algoritmus konvergencia teljesítménye is javul. A kifizetések szempontjából vizsgálva a kérdést a Kakukk-futások 99,45%-ra igaz, hogy létezik 200 hosszú időszak, amikor legalább 180 fordulóban minimum 27 stratégia átlagos kifizetése az optimális várható kifizetés 1%-os környezetén belül van és az átlagos konvergencia kezdőpont a 311. forduló. A SEL esetében ugyanez az arány 96,99%, viszont az átlagos konvergencia kezdőpont itt már csupán a 104. forduló. A további eredményeket a 3. táblázatban foglaljuk össze.

Ezek alapján arra a következtetésre jutunk, hogy ha a pontos optimális stratégia használata különösen fontos, akkor a Kakukk-algoritmus által kijelölt stratégia a célravezető, míg ha konvergencia gyorsasága a fontos, és ezért cserébe megelégszünk egy, az optimális kifizetéstől épp hogy elmaradó stratégiával, akkor a SEL algoritmus nyújt gyorsabb teljesítményt. Az optimális stratégia megtalálása kifejezetten fontos olyan problémák esetén, amikor a célfüggvénynek lokális szélsőértékei vannak, és ilyenkor a Kakukk-algoritmus előnyei hatványozottan érvényesülhetnek.

	(200, 90%, 90%, x, d) konvergens futások aránya, %				Átlagos konvergencia-kezdőpont			
	$x = 0$	$x = 0,01$	$x = 0,05$	$x = 0,1$	$x = 0$	$x = 0,01$	$x = 0,05$	$x = 0,1$
<i>Stratégiák euklideszi távolsága</i>								
Kakukk	84,84	85,02	93,81	98,29	474,14	473,60	413,71	291,10
SEL	30,19	70,72	89,43	98,35	196,50	217,82	126,12	47,20
<i>Várható kifizetés távolság</i>								
Kakukk	14,29	99,45	99,97	99,99	212,60	311,71	217,74	184,24
SEL	13,99	96,99	100	100	19,07	104,33	14,36	3,49

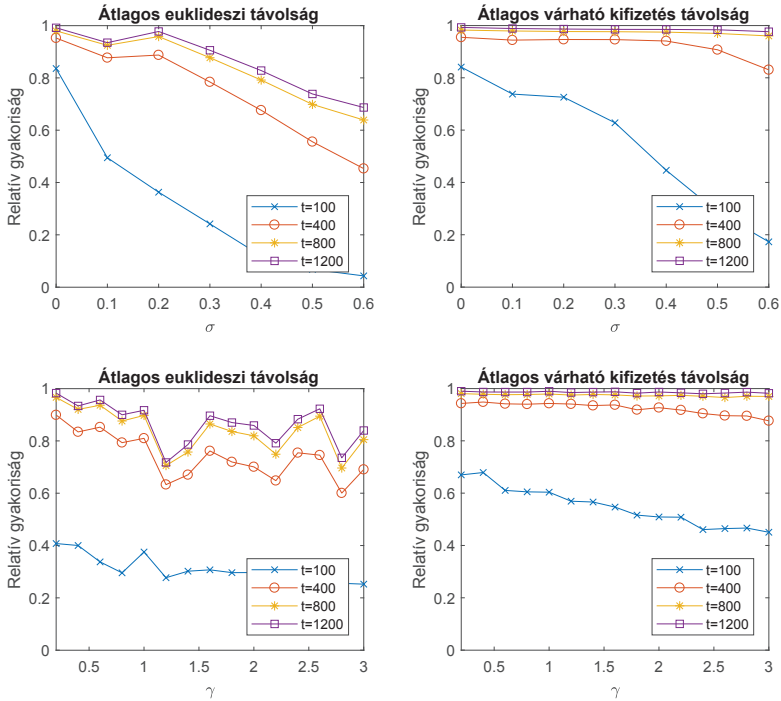
3. táblázat. Konvergens futások aránya (%) és az átlagos konvergencia-kezdőpontok

6 Érzékenységvizsgálat

Ebben a fejezetben az Kakukk-algoritmus robusztusságát vizsgáljuk mind a modellparaméterek (σ, γ), mind pedig az algoritmus paramétereinek (N, J, p, β) függvényében.

Először a modellparaméterekre való robusztusságot vizsgáljuk. Az 5. ábrán az outputra rakódó zaj szórásának függvényében ábrázoljuk az 0,01 illetve 1% távolságon belüli stratégiák arányát a $t = 100, t = 400, t = 800$ és $t = 1200$ fordulókban. Az ábrán azt látjuk, hogy az algoritmus az output szórásának növelésével, mind a négy fordulóban egyre kisebb arányban találja meg az adott optimális stratégiától adott távolságon belüli stratégiákat. Ez azt jelenti, hogy a konvergencia sebessége csökken, akár olyan mértékben is, hogy még az 1200. fordulóban sem konvergál. Mivel az algoritmus a magasabb rátermettségi értékkel rendelkező stratégiákat választja, és a rátermettségi értéket a korábban tapasztalt kifizetésekből számítja, így az átlagos várható kifizetés távolság tekintetében a szórás növelésével a 400. fordulótól az arányok nem változnak, csak a 100. fordulóban, azaz a konvergencia sebessége csökken.

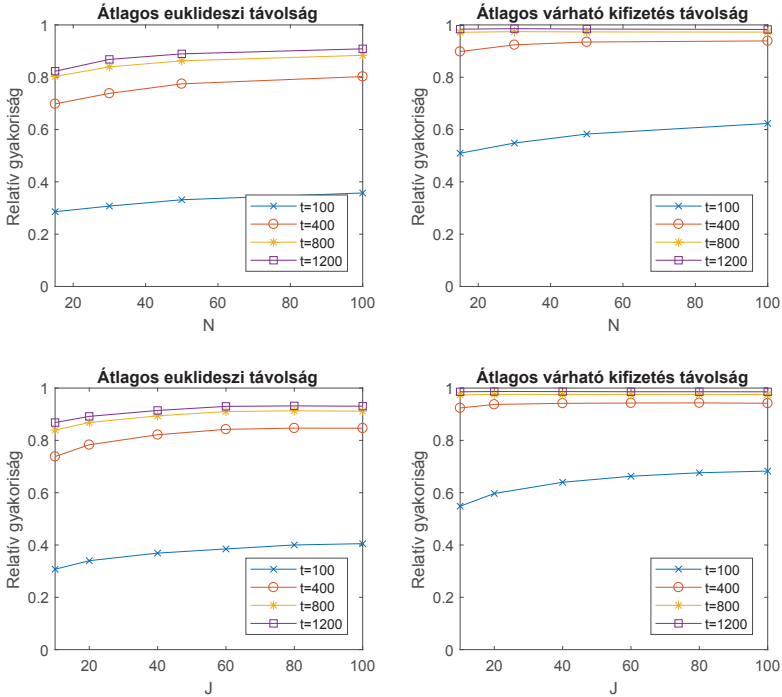
A kockázatelutasítási paraméter (γ) növelésével az arányok nem változnak szignifikánsan az egyes fordulókban, így az algoritmus ezen modellparaméterre robusztus.



5. ábra. A Kakukk-algoritmust implementáló szimulációk során használt stratégiák és azok rátermettségi értékeinek $x = 0,01$ illetve $x = 1\%$ távolságon belüli átlagos aránya az egyes fordulókban különböző σ és γ és a többi paraméter (ld. 1. táblázat) változtatlansága mellett

Az algoritmus paramétereire való érzékenységet vizsgálva előzetesen arra számítottunk, hogy mivel az outputban és ezen keresztül a rátermettségi értékekben megjelenő véletlen zaj szórása rontja az algoritmus teljesítményét, ezért a kijánlott stratégiák számának, illetve az ügynökök számának növelésével pontosabban becsülhető a kifizetés várható értéke valamint a rátermettségi érték, és így az algoritmus teljesítménye javulhat. Azt tapasztaljuk (ld. 6. ábra), hogy ha 15-ről 100-ra növeljük a stratégiák számát (N), azaz $2 \times 15 \times 10 \times 1200 = 360000$ szerződéskötés helyett $2 \times 100 \times 10 \times 1200 = 2400000$ szerződéskötés történik futásonként, akkor az optimumhoz képest 0,01-os környezetben lévő stratégiák aránya körülbelül 10%-kal javul az 1200. fordulóban, míg az átlagos várható kifizetés tekintetében nem történik jelentős változás, az arány 98% fölött marad. A 100. fordulóban az arányok több mint 10%-kal javulnak, és ebből arra következtethetünk, hogy a konvergencia sebessége nő a fordulónként használt stratégiák számának növelésével. Ha az ügynökök számát (J) növeljük 10-ről 100-ra, akkor, bár futásonként majdnem kétszer annyi szerződéskötés történik, mint az előző, $J = 10$, $N = 100$ esetben, javulás az algoritmus teljesítményében mégsem figyelhető meg. További

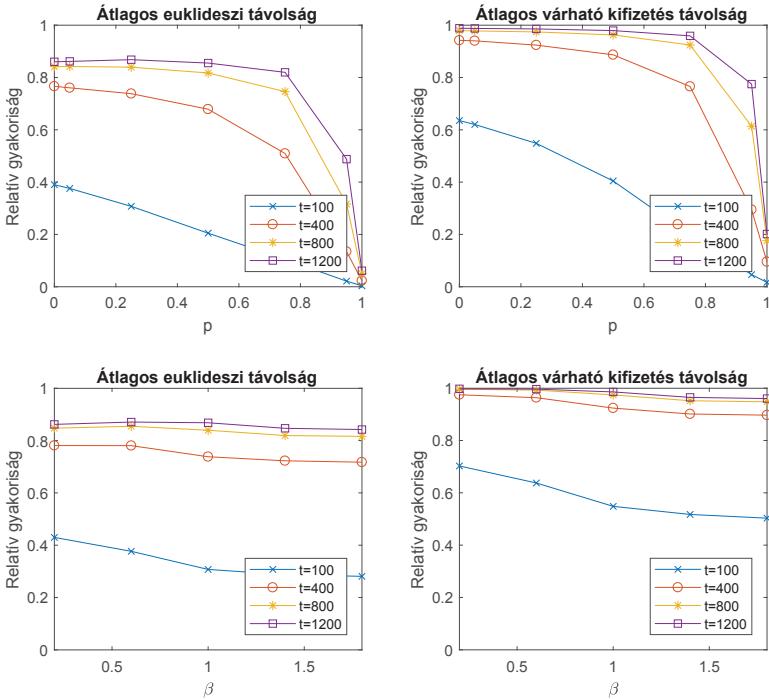
érdeklőség, hogy $J = 60$ -ról tovább növelve az ügynökök számát, jelentős javulás már nem érhető tetten. Ez alapján azt állíthatjuk, hogy mind a fordulónként használt stratégiák számának (J), mind pedig az ügynökök számának (N) növelésével összességében mérsékelt javulást érhetünk el. Azonban, ha az outputra rakódó zaj szórása (σ) nagy, akkor pontatlanabb lesz az output várható értékének becslése, ami meghatározza a stratégiák rátermettségi értékét, így ebben az esetben N és J növelése nagyobb mértékben javíthatja az algoritmus teljesítményét.



6. ábra. A Kakukk-algoritmust implementáló szimulációk során használt stratégiák és azok rátermettségi értékeinek $x = 0,01$ illetve $x = 1\%$ távolságon belüli átlagos aránya az egyes fordulókban különböző N és J és a többi paraméter (ld. 1. táblázat) változtatlansága mellett

Az algoritmus paramétereinek között a kakukktojás felfedezésének valószínűségét változtatva azt találjuk, hogy ennek komoly szerepe van az algoritmus működésében. Ha a valószínűséget $p = 1$ -re állítjuk, azaz a kakukktojást biztos, hogy felfedezik és a $c_{i,t}$, kakukkstratégiákba a (14) képlet alapján mindig a $h_{i,t}$ gazdastatégiák kerülnek és így lényegében nem készülnek valódi kakukkstratégiák, akkor az algoritmus teljesítménye jelentősen romlik (ld. 7. ábra), az 1200. forduló után mindössze a stratégiák 6,13%-a van az optimum 0,01-os környezetén belül és a kifizetéseknél csak 20,15% az 1%-os eredmény. A másik szélsőséges esetben, amikor a valószínűség $p = 0$, azaz a kakukktojás biztos, hogy kikel, az eredmények azt mutatják, hogy az algoritmus a leggyorsabban konvergál, de az euklideszi távolságot tekintve nem a legjobb teljesítmény nyújtja a vizsgált hét paraméterbeállítás közül. Az euklideszi

távolság alapján az 1200 fordulót tekintve a $p = 0,25$ beállítás a legkedvezőbb. A Mantegna Lévy-repülést előállító algoritmusának β paraméterét változtatva az algoritmus teljesítményében kis mértékű változás figyelhető meg, erre a paraméterre az algoritmus kevésbé érzékeny.



7. ábra. A Kakukk-algoritmust implementáló szimulációk során használt stratégiák és azok rátermettségi értékeinek $x = 0,01$ illetve $x = 1\%$ távolságon belüli átlagos aránya az egyes fordulóknak különböző p és β és a többi paraméter (ld. 1. táblázat) változatlanúsága mellett

A Kakukk-algoritmus érzékenységvizsgálatából arra következtethetünk, hogy a modellparaméterek közül az outputra rakódó zaj σ szórásának növekedése, megfelelően az előzetes várakozásoknak (várható érték becslési hibája miatt), rontja az algoritmus teljesítményét, az ügynök kockázatelutasítási γ paraméterének változtatása viszont érdemben nem változtatja meg az eredményeket. Az algoritmus paraméterei közül a fordulónként használt stratégiák N számának és az ügynökök J számának növelésével, bár pontosítható a várható érték becslése, a szimulációkban mégsem figyelhető meg javulás. Ezen paramétereknek zajosabb környezetben lehet jelentősebb szerepük. A kakukktojás felfedezésének valószínűségét szabályozó p paraméter vizsgálatából kitűnik, hogy a $c_{i,t}$ kakukkstratégiáknak lényegi szerepük van. Ha ezt a lépést kihagyjuk a folyamatból, azaz a $p = 1$ paraméterbeállítást választjuk, akkor a teljesítmény drámaian lecsökken. A Lévy-repülést szabályozó β paraméternek mérsékeltbb szerepe van, legfeljebb a konvergencia sebességére van hatással.

7 Összegzés

A dolgozatban a megbízó-ügynök problémát vizsgáljuk egy evolúciós-tanuló algoritmus, a Kakukk-algoritmus segítségével. Az algoritmus teljesítményének mérésére Arifovic és Karaivanov [2010] nyomán felállítunk egy egyszerű lineáris szerződés modellt tartalmazó keretrendszert, ahol a szereplők a szerződés paramétereinek meghatározása és az erőfeszítésszint választásából álló iteratív játékot játsszák. Olyan feltételezésekkel élünk, mint, hogy a megbízó csak lineáris szerződést ajánlhat, kockázatmentes és várható értékben optimalizál, az ügynökök csak az adott fordulót veszik alapul, a saját, azonos hasznossági függvényük alapján optimalizálnak és nem próbálnak komplexebb stratégiát játszani. Többek között nem vesszük figyelembe például azt sem, hogy a folytonos, fordulóról fordulóra történő szerződésmódosítások befolyásolják-e az ügynökök magatartását, és ennek milyen kihatásai vannak a kifizetésre.

Ezen leegyszerűsítő feltételezések mellett a szimulációk alapján azt találjuk, hogy bár a sztochasztikus környezet és a nem folytonos kifizetésfüggvény miatt nehéz dolga van az adaptív tanuló algoritmusoknak, a Kakukk-algoritmus jól implementálható a felállított megbízó-ügynök keretrendszerben. Az algoritmus a korábbi algoritmusoknál gyorsabban éri el a közel százszázalékos eredményt. A modellparaméterek közül a sztochasztikus környezet zajossága az, ami nagyon megnehezítheti az algoritmus dolgát, minél nagyobb a véletlen zaj szórása, a megbízó annál kisebb arányban képes megtanulni az optimális paramétereket. Az ügynökök és a stratégiák számának növelése, azaz az erőfeszítésszint minél pontosabb becslése, egyaránt segítheti az algoritmus teljesítményének javulását. Az algoritmus érzékenységvizsgálatából az is kiderül, hogy az algoritmus egyik lényegi pontja, a kakukkstratégiák előállítása, ami alapjaiban határozza meg az algoritmus működését.

A Kakukk-algoritmus a felállított keretrendszerben leginkább a pontosság, azaz a optimális stratégia pontos megtalálásában nyújt jobb teljesítményt, mint a korábban használt SEL algoritmus, a kifizetés és a konvergencia tekintetében elmarad tőle. A Kakukk-algoritmus diktálta stratégiát játszva kisebb valószínűséggel ragad a megbízó egy szuboptimális stratégiában. Ezek alapján bízhatunk abban, hogy olyan környezetben, ahol a megbízó célfüggvényének lokális szélsőértékei vannak, a Kakukk-algortmust használva a megbízó maximalizálhatja a hasznosságát. Ezen hipotézis vizsgálata későbbi tanulmányok témája lehet.

A szimulációk alapján a Kakukk-algoritmus működhet olyan megbízó-ügynök problémánál, ahol a termelőeszköz tulajdonosa viszonylag sok, hasonló hasznossággal rendelkező ügynöknek tudja felajánlani az eszközt, a termelés gyors, szinte azonnal megállapítható az eredmény, és lehetőség van gyakori szerződésmódosításra. Ilyen gyakorlati alkalmazás lehet az online tartalom-előállítás vagy akár a személyfuvar-közvetítés is.

A. Melléklet

A 2. fejezetben bemutatott megbízó-ügynök keretrendszert és az optimális szerződéses paraméterek levezetését Bolton és Dewatripont [2005] [137-139] nyomán ebben a mellékletben közöljük.

$y(z) := z + \varepsilon$, output

$z \in \mathbb{R}_0^+$, ügynök erőfeszítés szintje

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, véletlen zaj

$\pi(y(z)) := (1 - s) \cdot y(z) + f$, megbízó kifizetése

$s \in [0; 1]$, változó rész

$f \in \mathbb{R}$, fix rész

$c(y(z)) := s \cdot y(z) - f$, megbízó költsége, ügynök kifizetése

$u(z) := -e^{-\gamma \cdot (c(y(z)) - \frac{1}{2} \cdot z^2)}$, ügynök CARA hasznossági függvénye

$\gamma \in \mathbb{R}^+$, kockázatelutasítási paraméter

Ekkor a megbízó feladata:

$$\max_{s, f} (1 - s) \cdot E(y(z)) + f \quad (21)$$

s.t.

$$z = \arg \max_{\hat{z}} E(u(\hat{z})) \quad (\text{ösztönzési korlát IC})$$

$$E(u(z)) \geq u(\bar{w}) \quad (\text{részvételi korlát PC})$$

A feladatot visszafelé oldjuk meg, azaz adott (s, f) párhoz kiszámítjuk az ügynök optimális z^* erőfeszítés szintjét (megoldjuk az IC korlátot), majd ez után optimalizáljuk a megbízó célfüggvényét. Az ügynök várható hasznossága:

$$E(u(c(y), z)) = E\left(-e^{-\gamma \cdot (s \cdot (z + \varepsilon) - f - \frac{1}{2} z^2)}\right) = -e^{-\gamma \cdot (s \cdot z - f - \frac{1}{2} z^2)} \cdot E(e^{-\gamma \cdot s \cdot \varepsilon}) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} E(e^{-\gamma \cdot s \cdot \varepsilon}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma \cdot s \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 + 2 \cdot \gamma \cdot s \cdot \varepsilon \cdot \sigma^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\varepsilon + \gamma \cdot s \cdot \sigma^2)^2 - \gamma^2 s^2 \sigma^4}{2\sigma^2}} d\varepsilon = \\ &= e^{\frac{\gamma^2 s^2 \sigma^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\varepsilon - (-\gamma \cdot s \cdot \sigma^2))^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon}_{=1, \text{ mert } \sim N(-\gamma \cdot s \cdot \sigma^2, \sigma^2) \text{ sűrűségfüggvénye}} = e^{\frac{\gamma^2 s^2 \sigma^2}{2}} \end{aligned} \quad (23)$$

A (22) egyenlőséget tovább folytatva:

$$\begin{aligned} E(u(c(y), z)) &= -e^{-\gamma \cdot (s \cdot z - f - \frac{1}{2} z^2)} \cdot e^{\frac{\gamma^2 s^2 \sigma^2}{2}} = \\ &= -e^{-\gamma \cdot (s \cdot z - f - \frac{1}{2} z^2 - \frac{\gamma}{2} \cdot s^2 \cdot \sigma^2)} = -e^{-\gamma \hat{w}(z)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Az ügynök kockázat egyenértékese:

$$\hat{w}(z) = s \cdot z - f - \frac{1}{2} \cdot z^2 - \frac{\gamma}{2} \cdot s^2 \cdot \sigma^2. \quad (25)$$

Mivel a hasznossági függvény exponenciális alakú, így az ügynök ösztönzési korlátja átírható a következő formába:

$$z = \arg \max_{\hat{z}} \hat{w}(\hat{z}). \quad (26)$$

Ezt maximalizáljuk z -ben, azaz az elsőrendű feltétel (z szerinti parciális derivált):

$$\frac{\partial \hat{w}(z)}{\partial z} = s - z \quad (27)$$

$$z^* = s. \quad (28)$$

Az optimális z^* értéket behelyettesítjük a PC korlátba. Esetünkben az ügynök külső opciójának értéke 0, azaz $\bar{w} = 0$ és mivel az u hasznossági függvény exponenciális (monoton), ezért a PC korlát a következőképpen alakul:

$$s \cdot z^* - f - \frac{1}{2} z^{*2} - \frac{\gamma}{2} s^2 \sigma^2 \geq 0 \quad (29)$$

$$s \cdot s - f - \frac{1}{2} s^2 - \frac{\gamma}{2} s^2 \sigma^2 \geq 0 \quad (30)$$

$$f \leq \frac{1}{2} s^2 - \frac{\gamma}{2} s^2 \sigma^2. \quad (31)$$

A megbízó célfüggvénye, amit maximalizálni szeretne:

$$(1 - s) \cdot s + f = s - s^2 + f. \quad (32)$$

Ez az s -ben másodfokú kifejezés akkor lesz maximális, ha f értéke maximális, azaz a (31) kifejezés egyenlőségre teljesül. Ekkor a célfüggvény:

$$(1 - s) \cdot s + f = s - s^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{\gamma}{2} s^2 \sigma^2. \quad (33)$$

A célfüggvényt deriválva kapjuk az s^* optimális értéket:

$$\frac{\partial((1 - s) \cdot s + f)}{\partial s} = 1 - 2s + s - \gamma \cdot \sigma^2 \cdot s \quad (34)$$

$$s^* = \frac{1}{1 + \gamma \cdot \sigma^2}. \quad (35)$$

Ezt visszahelyettesítve f egyenletébe (31), adódik az f^* optimális érték:

$$f^* = \frac{1 - \gamma \cdot \sigma^2}{2 \cdot (1 + \gamma \cdot \sigma^2)^2}. \quad (36)$$

B. Melléklet

Ebben a mellékletben Arifovic és Karaivanov [2010] nyomán a Social Evolutionary Learning (SEL) algoritmus implementációját részletezzük.

$m := (s; f), s \in S, f \in F$, megbízó által játszott stratégiák a G stratégia-térből

$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$, meghatározza az adott stratégia rátermettségi értékét az adott fordulóban

$y = s + \varepsilon_j$, a j -edik ügynök által megtermelt output

$\hat{\pi} = f + (1 - s) \cdot (s + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varepsilon_j)$, adott stratégiához tartozó átlagos kifizetés

Az algoritmus minden $t = 1, \dots, T$ fordulóban egy N elemű $b \in G^N$ stratégiákat tartalmazó vektorral dolgozik. Első lépésként az előző fordulóban meghatározott $b_{i,t-1}$ stratégiákat $p_{i,t}$ valószínűséggel választja be a $g_{k,t}$ stratégiákba:

$$g_{k,t} := \begin{cases} b_{1,t-1}, & p_{1,t} \\ b_{2,t-1}, & p_{2,t} \\ \vdots & \vdots \\ b_{N,t-1}, & p_{N,t} \end{cases}, \quad (37)$$

ahol adott $b_{i,t-1}$ stratégia beválasztásának valószínűsége a stratégia rátermettségi értékétől függ:

$$p_{i,t} := \frac{e^{\varphi(b_{i,t-1})}}{\sum_{k=1}^N e^{\varphi(b_{k,t-1})}}. \quad (38)$$

Az így kiválasztott $g_{i,t}$ stratégiák helyett μ valószínűséggel az adott $g_{i,t}$ stratégia r_m sugarú környezetéből választja a $h_{i,t}$ stratégiát:

$$h_{i,t} := \begin{cases} g_{i,t}, & 1 - \mu \\ g_{i,t} + r_{i,t}, & \mu, \end{cases} \quad (39)$$

ahol

$$r_{i,t} \sim U[-r_m; r_m]. \quad (40)$$

Végül a megkapott $g_{i,t}$ stratégiákat páronként összehasonlítja a $b_{i,t-1}$ stratégiákkal, és a nagyobbakat választja a $b_{i,t}$ stratégiákba:

$$b_{i,t} := \begin{cases} g_{i,t}, & \text{ha } \varphi(b_{i,t-1}) < \varphi(g_{i,t}) \\ b_{i,t-1}, & \text{ha } \varphi(b_{i,t-1}) \geq \varphi(g_{i,t}). \end{cases} \quad (41)$$

Egy új $b_{i,t}$ stratégia legenerálását tekintjük egy műveletnek. Egy fordulóban a stratégiagenerálás $O(N)$ futási idejű, azaz a stratégiák számának lineáris függvénye.

Ezek után az ügynökök előállítják az outputokat, majd az algoritmus frissíti a rátermettségi értékeket. Ismét egy műveletnek tekintjük egy stratégia

egy ügynöknek történő felajánlását és a rátermettségi érték frissítését a megfigyelt outputtal. Ennek a fázisnak a futási ideje $O(N \cdot J)$, azaz a stratégia- és az ügynökszám szorzatának lineáris függvénye.

Azért, hogy a SEL összevethető legyen a Kakukk-algoritmussal, és a teljesítménykülönbség ne csak a rátermettségi érték pontosabb becsléséből fakadjon (a Kakukk-algoritmus egy fordulóban kétszer ajánl stratégiákat az ügynököknek, és kétszer frissíti a rátermettségi értékeket), egy fordulóban a fenti folyamatot egymás után kétszer futtatjuk le. A SEL algoritmus tanulási stratégiát követve egy forduló futási ideje $2 \cdot (O(N) + O(N \cdot J)) = O(N \cdot J)$, azaz a stratégia- és az ügynökszám szorzatának lineáris függvénye. A futtatási paramétereknek az Arifovic és Karaivanov [2010] tanulmányban legjobb eredményt elérő paraméterbeállításokat használunk. Ezeket a beállításokat a 4. táblázat tartalmazza.³

Paraméter	Érték
<i>Modell</i>	
Kockázatelutasítás paraméter, γ	15 egyenletes távolságú pont a [0,2;3]-ból
Output szórása, σ	7 egyenletes távolságú pont a [0;0,6]-ból
<i>Szimuláció</i>	
Véletlen magok száma, <i>seed</i>	70 egyenletes eloszlású véletlen a [1;10000]-ból
Stratégiatér elemszáma, $ G $	$101 \cdot 56 = 5656$
Rácsfinomság, d	0,1
Fordulók száma, T	1200
<i>SEL</i>	
Stratégiák száma, N	30
Ügynökök száma stratégiánként, J	10
Mutáció valószínűsége, μ	0,05
Mutáció sugara, r_m	0,1

4. táblázat. A referencia szimulációban használt paraméterek és azok értékei

Irodalom

1. Arifovic, J. és Karaivanov, A. [2010] Learning by doing vs. learning from others in a principal-agent model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34(10):1967–1992, . URL <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2010.04.007>.
2. Axelrod, R. [1987] The evolution of strategies in the iterated prisoner’s dilemma. The dynamics of norms, 1–16.
3. Berlinger, E., Lovas, A., és Juhász, P. [2017] State subsidy and moral hazard in corporate financing. *Central European Journal of Operations Research*, 25(4):743–770, URL <https://doi.org/10.1007/s10100-016-0461-8>.
4. Bolton, P. és Dewatripont, M. [2005] *Contract theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. ISBN 978-0-262-02576-8.
5. Camerer, C. és Hua Ho, T. [1999] Experience-weighted attraction learning in normal form games. *Econometrica*, 67(4):827–874. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1468-0262.00054>.

³A szimulációkat a MATLAB R2017a programmal futtatjuk. A kódok elérhetőek a MATLAB közösség fájlcsere oldalán: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/66251-cuckoo-search-learning-strategy-in-the-principal-agent-model>

6. Csóka, P., Havran, D., és Szűcs, N. [2015] Corporate financing under moral hazard and the default risk of buyers. *Central European Journal of Operations Research*, 23(4):763–778. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10100-013-0319-2>.
7. Gandomi, A. H., Yang, X.-S., és Alavi, A. H. [2013] Cuckoo search algorithm: a metaheuristic approach to solve structural optimization problems. *Engineering with Computers*, 29(1):17–35. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00366-012-0308-4>.
8. Holmström, B. és Milgrom, P. [1991] Multitask principal-agent analyses: Incentive contracts, asset ownership, and job design. *Journal of Law, Economics, & Organization*, 7:24–52. URL <http://www.jstor.org/stable/764957>.
9. Kóczy, Á. L. és Kiss, H. J. [2017] Hart és Holmström szerződéselméleti munkássága. *Hitelintézet Szemle*, 16(1):162–174. URL <http://hitelintezetiszemle.hu/letoltes/koczy-a-laszlo-kiss-hubert-janos.pdf>.
10. Layeb, A. [2011] A novel quantum inspired cuckoo search for knapsack problems. *International Journal of Bio-inspired Computation*, 3(5):297–305. URL <https://doi.org/10.1504/IJBIC.2011.042260>.
11. Mantegna, R. N. [1994] Fast, accurate algorithm for numerical simulation of Levy stable stochastic processes. *Physical Review E*, 49(5):4677–4683. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.4677>.
12. Rose, D. és Willemain, T. R. [1996] The principal-agent problem with evolutionary learning. *Computational & Mathematical Organization Theory*, 2(2): 139–162. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00240424>.
13. Roth, A. E. és Erev, I. [1995] Learning in extensive e-form games: Experimental data and simple dynamic models in the intermediate term. *Games and Economic Behavior*, 8(1):164–212. URL [https://doi.org/10.1016/S0899-8256\(05\)80020-X](https://doi.org/10.1016/S0899-8256(05)80020-X).
14. Stiglitz, J. E. [1974] Incentives and risk sharing in sharecropping. *The Review of Economic Studies*, 41(2):219–255. URL <http://www.jstor.org/stable/2296714>.
15. Szabó, G. és Tóke, C. [1998] Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice. *Physical Review E*, 58(1):69. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.69>.
16. Szabó, G., Vukov, J., és Szolnoki, A. [2005] Phase diagrams for an evolutionary prisoner’s dilemma game on two-dimensional lattices. *Physical Review E*, 72(4):047107. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.047107>.
17. Tein, L. H. és Ramli, R. [2010] Recent advancements of nurse scheduling models and a potential path. In *Proc. 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Applications (ICMSA 2010)*, 395–409.
18. Yang, X.-S. és Deb, S. [2009] Cuckoo search via Lévy flights. In *Nature & Biologically Inspired Computing. NaBIC 2009. World Congress on*, 210–214. IEEE, 2009. URL <https://doi.org/10.1109/NABIC.2009.5393690>.
19. Yang, X.-S. és Deb, S. [2014] Cuckoo search: recent advances and applications. *Neural Computing and Applications*, 24(1):169–174. URL <https://doi.org/10.1007/s00521-013-1367-1>.
20. Yang, X.-S., Deb, S., Karamanoglu, M., és He, X. [2012] Cuckoo search for business optimization applications. In *omputing and Communication Systems (NCCCS), National Conference on*, 1–5. IEEE, 2012. URL <https://doi.org/10.1109/NCCCS.2012.6412973>.

CUCKOO SEARCH LEARNING STRATEGY IN THE PRINCIPAL-AGENT
MODEL

In this study we analyze the performance of Cuckoo Search learning algorithm in a principal-agent model. We introduce a standard principal-agent model framework, where the principal can incentivize the agent using output sharing (linear contract) and the moral hazard can be eliminated. In the model the principal knows neither the agent's utility function nor the properties of the stochastic environment, but by iterating the process which consists of contracting, observation of output and update of contract parameters, she can learn and optimize her objective function. We use Monte-Carlo simulations and find that, despite the discontinuous utility function and the stochastic environment, the Cuckoo Search can accommodate to the principal-agent model and find the maximum of principal's utility function more precisely than former algorithms.

Keywords: principal-agent problem, linear contract, repeated game, Cuckoo Search. *JEL codes:* C61, C63, C73, D86

A VALÓS ÉRTÉKELÉS TŐKEPIACI ÉRTÉKÍTÉLETRE GYAKOROLT HATÁSA EURÓPAI NAGYBANKOK RÉSZVÉNYEINÉL¹

TAKÁCS ANDRÁS – SZÜCS TAMÁS
PTE KTK

Jelen tanulmány a valós értékelés tőkepiaci értékítéletre gyakorolt hatását vizsgálja az európai bankszektorban. A szerzők 20 európai nagybank 2006-2015 időszaki adatai alapján vizsgálják meg az eredményesség (EPS) és az egy részvényre jutó saját tőke azonos időszaki részvényárfolyamra gyakorolt hatását, kiemelten a valós értékelésen alapuló számvitel és a bekerülési érték alapú számvitel eltéréseire illetve a 2008-2009-es válság hatására koncentrálva. Az elemzés egyik következtetése, hogy a válságévek a pénzügyi teljesítmény és az árfolyam közti, korábban általános igazságnak tekintett összefüggést eltorzították. Ugyanakkor az elemzést a válság utáni időszakra (2010-2015) leszűkítve szignifikáns kapcsolat mutatható ki a valós értékeléssel meghatározott EPS és az árfolyam között. Mindez arra enged következtetni, hogy normál (válságmentes) üzleti körülmények között a befektetők döntéseiket elsődlegesen a bank nyereségessége alapján hozzák meg, melynek megítélése tekintetében a valós értékelés relevanciája továbbra sem vitatható.

Kulcsszavak: valós értékelés, nettó eredmény, egyéb átfogó eredmény, egy részvényre jutó nettó eredmény (EPS), nettó eszközérték, európai bankszektor, részvényárfolyam. *JEL kódok:* G11, G15, G21, M41

1 Bevezetés

A tőzsdei befektetők a vállalatok által közzétett pénzügyi kimutatások alapján képesek megítélni a vállalat pénzügyi és jövedelmi helyzetét, valamint üzletvitel kockázatát, a vállalati részvények vételére, illetve eladására irányuló döntéseiket az így kialakult értékítéletükre alapozva hozzák meg. A vállalati vagyon és eredmény meghatározása szempontjából nagyon fontos a megbízható, korrekt értékelési mechanizmus kialakítása. Az 1980-as évek közepétől számítva a nemzetközi számviteli rendszerek folyamatosan kezdték leváltani a költségalapú értékelést a piaci alapú értékelésre. *Shaffer (2012)* kiemeli, hogy a pénzpiacok komplex volta miatt egy inflációra hajlamos környezetben a bekerülési érték modell alkalmatlan a megfelelő értékelésre, az információkat

¹Takács András habilitált egyetemi docens, Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar, Pénzügy és Számvitel Intézet, 7622 Pécs, Rákóczi út 80., e-mail: takacsandras@ktk.pte.hu. Szücs Tamás adjunktus, Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar, Pénzügy és Számvitel Intézet, 7622 Pécs, Rákóczi út 80., e-mail: tomi@ktk.pte.hu. A szerzők jelen tanulmányt a Pécsi Tudományegyetem alapításának 650. évfordulója emlékének szentelik. Beérkezett: 2017. szeptember 19.

csak késve képes rögzíteni, ezért a valós értéken (fair value) történő értékelés mellett foglal állást. A valós értékelés szerepe különösen erős a Nemzetközi Pénzügyi Beszámolási Standardokban (International Financial Reporting Standards, IFRS), ami az EU hivatalos számviteli rendszerének tekinthető. A piaci alapú értékelésre történő átmenet folyamatában először csak bizonyos pénzügyi instrumentumok bemutatási modelljének kijavítása volt a cél, majd a valós érték később a pénzügyi instrumentumok domináns mérési eszközévé vált, napjainkban pedig az IFRS-ben már bizonyos nem pénzügyi eszközök, például befektetési célú ingatlanok értékelésére is alkalmazzák (IAS 40). A valós értékelés figyelembe veszi azokat a pénzügyi információkat (a pénz időértékét, a kockázat árát), amelyeket a bekerülési érték modell elutasít. *Barth és szerzőtársai (2012)* szerint, míg a bekerülési érték alapú számviteli gondolkodás nem tudja kezelni a vállalat szempontjából jó, illetve rossz „hír” hatásait, addig a valós értékelés figyelembe veszi ezeket az adott vagyonrész értékének meghatározásakor. A szerzők szerint a valós értékelési modell képes felismerni és mérni a „jó hírben” rejlő potenciált, a magasabb jövedelem, osztalék és menedzsment bónuszok realizálását.

A valós értékelés töretlennek tűnő népszerűsége és elfogadottsága ellen elsőként *Beneish (1999)* emelt szót: érvelése szerint a valós értékelés hatékony eszköze a pénzügyi beszámolók manipulálásának, az egyes vagyonrészek felértékeléséből származó jövedelmek indokolatlan részvényárfolyam-emelkedést vonnak maguk után. Ennek indoklását egy bő évtizeddel később *Shaffer (2012)* fogalmazta meg megfelelően: a valós értékelés csak bizonyos feltételek megléte esetén működhet jól. Aktív, likvid piacok hiányában vagy a piaci krízisek időszaka alatt az értékelés gyakran nem ad objektív, érthető és transzparens eredményt, ami félrevezető lehet a befektetők számára.

A 2008-2009-es pénzügyi válság kirobbanása után számos szakértő készített tanulmányt, melyben a valós értékelés válságban betöltött szerepét vizsgálta. Markánsan két álláspont köré sorakoztak fel az egyes kutatók és gyakorlati szakemberek. Az egyik álláspont szerint a valós értékelés a válság egyik kirobbantója volt, míg a másik álláspont a válság vészjelzőjeként azonosítja ezt az értékelési módszert. *Allan és Carletti (2008)*, valamint *Gorton (2008)* szerint a valós értékelés módszertanának kritikája abban keresendő, hogy egy illikvid piaci környezetben a valós értéket rendkívül nehéz megbecsülni, legtöbb esetben megbízhatatlan eredményt ad. A valós érték tehát a piaci likviditási szint egyfajta mérőszámaként is értelmezhető. További kritikák arra irányultak, hogy valós értékelés mechanizmusa nyomást gyakorolt a pénzügyintézetek számára olyan mértékű értékvesztés elszámolására, melynek eredményeképpen az érintett eszközök jelentősen alulértékeltté váltak (*Gorton, 2008*). Úgy tűnik tehát, hogy a válság számottevően rontotta a valós értékeléssel szemben addig kialakult bizalmat. Ebben az időszakban a hitelek árazási mechanizmusai sem úgy működtek, mint a válságot megelőző években (*Pitz-Scheppe 2013*). Későbbi tanulmányok, mint például *Evans és társai (2014)* viszont arról számolnak be, hogy a válságot követő években a valós értékelés a befektetők döntéseiben ismét releváns tényezővé vált.

Jelen kutatás 20 európai nagybank 2006-2015 időszaki adataira alapozva

vizsgálja meg, hogy statisztikailag is igazolható-e a valós értékelés hitelességének csökkenése a válság időszakában, valamint hogy a válságot követő években valóban visszaállt-e ezen értékelési mód elfogadottsága. Bár számos tanulmány foglalkozott ezzel a témával az utóbbi években, azok jellemzően nem specifikusan a bankszektorra, vagy nem az európai régióra, illetve nem a 2006-2015 időszakra irányultak. A szakirodalom-kutatás során a szerzők nem találtak olyan tanulmányt, amely ugyanilyen mintán hasonló módszerrel vizsgálta volna ezt a kérdést. A szerzők meggyőződése, hogy az elvégzett kutatás új és hasznos empirikus eredményekkel járul hozzá a meglévő – különösen a hazai – szakirodalomhoz.

A cikk további részében először a vonatkozó szakirodalmat tekintjük át, melyet a módszertani háttér bemutatása követ. Mindezek után a megfelelő statisztikai modellek kidolgozása következik, melyet az eredmények ismertetése, a következtetések levonása és a konklúzió követ.

2 Szakirodalmi áttekintés

A témához kapcsolódó első, nagy hatást kiváltó tanulmányok publikálására az 1990-es évek elején került sor, melyekben statisztikailag igazolást nyert a számviteli eredmény és az árfolyam kapcsolata. *Easton, Harris és Ohlson (1992)* mintegy 1000 elemű vállalati mintán mutatott ki szignifikáns együttmozgást az eredmény és a piaci kapitalizáció között, továbbá megállapították, hogy amennyiben nemcsak egy év, hanem több múltbeli év halmozott eredményét alkalmazzák független változóként, akkor az árfolyamra vonatkozó magyarázó erő növekszik. *Graham, Pope és Rees (1992)*, valamint *Harris, Lang és Möller (1994)* is hasonló összefüggést talált a profit és a tőzsdei teljesítmény között német és amerikai vállalatok adatai alapján.

Más szerzők az eredmény abszolút összege helyett különböző számviteli teljesítménymutatókat használtak a részvényár magyarázó változóiként. Több országspecifikus vizsgálat is kimutatta, hogy az egy részvényre jutó adózott eredmény (Earnings Per Share, EPS) jól magyarázza az árfolyamot: *Maditinos és társai (2007)* görög tőzsdei vállalatokat, *Chang és társai (2008)* tajvani cégeket, *Wang, Fu és Luo (2013)* pedig a sanghaji tőzsdén jegyzett vállalatokat elemezve mutatta ki a két változó közti együttmozgást.

Az eredmény-ár viszonyhoz hasonlóan számos kutatás foglalkozott a valós értékelés árfolyam-relevanciájával már az ezredforduló előtt is. *Barth (1994)*, *Bernard és társai (1995)*, *Barth és társai (1995)*, valamint *Barth és Clinch (1998)* tanulmányai egyaránt a valós érték számvitel (Fair Value Accounting, FVA) és a bekerülési érték alapú számvitel (Historical Cost Accounting, HCA) részvényárra gyakorolt hatását hasonlították össze, és egyöntetűen a valós érték számvitel és az árfolyam között mutattak ki szignifikáns együttmozgást. Ugyanezt a kapcsolatot másfél évtizeddel később *Song és szerzőtársai (2010)*, valamint *Li és Kyu (2010)* is kimutatta amerikai illetve kínai vállalatok adatain. *Yao és társai (2015)* ausztrál vállalatok esetében a saját tőkében nyilvántartott átértékelési tartalék jövőbeli hatását vizsgálták.

Eredményeik arról tanúskodnak, hogy a valós értékelésből származó különbsétek leginkább a következő 1-2 év jövedelmét befolyásolják.

A termelő, szolgáltató illetve kereskedelmi vállalatokat vizsgáló tanulmányok mellett szép számmal jelentek meg speciálisan hitelintézetekre, pénzügyi vállalkozásokra koncentrált írások. *Kolev (2008)* amerikai pénzügyi vállalkozások adatait tartalmazó 172 elemű mintán vizsgálta a valós érték különböző modelljeit, és megállapította, hogy a befektetők lényegesen magasabb értéket tulajdonítanak az aktív piacok jegyzett áraiból származtatott értéknek, mint a becsléseken alapuló értéknek. *Sun (2014)* ausztrál bankok adatait vizsgálva megállapította, hogy a valós értékelés hozzájárul a rendkívüli piaci volatilitáshoz, és a megfelelő döntések meghozatala érdekében a befektetőknek meg kell érteniük a valós érték relevanciája és a volatilitás közti trade-offot. *Evans és társai (2014)* összesen 7794 amerikai banki adatra támaszkodva a valós értéken meghatározott eszközérték és az árfolyam között mutattak ki együttmozgást, továbbá arra jutottak, hogy a valós eszközérték jobban magyarázza a jövőbeli árfolyamot, mint az azonos időszaki tőzsdei árat.

Bagna, Martino és Rossi (2014) 120 európai bank 2008-2012 közti adatait feldolgozva, OLS regressziós modell segítségével elemezték a valósérték-hierarchia különböző szintjeinek árfolyamra vonatkozó relevanciáját. A kutatás módszertani háttérét az IFRS 7 standard képezte, amely a valós értéknek három szintjét különbözteti meg. E három szint prioritási sorrendben a következő: teljesen objektív piaci információkon alapuló (Mark to Market), részben piaci információkon alapuló (Mark to Matrix), valamint becslésen alapuló (Mark to Model) valós érték. A szerzők az árfolyam/könyv szerinti érték (P/BV) hányadost vizsgálva megállapították, hogy a Mark to Market érték árfolyamra gyakorolt hatása jóval erősebb, mint a Mark to Matrix vagy a Mark to Model értékéé.

A szakirodalmi áttekintés két fontos kutatási irányt tárt fel. Egyrészt, a számviteli adatok (eredmény, vagyonérték) és az árfolyam közti összefüggést az 1990-es évek óta számos kutatás bizonyította. Másrészt, sok szerző igazolta a valós értékelés szignifikáns hatását a befektetési döntésekre, azon keresztül pedig a részvényárakra. A hivatkozott művek jellemzően nem specifikusan a bankszektorra vagy nem az európai régióra irányultak. Ez alól kivétel *Bagna, Martino és Rossi (2014)* munkája, akik azonban csak egy viszonylag szűk időszakot vizsgáltak, és nem kifejezetten a 2008-2009-es válság alatti illetve utáni állapot összehasonlítását tűzték ki célul. Jelen tanulmány ezt a kutatási rést megcélözva új empirikus eredményekkel szolgál a valós értékelés jelentőségével kapcsolatban.

3 Módszertani háttér

3.1 Valós értékelés és annak hatása az eredményre és a saját tőkére

A valós értékelés egységes kereteit a 2011 májusában kibocsátott IFRS 13 standard fogalmazza meg. A standardban definiált valós érték alkalmazható

a pénzügyi és a nem pénzügyi eszközökre is. A valós érték fogalmát az alábbi módon határozza meg: „az ár, amelyet egy eszköz értékesítésekor kapnának, illetve egy kötelezettség átruházásakor kifizetnének egy piaci szereplők között létrejött szabályos ügylet alapján az értékelés időpontjában.”. Az értékelési eljárás alapján a pénzügyi instrumentumokat két csoportba sorolhatjuk. A kereskedelmi pénzügyi eszközök és kötelezettségek² közé sorolt vagyonelemek valós értékének változásait közvetlenül az eredményben (nyereségként vagy veszteségként) kell elszámolni, így ezek az értékváltozások közvetlenül befolyásolják a vállalat tárgyévi jövedelmezőségét. A valós értéken értékelt pénzügyi instrumentumok másik csoportjába azok a pénzügyi eszközök tartoznak, melyek esetében nem a kereskedelmi jelleg dominál, azonban birtokosuk nem is kívánja a lejáratukig megtartani őket, vagy egyáltalán nem rendelkeznek futamidővel. Ezek az ún. értékesíthető pénzügyi eszközök³. A standard értékelési szabályainak megfelelően az ilyen eszközök kezdeti értékeléskor a bekerülési érték és a valós érték közötti különbözet az eredményben kerül elszámolásra, ugyanakkor a későbbi időszakokban elvégzett felértékeléseket a saját tőkén belül elkülönítetten, átértékelési tartalékként (más néven egyéb átfogó eredményként [Other Comprehensive Income, OCI]) kell megjeleníteni. Az így keletkező felértékelések tehát nem közvetlenül a tárgyévi eredményt, hanem a vállalat nettó eszközértékét (saját tőkéjét) módosítják. Az említett átértékelési tartalék természetesen nem véglegesen képezi a saját tőke részét, azt az eszköz kivezetésekor (például értékesítés esetén) az eredménybe kell átvezetni az IAS 39 standard szerint. Amennyiben az értékesíthető pénzügyi eszközök értékében olyan negatív változás következett be, amely a standardban rögzített, objektív módon bizonyítható, akkor az elszennvedett veszteséget az eredmény terhére, értékvesztésként kell elszámolni.

A fentieket úgy foglalhatjuk össze, hogy *a valós értékelés helyes alkalmazása egyrészt a vállalat tárgyévi eredménykimutatásában megjelenő nettó eredményre, másrészt pedig a mérlegben szereplő saját tőkére gyakorol hatást*. Az eredményhatások az IFRS szerinti eredménykimutatásban elkülönítetten, a „valós értékelésből származó jövedelem” illetve „értékvesztés” sorokon jelennek meg, míg a saját tőkét érintő különbözetelek a saját tőke „átértékelési tartalék” sorában szerepelnek.

Mivel a teszteléshez felhasznált változók definiálásakor jelentősége lesz, a fent leírtak alapján röviden összefoglaljuk, hogy konkrétan mely tételek okoznak eltérést a valós értékelés alapján meghatározott és a bekerülési érték elven kalkulált eredmény és saját tőke között. *A valós értékelés mellett meghatározott nettó eredmény* tartalmazza a kereskedelmi pénzügyi eszközökre és kötelezettségekre a valós érték változása miatt elszámolt, valamint az értékesíthető pénzügyi eszközök kezdeti értékelésekor elszámolt nyereségeket és veszteségeket, továbbá az eszközök leértékelésekor könyvelt értékvesztést.

²Az IFRS 9 standardban foglalt, 2018. január 1. után hatályba lépő besorolás szerint ezen instrumentumok hivatalos megnevezése „eredménnyel szemben valós értéken értékelt pénzügyi instrumentumok” (Fair Value To Profit and Loss, FVTPL).

³Az IFRS 9 standardban foglalt, 2018. január 1. után hatályba lépő besorolása ezen instrumentumokat „az egyéb átfogó eredménnyel szemben valós értéken értékelt pénzügyi eszközöknek” (Fair Value To Other Comprehensive Income, FVTOCI) nevezi.

Így tehát a valós értékelést alkalmazó (IFRS szerinti beszámolóokban közzétett) nettó eredményből a következőképpen vezethető vissza a valós értékelés nélküli (bekerülési érték alapú) eredmény:

$$\begin{aligned}
 & \text{Valós értékeléssel meghatározott eredmény} \\
 & + \text{Értékvesztés} \\
 & - \text{Valós értékelésből származó jövedelem (nyereség/veszteség)} \\
 \hline
 & = \text{Valós értékelés nélküli eredmény}
 \end{aligned}$$

A valós értékeléssel meghatározott saját tőke a hagyományos bekerülési érték alapú értéktől két tételben tér el: magában foglalja az értékesíthető pénzügyi eszközök valós értékének növekedésekor keletkezett halmozott különbözeteket az átértékelési tartalék sorában, valamint az évről évre az eredménnyel szemben elszámolt tételek (nyereségek és veszteségek, értékvesztés) halmozott egyenlegét:

$$\begin{aligned}
 & \text{Valós értékeléssel meghatározott saját tőke} \\
 & - \text{Átértékelési tartalék} \\
 & - \text{Valós értékelésből származó, az eredményben elszámolt tételek halmozott összege} \\
 \hline
 & = \text{Saját tőke valós értékelés nélküli}
 \end{aligned}$$

3.2 Mintavétel és adatforrások

Az empirikus vizsgálat alapját a szerzők saját gyűjtésű panel-adatbázisa képezte, amely 20 európai nagybank 2006-2015 időszaki adatait tartalmazza. A vizsgálandó iparág (bankszektor) kiválasztását több fontos szempont befolyásolta. Egyrészt a bankok által kezelt vagyon döntő részét pénzügyi instrumentumok képezik, amelyek értékelésénél meghatározó a valós érték, így az értékelés eredményre, illetve vagyonra tett hatása e szektorban érhető tetten a legmarkánsabban. Másrészt a bankok a 2008-2009-es pénzügyi válság elsődleges érintettjei voltak, ami lehetőséget ad arra, hogy kimutassuk a válságnak a valós érték relevanciájára gyakorolt hatását. Végül, a banki szabályozás folyamatos szigorodásából kifolyólag a banki pénzügyi kimutatásokban lényegesen több és részletesebb információ áll rendelkezésre – a valós értékkel kapcsolatban is –, mint a termelő, szolgáltató vagy kereskedelmi vállalatok esetében.

Ssz.	Bank neve	Ssz.	Bank neve
1.	Banco Santander Group	11.	ING Group
2.	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria Group	12.	Intesa Sanpaolo Group
3.	Barclays PLC	13.	Lloyds Banking Group
4.	BNP Paribas Group	14.	Natixis Bank Group
5.	Commerz Bank Group	15.	Nordea Bank Group
6.	Crédit Agricole Group	16.	Royal Bank of Scotland Group
7.	Credit Suisse Group	17.	Societe Generale Group
8.	Danske Bank Group	18.	Standard Chartered Plc
9.	Deutsche Bank Group	19.	UBS Group AG
10.	HSBC Holdings	20.	UniCredit Group

1. táblázat. A vizsgálatba bevont európai nagybankok

Az adatbázis kialakításakor az 500 milliárd EUR-t meghaladó mérlegfőösszeggel rendelkező, tőzsdén jegyzett európai bankok közül véletlenszerűen kiválasztottunk húszat, amely megítélésünk szerint jól reprezentálja az európai bankszektort. A mintába került bankokat betűrendben az 1. táblázat mutatja.

A kiválasztott bankok 2006-2015 időszakra vonatkozó IFRS szerinti beszámolóiból legyűjtöttük a mérleg és az eredménykimutatás adatait. Minden esetben a konszolidált beszámolók adataival dolgoztunk, melyek a hitelintézetek saját honlapjain voltak elérhetőek. Valamennyi bank mérleg- és eredményadatait EUR-ban állapítottuk meg. Azokat az adatokat, amelyek más pénznemben kifejezve voltak elérhetőek, az fxtop.com oldalon megtalálható árfolyamok alapján váltottunk át EUR-ra.

Ulbert (2001) szerint a vállalat, illetve annak részvényei értékelésére alapvetően két megközelítés, a hozamérték és a vagyonérték módszer alkalmazható hatékonyan. Ebből kiindulva minden bank minden évre (2006-2015) négy fő pénzügyi teljesítménymutatót határoztunk meg, melyek a regressziós modellekben független változóként szolgálhatnak:

- *EPS valós értékeléssel:* az „alap” egy részvényre jutó eredmény, azaz a tárgyévi eredménykimutatásban kimutatott nettó eredmény és a forgalomban lévő részvények hányadosa.
- *EPS valós értékelés nélkül:* az előző változónak a valós értékelés során elszámolt tételektől megtisztított értéke, azaz a nettó eredmény valós értékelésből származó jövedelemmel csökkentett, valamint az elszámolt értékvesztéssel növelt összege, elosztva a részvények számával.
- *Saját tőke (nettó eszközérték) valós értékeléssel:* a mérlegben kimutatott saját tőke egy részvényre vetített összege.
- *Saját tőke (nettó eszközérték) valós értékelés nélkül:* a saját tőkének az adott év végi átértékelési tartalékkal és valós értékelésből származó halmozott (a vizsgált időszak korábbi éveiben és a tárgyévben összesen keletkezett) eredménnyel csökkentett összege, elosztva a részvények számával.

Az EPS a bank eredményességét méri – az IFRS-ben ez egy külön standard által szabályozott, kiemelt jövedelmezőségi mutató (*Fenyves és társai 2015*), míg a saját tőke a vagyon nagyságot fejezi ki. A fent bemutatott négy teljesítménymutató abból adódott, hogy mind az EPS, mind a részvényegységre jutó saját tőke mutatóját kétféleképpen határoztuk meg: a valós értékelés szabályainak alkalmazásával, illetve azok kizárásával. Ezzel tulajdonképpen a valós érték számvitel (FVA) és a bekerülési érték számvitel (HCA) eltérését ragadtuk meg. Végül e magyarázó változók mellé a mintabeli bankok minden évre meghatároztuk a forgalommal súlyozott éves átlagos tőzsdei részvényárfolyamot, melyhez a shareprices.com oldal szolgált adatforrásként.

Az így összeállított panel minden változójára vonatkozóan ADF (Augmented Dickey-Fuller) tesztet futtattunk a változók integráltságának vizsgálata érdekében. Az ADF tesztek bizonyosága szerint a fent taglalt összes magyarázó változó, valamint az eredményváltozóként alkalmazott részvényárfolyam is stacioner.

3.3 Modellépítés

Az empirikus vizsgálathoz elsőként felírt modell felépítését a felhasznált adatbázis panel-jellege határozta meg. A modell az előző alfejezetben bemutatott négy független változó adott vállalatra és adott időszakra vonatkozó értékeinek és ugyanazon vállalat azonos időszaki átlagárfolyamának kapcsolatát vizsgálja (a vizsgált nagybankok mindegyike negyedévente tesz közzé évközi beszámolót, így feltételezhető, hogy a magyarázó tényezők változásai által generált befektetői válaszlépések éven belül megtörténnek, ezek hatása pedig már a tárgyévi árfolyamokban kifejeződik). Mindemellett az adatbázis előzőekben ismertetett szerkezete alapján feltételezhető olyan meg nem figyelt, bankspecifikus jellemzők jelenléte, melyek bankonként eltérőek, az egyes bankok esetében azonban időben állandóak (vagy legalábbis változásuk nem jelentős). Ezen feltételezést a panelen elvégzett Hausman-teszt is alátámasztotta, ahol a véletlen hatású (random effect) modellek alkalmazhatóságára vonatkozó nullhipotézis 0,0089-es p érték mellett elvetésre került, ami egyben azt is jelenti, hogy a változók közötti kapcsolat jelen esetben állandó hatású (fixed effect) panelmodellel vizsgálható hatékonyan (Kőrösi-Mátyás-Székely 1990). Az eredeti modell tehát az alábbi:

$$P_{it} = \alpha_i + \beta_1 EPS_{it}^{FVincl} + \beta_2 EPS_{it}^{FVexcl} + \beta_3 SE_{it}^{FVincl} + \beta_4 SE_{it}^{FVexcl} + u_{it}, \quad (1)$$

ahol

P_{it} : az i -edik bank t -edik évi súlyozott átlagos részvényárfolyama

EPS_{it}^{FVincl} : az i -edik bank t -edik évi, valós értékelés hatását tartalmazó EPS mutatója

EPS_{it}^{FVexcl} : az i -edik bank t -edik évi, valós értékelés hatásától megtisztított EPS mutatója

SE_{it}^{FVincl} : az i -edik bank t -edik évi, valós értékelés hatását tartalmazó egy részvényre jutó saját tőkéje

SE_{it}^{FVexcl} : az i -edik bank t -edik évi, valós értékelés hatásától megtisztított egy részvényre jutó saját tőkéje

Az (1) modellben kétféle torzító hatás is előállhat, melyeket megfelelő statisztikai módszerekkel szükséges kezelni. Az egyik a tengelymetszet (α_i) által megtestesített bankspecifikus állandó hatás, amely belső („within group”) transzformáció segítségével került kiszűrésre. A transzformáció annyit jelent, hogy az egyes változók eredeti értékeit átalakítjuk oly módon, hogy az adott bankhoz tartozó adott évi érték helyére ezen érték és a változó összes meg-

figyelt időszaki átlagértékének különbségét írjuk:

$$P_{it} - \bar{P}_i = (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) + \beta_1(EP S_{it}^{FV incl} - \overline{EP S}_i^{FV incl}) + \beta_2(EP S_{it}^{FV excl} - \overline{EP S}_i^{FV excl}) + \beta_3(SE_{it}^{FV incl} - \overline{SE}_i^{FV incl}) + \beta_4(SE_{it}^{FV excl} - \overline{SE}_i^{FV excl}) + (u_{it} - \bar{u}_i). \quad (2)$$

Belátható, hogy ennek eredményeképpen az α_i változó eltűnik a modelltől (mivel adott bank esetében időben állandó, transzformált értéke minden időszaki megfigyelésnél nulla lesz). A transzformáció másik fontos következménye, hogy a változók közti összefüggés így már tesztelhető egyszerű legkisebb négyzeteken alapuló (OLS) regresszió segítségével (Pintér–Rappai 2007). Az említett α_i tényező elhagyásával, valamint a szakirodalomban alkalmazott egyszerűsített jelöléssel a (2) egyenlet az alábbi formában is felírható:

$$\ddot{P}_{it} = \beta_1 E\ddot{P}S_{it}^{FV incl} + \beta_2 E\ddot{P}S_{it}^{FV excl} + \beta_3 \ddot{S}E_{it}^{FV incl} + \beta_4 \ddot{S}E_{it}^{FV excl} + \ddot{u}_{it}. \quad (3)$$

A másik lehetséges torzító hatást az időtényező jelenti. Ennek vizsgálata, hogy van-e olyan – a mintában szereplő összes bankot érintő – időbeli hatás, amely hatást gyakorol az eredményváltozóra, ún. idő-dummyk alkalmazásával történhet meg. Amennyiben t időszakra vonatkozó megfigyelésekkel rendelkezünk, akkor $t - 1$ számú dummyra van szükség. Esetünkben ez 10 éves adatsornál 9 dummyt jelent, ezeket a modellben $\delta_{2007}, \delta_{2008}, \dots, \delta_{2015}$ jelöli, ahol δ_j értéke ($j = 2007, \dots, 2015$) a j -edik évi megfigyelések esetében 1, minden más esetben 0. A teszteléssel megállapítható, hogy a dummyk együtthatói szignifikánsan eltérnek-e a nullától. Amennyiben igen, akkor a modellben létezik a függő változót befolyásoló időhatás, míg ellenkező esetben az eredményváltozóra az időtényezőnek nincs hatása. Az empirikus vizsgálathoz felhasznált végleges modellt tehát az alábbi, idő-dummykat is tartalmazó változat képezi:

$$\ddot{P}_{it} = \beta_1 E\ddot{P}S_{it}^{FV incl} + \beta_2 E\ddot{P}S_{it}^{FV excl} + \beta_3 \ddot{S}E_{it}^{FV incl} + \beta_4 \ddot{S}E_{it}^{FV excl} + \gamma_{2007}\delta_{2007} + \dots + \gamma_{2015}\delta_{2015} + \ddot{u}_{it}. \quad (4)$$

Amennyiben a tesztelés során igazolást nyer, hogy az időtényezőnek nincs jelentős hatása, valamint a négy független változó közül legalább egy szignifikánsnak bizonyul, akkor e szignifikáns független változó(k)nak az árfolyamra gyakorolt hatása és magyarázó ereje a megfelelő egyváltozós (transzformált) modell(ek)kel lesz megállapítható:

$$\ddot{P}_{it} = \beta_1 E\ddot{P}S_{it}^{FV incl} + \ddot{u}_{it} \quad (5)$$

$$\ddot{P}_{it} = \beta_2 E\ddot{P}S_{it}^{FV excl} + \ddot{u}_{it} \quad (6)$$

$$\ddot{P}_{it} = \beta_3 \ddot{S}E_{it}^{FV incl} + \ddot{u}_{it} \quad (7)$$

$$\ddot{P}_{it} = \beta_4 \ddot{S}E_{it}^{FV excl} + \ddot{u}_{it} \quad (8)$$

4 Teszteredmények és következtetések

A modellépítésnél leírt gondolatmenetet követve elsőként az eredeti – a (4) formulával felírt – többváltozós modell tesztelését végeztük el a kiválasztott

20 bank 2006-2015 időszakra vonatkozó valamennyi adatát tartalmazó teljes mintán. Az eredmények a 2. táblázatban láthatók.

Modell: (4)				
$n = 200$ (20 bank, 2006-2015)				
Függő változó: \ddot{P}_{it}				
Változó	Koefficiens	Std. hiba	t érték	p érték
$E\ddot{P}S_{it}^{FVincl}$	-32,3613	27,5759	-1,1735	0,2421
$E\ddot{P}S_{it}^{FVexcl}$	24,2789	18,8786	1,2861	0,2000
$\dot{S}E_{it}^{FVincl}$	32,797	19,4303	1,6879	0,0931
$\dot{S}E_{it}^{FVexcl}$	-19,8648	14,0127	-1,4176	0,1580
δ_{2007}	-75,2815	219,563	-0,3429	0,7321
δ_{2008}	-403,543	239,889	-1,6822	0,0942
δ_{2009}	-515,649	228,781	-2,2539	0,0254
δ_{2010}	-438,412	223,553	-1,9611	0,0514
δ_{2011}	-469,544	229,158	-2,0490	0,0419
δ_{2012}	-500,461	230,72	-2,1691	0,0313
δ_{2013}	-451,58	231,556	-1,9502	0,0527
δ_{2014}	-480,021	228,065	-2,1048	0,0367
δ_{2015}	-500,116	227,268	-2,2006	0,0290

2. táblázat. A (4) modell teszteredményei a teljes (2006-2015) mintán

A táblázatból leolvasható egyik fontos információ az, hogy 1%-os szinten egyik idő-dummy sem szignifikáns. Ez alátámasztja azt az előzetes feltételezésünket, hogy a modellben az időtényezőnek a függő változóra vonatkozóan nincs relevanciája, azaz nincs jelen időhatás. Ugyanakkor azt is látni kell, hogy a négy magyarázó változó soraiban sem található egyetlen elfogadható p érték sem, tehát a valós értékelés alkalmazásától függetlenül állítható, hogy a teljes mintán sem az EPS, sem az egy részvényre jutó saját tőke nem képes magyarázni a részvényárfolyamot. Ennek egyik valószínű indoka a 2008–2009-es pénzügyi válság lehet, mely során a fundamentális értékek árfolyamra vonatkozó relevanciája jelentősen csökkent, a részvények árait számos egyéb tényező mozgatta.

Modell: (4)				
$n = 120$ (20 bank, 2010-2015)				
Függő változó: \ddot{P}_{it}				
Változó	Koefficiens	Std. hiba	t érték	p érték
$E\ddot{P}S_{it}^{FVincl}$	22,6395	6,8045	3,3271	0,0012***
$E\ddot{P}S_{it}^{FVexcl}$	-16,6684	6,5415	-2,5481	0,0122
$\dot{S}E_{it}^{FVincl}$	-4,6987	3,6627	-1,2828	0,2022
$\dot{S}E_{it}^{FVexcl}$	2,6037	2,7516	0,9462	0,3461
δ_{2011}	-7,7430	18,7261	-0,4135	0,6801
δ_{2012}	-8,6980	19,3299	-0,4500	0,6536
δ_{2013}	-2,1542	18,9211	-0,1139	0,9096
δ_{2014}	-22,8225	18,6703	-1,2224	0,2242
δ_{2015}	-35,5873	18,9544	-1,8775	0,0631

3. táblázat. A (4) modell teszteredményei a 2010-2015 részmintán

Annak érdekében, hogy e feltételezést alátámasszuk, a teljes mintából kizártuk a válságot megelőző éveket (2006-2007) és a pénzügyi válság éveit (2008-2009), és ugyanezen modellt leteszteltük az így kapott 2010-2015 mintán is. A kapott eredményeket a 3. táblázat mutatja.

Az idő-dummyk jelen esetben is inszignifikánsak, tehát az időtényező hatását itt is kizárhatjuk. A négy magyarázó tényező közül a valós értékelés hatását tartalmazó EPS szignifikánsnak bizonyult, a másik három változó (valós értékelés nélküli EPS, egy részvényre jutó saját tőke a valós értékelés hatásával illetve anélkül) viszont a teljes mintán kapott eredményekhez hasonlóan itt sem mutat ok-okozati kapcsolatot a részvényárral.

Mindebből két fontos következtetést vonhatunk le. Egyrészt az egy részvényre jutó sajáttőke-érték (nettó eszközérték) és a részvényárfolyam között válságmentes időszakban sem mutatható ki kapcsolat. Másrészt viszont a válság évektől megtisztított mintán a valós értékelés hatását tartalmazó EPS szignifikáns magyarázó változója a részvényárnak. Hogy a kapcsolat tényleg túl e változó milyen magas közvetlen magyarázó erővel rendelkezik a részvényárra vonatkozóan, azt az (5) formulával felírt egyváltozós modell tesztelésének eredményei mutatják meg (4. táblázat).

Modell: (5)					
$n = 120$ (20 bank, 2010-2015)					
Függő változó: \dot{P}_{it}					
Változó	Koefficiens	Std. hiba	t érték	p érték	R^2
$\dot{E}PS_{it}^{FV\text{incl}}$	18,1186	5,46247	3,3169	0,0086***	0,057

4. táblázat. Az (5) modell teszteredményei a 2010-2015 részmintán

Az egyváltozós modell eredménye alapján megállapíthatjuk, hogy a valós értékelés hatásának figyelembe vételével meghatározott EPS mutató 5,7%-os R -négyzet mellett képes magyarázni az ugyanazon évi részvényárfolyamot.

A 2010-2015 időszakra leszűkített mintán kapott eredményeket összegezve megállapítható, hogy a kutatásba bevont európai nagybankok részvényei esetében a befektetők döntéseit normál üzleti körülmények között (nem válságidőszakban) a bank jövedelmezősége (EPS) szignifikánsan befolyásolja. A kétféleképpen meghatározott EPS közül a tesztelés során a valós értékelés hatását is tartalmazó érték bizonyult releváns magyarázó változónak az árfolyamra vonatkozóan. A számok tehát arról tanúskodnak, hogy a kritikák ellenére a valós értékelésnek továbbra is kimutatható hatása van az árfolyamok alakulására, ez az állítás pedig annak ellenére megállja a helyét, hogy a vizsgált mintán csak alacsony magyarázó erőt (5,7%) sikerült kimutatni. Az R -négyzet alacsony értéke arra utal, hogy pusztán az EPS alapján előrejelzést készíteni az árfolyamra nem lenne megbízható, hiszen azt sok egyéb tényező is befolyásolhatja. E vizsgálat céljai között azonban nem is szerepelt az előrejelzésre alkalmas modell felépítése, a szerzők a változók közti ok-okozati összefüggés meglétét kívánták bizonyítani, amit az (5) modell 0,01 alatti p értéke alapján sikerült is megvalósítani. A szakirodalomban több olyan jelentős tanulmány is található, amely a változók közti kapcsolatot bizonyítva komoly tudományos áttörést jelentett, miközben a magyarázó erő alacsony

szinten maradt. Egyik példaként említhetjük a már hivatkozott *Easton, Harris és Ohlson (1992)* munkáját, ahol az adott évi eredmény és a következő évi árfolyam közti szignifikáns kapcsolat kimutatása a maga korában úttörő eredménynek számított, miközben az R -négyzet értéke alig 6% volt. Egy másik példa lehet *Darvas és Scheppe (2007)* kutatása, amely a devizaárfolyamok modellezése területén mutatott fel nagy jelentőségű új empirikus eredményeket, modelljeik magyarázó ereje ugyanakkor a különböző devizanemek esetében mindössze 0,5–5,5% között mozgott.

5 Összegzés

Az 1980-as évektől kezdve a hagyományos bekerülési érték alapú értékelés helyét a domináns számviteli rendszerekben folyamatosan vette át a valós értékelés. Különösen igaz ez a Nemzetközi Pénzügyi Beszámolási Standardok (IFRS) szabályrendszerében, amely nemcsak megengedi, hanem az eszközök egy részénél kifejezetten előírja a valós értéken történő értékelést. Ennek alkalmazása mind a mérlegben megjelenő nettó eszközértékekre, mind pedig a tárgyidőszaki eredményre hatást gyakorol: a pénzügyi kimutatásokban szereplő értékek a mindenkor piaci viszonyoknak megfelelő aktuális értéken jelennek meg, ami akár jelentősen eltérhet a költségalapon megállapított értékektől. A 2008-2009-es pénzügyi válságot megelőzően nyilvánvalónak tűnt, hogy a befektetők a valós értékeléssel megállapított értékeket tekintik relevánsnak mind az eszközértékek, mind a vállalat nyeresége esetében. A válság azonban sok tekintetben aláásta az ezen értékelési mód iránti bizalmat, több korábban hivatkozott szerző azonosította a valós értékelést a válság egyik okozójaként. Mindez jogosan vetette fel azt a kérdést, hogy vajon a válság után a valós érték továbbra is ugyanolyan fontossággal bír-e a tőzsdei befektetők szemében, mint a 2000-es évek elején.

Jelen kutatás e kérdésre koncentrált, mely során a szerzők húsz (a beszámolóját IFRS szerint készítő) európai nagybank 2006-2015 időszaki adatait vizsgálták meg azt kutatva, hogy a bankok részvényegységre jutó nettó eszközértéke (saját tőkéje) illetve jövedelmezősége (EPS) – mindkét változó értékeit valós értékeléssel és valós értékelés nélkül is meghatározva – képes-e magyarázni a banki részvények árfolyamát. Az empirikus eredmények alapján igazolódott, hogy válságidőszakban a fundamentális értékek és az árfolyam között a valós értékelés alkalmazásától függetlenül nincs kimutatható ok-okozati kapcsolat. A válságmentes időszakra (2010-2015) leszűkített modelltesztelés során az egy részvényre jutó nettó eszközérték és az árfolyam közti kapcsolat keresése szintén sikertelen volt, ugyanakkor a bank valós értékeléssel meghatározott EPS-e szignifikáns magyarázó változónak bizonyult az árfolyam tekintetében 5,7%-os magyarázó erő mellett. Ez alapján pedig levonható a végkövetkeztetés: bár a 2008-2009-es pénzügyi válság nyilvánvalóan sok mindent megváltoztatott a befektetői magatartást tekintve, *a banki részvények esetében a valós értékelésnek a befektetői döntésekre vonatkozó relevanciája továbbra sem vitatható.* Meggyőződésünk, hogy ez az empiriku-

san igazolt eredmény hozzáadott értéket képvisel, különösen a hazai szakirodalomban, ahol kiterjedt irodalomkutatásunk során nem találtunk hasonló kérdést, hasonló iparági fókusszal és módszerrel vizsgáló írást.

A kutatás korlátai között említhető, hogy az empirikus eredmények szigorúan véve csak a kiválasztott 20 bankra és azok 2006-2015 időszaki adataira vonatkoznak. További korlátot jelenthet a felhasznált minta relatíve kicsi mérete, amely esetlegesen csökkentheti a kapott eredmények relevanciáját a korábban hivatkozott nagymintás vizsgálatokhoz viszonyítva. Mivel azonban a mintában az európai bankszektor jól reprezentáló, vezető szerepet betöltő globális nagybankok szerepeltek, és a 200 elemű minta statisztikai értelemben elegendően nagy ahhoz, hogy a következtetések megbízhatók legyenek, a szerzők meggyőződése szerint a kutatási eredmények általánosíthatók. Mindemellett felvetődhet a kérdés, hogy miképpen módosítaná az eredményeket, ha nemcsak nagybankok, hanem közepes és kis méretű bankok adatai is bekerülnének az adatbázisba, valamint ha a lineáris kapcsolat mellett nemlineáris modellekkel közelítenénk meg a változók közti kapcsolatot. Ezek megválaszolása további kutatás tárgyát képezi.

Irodalom

1. Allen, F., Carletti, E. (2008): Mark-to-Market Accounting and Liquidity Pricing. *Journal of Accounting and Economics*, 45(2-3), 358–378.
2. Bagna, E., G. Di Martino, D. Rossi (2014): *An Anatomy of The Level3 Fair Value Hierarchy Discount*. No 65, DEM Working Papers Series from University of Pavia, Department of Economics and Management. p. 46. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2367405. Letöltés ideje: 2017. január 17.
3. Barth, Gómez-Biscari, Krasznik. López-Espinosa (2012): *Fair Value Accounting, Earnings Management and the use of Available-for-Sale Instruments by Bank Managers*. Working Paper N05/12. Universidad de Navarra. 1–52.
4. Barth, M. (1994): Fair Value Accounting: Evidence from Investment Securities and the Market Valuation of Banks. *The Accounting Review*, January. 1–25.
5. Barth, M. E. and Clinch, G. (1998): Revalued Financial, Tangible, and Intangible Assets: Associations with Share Prices and Non-Market-Based Value Estimations. *Journal of Accounting Research*, 36, 199–233.
6. Barth, M. E., Landsman, W. R. and Wahlen, J. M. (1995): Fair Value Accounting: Effects on Banks' Earnings Volatility, Regulatory Capital, and Value of Contractual Cash Flows. *Journal of Banking & Finance*, 19, 577–605.
7. Beneish, M. D. (1999): The detection of earnings manipulation. *Financial Analysts Journal*, 55, 24–36.
8. Bernard, V. L., Merton, R. C. and Palepu, K. G. (1995): Mark-to-Market Accounting for Banks and Thrifts: Lessons from the Danish Experience. *Journal of Accounting Research*, 33, 1–32.
9. Chang, H. L., Chen, Y. S., Su, C. W. and Chang, Y. W. (2008): The Relationship between Stock Price and EPS: Evidence Based on Taiwan Panel Data. *Economics Bulletin*, 30 (3): 1–12.

10. Darvas Zs., Schepp Z. (2007): Forecasting exchange rates of major currencies with long maturity forward rates. Working Paper 2007/05, Department of Mathematical Economics and Economic Analysis, Corvinus University of Budapest.
11. Easton, P. D., Harris, T. S., Ohlson, J. A. (1992): Accounting Earnings Can Explain Most Of Security Returns: The Case Of Long Event Windows. *Journal of Accounting and Economics*, 15 (2-3): 119–142.
12. Evans, M. E, Hodder, L., Hopkins, P. (2014): The Predictive Ability of Fair Values for Future Financial Performance of Commercial Banks and the Relation of Predictive Ability to Banks' Share Prices. *Contemporary Accounting Research*, 31, 13–44.
13. Fenyves V., Orbán, I., Bács, Z., Böcskei E. (2015): Representation of the going concern concept in the financial statements. *Nauki Finansach* (Financial Sciences), 4 (25): 24–38.
14. Gorton, Gary B. (2008): *The Panic of 2007*. NBER Working Paper No. 14358, September, 1–91.
15. Graham, C. M., Pope, P. F., Rees, W. P. (1992): *The Information Content of German Analysts' Adjustments to Published Earnings*. Working Paper, University of Strathclyde
16. Harris, T. S., Lang, M., Möller, H. P. (1994): The Value Relevance of German Accounting Measures: An Empirical Analysis. *Journal of Accounting Research*, 32(2): 187–209.
17. Kolev, K. (2008). Do investors perceive marking-to-model as marking-to-myth? Early evidence from FAS 157 disclosure. www.kellogg.northwestern.edu/accounting/papers/KalinKolev.pdf Letöltés ideje: 2016. december 7.
18. Kőrösi G., Mátyás L., Székely I. (1990): *Gyakorlati ökonometria*. Budapest: Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 481 p.
19. Li, J., Kyu, P. (2010): The Role of Fair Value Accounting for Investment in Securities: Evidences from the Chinese Stock Exchange Market. *iBusiness*, 2, 409–414.
20. Maditinos, D., Sevic, Z., Chatzoglou, P. and Theriou, G. (2007): Earnings as an Explanatory tool in explaining stock market returns and the use of Easton and Harris (1991) model: The case of Greece. International Scientific Conference, Contemporary Challenges of Theory and Practice in Economics, University of Belgrade.
21. Pintér J., Rappai G. (szerk.) (2007): *Statisztika*. Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar, Pécs
22. Pitz M., Schepp Z. (2013): A banki hitelek árazásának vizsgálata strukturális VAR modell segítségével. *Pénzügyi Szemle* 58(4) 434–447.
23. Shaffer, S. (2012): Evaluating the Impact of Fair Value Accounting on Financial Institutions: Implications for Accounting Standards Setting and Bank Supervision. Federal Reserve Bank of Boston. WPS No. QAU 2012-01, 1–60.
24. Song, C. J., Thomas, W. B., & Yi, H. (2010): Value relevance of FAS No. 157 fair value hierarchy information and the impact of corporate governance mechanisms. *The Accounting Review*, 85(4) 1375–1410.
25. Sun, L. (2014): Fair Value and Its Economic Consequence on the Volatility Measures of Earnings, Stock Price and Government Debt Yield. *Theoretical Economics Letters*. 2014, 4, 910–915.

26. Ulbert J. (2001): *A vállalat értéke*. Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar, Pécs
27. Wang, J., Fu, G. and Luo, C. (2013): Accounting Information and Stock Price Reaction of Listed Companies – Empirical Evidence from 60 Listed Companies in Shanghai Stock Exchange. *Journal of Business & Management*, 2(2): 11–21.
28. Yao, D., Percy, M., Hu, F., Stewart, J. (2015): The Usefulness of Fair Values in Improving the Predictive Ability of Earnings: Evidence from International Banks. In P. de Lange (Ed.), Presented at the 2015 AFAANZ, Hobart, Australia (2015).

THE EFFECT OF FAIR VALUATION ON EUROPEAN LARGE BANKS' STOCK PRICES

This study focuses on the question how stock prices are affected by fair valuation compared to traditional cost-based accounting, also examining the effects of the financial crisis of 2008-2009. The research is based on a database of 200 company-years, containing twenty European financial institutions' data in the 2006-2015 period. Testing results indicate that, by ignoring fair valuation (that is, using cost-based accounting values) and including the crisis years of 2008-2009 in the model, no statistically proven relationship can be shown between financial performance indicators and share prices. However, only using the after-crisis data of the selected banks and applying fair valuation, earnings per share (EPS) becomes a significant explanatory variable for the stock price, which means that, under normal business circumstances, fair value is an important factor in the eyes of stock market actors.

Keywords: fair valuation, net income, earnings per share (EPS), other comprehensive income (OCI), financial institutions, share price

A FOGYASZTÓI TERMÉKVÁLASZTÁS EGYÉNI (AGYI) PREFERENCIAFÜGGVÉNYE¹

VERES ZOLTÁN – TARJÁN TAMÁS
Pannon Egyetem – Budapesti Gazdasági Egyetem

A cikk célja, hogy multidiszciplináris forráselőzmények alapján feltárja az attribútumpreferencia-alapú termékválasztási magatartás egyes matematikai következményeit. A mögöttes preferenciák kinyilvánított preferenciákba történő áttranszformálását az agyi preferenciafüggvénnyel modellezzük. Az agyi preferenciafüggvény eltér a főáramlattól két vonatkozásban. Az egyik az, hogy az összes attribútumhoz rendelünk mögöttes preferenciarangsort, a másik, hogy a rangsorolás itt részbenrendezést is jelenthet. Megmutatjuk, hogy szigorúan tranzitív mögöttes preferenciákból intranzitív kinyilvánított preferenciát is elő tudunk állítani az agyi preferenciafüggvénnyel. A többségi elv alapján a modell nem őrzi meg szükségszerűen a tranzitivitást a mögöttes preferenciákból a kinyilvánított preferenciába való leképezés során. A függvény működésének megértéséhez a kísérletes módszert javasoljuk a kísérleti feltételek olyan manipulálásával, amellyel felerősíthetjük azokat a hatásokat, amelyek a választás inkonzisztenciáját eredményezik. Ilyen manipuláció a termékválasztási teszt leszűkítése a semleges attribútumokra. Egy pilot kísérlet igazolta, hogy a termékválasztás a döntési kontinuumon Markov-lánccal írható le.²

Kulcsszavak: termékattribútum-preferenciák, agyi preferenciafüggvény, termékválasztás, intranzitivitás, döntési kontinuum. *JEL:* A12, C15, C91, D12, M31.

1 Bevezetés

Tanulmányunk a fogyasztói magatartás egyik kulcskategóriájával, a preferenciákkal foglalkozik. A fogyasztó termékválasztását meghatározó preferenciák modellezése és mérése hosszú ideje foglalkoztatja a kutatókat (néhány alapforrás időrendben: Lancaster 1971; Jain, Mahajan és Malhotra 1979; Hauser és Shugan 1980; Walsh és Roe 1987; Moore és Semenik 1988; Srinivasan 1988; Green és Srinivasan 1990; Green, Krieger és Agarwal 1993; Torres és Greenacre 2002; Netzer et al. 2007; Bond, Carlson és Keeney 2008; Scholz,

¹Veres Zoltán, tanszékvezető egyetemi tanár, Pannon Egyetem, Gazdaságtudományi Kar, 8200 Veszprém, Egyetem u. 10. E-mail: veres.zoltan@gtk.uni-pannon.hu. Tarján Tamás, tudományos főmunkatárs, Budapesti Gazdasági Egyetem, Kutatóközpont, 1054 Budapest, Alkotmány u. 9-11. E-mail: Tarjan.Tamas@uni-bge.hu Beérkezett: 2018. február 28.

²Köszönetnyilvánítás: A kutatást az NKFIH az OTKA K 116040 számú alap kutatási pályázat alapján támogatja.

Meissner és Decker 2010; Netzer és Srinivasan 2011). A sokattribútumos fogyasztói döntésekben szabályosságok és szabálytalanságok egyaránt megfigyelhetők. A témával foglalkozó különböző elméleti megközelítések erős versenyben vannak egymással, azonban egyik sem vált meghatározóvá [lásd Russel (2014) áttekintő cikkét a márkaválasztásról]. Szükség lenne tehát egy olyan konszenzusos matematikai modellre, amely a választás jelenségét a lehető legjobban általánosítva írja le. Tanulmányunk célja, hogy hozzájáruljunk az attribútumpreferencia-alapú termékválasztási magatartás egyes matematikai következményeinek feltárásához. Ehhez – szakítva a leegyszerűsítő modellekkel – meg kell értenünk a döntés valós természetét. Érvelésünkben a fogyasztói magatartás kutatói mellett mások javaslatait is figyelembe vesszük [így például Hastie (2001) döntéseméleti elemzését a hagyományos modellek kiterjesztéséről].

2 Multidiszciplináris forráselőzmények

A fogyasztói preferenciákat elsőként a *mikroökonómia* írta le. Ezekben a modellekben a hasznossági szintek fogyasztói megítélése a preferencia alapinformációja, és a választás a maximális összhasznosság elérésén alapul a költségvetési korlát figyelembe vételével. A mikroökonómiai modellek mindazonáltal számos megszorítást tartalmaznak. A racionális preferencia például feltételezi a teljességet és a tranzitivitást. Teljesség alatt azt értjük, hogy a fogyasztó bármely két jószágkészletet képes összehasonlítani, míg a tranzitivitás azt jelenti, hogy létezik a jószágoknak egy egyértelmű, ellentmondásmentes rangsora. Már ezek a megszorítások is kezelhetetlen egyszerűsítéseknek minősülnek egyes más tudományterületeken.

Maradva még a mikroökonómia területén hivatkozunk Samuelson (1938; 1948) érvelésére, amely szerint a fogyasztó magával hozott *mögöttes preferenciáiról* lehetnek feltételezéseink, mérni azonban csak a fogyasztó piaci viselkedésének megfigyelésével azonosított *kinyilvánított preferenciákat* tudjuk. Amartya Sen 1973-as cikkében annyiban finomítja Samuelson álláspontját, hogy a mögöttes és a kinyilvánított preferenciák közötti kapcsolatot árnyaltabbnak, sőt korlátozotttnak gondolja. Hastie kérdésvetése (2001, 667) indokolt: „Amennyiben a preferenciák közvetlenül nem vezethetők le az elvárt hasznosságokból, mi legyen helyette a megoldás?”

A *fogyasztáspszichológiában* némiképp hasonlóan a mögöttes preferenciákhoz Simonson (2008a, 2008b) olyan ún. inherens preferenciákat feltételez, mint a kinyilvánított értékítélet előzményei, amelyek a jelenlegi technikákkal nem mérhetőek, létezésük csak a hatásukkal azonosítható. Mivel az inherens preferenciák mélyen gyökereznek, kontextustól függetlenek, így stabilabbak, és az értékítéletben domináns szerepük van. A fogyasztók a vásárlási döntést megelőzően már rendelkeznek egy felépített preferenciarendszerrel (lásd a mögöttes preferenciákat), az időtényező miatt azonban a *preferenciarendszer változása nem zárható ki* (Bettman, Luce és Payne 1998). A változást magyarázhatják különböző stimulusok és/vagy információk. A közgazdaságtan

preferenciafelfogásával szemben a pszichológia egyes outputokat úgy értelmez, mint bizonyítékot az instabil vagy (korábban) nem létező preferenciákra (Hastie 2001, 667).

A *döntéstudomány* is foglalkozik a vásárlási döntéssel (Payne et al. 1992; Keeney és Raiffa 1993). Greifeneder, Bless és Tuan Pham (2011) úgy érvelnek, hogy a termékek megítélése interakció az intuitív és az analitikus információk között. Sokszor a vevő nem elsősorban terméket keres, hanem egy gyors megoldást a problémájára. Ennek egy módja a heurisztika, amely – mint egy intuitív folyamat – jelentős szerepet játszik a döntésben. A duális rendszermodell (Dhar és Gorlin 2013) hidat képez az intuitív (irracionális, inkonzisztens) és a tudatos (racionális, logikus) döntések között, segítve a preferenciarendszer alakulásának megértését. Kahneman (2011) gondolkodási szintjeinek együttműködésére hivatkozva jól látható a kapcsolat a *gazdaságpszichológiával*.

A preferenciakutatáshoz jelentős mértékben hozzájárult a *viselkedéstudomány* és a *szociálpszichológia* is (Egan, Bloom és Santos 2010). Ajzen „A tervezett viselkedés elmélete” című könyvében (1991, 2011) hívja fel a figyelmet arra, hogy az attitűdök és az aktuális viselkedés között jelentős eltérések lehetnek. Hivatkozhatunk itt az ún. attitűd-viselkedés gap-re (Boulstridge és Carrigan 2000, Papaoikonomou, Ryan és Ginieis 2011) vagy a szándék-viselkedés gap-re (Carrington, Neville és Whitwell 2010). Nem mellesleg a választás bizonyos esetekben (pl. konfliktusos attribútumok) egyáltalán nem optimalizálható (Cho, Khan és Dhar 2013). E modellek mellett meg kell említeni a fogyasztói magatartásra irányuló szociológiai kutatásokat (Chatzidakis, Hibbert és Smith 2007; Chatzidakis és Lee 2013). Témánk szempontjából különösen érdekes az etikus fogyasztás vizsgálata (Papaoikonomou et al. 2011). Eszerint a fogyasztás nem egy egyszerű racionális döntés, hanem társadalmi normák is befolyásolják. Ebből vezethető le az ún. fogyasztói ellenállás, amely egyes termékattribútumok diszpreferenciáját jelenti.

Beshears és tsai (2008) vizsgálták azokat a tényezőket, amelyek magyarázatot adhatnak a mögöttes- és a kinyilvánított márkahasznosságok között tatóngó résre, úgymint a döntés összetettsége, a korábbi tapasztalatok korlátozó hatásai, a külső marketingingerek vagy az intertemporalitás (lásd még Platz és Veres 2014). A preferenciamodell akkor általánosít, ha képes kezelni a fogyasztói preferencia összes lehetséges sajátságát. Ezek a sajátságok befolyásolják a fogyasztó termékválasztását, meghatározó vagy moderáló értelemben. Ilyen sajátságoknak véljük a közömbösséget, az attribútumsúlyokat vagy fontosságokat, hasznossági intervallumokat, az instabilitást, a tanulási tapasztalat hatását, az attribútum bonyolultságát és a hibrid fogyasztói magatartást. Ezek a dimenziók játszanak szerepet a döntésben, változó intenzitással és számos átfedéssel. A fenti preferencia-sajátságok közös jellemzője, hogy képesek finomítani a választás magyarázatát, szemben a leegyszerűsítő hasznossági megközelítéssel.

Végül megjegyezzük, hogy az utóbbi évtizedben az *idegtudomány* (*neuroscience*) is sok új eredményt produkált a fogyasztók preferenciaalapú választásának feltárásával (e.g. Yoon et al. 2012 vagy Diederich és Oswald 2014).

„Ma az egyik legizgalmasabb kérdés az idegtudomány, a pszichológia és a közgazdaságtudomány számára az, hogy az emberi agy milyen módon hoz létre preferenciákat és hogyan választ?” – ahogy Dolan és Sharot (2012) fogalmaznak. Ez is azt támasztja alá, hogy a preferenciakutatásban új eredmények a multidiszciplináris megközelítésektől várhatóak.

Végül említsük meg, hogy a választási inkonzisztencia témakörében hazai előzmény például Koltay és Vincze és tanulmánya (2009), amely többek között a döntési hibából származó inkonzisztenciát és egyes preferencia-eltérítő hatásokat vesz górcső alá. Bölcskei (2009) a fogyasztói preferenciák változásait intertemporális döntésekben vizsgálja, Selei (2012) a preferenciatorzulások pszichológiai hátterét elemzi, míg Hlédik (2015) a preferenciák instabilitásának empirikus kutatásáról közölt a témát átfogóan elemző cikket.

3 Egy javaslat: az egyéni (agyi) preferenciafüggvény

Az első lépés az, hogy leírjuk a kapcsolatot – egy általános matematikai keret feltételei mellett – a *mögöttes* és *kinyilvánított preferenciák* között, feltéve, hogy nemcsak egy, hanem több *mögöttes preferencia* van. Annyi, amennyi az n tárgy/alternatíva figyelembe veendő attribútumainak a száma. A fogyasztók választási döntéseinél ezek az alternatívák jelentik a termék változatait, és a mögöttes preferenciák tükrözik vissza az attribútumok összehasonlító (azaz relatív) hasznosságát. A modell matematikailag megegyezik a döntés- és szavazáselméletben jól ismert aggregálási problémával, amelyben egy rangsort kell előállítani több rangsorból, újszerűsége az, hogy a fogyasztó mögöttes preferenciáit a hagyományos vektoros értelmezéssel szemben többdimenziós mátrixformában képzeljük el. Feltételezzük, hogy a fogyasztók agya rendelkezik egy mögöttes preferencia-értékkel/rangsorral az összes k attribútum esetén: $[u_{ij}]_{n \times k}$. Ami az u hasznosság értéktartományát illeti, ordinális hasznosság esetén alkalmas egész számot jelent, míg kardinális hasznosság esetén u bármilyen valós szám lehet. Mindazonáltal az az álláspontunk, hogy csak az attribútumváltozatok ordinális rangsora a releváns. Végül az alany agya csak egy preferencia értéket/rangsort „aggregál” belőlük, amit általában *kinyilvánított preferenciának* nevezünk: $[r_i]_{n \times 1}$. Mind a *mögöttes*, mind a *kinyilvánított preferenciák* esetén feltételezzük, hogy azok *részenrendezések* (vagy a gráfelmélet nyelvén megfogalmazva *transzitiv irányított gráfok*). A leképezés képletben az alábbi:

$$B : \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i1} & \cdots & u_{ij} & \cdots & u_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nj} & \cdots & u_{nk} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} .$$

A fenti elrendezésben az alany n objektumra vonatkozó *mögöttes pre-*

ferencia értéke/rangsorszám a j -edik attribútumnak megfelelő j -edik (u_j) oszlopvektorban található, amelyből az alany agya állít elő egy (r) *kinyilvánított preferencia* érték/rangsor-vektort egy B mátrix \rightarrow vektor leképezés által. Jegyezzük meg, hogy a mögöttes preferenciák kinyilvánított preferenciákba történő áttranszformálásának modellezésével a fenti ún. agyi preferenciafüggvény³ pusztán egy matematikai leképezést jelent anélkül, hogy megmagyaráznánk azt (Veres és Tarján 2017). Hangsúlyozzuk tehát, hogy célunk nem a leképezés konkrét formulaszerű definiálása, ugyanis az egyértelműen nem kvantifikálható. Koncepciónk az, hogy a kutatók feladata, hogy egy multidiszciplináris keretben feltárják/leírják az agyi preferenciafüggvény működését különféle helyzetekben. Így például a fogyasztói választási feladatok megoldásának idegtudományi (neuroscience) kísérleti eredményei közelebb vihetnek a leképezés feltárásához annak szerény kvantifikálhatóságával.

3.1 Intranszitivitás az agyi preferenciafüggvénnyel kapcsolatosan

Az agyi preferenciafüggvény eltér a főáramlattól két fontos vonatkozásban. Az egyik az, hogy a *mögöttes preferencia értékelés/rangsor* hagyományos felfogásával szemben, ahol csak egy (aggregált) *preferencia értékelés/rangsorolást* feltételezünk, itt mind a k attribútumhoz rendelünk *mögöttes preferencia értékelés/rangsorolást*, ezzel modellezve a választást megelőző attribútumkonfliktusok lehetőségét. A jóléti közgazdaságtanból ismert Káldor-Scitovsky kritériumok (próbák) és az agyi preferenciafüggvény közötti nyilvánvaló matematikai párhuzamok ellenére esetünkben nem az egyéni preferenciák közösségi szintű aggregálását, hanem az egyén több termékattribútumra vonatkozó mögöttes preferenciáinak egy kinyilvánított preferenciába történő transzformálását modellezzük. Megjegyezzük, hogy ebben a modellben a költségvetési korlát nem jelenik meg. Másrészt a rangsorolás nálunk már nemcsak teljes rendezést, de részbenrendezést is jelenthet. Utóbbi még inkább felveti az *intranszitivitás* megjelenésének kérdését is, mint ahogy azt alább a teljes rendezésre (Tversky 1969) és a többségi szabályra (MR) hivatkozva kifejtjük.

Jegyezzük meg, hogy még ha a B mátrix oszlopai (azaz a *mögöttes preferenciák*) teljes rendezést alkotnak is (vagyis a gráfelmélet nyelvén tranzitív körmérközések), a kinyilvánított preferenciasorrend csak egy irányított gráf. Matematikailag kifejezve a fenti B mátrix \rightarrow vektor leképezés (agyi preferenciafüggvény) nem feltétlenül őrzi meg a tranzitivitást a *mögöttes preferenciáknak* egy *kinyilvánított preferenciába* való leképezése során.

Ennek a megjegyzésnek a fontosságát az adja, hogy – Tversky alapművének köszönhetően – 1969 óta bebizonyosodott, hogy olyan kísérleti helyzetet is létre lehet hozni, amelyben az egyének az intranszitiv preferenciák következetes mintáit nyilvánítják ki (Shafir 2004). Erre a célra Tversky alkalmazza az úgynevezett lexikografikus semiorder modellt (Shafir 2004, 435-448), ahol

³Az agyi preferenciafüggvény kifejezés arra utal, hogy a fogyasztó preferencia-alapú döntése az agyban lejátszódó folyamat eredménye, és azt az agyi kapcsolati mátrix (brain graph) terminus ihlette.

„az ötlet az, hogy az alany az alternatívákat több attribútum dimenzió mentén hasonlítja össze . . . amelyeket fontossági sor/időrendben rangsorol, és egy későbbi dimenziót csak akkor vesz figyelembe, ha minden korábbi dimenzióban még nem tett különbséget a két vizsgált alternatíva között. Más szóval, az alany a dimenziókat lexikografikusan vizsgálja: így ha egy j dimenziót talál, amelyben egy x alternatíva felülmúlja a másik y alternatívát egy ε küszöbértéket meghaladó értékkel, akkor x -et jobbnak nyilvánítja, mint az y -t.” (Manzini és Mariotti 2012, 4)

Nézzük meg egy példán a lexikografikus heurisztika működését:

Termék alternatívák	Dimenziók (attribútumok)	
	I	II
x	2ε	6ε
y	3ε	4ε
z	4ε	2ε

Mivel a Dimenzió I oszlopában – amely elsőbbséget élvez a Dimenzió II-höz képest – az egymást követő alternatívák különbségei nem haladják meg az ε kis küszöbértéket, azaz a termékalternatívák közötti különbség nem észlelhető, a preferencia sorrendben a Dimenzió II érvényesül. Más szóval, egy markánsabb különbség egy kevésbé fontos dimenzióban ellensúlyozhatja, vagy akár le is győzheti egy fontosabb dimenzió ellentétes, kis különbségét. A séma matematikai szimbólumokkal:

Termék alternatívák	Dimenziók (attribútumok)		
	I	II	
x	2ε	6ε	$x > y$
y	3ε	4ε	$y > z$
z	4ε	2ε	$z > x$

$\Rightarrow x > z$

\nLeftarrow

Jelmagyarázat: \nLeftarrow - ellentmondás

Ez azt jelenti, hogy a tranzitivitás sérülhet, ha közömbös párokat is megengedünk. Korábban láttuk, hogy a lexikografikus heurisztika legalább két tulajdonságdimenzió esetén ($k \geq 2$) már működik, mivel prioritási sorrenddel rendelkeznek, így egy későbbi dimenzió csak akkor játszik szerepet, ha a vizsgált két alternatíva között az összes korábbi dimenzióval nem lehetett különbséget tenni. Tehát lexikografikus heurisztika esetén egy prioritási sorrend és az alternatívák megkülönböztetőségének hiánya szükséges egyes dimenzióknál, hogy intranzitivitást tapasztaljunk. Ennek megfelelően az első dimenziónál a preferencia nem teljes, csak részbenrendezés. Az agyi preferenciafüggvény így előállít egy intranzitív kinyilvánított preferenciasorrendet, de mindezt nem tranzitív hármassból. Így még azt nem állíthatjuk, hogy a B agyi preferenciafüggvény nem őrzi meg a tranzitivitást a mögöttes preferenciák kinyilvánított preferenciába való leképezése során.

A *többségi szabályra* alapozva (*Majority Rule*, MR) – mint egy, a demokrácia elméletéből „kölsönvett” elvet – a modell az intranzitív preferenciának nem csak kísérleti, hanem egy elméleti keretét is szolgáltatja (lásd

még Veres és Tarján 2013). Inada 1969-ben a többségi döntések tranzitivitásának feltételeit általános értelemben tárgyalja. Azonban Sen és Patanaik (1969, 178) hangsúlyozta, hogy „a racionális választás problémája nem ugyanaz a probléma, mint a preferenciareláció tranzitivitása, annak ellenére, hogy minden ezzel kapcsolatos vélemény a társadalom számára kizárólag a tranzitív típusú rendezését tartja kívánatosnak”. A többségi szabály (MR) két alternatíva és n attribútum esetére a következőképpen működik: Tegyük fel, hogy a két alternatíva x és y és az attribútumok $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Az i attribútum esetén $x \succ_i y$, azaz az alany x -et választja y -nal szemben, amikor csak az i attribútumot veszi figyelembe. A többségi szabály – amelyet MR -rel jelölünk – azt jelenti, hogy az x és y alternatíva között végül azt választjuk, amelyet több mint az összes N attribútum fele esetén választottunk. Használva az alábbi jelöléseket

$$|\{i \in N : \text{feltétel}\}|$$

„az elemek száma N -ben, amelyre a *feltétel* igaz”, a többségi szabály a fentiek értelmében:

$$|\{i \in N : x \succ_i y\}|/n > 1/2 \Rightarrow x \succ_{MR} y.$$

Az attribútumok, amelyekre nem x -et választottuk: vagy $y \succ_i x$, vagy indifferensek, $x \approx_i y$.

Itt kell megjegyeznünk, hogy már Tversky (1969) azt javasolta, hogy legyen egy preferencia vagy közömbösségi reláció \succsim az alábbi:

$$x \succsim y \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad P(x, y) \geq \frac{1}{2},$$

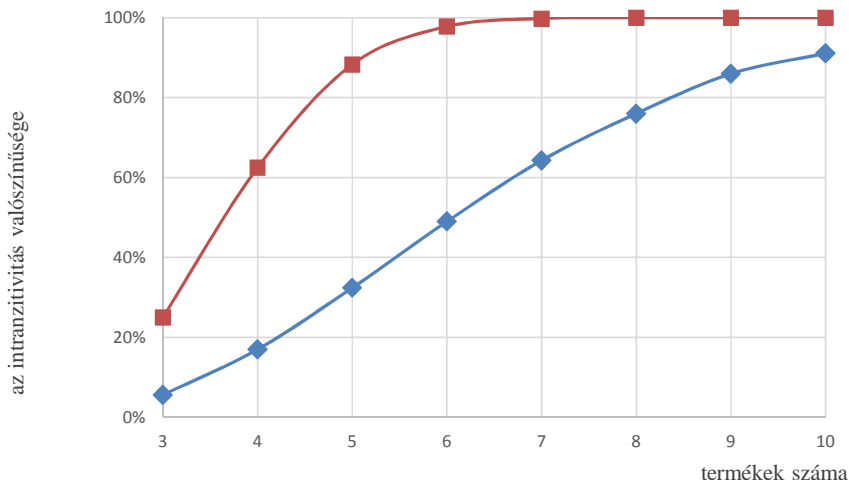
ahol $P(x, y)$ az x -nek y -nal szembeni választásának a valószínűségét jelöli, és $P(x, y) + P(y, x) = 1$.

Tegyük fel, hogy az n páratlan szám, akkor abban az esetben, ha

$$P(x, y) \equiv |\{i \in N : x \succ_i y\}|/n,$$

és nincsenek közömbös $x \approx_{MR} y$ párok, a fenti két reláció (MR és a Tversky által javasolt) egyenértékű.

A többségi szabály alapján intranzitivitást el lehet érni már legalább 3 termék-attribútum esetén (Flood 1980). Másként fogalmazva, amikor n termék 3 különböző tranzitív rendezése esetén az egyén úgy hozza meg a döntését, hogy A jobb, mint B , ha legalább két esetben a három tranzitív termék-rendezésből A jobbnak bizonyul, mint B . Az a kérdés, hogy milyen a tranzitív relációk aránya az összes lehetségeshez (tranzitív + intranzitívak) viszonyítva a többségi szabály esetén n függvényében? Az eredményeket $n = 3$ -tól 10-termékig az 1. ábrán láthatjuk (lásd a vízszintes tengelyt). Az alsó görbe annak a valószínűségét mutatja, hogy a 3-attribútumos tranzitív relációk intranzitív sorrendet okoznak többségi szabály esetén, míg a felső görbe az intranzitív teljes irányított gráfok valószínűségét mutatja (lásd Veres és Tarján 2013).



1. ábra. Az intranszitivitás függvénye a fogyasztói választásban. Forrás: Veres és Tarján 2013

Alapvető kérdés tehát a mögöttes és kinyilvánított preferenciák kapcsolatát illetően, hogy eredményezhetnek-e intranszítív kinyilvánított preferenciákat – és milyen feltételek mellett – a részben vagy teljesen rendezett mögöttes preferenciák. Az intranszitivitás kutatásának szükségességét és problematikáját a lexikografikus heurisztika alkalmazásával Tversky tárgyalta először. Ő részben rendezett mögöttes preferenciákból állított elő intranszítív kinyilvánított preferenciákat. Koncepcióját továbbfejlesztve a többségi szabály segítségével elő lehet állítani intranszítív kinyilvánított preferenciákat is teljesen rendezett mögöttes preferenciákból, bár ez esetben nem 2, hanem 3 attribútummal. Így most már állíthatjuk, hogy szigorúan tranzitív mögöttes preferenciákból – egy evidens elv alapján – intranszítív kinyilvánított preferenciát is elő tudunk állítani az agyi preferenciafüggvénnyel, szemben a Tversky modell gyengébb (részben rendezett) feltételével. Megjegyezzük, hogy a modell erős párhuzamot mutat az Arrow-féle diktátor-elv logikai kontextusával (Arrow 1963).

Mutassuk be a fent említett három attribútum-dimenziós példát, amelyek tehát teljes rendezések, és teljesen egyenrangúak is (azaz nincs köztük semmiféle prioritás). Itt a lexikografikus heurisztika helyett az úgynevezett többségi elvet⁴ használjuk. Nézzük az alábbi mintát [Bilmes és Meila modellje a Condorcet-paradoxon (Condorcet 1785) alapján a többségi szavazásról 2006, 4], ahol minden egyes alternatíva háromból két esetben jobb (2. ábra). A többségi elv feltételei szerint – az esetek nagy többségében (pontosan 2/3-os részesedéssel) – a következő három kinyilvánított preferencia reláció áll fenn, vagyis a ciklikus sorrendben; $x > y$, $y > z$ és $z > x$ teljesül.

⁴A cikkben a többségi elv, többségi szavazás és többségi szabály kifejezéseket szinonimaként használjuk.



2. ábra. A többségi szavazás modellje a Condorcet-paradoxonban. Forrás: Bilmes és Meila 2006

Három egyén tranzitív preferenciája (bal oldali három ábra) többségi szavazat esetén intranszitiv preferenciát (jobb oldali ábra) eredményez. Mind-egyik irányított gráf páronkénti preferenciát ábrázol, ahol a nyíl a kevésbé preferáltból a preferált felé mutat. A korábbi sémával ábrázolva:

Termék alternatívák	Dimenziók (attribútumok)			MR
	I	II	III	
x	a	b	c	$\Rightarrow x > y$
y	b	c	a	$\Rightarrow y > z$
z	c	a	b	$\Rightarrow z > x$ \curvearrowright

Így már állíthatjuk, hogy a mátrix \rightarrow vektor leképezés, B (agyi preferenciafüggvény) nem őrzi meg a tranzitivitást a „mögöttes preferenciákból” a „kinyilvánított preferenciába” $[r_i]_{n \times 1}$ való leképezés során, mert a fenti $x > y > z > x$ intranszitiv ciklust kaptuk⁵. Ennek alapján könnyű létrehozni olyan kísérleti helyzetet, amikor valódi intranszitivitást lehet előállítani. Jegyezzük meg, hogy ha a fenti kinyilvánított preferencia nem rangsor, hanem pontozásos értékelés (rating) és a, b és c tetszőleges valós számok, melyeket rendre az x, y és z alternatívákhoz rendelünk, továbbá ha a B leképezés (agyi preferenciafüggvény) a leggyakrabban használt szabály szerinti súlyozatlan pontösszeg lenne – amennyiben a 3 attribútum-dimenziót teljesen egyenrangúnak tételezzük fel –, akkor a kinyilvánított preferencia eredményeként a leképezés a közömbös hármast x, y és z alternatívát eredményezi. Mind-eközben a fenti „többségi elv” egy szigorúan ciklikus sorrendet eredményezett. Más szóval, a „többségi szabály” feltárja a három alternatíva belső szerkezeti ellentmondását is, míg a pontozás végösszege mindezt összemosza/elfedi [lásd a ciklikus többségi szavazás példáját (Cullis-Jones 2003, 118 vagy Stiglitz 2000, 183-184)].

Az előzőekben a forráselőzmények alapján bemutattuk, hogy két kritikus viselkedő, de egyszerűen értelmezhető termékválasztási stratégia, úm. a lexikografikus, illetve a többségi elv is már eredményezhet intranszitivitást. Ezzel nem állítjuk azt, hogy a fogyasztó választási stratégiája szükségszerűen a lexikografikus vagy a többségi szabályt követi, pusztán azt kívántuk illusztrálni, hogy az intranszitivitás a viszonylag egyszerű választási stratégiáknak is természetes, immanens eleme.

3.2 Markáns és semleges attribútumok

Az agyi preferenciafüggvény működésének megértéséhez – a döntépszichológia tudományos gyakorlatához hasonlóan – a kísérletes módszerek vihet-

⁵Hasonlóan, ahogy az a „kő-papír-olló” (zéró-összegű) játék esetén történik.

nek közelebb. A kísérletekben a mögöttes preferenciákkal „érkező” kísérleti alanyok szimulált vagy valós környezetű termékválasztások során nyilvánítják ki szituatív preferenciáikat. A választási döntés feltételeinek manipulálásával egyrészt csökkenthetjük a kísérleti alanyok mentális terhelését, másrészt felerősíthetjük azokat a hatásokat, amelyek a választás inkonzisztenciáját eredményezik.

Fischer és Iyengar (2000) kutatásukkal egy olyan modellt fejlesztettek ki, amely a sokattribútumos preferencia-bizonytalanság többkritériumos értékelésével kiterjesztette az addigi magatartási modelleket. Az attribútum extremitás hipotézisük azt állítja, hogy a nagyobb attribútum extremitás (magas vagy alacsony attribútum érték) kisebb preferencia-bizonytalanságot eredményez. Ez támasztja alá, hogy – az inkonzisztens választási mechanizmus erősítése érdekében – *vizsgálatunkat a kevésbé extrém, kevésbé markáns, ún. semleges attribútumokra korlátozzuk*. Ennek a megoldásnak „járulékos haszna” a másik oldalról nézve, hogy a magas, illetve csekély attribútumfontosságokból származó döntési evidenciák hatását is kiszűrjük. A kísérlet ilyen manipulálásával a nyilvánvaló választások (azaz a könnyű feladat) gyakoriságát drasztikusan le tudjuk csökkenteni, miután a markánsan különböző attribútumhasznosságok közötti választás kis mentális terhelést jelent, így az egyértelműen, konzisztens módon teljesíthető lenne. Megjegyezzük, hogy a kísérleti pszichológiában a Szabad Választás Paradigmájának esetében is az ún. „choice stage” két semleges alternatíva közötti választáson alapul. Ezek a hasznossági skála középső tartományában helyezkednek el, mint például a Chen-Risen-féle kísérletben (2010). Közgazdaságtudományi párhuzamokra is könnyű rámutatni. Az attribútum-extremitás esete például a Kaldor-Scitovsky próbák modelljében annak az esetnek felel meg, amikor valamely, a közösség egyes tagjainak jólétére ellentétesen ható társadalmi projekt erősen polarizált jövedelemmegoszlási helyzetben tesz lehetővé sikeres kompenzációt a vesztesek érdekében, míg a semleges attribútumok választásakor olyan helyzetről van szó, amikor a társadalmi jólét változását kiváltó, az egyes szereplők helyzetét ellentétes módon érintő projekt következtében az egyéni jólétet befolyásoló tényezőkben csak kis mértékű változás következik be.

Az attribútumok markáns vagy semleges jellege az egyén szintjén a fontosságok értékelésével tárható fel. Ehhez a Q-módszerből, közelebről a kényszerválasztásos Q-rácsból kölcsönözhetjük a módszertant (Stephenson 1953; Brown 1966). A Q-módszernél a válaszadóknak az összes attribútumot be kell vonniuk („rate all”), és minden egyes fontossági szinthez rögzített számú attribútumot kell hozzárendelniük. A különböző fontossági szinten elhelyezett attribútumok száma jellegére nézve a normál eloszlást követi. A fontossági skála a nagyon fontostól a semleges attribútumokon keresztül a legkevésbé fontosig terjed. Ezzel a módszerrel minden résztvevő ugyanannyi semleges attribútum dimenziót fog kiválasztani. Az attribútumok elrendezésére a 3. ábrán látható példa, ahol a leginkább semleges 5 attribútum a rács középső oszlopában látható.

		használat		
		kezelőfelület		
		szórakozás		
	szín	internet	forma	
stílus	kamera	csatlakoztathatóság	vastagság	márka

legkevésbé fontos nem annyira fontos fontos is meg nem is, azaz semleges fontos nagyon fontos

3. ábra. 11-attribútumos Q-rács – egy lehetséges megoldás okostelefonokra. Forrás: saját szerkesztés

A kiválasztott attribútumok eloszlása természetesen kísérleti személyenként eltérhet. Fontos módszertani megoldás lehet, hogy a szubjektív megítélésből származó eltéréseket a számítógépes kísérleti program megőrzi és egyénenként „viszi magával” a következő, szekvenciális páros összehasonlításra alapuló termékválasztási fázisba. A Q-módszer logikájával a szubjektivitás jól megőrizhető, így a hibahatás csökkenthető. Egyértelmű, hogy ez a módszer sokkal realisabb eredményt ad, mint a részeredmények statisztikai összehasonlítása.

3.3 Egy pilot kísérlet

Az inkonzisztens preferenciák méréséhez egy $N = 112$ elemű mintán számítógéppel támogatott pilot kísérletet végeztünk. A résztvevők feladata az volt, hogy egy termékcsoport változatai közötti preferenciáikat szekvenciális páros összehasonlítással nyilvánítsák ki (4. ábra).

Jelölje meg azt a termékváltozatot, amelyiket választaná, ha bármelyiket megkaphatná ajándékba?

Termék A	<input type="checkbox"/>	Használat Multifunkciós	Szín Fekete	Stílus Egyszerű	Vastagság Közepes	Kezelőfelület QWERTY billentyűzet
Termék B	<input type="checkbox"/>	Praktikus, könnyű kezelni Használat	Fekete Szín	Elegáns Stílus	Közepes Vastagság	Érintőképernyő Kezelőfelület

4. ábra. Egy példa a páros összehasonlításokra okostelefon attribútumokkal. Forrás: saját szerkesztés

A páronkénti összehasonlítás a *több-kritérium szerinti döntéshozatal* fontos eszköze (Bozóki, Csató és Temesi 2016). A páronkénti összehasonlításból képzett rangsorok mindenütt megjelennek a modern *gépi tanulási kutatásokban* is. Itt a feladat általában az, hogy kikövetkeztessük az adott objektumok/alternatívák (esetleg inkonzisztens, de) teljes sorrendjét. Fontos megjegyezni, hogy az objektumok/alternatívák számának függvényében az összehasonlítások számának négyzetes alakulása rendszerint lehetetlenné teszi az összes lehetséges pár megmérését (Wauthier, Jordan és Jojic 2013).

A kísérleti alanyainkat tehát arra kértük, hogy például az okostelefon 11 attribútuma közül a szerinte a semlegesnél fontosabb 3-at és a kevésbé fontos 3-at válassza ki, így a középső oszlopban 5 attribútum marad. Majd „megalkotjuk” (a fenti Q-rendezés által) a középső oszlopban – a kísérleti személy által egymás alá helyezett: A1, A2, A3, A4, A5 attribútumok alapján – az elvileg lehetséges $3^5 = 243$ db terméket, mivel minden attribútum esetén 3 (0,1,2) lehetséges szintet, állapotértéket definiáltunk. Ezen 243 elem közül

kiválasztunk 9 db (**R0**–**R8**) reprezentánst úgy, hogy azok egymástól a lehető legtávolabb essenek, és ugyanakkor töltsék ki a lehető „legegyenletesebben” a 243 db elem által alkotott halmazt. Erre azért van szükség, hogy a kísérleti személyek terhelését radikálisan csökkentendő, ne kelljen mind a 243 elemből képezhető párt felmutatni. A távolság két termékváltozat között értelem-szerűen adódik aszerint, hogy az 5 attribútum 5 pozíciójában hány esetben különböznek egymástól az attribútum állapot-értékek. Ezek lehetséges értékei (szintkódok) a fentiek értelmében a 0, 1 vagy 2 lehetnek. A fentieknek eleget tevő 9 reprezentánst könnyen találunk is, lásd pl. az 5. ábrán az (**R0**–**R8**) reprezentáns terméket. Látható, hogy az 5. ábrán látható mátrix bármely két (reprezentáns termékének) sora legalább 3 értékben különbözik egymástól; azaz $d(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) \geq 3$ minden $i \neq j$ esetén, ahol az ún. Hamming-távolságot⁶ d jelöli. Ezután a fenti 9 db (**R0**–**R8**) virtuálisan megalkotott reprezentáns terméket, pszeudo-véletlen sorrendben, páronként ($\mathbf{R}_i \leftrightarrow \mathbf{R}_j$, $i \neq j$) megmutatjuk a kísérleti alanynak, hogy a preferenciája alapján hasonlítsa össze. Összesen $\binom{9}{2}$, azaz $9!/(2!7!) = 36$ ilyen pár létezik. Láthatóan ezzel a megoldással radikálisan csökkent a kísérletben felmutatandó variáns-párok száma.

	A1	A2	A3	A4	A5
R0	0	0	0	0	0
R1	0	1	1	2	1
R2	0	2	2	1	0
R3	1	0	2	2	0
R4	1	1	1	1	2
R5	1	2	1	0	1
R6	2	0	1	1	1
R7	2	1	2	0	0
R8	2	2	2	2	2

5. ábra. A 9 reprezentáns termékváltozat szintkódokkal. *Forrás:* saját szerkesztés

A fentieket összegezve a Q-rendezés a tesztalanyt arra kényszeríti, hogy a 11 attribútum közül a szerinte legfontosabb 3-at és a legkevésbé fontos 3-at válassza ki. A megmaradt 5 tulajdonságból 9 reprezentáns, virtuális terméket „gyártunk”. A vizsgált termék esetén a termékváltozatok közül pszeudo-random sorrendben $\binom{9}{2} = 36$ termékpárt mutatunk be, amelyek esetében a középen maradó 5 semleges attribútumból alkotott reprezentáns elemből bármely kettő legalább 3 attribútumában különbözik. Így ezeket tekinthetjük pszeudo-random pároknak. *Esetünkben a kísérlet ott ért véget, amikor egy résztvevő már minden lehetséges 36 párt összehasonlított.*

A valós döntési mechanizmus egy igen korlátozott időintervallumban, úgy is fogalmazhatnánk, hogy egy „időpontban” és egy tényleges eladáshelyi szituációban/kontextusban, igen összetett módon, számtalan attribútum-észlelési inger hatására történik a vásárló agyában. Ezen nagyon összetett

⁶A Hamming-távolság alatt két azonos hosszúságú bináris jelsorozat eltérő bitjeinek a számát értjük. A fogalmat kiterjeszthetjük két azonos hosszúságú szöveges (alfanumerikus) karaktersorozatra is.

döntési folyamatot kénytelenek vagyunk egy mesterségesen átalakított és időben egymást követő (szekvenciális) lépések sorozatára bontani, vizsgálni és elemezni. Mindazonáltal a szekvenciális termékválasztás nem szokatlan gyakorlat a fogyasztói magatartásban. Jóllehet számtalan olyan gyakorisági heurisztika van, amelyek befolyásolhatják a döntéshozatalt, és azok nem szólnak páros összehasonlításról, a racionális döntések pszichológiai kutatásában gyakran modellezik a preferenciákat páros összehasonlítással. Képzeljük el, hogy a fogyasztó bemegy a boltba, és ott van egy termékből sokféle variáns, különböző attribútum-értékekkel. A rendkívül összetett kínálat értékeléséhez a termékvariánsok szekvenciális összehasonlítására kényszerül a vásárlási döntés előtt, mintegy a mentális folyamat egyszerűsítésére. Hogyan oldja meg a feladatot? Úgy, hogy kezdetben van egy felületes – mondjuk lexikografikus logikájú – előszűrés, amikor egyszerűen kizárja azokat a termékeket, amelyekről biztosan tudja, hogy nem fogja megvenni, például mert soha nem használ olyan márkát. Ezután kezdődik a páros összehasonlítás, amikor már kevesebb attribútummal kell neki dolgoznia, így azt már képes végigkövetni. Ami a páros összehasonlítás életszerűsége mellett szól, az az egyidőben befogadható információmennyiség. Kísérleti modellünkben ez legalább 6 információ [lásd erről Miller (1956) már klasszikusnak számító tanulmányát vagy újabban Cowan publikációit (2001, 2008) a döntési stratégiák információtartalmáról].

A kísérlet végrehajthatósága érdekében a kísérletbe bevonandó termék-attribútumok számát jelentősen redukálni kell, ezekből kell a kísérleti, ún. virtuális termékeket megkonstruálni.⁷ Itt az összes számba jövő attribútum közül a semlegesekre alapozva/fókuszálva történik a redukció, mint ahogy az a szabadválasztás paradigma kísérletes vizsgálat esetén is történik (lásd pl. Chen és Risen 2010). Tehát a semleges tartományba helyezettetre alapozva, azaz a markáns relevancia, illetve irrelevancia tartományába képzeltek el-hagyásával valósul meg a termék-attribútum redukció. A redukált számú attribútumból történik a kísérleti termékek megkonstruálása. A páronkénti összehasonlítások elvégzéséhez még ebben a redukált attribútumszámú esetben sem lehet minden páros összevetést megejteni, ezért itt lényegesen kisebb számú, olyan „konstruált” termékeket kell választani, amelyek reprezentálják az ún. Hamming-távolsággal definiálható metrikus környezetüket, és az általuk reprezentált környezetükkel együtt (halmazunióként) már kiadják az összes lehetséges párt. Az okostelefonos lekérdezés esetén ez konkrétan azt jelenti, hogy az összes lehetséges $\binom{243}{2}$ pár lekérdezése helyett csak 36 reprezentáns pár lekérdezésére van szükség. Lássuk be, hogy 36 pár egymást követő (szekvenciális) lekérdezése is elég nagy mentális feladatot igényel a kísérleti személytől (virtuális vásárlótól). A reprezentatív párok sorrendjét szándékosan úgy választottuk meg, hogy azok pszeudo-véletlen sorrendben kövessék egymást. Ha véletlenszám-generátorra „bízunk volna” az egymást követő 36 pár kiválasztását az összes lehetséges $\binom{243}{2}$ párból, akkor esetleg a 243 elemű tér egyes reprezentánsai nagyon közel, míg egyesek nagyon távolra kerülhetek volna a legközelebbi (Hamming-távolság értelmében vett)

⁷Feltételezve, hogy a fogyasztó döntési stratégiája él az attribútum-redukció eszközével.

szomszédjától. A mi választásunkkal sikerült egy olyan konstrukciót találni, amelyben minden reprezentáns pár legalább három helyen különbözött az öt attribútumában, azaz a Hamming-távolságuk legalább három volt, és így 36 pár elég egyenletesen reprezentálta az összes lehetséges $3^5 = 243$ elemű, 5-hosszúságú és hármass állapotértékű $(0, 1, 2)$ sorozatokból álló teret.

Visszatérve a pilot kísérlethez, kiderült belőle, hogy a mért intranzitív háromszögek számának eloszlása egy $\lambda = 0,153$ paraméterű exponenciális eloszláshoz illeszkedik [tisztá illeszkedésvizsgálat; $\chi^2 = 13,9$; $\chi_{0,05}^2$ (kritikus) = 33,9]. Tegyük fel most, hogy ha az $N = 112$ -elemű kísérlet esetén összesen kapott 575 db intranzitív háromszög az elvileg lehetséges $\binom{9}{3} = 84$ helyre n és p paraméterű $B(n, p)$ binomiális eloszlást követ, akkor ennek empirikus valószínűségi paramétere $p = 575/(112 \cdot 84) = 6,11\%$ és $n = 84$, $\chi^2 = 51,3$, ahol a kritikus érték $\chi_{0,05}^2$ (kritikus) = 33,9. Tehát az illeszkedési (null) hipotézist magas szinten el kell vetnünk. Jegyezzük meg, hogy a kísérletben a maximális gyakoriság az volt, hogy 18-an „hibátlanul” ($p_{k=0} = 18/112$), tehát intranzitív háromszög mentesen teljesítették a tesztet, 10-en csak egyszer „hibáztak” ($p_{k=1} = 10/112$) az összesen 36 lépésben, míg a tisztán binomiális eloszlás esetében ezen két esemény gyakorisága éppen nem a maximumon, hanem a minimális értéken, 0 és 3 között alakul. Tehát *jogos annak a hipotézisnek a felállítására, hogy a kísérleti alanyokat legalább két részre bontsuk, szegmentáljuk: 1) akik nagyon tudatosan átlátják és érvényesíteni tudják döntéseik során az ún. mögöttes preferenciájukat és azokra, 2) akik erre nem nagyon képesek, vagy ha tetszik, nem tartják fontosnak mindezt.*

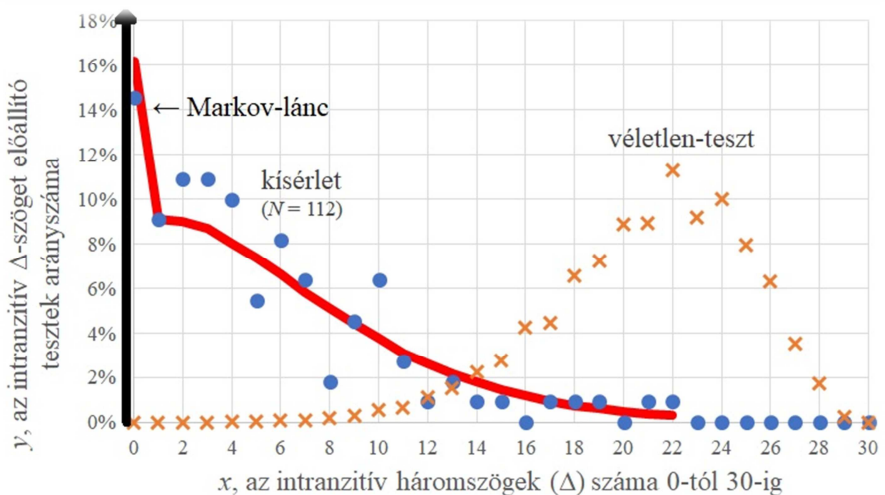
Ennek modellezésére egy nagyon egyszerű sztochasztikus szabályt állítunk fel: egy „hibátlan” lépés után egy kisebb p valószínűséggel tétélezzük fel (engedjük meg) a „hibázást” míg egy „hibás” lépés után megengedőbbek vagyunk, és egy nagyobb q valószínűséggel engedjük meg a „hibázást” (ahol tehát $0 \leq p \leq q \leq 1$). Így nem egy szokásos p paraméterű binomiális eloszlás áll fenn, hanem egy annál kissé bonyolultabb szabályt követünk⁸. A kérdés az, hogy ezzel a modell-módosítással sikerül-e feloldani az ellentmondást, és közelebb kerülnünk a valós empiriához? A binomiális eloszlást kissé általánosító $B(n, p, q)$ két (p, q) -paraméterű matematikai modell, ahol p, q két adott valószínűség ($0 \leq p \leq q \leq 1$). Jegyezzük meg, hogy a binomiális eloszlás fenti kétparaméteres általánosítását stacionárius átmenetvalószínűségű (homogén) Markov-láncként is felfoghatjuk. E modell esetén a két ismert induló relatív gyakoriságból, azaz a $p_{k=0} = 18/112$ és $p_{k=1} = 10/112$ valószínűségből egyszerű algebrai levezetéssel meghatározhatjuk a p és q paramétert. Azt kaptuk, hogy $p = 0,0215$ és $q = 0,710$. Miután kiszámítottuk a modell p és q paraméterét a 112-es kísérlet eredményeiből, a modell sztochasztikus szabályait követve lefuttattunk egy szimulációs számítást (egy milliót is meghaladó esetre), és azt kaptuk, hogy az illeszkedés mértéke itt már igen erős, hiszen az illesztési $\chi^2 = 7,7$ érték jóval kisebb a $\chi_{0,05}^2$ (kritikus) = 33,9 értéknél.

⁸Jegyezzük meg, hogy abban a speciális esetben, amikor $p = q$, akkor a jól ismert $B(n, p)$ binomiális eloszlásról van szó.

3.4 Az eredmények értelmezése

Összegezve megállapítható, hogy a kísérletben kapott intranzitív hármások számának eloszlása jól illeszkedik az exponenciális eloszláshoz. Abból a nullhipotézisből kiindulva, hogy az egy $B(n, p)$ binomiális eloszlást követ, az illeszkedés khi-értéke $\chi^2 = 51,3$, és a kritikus érték $\chi^2_{0,05}(\text{kritikus}) = 33,9$, azt magas szinten el kell vetnünk. Végül, ha egy kétparaméteres (p, q) matematikai modellt – azaz az előbbi binomiális eloszlás némiképp általánosított formáját – alkalmazzuk, ami tulajdonképpen egy stationárius Markov-lánc, azt találjuk, hogy az illeszkedés mértéke nagyon erős, mivel az illeszkedés khi-értéke $\chi^2 = 7,7$ sokkal kisebb, mint a $\chi^2_{0,05}(\text{kritikus}) = 33,9$, azaz a nullhipotézis magas szinten elfogadható.

A fenti elemzés eredményeit ábrázolva a 6. ábrán az intranzitív háromszögek számának gyakoriságfüggvényét (●), és egy „fej-vagy-írásos” ($N = 998400$)-as random-teszt gyakoriságfüggvényének (×) összehasonlítását láthatjuk. A valós ($N = 112$)-es kísérlet gyakoriságfüggvénye (●) tehát a két véglet, a jobb oldali random, ún. „fej-vagy-írásos” teszt gyakoriságfüggvénye (×) és egy bal szélre eső, függőleges nyíllal (↑) ábrázolt elméleti eloszlás között helyezkedik el, amely utóbbi olyan lenne, mintha egyáltalán nem fordulna elő intranzitív háromszög, azaz a számuk mind a 112 esetben azonosan 0, tehát a függőleges nyíl az origóból indulna. Így nemcsak az összes 112 kísérletből a 16,1%-ot jelentő 18 eset, hanem mind a 112, ami 100%-ot jelentene. Másként megfogalmazva, mintha az összes 112 választás – mind a 36 lépésben – teljesen tranzitív módon (azaz intranzitív háromszög mentesen) történt volna. Szemmel láthatóan a tényleges ($N = 112$)-es kísérlet gráfja 5,13-as átlaggal jóval közelebb van az origóban lévő, nullás átlagot jelentő bal oldali végletéhez, mint a jobb oldali (×) 21-es átlagú ún. random gráfhoz. A ● és × gráf a 13 db háromszögnél metszik egymást, azaz itt jól elválasztódnak.



6. ábra. Intranzitív háromszögek számának az ($N = 112$)-es kísérletben és egy „fej-vagy-írásos” ($N = 998400$) random-teszt gyakoriságfüggvényének összehasonlítása. Forrás: saját szerkesztés

A preferencia-alapú döntési kontinuum egyik végpontja tehát azt a tudatos fogyasztót képviseli, aki képes

- teljes mértékben kontrollálni a döntését,
- az attribútum hasznosságok ellentmondásmentes észlelésére,

következésképpen bármely szituációban képes konzisztens, azaz tranzitív döntések meghozatalára (ún. formális racionalitás jellemzi a választást). A kontinuum másik végére azt a fogyasztót helyezzük, aki döntését minden megfontolás nélkül, teljesen random módon hozza meg. Ez utóbbi úgy dönt, mint egy pénzérme feldobásakor a fej-vagy-írás „választásakor”. A valós döntéshozatal, azaz a nem-végeletes magatartás a két végpont között helyezkedik el, és Markov-lánccal írható le. Az elemzés eredményeként megállapítható, hogy a Markov-modell képes – alkalmasan választott két (p, q) paraméter segítségével – két termékválasztási döntési magatartási szegmenst egy modellbe integrálni, és kielégítő módon leírni.

4 Összegzés

A tanulmányban több nézőpontból tárgyalt agyi preferenciafüggvény a fogyasztói preferenciák olyan konzisztens, multidiszciplináris keretét képezi, amely legalább négy tudományterület alapkoncepciójával érintkezik, ún. a mikroökonómia, a kognitív pszichológia, a marketingtudomány és az idegtudomány. Bemutattuk, hogy ezekben a diszciplínákban a preferenciafüggvény fontosabb elemeinek megjelenése és kellően pontos definíciója egy évtizedeken átnyúló fejlődés eredménye. A korai leírások szerint a preferencia a termék fogyasztó általi aggregált értékelése/rangsorolása, és Samuelson (1938) volt az első, aki megkülönböztette a mérhető, ún. kinyilvánított preferenciákat. Jóllehet az agyi preferenciafüggvény attribútum-kombinációk és nem jószág-kombinációk preferenciaviszonyait modellezi, matematikai értelemben ezek izomorfok. Megjegyezzük, hogy Samuelson és követői modelljeiben az intranzitívitás a költségvetési korlát miatt nem is állhat fenn. 35 évvel később Sen (1973) elemezte a mögöttes preferenciák létezését. Ez a nyilvánvalóan hipotetikus feltételezés az utóbbi fél évszázadban nagyon hasznosnak bizonyult az agyunk által indukált termék-értékrangsorolás és a végső választási döntés által kinyilvánított preferencia megkülönböztetésében. A mögöttes preferenciák és a kinyilvánított preferenciák kapcsolatának alapkérdése, hogy a teljesen vagy részben rendezett mögöttes preferenciák vezetnek-e, és ha igen, milyen feltételek mellett, intranzitív kinyilvánított preferenciákhoz. Megjegyezzük, hogy – ahogy azt pilot kísérletünk is igazolta – általánosságban nem állítható a fogyasztói viselkedés inkonzisztenciája (intranztívítása). Szignifikáns arányban tapasztaltuk ugyanis a feladat tranzitív megoldását is.

Tversky (1969) a lexikografikus heurisztikák alkalmazásával tárgyalta az intranzitívitás elemzésének szükségességét. Részben rendezett mögöttes preferenciák segítségével két attribútum esetén tudott intranzitív kinyilvánított preferenciákat előidézni. Így Tversky munkájának köszönhetően igazolható,

hogy létrehozható olyan kísérleti helyzet, ahol a kísérleti alany intranszítív preferenciák konzisztens mintáit nyilvánítja ki. Ezt továbbfejlesztve kimutatható, hogy a többségi szabály alapján, legalább három attribútum esetén teljesen rendezett mögöttes preferenciákból is generálhatók intranszítív kinyilvánított preferenciák.

A Sen-féle mögöttes preferenciák egydimenziós értékek/rangsorok, míg az agyi preferenciafüggvény számos dimenziót megenged, tulajdonképpen annyit, ahány észlelhető és mérhető termék-attribútum számításba vehető. Ebben a modellben a mögöttes preferencia egy általánosabb, sokdimenziós érték/rangsor. Az agyi preferenciafüggvény lehet mind determinisztikus, mind sztochasztikus mapping, más szavakkal a mögöttes preferenciából megnyilvánuló választás természeténél fogva lehet determinisztikus és sztochasztikus.

Kutatásmódszertani nézőpontból megállapítható, hogy a modell működésének vizsgálatához a preferencia-alapú attribútum-választás szimulációja vihet közelebb. Ehhez olyan kísérleti eljárások kidolgozására van szükség, ahol a termékvariánsok összehasonlítását még kezelhető mentális terhelés mellett kell a kísérleti alanyoknak végrehajtaniuk. A multiattributív választási döntések jelentős nehézségei miatt célszerűnek látszik az attribútum-készlet szisztematikus minimalizálása. A cikkben egy ilyen kísérleti manipulációra teszünk javaslatot. Jóllehet a bemutatott kísérlet jól illeszkedik a legújabb kognitív megközelítésekhez (lásd pl. Cowan 2001 és 2008), kontrollkísérletként vizsgálható lenne 3 vagy akár 4 termékvariáns egyidejű összehasonlítása is. Természetesen minden kísérleti modell szimplifikál, egyben működik a kísérlet sajátosságaiból eredő Kahneman-féle keretezési hatás, ezért a jelenség feltárásához minél többféle kísérleti design alkalmazása szükséges. Így például a bemutatott kísérleti modellünk korlátjaként meg kell említenünk, hogy az nem veszi figyelembe a preferenciák intenzitását, azaz kvázi kardinális erőrendjüket (lásd Cullis-Jones 2003, 127). A modell ilyen irányú fejlesztése is egy lehetséges további kutatási irány.

Irodalom

1. Ajzen, I. (1991): The Theory of Planned Behavior, *Organizational Behavior & Human Decision Processes*, 50(2), 179–211.
2. Ajzen, I. (2011): The theory of planned behavior: Reactions and reflections, *Psychology & Health*, 26(9), 1113–1127.
3. Arrow, K. J. (1963): *Social Choice and Individual Values* (2nd ed.), New Haven (CT): Yale University Press
4. Beshears, J., James J. Choi, David Laibson és Brigitte C. Madrian (2008): How are preferences revealed? *Journal of Public Economics*, 92(8-9), 1787–1794.
5. Bettman, J. R., M. F. Luce és J. W. Payne (1998): Constructive Consumer Choice Processes, *Journal of Consumer Research*, 25, 187–217.
6. Birmes, Jeff és Marina Meilă (2006): Intransitive Classification and Choice: A Review, *UWEE Technical Report*, Number UWEE-TR-2006-0021, Department of Electrical Engineering, Seattle: University of Washington

7. Bond, S. D., K. A. Carlson és R. L. Keeney (2008): Generating objectives: Can decision makers articulate what they want? *Management Science*, 54(1), 56–70.
8. Boulstridge, E. és M. Carrigan (2000): Do consumers really care about corporate responsibility: highlighting the attitude-behavior gap? *Journal of Communication Management*, 4(4), 355.
9. Bozóki, S., L. Csató és J. Temesi (2016): An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players, *European Journal of Operational Research*, 248, 211–218.
10. Bölsceki, Vanda (2009): Az intertemporális döntések viselkedési közgazdaságtani modelljeinek áttekintése, *Közgazdasági Szemle*, 56(11), 1025–1040.
11. Brown S. R. (1966): The history and principles of Q methodology in psychology and the social sciences, *Qualitative Health Research*, 6(4), 561–567.
12. Carrington, M., B. Neville és G. Whitwell (2010): Why Ethical Consumers Don't Walk Their Talk: Towards a Framework for Understanding the Gap Between the Ethical Purchase Intentions and Actual Buying Behavior of Ethically Minded Consumers, *Journal of Business Ethics*, 97(1), 139–158.
13. Chatzidakis, A., S. Hibbert és A. P. Smith (2007): Why people don't take their concerns about fair trade to the supermarket: The role of neutralisation, *Journal of Business Ethics*, 74(1), 89–100.
14. Chatzidakis, A. és M. S. W. Lee (2013): Anti-Consumption as the Study of Reasons against, *Journal of Macromarketing*, 33(3), 190.
15. Chen, M. Keith és Jane L. Risen (2010): How choice affects and reflects preferences: Revisiting the free-choice paradigm, *Journal of Personality and Social Psychology*, 99(4), 573–594.
16. Cho, Eunice Kim, Uzma Khan és Ravi Dhar (2013): Comparing Apples to Apples or Apples to Oranges: The Role of Mental Representation in Choice Difficulty, *Journal of Marketing Research*, 50(4), 505–516.
17. Condorcet, N. (1785): *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris: Imprimerie Royale
18. Cowan, N. (2001): The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, 24, 87–114.
19. Cowan, N. (2008): What are the differences between long-term, short-term, and working memory?, *Progress in Brain Research*, 169, 323–338.
20. Cullis, J. és Jones, Ph. (2003): *Közpénzügyek és közösségi döntések*, Budapest: Aula
21. Dhar, R. és M. Gorlin (2013): A dual-system framework to understand preference construction processes in choice, *Journal of Consumer Psychology*, 23(4), 528–542.
22. Diederich, A. és P. Oswald (2014): Sequential sampling model for multiattribute choice alternatives with random attention time and processing order, *Frontiers in Human Neuroscience*, 8(697), doi: 10.3389/fnhum.2014.00697
23. Dolan, Raymond J. és Tali Sharot (2012): *Neuroscience of Preference and Choice. Cognitive and Neural Mechanisms*, Cambridge (MA): Elsevier, Academic Press
24. Egan, Louisa C., Paul Bloom és Laurie R. Santos (2010): Choice-induced preferences in the absence of choice: Evidence from a blind two choice paradigm with young children and capuchin monkeys, *Journal of Experimental Social Psychology*, 46, 204–207.

25. Fischer, Gregory W., Jianmin Jia és Mary Frances Luce (2000), Attribute Conflict and Preference Uncertainty: The RandMAU Model, *Management Science*, 46(5), 669–684.
26. Flood, M. M. (1980): Implicit Intransitivity under Majority Rule with Mixed Motions, *Management Science*, 26(3), 312–321.
27. Green, Paul E., Abba M. Krieger és Manoj K. Agarwal (1993): A cross validation test of four models for quantifying multiattribute preferences, *Marketing Letters*, 4(4), 369–380.
28. Green, Paul E. és V. Srinivasan (1990): Conjoint Analysis in Marketing: New Developments with Implications for Research and Practice, *Journal of Marketing*, 54(4), 3–19.
29. Greifeneder, Reiner, Herbert Bless és Michel Tuan Pham (2011): When do People Rely on Affective and Cognitive Feelings in Judgement. A Review, *Personality and Social Psychology Review*, 15(2), 107–141.
30. Hastie, R. (2001): Problems for Judgement and Decision Making, *Annual Review of Psychology*, 52, 653–683.
31. Hauser, John R. és Steven N. Shugan (1980): Intensity Measures of Consumer Preference, *Operations Research*, 28(2), 278–320.
32. Hlédik, Erika (2015): Terméktulajdonságokkal kapcsolatos preferenciák stabilitásának vizsgálata a mobiltelefon példáján, *Vezetéstudomány*, 46(2), 25–34.
33. Inada, Ken-ichi (1969): The Simple Majority Decision Rule, *Econometrica*, 37(3), 490–506.
34. Jain, Arun K., Vijay Mahajan és Naresh K. Malhotra (1979): Multiattribute Preference Models For Consumer Research: a Synthesis, in NA - *Advances in Consumer Research*, 6, eds. William L. Wilkie, Ann Arbor, MI: Association for Consumer Research, 248–252.
35. Kahneman, Daniel (2011): *Thinking: Fast and slow*, New York, NY: Farrar, Straus and Giroux.
36. Keeney, R. L. és H. Raiffa (1993): *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs*, Cambridge: Cambridge University Press
37. Koltay, Gábor és Vincze, János (2009): Fogyasztói döntések a viselkedési közgazdaságtan szemszögéből, *Közgazdasági Szemle*, 56(6), 495–525.
38. Lancaster, Kelvin (1971): *Consumer Demand: A New Approach*, Columbia Studies in Economics, No. 5, New York and London: Columbia University Press
39. Manzini, Paola és Marco Mariotti (2012): Choice by lexicographic semiorders, *Theoretical Economics*, 7, 1–23.
40. Miller, G. A. (1956): The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information, *Psychological Review*, 63, 81–97.
41. Moore, William L. és Richard J. Semenik (1988): Measuring preferences with hybrid conjoint analysis: The impact of a different number of attributes in the master design, *Journal of Business Research*, 16(3), 261–274.
42. Netzer, Oded és V. Srinivasan (2011): Adaptive Self-Explication of Multiattribute Preferences, *Journal of Marketing Research*, 48(1), 140–156.

43. Netzer, Oded, Olivier Toubia, Eric T. Bradlow, Ely Dahan, Theodoros Evgeniou, Fred M. Feinberg, Eleanor M. Feit, Sam K. Hui, Joseph Johnson, John C. Liechty, James B. Orlin és Vithala R. Rao (2007): Beyond Conjoint Analysis: Advances in Preference Measurement, Manuscript, Seventh Triennial Invitational Choice Symposium, „Choices Under Restrictions,” hosted by the Wharton School, University of Pennsylvania, June 2007
44. Papaoikonomou, E., G. Ryan és M. Ginieis (2011): Towards a Holistic Approach of the Attitude Behavior Gap in Ethical Consumer Behaviors: Empirical Evidence from Spain, *International Advances in Economic Research*, 17(1), 77–88.
45. Payne, John W., James R. Bettman és Eric J. Johnson (1992): Behavioral decision research: A constructive processing perspective, *Annual Review of Psychology*, 43(1), 87–131.
46. Platz, P. és Z. Veres (2014): Understanding Consumer Preference Biases, *Journal of Applied Economics and Business*, 2(1), 105–119.
47. Russell, Gary J. (2014): Brand Choice Models, in *The History of Marketing Science*, ed. Russell Winer and Scott A. Neslin, Hanover (MA): Now Publishers, 19–46.
48. Samuelson, P. (1938): A note on the pure theory of consumer’s behavior, *Economica*, 61–71.
49. Samuelson, P. (1948): Consumption theory in terms of revealed preference, *Econometrica*, 15, 243–253.
50. Scholz, Sören W., Martin Meissner és Reinhold Decker (2010): Measuring Consumer Preferences for Complex Products: A Compositional Approach Based on Paired Comparisons, *Journal of Marketing Research*, 47(4), 685–698.
51. Selei, Adrienn (2012): Pszichológiai torzítások a fogyasztói döntésekben és hatásuk a vállalatok viselkedésére, *Iustum Aequum Salutare*, VIII(3-4), 139–152.
52. Sen, A. K. (1973): Behavior and the Concept of Preference, *Economica*, 40(159), 241–259.
53. Sen, A. és Prasanta K. Pattanaik (1969): Necessary and sufficient conditions for rational choice under majority decision, *Journal of Economic Theory*, Elsevier, 1(2), 178–202.
54. Shafir, Eldar (ed.) (2004): *Preference, Belief, and Similarity. Selected Writings by Amos Tversky*, A Bradford Book, Cambridge (MA): The MIT Press
55. Simonson, I. (2008a): Will I like a „medium” pillow? Another look at constructed preferences, *Journal of Consumer Psychology*, 18, 155–169.
56. Simonson, I. (2008b): Regarding inherent preferences, *Journal of Consumer Psychology*, 18, 191–196.
57. Srinivasan, V. (1988): A conjunctive-compensatory approach to the self-application of multiattributed preferences, *Decision Sciences*, 19(2), 295–305.
58. Stephenson, W. (1953): *The study of behavior: Q-technique and its methodology*, Chicago (IL): University of Chicago Press
59. Stiglitz, J. E. (2000): *A kormányzati szektor gazdaságtana*, Budapest: KJK-KERSZÖV
60. Torres, Anna és Michael Greenacre (2002): Dual scaling and correspondence analysis of preferences, paired comparisons and ratings, *International Journal of Research in Marketing*, 19(4), 401–405.

61. Tversky, A. (1969): The intransitivity of preferences, *Psychological Review*, 76, 31–48.
62. Veres, Z. és T. Tarján (2013): Doubts on exploring consumers' preference: Bad news for product policy makers and for market researchers, *Journal of Management and World Business Research*, 10(1), 1–15.
63. Veres, Z. és T. Tarján (2017): A Critique on the Modelling of Consumers' Choice Decisions: An Extended Abstract In Rossi, P. (ed.): *Marketing at the Confluence between Entertainment and Analytics*, Proceedings of the 2016 Academy of Marketing Science (AMS) World Marketing Congress, Cham (Switzerland): Springer International Publishing, 963–968.
64. Walsh, J. és P. Roe (1987): Preference modelling: conjoint analysis and multi-attribute models, *Irish Marketing Review*, 2, 126–137.
65. Wauthier, F. L., M. I. Jordan és N. Jojic (2013): Efficient Ranking of Pairwise Comparisons, *Proceedings of Machine Learning Research*, 28(3), 109–117.
66. Yoon, Carolyn, Richard Gonzalez, Antoine Bechara, Gregory S. Berns, Alain A. Dagher, Laurette Dubé, Scott A. Huettel, Joseph W. Kable, Israel Liberzon, Hilke Plassmann, Ale Smidts és Charles Spence (2012): Decision neuroscience and consumer decision making, *Marketing Letters*, Springer, 23, 473–485.

THE INDIVIDUAL BRAIN-FUNCTION OF CONSUMERS' PRODUCT CHOICE PREFERENCES

The paper aims to reveal some mathematical implications of the attribute preference-based product choice behaviour based on multidisciplinary sources. The transformation of underlying preferences into revealed preference order is modelled by the so-called brain-function. The brain-function differs from the mainstream in two respects. One is to assign underlying preferences to all the attributes, and the other is the ranking here may mean partial order, as well. We demonstrate that intransitive revealed preference can be derived from the strictly transitive underlying preferences with the brain-function. Based on the so-called majority rule the brain-function does not necessarily preserve transitivity during the mapping from underlying preferences into revealed preference. To understand the functioning of the brain-function, we recommend experimenting with the manipulation of experimental conditions to amplify the effects that result in the inconsistency of choice. Such manipulation is a narrowing of the product choice test to neutral attributes. A pilot experiment proved that product choice could be described by Markov-chain on the decision continuum.

Keywords: product attribute preferences; brain-function; product choice; intransitivity; decision continuum

FOGALMAK, MÓDSZEREK

A NEMZETGAZDASÁGI MODELLEKBEN SZEREPLŐ MÁTRIXOK KÉTIRÁNYÚ KIIGAZÍTÁSI MÓDSZEREIRŐL¹

RÉVÉSZ TAMÁS – KOPPÁNY KRISZTIÁN
Budapesti Corvinus Egyetem – Széchenyi István Egyetem

A cikk elsőként vállalkozik a kétirányú mátrix-kiigazítási, vagy más néven peremfeltételes mátrixbecslési probléma hazai szakmai olvasóközönség számára történő, legújabb publikációk eredményeit is magában foglaló bemutatására. A rendkívül szerteágazó, sokféle általánosítási lehetőséget kínáló problémakörből csak a gyakorlatban leginkább előforduló, a biztosnak tekintett és konzisztens sor- és oszlopösszesenekhez történő, a mátrix belsejére vonatkozó összetettebb feltételek nélküli esettel foglalkozunk. A probléma lehatárolása és matematikai formalizálása után a becslőt és a referencia-mátrix eltéréséhez egy nemnegatív valós számot rendelő különféle „távolság-” illetve „entrópia”-függvényeket ismertetjük, amelyek minimalizálendő célfüggvényként jelennek meg azokban a matematikai programozási feladatokban, amelyekben korlátozó feltételként a sor- és oszlopösszesenre vonatkozó követelmények, valamint egyes esetekben nemnegativitási, illetve előjelmegőrzési feltételek is szerepelnek. E matematikai programozási feladatok vagy röviden modellek közül néhánynak a megoldásához vezető iterációs algoritmusát is tárgyaljuk. Ennek kapcsán bemutatjuk a szerzők egyike által kidolgozott „additív”-RAS algoritmust, és bebizonyítjuk, hogy egyfelől nemnegatív referenciamátrix és peremfeltételek esetén azonos eredményt ad a RAS-módszerrel, másfelől pedig negatív elemeket is tartalmazó referencia-mátrix, de előjelmentő megoldások esetén azonos eredményt ad, mint a „javított normalizált négyzetes eltéréseket” minimalizáló, angol rövidítéssel INSD-modell, illetve általában is azzal az INSD-moddal, amiből elhagyjuk az előjelváltás büntetőfüggvényét. Azt is demonstráljuk, hogy az additív-RAS algoritmus a GRAS-modell lépésenként másodfokú egyenlet megoldását igénylő iterációs algoritmusával szemben nemcsak hatékonyabb, hanem esztétikusabb is. Ugyanakkor a GRAS-modell

¹Révész Tamás, Budapesti Corvinus Egyetem, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszékének tudományos főmunkatársa, e-mail: revesz.tamas@bge.hu. Koppány Krisztián, Széchenyi István Egyetem Nemzetközi és Elméleti Gazdaságtan Tanszékének egyetemi docense, e-mail: koppanyak@sze.hu. A kutatást a „Közszolgáltatások közgazdasági és irányítási kérdéseinek központja Alapítvány” valamint Koppány Krisztián részéről a GINOP 2.3.4-15-2016-00003 „A KKV-k nemzetközi versenyképességét támogató szolgáltatások fejlesztése” című projekt támogatta. Beérkezett: 2017. szeptember 19.

megoldásának előjeltartó volta és amiatt, hogy az INSD-modell a GRAS-modell egy Taylor-soros közelítésének tekinthető, igazoljuk, hogy kis eltérések esetén az additív-RAS-módszer, különösen pedig az ún. módosított additív-RAS módszer is hajlamos az előjeltartásra, kivéve, ha erre például a peremek előjelváltása kényszeríti. Lemelin (2009) számpéldáján azt is demonstráljuk, hogy az additív-RAS még az ilyen extrém, előjelváltást megkövetelő esetben is jól működik, sőt a Lemelin által vizsgált modellek közül a legjobb eredményt adja. A cikk felsorolva a többszektoros nemzetgazdasági modellezés azon gyakran használt mátrix-kategóriáit, amelyekre kétirányú mátrixkiigazítási módszereket szoktak alkalmazni, bemutatja, hogy a nemzetgazdasági elemzésekben való sikeres alkalmazás feltétele a konkrét közgazdasági jelenség és az erre felírt referencia mátrix sajátosságainak alapos ismerete. A sikeres alkalmazások egyik példajaként bemutat egy olyan friss kutatási projektet is, amelynek során mind az additív-RAS, mind pedig egy olyan összetettebb mátrixkiigazítási modell egyaránt igen jó eredményeket adott, amelyben a becslendő mátrix elemeire blokkösszesen-feltételek szerepeltek. A célfüggvényben pedig korábbi szerzők technikai megoldásainak, illetve a szerzők újszerű elgondolásainak hatékony és kreatív ötvözésére került sor.

1 Bevezetés

Jónéhány tudományágban előfordul, hogy egy olyan, mátrixszal megadható adattábla elemeinek értékét kell megbecsülni, amelynek csak a peremeit (sor- és oszlopösszesenjeit) ismerjük. A mátrix egyes elemei vagy ismertek (ebben az esetben ezeknek a hozzájuk tartozó sor- és oszlopösszesenekből való levonásával a becslési feladatot vissza lehet vezetni azon esetre, amikor a mátrix elemei ismeretlenek) vagy csak közvetett információ áll rendelkezésre rájuk vonatkozóan. E közvetett információ általában egy referenciamátrix, amiről feltételezzük, hogy sor- illetve oszlopszerkezete valamilyen mércé szerint „hasonló” a keresett mátrixéhoz. A referenciamátrix lehet a keresett mátrixnak egy korábbi időszakra vagy más megfigyelési egységre vonatkozó megfelelője. A hasonlóságot illetve ennek ellentétét egy „távolságfüggvény” méri, a cél az, hogy ez a távolság (azaz a célfüggvény értéke) a legkisebb legyen.

Tipikus példa erre az ún. szállítási mátrix. Ennek i -edik sorának j -edik eleme az i -edik kiindulási (feladó-) helyről a j -edik rendeltetési (fogadó-) helyre szállított mennyiséget jelenti (például egy személyszállítási feladatban a szállított személyek számát). Általában ismert a mátrix korábbi időszaki megfelelője, a tárgyidőszakból pedig az, hogy melyik kiindulóhelyről mekkora mennyiséget szállítottak el (sorösszegek), illetve, hogy melyik rendeltetési helyre mekkora mennyiség érkezett meg (oszlopösszegek).

Szemléletesebben úgy fogalmazhatunk, hogy a feladat a referencia mátrix szerkezetét a legjobban megőrizve ráfeszíteni azt az új peremekre. Ennek az ún. mátrixkiigazítási problémának a megoldására már a XX. század elején az egyes szakterületeken többé-kevésbé egymástól függetlenül különböző, sokszor hasonló, sőt matematikailag azonos eljárásokat dolgoztak ki. Mégis a

módszereket a különféle szakterületeken eltérően hívják. Például a cikkben részletesen ismertetésre kerülő, a közgazdaságtudományban RAS-módszernek nevezett eljárást a közlekedéstudományokban Furness [1965] nyomán Furness-, máshol pedig Fratar-algoritmusként nevezik.

Általában a fenti „kétirányú” mátrixkiigazításos feladatok megoldására javasolt módszereket két nagy csoportba sorolhatjuk: az ún. „entrópia-modell”-nek nevezett (amelyben általában az információelméletből vett logaritmus függvény szerepel) módszerek közé (ide tartozik a RAS-módszer is) illetve a legkisebb négyzetek elvén nyugvó kvadratikus célfüggvényű modellek közé. A szakirodalomban terjedelmes vita bontakozott ki, hogy mikor melyik módszer a hatékonyabb, megbízhatóbb. Az eddigi tapasztalatok szerint az, hogy melyik módszert érdemes választani, az részben a mátrix, az elvárt peremek, valamint a becült mátrixszal kapcsolatos elvárásaink matematikai tulajdonságaitól (nemnegativitás, zérusérték, előjelváltás megengedett volta, ritka mátrix-e stb.) függ, részben pedig a mátrix közgazdasági tartalmától. Például a negatív vagy zérus értékek akadályozzák a sztenderd módszerek alkalmazását. Gyakran előfordulhat, hogy egy kiigazítandó mátrix egyik pereme (vagy annak egyes elemei) úgy kell zérus értéket felvegyen(ek), hogy a mátrixban megmaradjanak pozitív és negatív értékek egyaránt.

A szakirodalomban az egyes szerzők között nemcsak abban volt vita, hogy a gyakorlatban melyik módszer ad jobb becslést, működik megbízhatóbban (például biztosítja-e a referenciamátrix elemei előjelének megőrzését), hanem a módszerek matematikai tulajdonságait illetően is (torzítanak-e, az egyes speciális esetekben működnek-e, egyértelmű-e a megoldás, azonos-e két különféle módon megfogalmazott modell megoldása² stb.)

Cikkünkben ezeket a módszereket tekintjük át, először vázlatosan matematikailag, majd megvilágítva a többszektoros modellezési gyakorlatban előforduló mátrixok (különösen a számszerűsített általános egyensúlyi (CGE-) modellek adatigényét képező különféle tranzakciós és transzformációs mátrixok) statisztikai problémáit és becslési sajátosságait. A kifejtés során néhány számpéldával is megvilágítjuk a módszerek alkalmazását.

Fentiek keretében külön hangsúlyt kap a szerzőnek a negatív elemű referencia-mátrixszal és/vagy nempozitív elvárt peremekkel rendelkező mátrixok becsléséhez kidolgozott „additív-RAS” módszerének ismertetése, és hatékonyságának számpéldákkal való illusztrálása. A gyakorlati tapasztalatok és a szakirodalom tanulságainak összefoglalása kapcsán javaslatokat teszünk a becslési módszerek továbbfejlesztésére és jövőbeni alkalmazásának módjára.

²Például, hogy az abszolút mátrixelemekre („tranzakciókra”) vagy az abból számított együttthatókra kell-e a feladatot (illetve a célfüggvényt) felírni (lásd Mesnard [2011] 4.2. alfejezetét).

2 A mátrixkiigazítási probléma és leggyakrabban használt megoldási módszerei

Ebben a fejezetben először a fenti „kétirányú” mátrixkiigazításos feladat formális matematikai megfogalmazását adjuk meg. Ezután a feladat nemnegatív mátrixok esetében javasolt megoldási módszereinek két nagy csoportját, az ún. „entrópia-modell”-eket és a kvadratikus célfüggvényű modelleket, illetve ezek viszonyát ismertetjük.

2.1 A mátrix kiigazítási probléma

A szakirodalomban leggyakrabban tárgyalt mátrixkiigazítási problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg (lásd például Lahr & Mesnard [2004], amin a módszer alábbi ismertetése is alapul):

Legyen \mathbf{X}^* egy $m \times n$ -es méretű ismeretlen mátrix, amelynek sorösszesenjei az ismert \mathbf{u} oszlopvektorral, oszlopösszesenjei pedig a szintén ismert \mathbf{v} sorvektorral egyeznek meg (azaz $\mathbf{X}^* \mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T \mathbf{X}^* = \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{1}$ a megfelelő méretű összegzővektor, a T felső index pedig a transzponálás jele).

Ha rendelkezésünkre áll egy szintén $m \times n$ -es méretű \mathbf{A} *indulómátrix* (vagy más néven prior- vagy referenciamátrix), ami *szerkezetében* hasonló \mathbf{X}^* -hoz, akkor azt azzal a szintén $m \times n$ -es méretű \mathbf{X} mátrixszal becsülhetjük, amelynek sorösszesenjei az \mathbf{u} oszlopvektorral, oszlopösszesenjei pedig a \mathbf{v} sorvektorral egyeznek meg (azaz $\mathbf{X} \mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T \mathbf{X} = \mathbf{v}$) úgy, hogy \mathbf{X} az \mathbf{A} referenciamátrixhoz valamilyen értelemben *leghasonlóbb* legyen.

A fenti bekezdésekben a „szerkezet” szó használatát az alábbi megfontolások indokolják:

Természetesen attól függően, hogy hogyan definiáljuk két mátrix „hasonlóságát” (vagy ennek ellentétéként „eltérését” vagy „távolságát”), a feladat megoldása (\mathbf{X}) eltérhet. Még ha rögzítjük is a két mátrix összehasonlításának képletét, a megoldás természetesen továbbra is függ az \mathbf{A} referenciamátrixtól. Ha azonban ennek nemcsak szerkezetétől (elemei belső arányaitól), hanem még \mathbf{A} „szintjétől” is függ a megoldás (azaz, hogy valamely γ skalárral szorozva \mathbf{A} -t, más megoldást kapunk), akkor célszerű az \mathbf{A} -t γ skalárral szorozva úgy módosítani (arányosan kiigazítani), hogy mindösszesenje ($\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{1}$) meg egyezzen a keresett \mathbf{X}^* mindösszesenjével ($\mathbf{1}^T \mathbf{X}^* \mathbf{1}$), azaz $\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{1}$ legyen. Ez teszi ugyanis csak lehetővé, hogy ha ekkor még $\mathbf{A} \mathbf{1} = \mathbf{u}$ és $\mathbf{1}^T \mathbf{A} = \mathbf{v}$ is éppen teljesül, akkor az \mathbf{A} indulómátrix maga legyen az \mathbf{X} megoldás. Mivel eleget tesz a feltételeknek, és a lehető leghasonlóbb \mathbf{A} -hoz, vagyis azonos vele. Az \mathbf{A} referenciamátrix fenti „szintezése” tehát csökkenti a további kiigazítás szükséges mértékét, szerencsés esetben (ha a peremfeltételeket is teljesíti) pedig szükségtelenné is tesz minden további kiigazítást.

Természetesen két mátrix „hasonlóságának” adott képlete mellett elképzelhető, hogy a feladatnak *több megoldása* van, azaz amelyekre ez a képlet azonos értéket ad. Azonban ha \mathbf{A} *indekompozabilis* (irreducibilis), a lehetséges megoldások halmaza *kompakt*, és a célfüggvény e halmaz felett *folytónosan differenciálható*, akkor csak egyetlen megoldás létezik, ami az általunk tár-

gyalt eljárásokra általában fennáll (Mesnard [2011]). E problémával általánosságban tehát itt nem foglalkozunk, de majd visszatérünk rá a mátrixok „hasonlóságának” konkrét képletét alkalmazó eljárások (modellek) tárgyalásakor.

Mindenesetre a mátrixkiigazítási feladat *matematikai programozási feladatként* írható fel, amelyben az adott korlátok ($\mathbf{X}\mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}$, valamint esetleg nemnegativitási, illetve előjel-azonossági korlátok) mellett keressük a *célfüggvény* optimális értékét (konkrétan a hasonlósági képlet maximumát vagy az eltérés valamilyen monoton növekvő függvényének minimumát). Ismeretes, hogy ha a korlátozó feltételek lineáris egyenlőségek, akkor az optimum a Lagrange-szorók módszerével határozható meg. Az ezekkel felírt ún. Lagrange-függvényben e szorók a korlátoktól való eltéréseket büntetik, és azt fejezik ki, hogy a korlátok egységnyi növelése mekkora mértékben változtatja meg az optimum értékét. Néhány szerző azonban eleve a Lagrange-függvényből indul ki, de azt módosítja, például úgy, hogy a korlátoktól való eltéréseket nemcsak a megfelelő Lagrange-szoróval szorozva szerepelteti, hanem az így kapott szorzatok logaritmusát véve (lásd például Günlük-Şenesen, G. – Bates, J. M. [1988]). Ennek a célfüggvényükben logaritmust szerepeltető ún. entrópia-modellekben van haszna, amennyiben így az elsőrendű feltételekből származó (bár az eredeti feladat szempontjából nem optimális!) megoldásban az $x_{i,j} = a_{i,j} \cdot \lambda_i \cdot \tau_j$ egyszerű szorzatalakban fejezhető ki a referenciamátrix megfelelő eleme, valamint az előírt sor- és oszlopösszegektől való eltérésekhez tartozó λ_i illetve τ_j Lagrange-szorók között.

Felvetődik, hogy ahelyett, hogy azt vizsgálánánk, hogy mennyire örzi meg a kiinduló struktúrát az adott (programozási modell megoldását biztosító) eljárás, inkább azt kellene vizsgálni, hogy *mennyire módosítja azt a peremen elvárt változásoknak megfelelően*, azokkal összhangban. Például, ha mind a vízszintes, mind a függőleges perem növekedett, akkor jogos elvárás, hogy az ezek *meteszéspontjában* álló elem is növekedjen (persze lehetőleg csak az indokolt mértékben). E kérdést jelen művet követező fejezeteiben többször érintjük, de általános tárgyalására nem vállalkozhatunk. Mindenestere ilyen és ehhez hasonló szempontokat vizsgáló kritériumrendszer összeállításán érdemes elgondolkodni.

2.2 A RAS-módszer

A legkézenfekvőbb, már az 1930-as években dokumentált, s az 1940-es években már az input-output-modellezésben is használt megoldási algoritmus a RAS-módszer, amelyet a közgazdasági szakirodalomba, elsősorban az Ágazati Kapcsolatok Mérlegének becslésére Richard Stone vezetett be (Stone [1961]; Stone és Brown, [1962]).

Ennek az iterációs módszernek első lépése az \mathbf{A} mátrixnak (aminek sorösszesenjeit jelölje a \mathbf{b} oszlopvektor, oszlopösszesenjeit pedig az \mathbf{f} sorvektor) először a sorait szorozza meg a hozzátartozó kívánt sorösszesen és a tényleges sorösszesen (u_i/b_i) arányában (ezáltal a mátrixot kiigazítva az elvárt sorösszesenekhez), majd az így kapott mátrixot oszlopírányban igazítja ki

hasonló arányos módon az elvárt \mathbf{v} oszlopösszesenekhez³. A második lépésben az így kapott \mathbf{A}^1 mátrixra hajtja végre a fenti sor- és oszlopírányú arányos kiigazításokat, majd így tovább, az i -edik lépésben az $(i-1)$ -edik lépésben kapott \mathbf{A}^{i-1} mátrixra végrehajtva a fenti sor- és oszlopírányú kiigazításokat kapja az \mathbf{A}^i mátrixot. Ez az eljárás rendszerint konvergens⁴, az \mathbf{A}^i mátrix-sorozat határértéke, azaz a megoldásul kapott \mathbf{X} mátrix az

$$\mathbf{X}\mathbf{1} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}, \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \ln(x_{i,j}/a_{i,j}) \rightarrow \min \quad (1)$$

matematikai programozási feladat megoldása (Bacharach [1970]⁵), és (a feladatot a Lagrange multiplikátor módszerrel megoldva) előáll az

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{r}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}} \quad (2)$$

szorzat alakban, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a vektorból diagonális mátrix képzésének a jele, \mathbf{r} és \mathbf{s} pedig rendre az $\mathbf{X}\mathbf{1} = \mathbf{u}$ és $\mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}$ korlátok árnyékáraiból képzett vektorok (Bacharach [1970]). Mivel a célfüggvény konvex és folytonosan differenciálható egy kompakt halmazon, ha az \mathbf{A} mátrix indekompozábilis (teljesen összefüggő, lásd Zalai [2012]), akkor az $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{r}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}$ megoldás egyértelmű, pontosabban az \mathbf{r} és \mathbf{s} vektoroknál egy tetszőleges δ skalárszorozót leszámítva (Bacharach [1970], Mesnard [2011]). Ez azt jelenti, hogy ha egy \mathbf{r} és \mathbf{s} vektorpár egy megoldás, akkor az $\mathbf{r} \cdot \delta$ és \mathbf{s}/δ vektorpár is az.

A RAS-módszer tehát egy *biproporcionális* (kétirányú arányosítási) módszer, ami végeredményben az eredeti mátrixot egyfelől soronként, másfelől oszloponként (az adott soron, illetve oszlopon belül) egységes szorzókkal igazítja ki.

A RAS-módszer fenti célfüggvényét a szakirodalom az analóg információelméleti képlet alapján információvesztésnek nevezi.⁶ Lemelin et al. [2013] precízen levezetik, hogy a RAS-feladat egyenértékű a

$$\sum_{i=1}^m p_{i,j} = p_{\cdot,j}, \quad \sum_{j=1}^n p_{i,j} = p_{i,\cdot}, \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{i,j} \ln(p_{i,j}/p_{i,j}^a) \rightarrow \min \quad (3)$$

feladattal, ahol $p_{i,j}^a = a_{i,j}/\mathbf{1}^T\mathbf{A}\mathbf{1}$, $p_{i,j} = x_{i,j}/w$, $p_{\cdot,j} = h_j/w$, $p_{i,\cdot} = u_i/w$, és ahol $w = \mathbf{u}^T\mathbf{1}$ (azaz az \mathbf{X} mátrix elemeinek előírt mindösszesenje). Ekkor tehát a keresendő $p_{i,j}$ értékek egy kétdimenziós együttes valószínűségeloszlás elemeinek tekinthetők, a célfüggvény pedig azon „*idegen*” információnak, amit a $p_{i,j}$ valószínűségeloszlás tartalmaz a $p_{i,j}^a$ valószínűségeloszláshoz képest.

³Az általánosság rovása nélkül a sor- és oszlopírányú kiigazítás sorrendje felcserélhető, a megoldást nem érinti.

⁴A konvergencia szükséges és elégséges feltételeit MacGill [1977] mutatta ki (lásd még Lemelin et al [2013])

⁵Schneider és Zenios [1990] szerint ezt Bregman [1967] már Bacharach [1970] előtt bizonyította.

⁶A matematikai információelméletet Shannon [1948] dolgozta ki, és Theil [1967] vezette be a közgazdaságtudományba.

Az ilyen alakra hozható feladatokat illetve megoldási módszerüket kereszt-entrópia (cross-entropy) feladatoknak illetve módszereknek nevezi⁷. A RAS-módszer tehát a kereszt-entrópia módszerek speciális esete.

Lemelin et al. [2013] levezetését általánosítva elmondhatjuk, hogy a RAS-módszer ugyanolyan eredményre vezet akkor is, ha az \mathbf{A} indulómátrixot tetszőleges pozitív számmal megszorozzuk. Ugyanis a γ skalárral való szorzás esetén a célfüggvény

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \ln(x_{i,j}/(\gamma \cdot a_{i,j})) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \{\ln(x_{i,j}/a_{i,j}) - \ln \gamma\} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \ln(x_{i,j}/a_{i,j}) - w \cdot \ln \gamma, \end{aligned}$$

azaz csak egy konstansban tér el az eredeti feladattól, és emiatt ugyanazon helyen van minimuma. Tehát matematikai szempontból nincs annak sem jelentősége, ha az \mathbf{A} mátrixot a $\gamma = w/\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{1}$ skalárral átszorozva biztosítjuk, hogy mindösszesenje megegyezzen az előírt peremekével (w -vel). Természetesen egészen más kérdés, hogy érdemes-e az \mathbf{A} indulómátrixot úgy módosítani \mathbf{A}^* -ra, hogy az eleve kielégítse az $\mathbf{A}^* \mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T \mathbf{A}^* = \mathbf{v}$ peremfeltételeket, azaz az (1) feladat egy lehetséges megoldása legyen. További kérdés, hogy a keresett referenciamátrix $m \cdot n$ elemével szemben támasztott mindössze $n + m - 1$ független feltétel miatt meglévő jelentős szabadságfok miatt létező sok ilyen lehetséges módosítás közül melyiket válasszuk. Így eljuthatunk a kétfokozatú mátrixbecslés problematikájához, azaz, amelyben az első fokozatban valamilyen modellel az \mathbf{A} kiinduló mátrixot igazítjuk ki e modell szerint optimális \mathbf{A}^* -ra, majd ezt használva referenciamátrixként egy másik mátrix-kiigazító modellelben határozzuk meg a végső becslést, azaz az \mathbf{X} mátrixot. Felvethető, hogy a két fokozatban használt modelleknek mennyire kell „harmonizálniuk” (kevésbé költői kifejezéssel elméletileg koherensnek lenniük), illetve eltérniük (nyilván teljesen azonos modellel használva nincs értelme az eljárást két fokozatra bontani: ugyanis minden optimalizáló eljárás amúgy is egy lehetséges megoldás megkeresésével kezdi a számításokat).

2.3 Egyéb mátrix kiigazító modellek

Természetesen, még nemnegatív mátrixok esetén is, a mátrixkiigazítási problémára ettől az információvesztéstől eltérő célfüggvények is használatosak és indokolhatók. Az egyik igen hasonló célfüggvény a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} \ln(a_{i,j}/x_{i,j}),$$

ami éppen megfordítja a célfüggvénybeli szereposztást a referenciamátrix elemeinek és a becsült mátrix elemeinek értékei között (e célfüggvényvel

⁷A kereszt-entrópia fogalmát Kullback, S. és Leibler, R. A. [1951] vezette be és tárgyalta először.

kapott megoldások összehasonlító elemzését lásd például McNeil és Hendrickson [1985] cikkében). E célfüggvény előnye, hogy minden $x_{i,j}$ változó csak egyszer szerepel a képletben, így könnyebb kiszámítani, és matematikai tulajdonságai (monotonitás, nemnegativitás, stb.) is könnyebben átláthatóak.

Az elsősorban a szállítási mátrix⁸ becslésére alkalmazott ún. gravitációsmodellek (lásd például Niedercorn és Bechdolt [1969] illetve Black [1972]) alapváltozata is a RAS-módszerrel egyenértékűnek tekinthető (Mesnard [2011]).

A további, természetes alapú logaritmus-függvényt tartalmazó, de eltérő súlyozású lehetséges célfüggvényekre itt nem térünk ki, hanem e helyett átérünk a „korlátozott legkisebb-négyzetek” jellegű célfüggvényekre.

Lahr és Mesnard [2004] szerint Pearson χ^2 mutatóját avagy a normalizált négyzetes eltérést (más néven a normalizált legkisebb négyzetek módszerét) először Deming és Stephan [1940] majd Friedlander [1961] használta a mátrixkiigazítási feladat megoldására, majd Lecomber [1975] ajánlotta a szimmetrikus ágazati kapcsolatok mérlegeinek (SIOT-ok) frissítésére („update”-elésére). A minimalizálandó célfüggvény az alábbi két egyenértékű formulával írható fel:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - a_{i,j})^2 / a_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} / a_{i,j} - 1)^2 \cdot a_{i,j}. \quad (4)$$

A második képletből látható, hogy ez a célfüggvény a becsült és eredeti mátrixelemek relatív (%-os) eltérésének az eredeti mátrixelemek nagyságával súlyozott négyzetösszegét jelenti. Ezáltal kompromisszumot jelent a szakirodalom által Almon [1968] tanulmányához társított

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - a_{i,j})^2 \quad (5)$$

egyszerű négyzetösszeg⁹, és a súlyozatlan relatív négyzetes eltérés

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} / a_{i,j} - 1)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - a_{i,j})^2 / a_{i,j}^2 \quad (6)$$

célfüggvények között.

Könnyen belátható, hogy az egyszerű négyzetösszeg a kis elemeknél hajlamosabb nagyobb eltéréseket megengedni, míg a súlyozatlan relatív négyzetes eltérés éppen fordítva, a szétosztandó (az előírt sor- és oszlopösszeghez szükséges hozzáadandó, illetve levonandó) mennyiségeket a nagyobb elemekhez hajlamos osztani, ahol a módosítás százalékosan kisebb értéket jelent.

⁸A szállítási feladat abból áll, hogy az u_i termékmennyiséggel rendelkező i -edik kiindulólóhelyről a v_j termékmennyiséget igénylő j -edik érkezési helyre mekkora $x_{i,j}$ mennyiséget szállítsunk úgy, hogy a szállítási költség minimális legyen.

⁹Bár Almon ezt a képletet az ÁKM együtthatóira alkalmazta, azaz az $\mathbf{X}\mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T \mathbf{X} = \mathbf{v}$ peremfeltételek helyett az $\mathbf{X}\mathbf{g} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T \mathbf{X}\mathbf{g} = \mathbf{v}$ peremfeltételek mellett történik a szóban forgó célfüggvény minimalizálása, ahol \mathbf{g} a bruttó termelési értékek ismertnek feltételezett vektora.

A négyzetes eltéréseket, illetve azokat az $1/a_{i,j}$ illetve $1/a_{i,j}^2$ súlyokkal összesítő (4), (5) és (6) célfüggvények általánosításaként Harthoorn és van Dalen [1987] a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - a_{i,j})^2 / g_{i,j}$$

képlettel írják fel a célfüggvényt, ahol az $1/g_{i,j}$ súlyok képviselik az $x_{i,j}$ elemek „első közelítésének” tekintett $a_{i,j}$ elemek „relatív megbízhatóságát” (Timurshoev et al [2011]).

Az is könnyen látható, hogy az entrópia jellegű, azaz logaritmus függvényt tartalmazó célfüggvényekkel szemben a négyzetes eltéréseken alapuló célfüggvények elvben megengedik azt, hogy a becült $x_{i,j}$ az eredeti $a_{i,j}$ -től eltérő előjelű legyen. Hasonlóképpen nyilvánvaló, hogy az eredeti zérus elemek is válhatnak nemzérussá. E problémákkal a következő fejezetben foglalkozunk.

3 Negatív elemeket is tartalmazó, illetve zérus peremértékű mátrixok kiigazítási módszerei

Ebben a fejezetben először a „kétirányú” mátrixkiigazításos feladatnak a 2. fejezetben ismertetett módszereinek olyan módosításait mutatjuk be, amelyek ahhoz szükségesek, hogy ezeket eredményesen lehessen alkalmazni olyan esetekben is, amelyekben a mátrix elemei és/vagy előírt sor- illetve oszlopösszesenjei között negatív elemek is vannak.

Egy különféle dezaggregációkat tartalmazó gazdasági modellezés adatbázisában gyakran szerepel ilyen dezaggregált kategóriák kereszt-táblázata (vagy más néven kontingencia-táblázata). Ha ezek becslésére van szükség, akkor sok esetben a negatív vagy zérus értékek akadályozzák a sztenderd módszerek alkalmazását. Például, ha a kiigazítandó mátrix egyik peremének (vagy annak egyes elemeinek) előírt értéke zérus, akkor a RAS-becslés az egész induló sort illetve oszlopot lenullázná, még akkor is, ha valóságban mind pozitív, mind negatív irányban léteznek nullától nyilvánvalóan jelentősen eltérő elemek. Az se sokkal szerencsésebb eset, ha a referencia mátrix valamelyik sor- vagy oszlopösszesenje zérus (természetesen ekkor a szóban forgó sor illetve oszlop vagy minden eleme zérus, vagy negatív elem(ek)nek is lennie kell benne), de a megfelelő előírt peremérték zérustól eltérő. A probléma súlyát érzékeltetendő megemlíthető, hogy az erre az esetre egyébként nem ajánlott RAS-algoritmus az adott sor illetve oszlop arányos kiigazítása során zérussal való osztást kísérelne meg.

Mint a 2. fejezetben bemutatott képleteikből is sejthető, a mátrix-kiigazítás eddig tárgyalt módszerei nem, vagy nem megfelelően működnek akkor, ha az indulómátrix egyes elemei vagy az előírt sor- illetve oszlopösszesenek egy része negatív. E problémák banális ad hoc kezeléseit leszámítva, mint például a kis negatív $a_{i,j}$ elemek zérusra cserélését (Omar [1967]¹⁰) vagy

¹⁰Idézi Lahr és Mesnard [2004].

változatlanul hagyását (amit Huang et al [2008] szokásos módszernek nevez), Günlük-Şenesen és Bates [1988], majd az ő eredményeiket újrafelfedezve¹¹ Junius és Oosterhaven [2003] foglalkozott először alaposan a negatív elemek kezelésével. Azonban az általuk kidolgozott ún. „generalized”-RAS (GRAS) módszernek az általuk a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot x_{i,j}/a_{i,j} \cdot \ln(x_{i,j}/a_{i,j})$$

képlettel felírható célfüggvénye torzít (Huang et al [2008]), és nem is alkalmazható, ha nem minden oszlopban és sorban van pozitív elem (Temurshoev [2013]), illetve, mint majd látjuk, még normál esetben sem mindig a legjobb eredményt adja a becslési módszerek közül. Később Oosterhaven [2005] is rámutatott, hogy az eredetileg javasolt célfüggvényében a negatív és pozitív eltérések kioltathatják egymást (a tökéletes illeszkedés illúzióját keltve), és helyette az abszolút információvesztésnek (AIL) elnevezett

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j} \cdot x_{i,j}/a_{i,j} \cdot \ln(x_{i,j}/a_{i,j})|$$

célfüggvényt javasolta. Később a GRAS-módszer célfüggvényének torzítását¹² Lenzen et al [2007] korrigálták. Huang et al [2008] pedig a célfüggvényt a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot (z_{i,j} \cdot \ln(z_{i,j}/e) + 1)$$

alakra tovább módosítva (bár ez utóbbi módosítás csak egy olyan konstanszt ad a függvényhez, amire a $z_{i,j} = 1$ értékek mellett a függvény éppen zérus lesz, de ez nem érinti az optimumhelyet) a módszert „javított-GRAS”-nak (IGRAS) nevezi.

Mindenesetre már a célfüggvényben szereplő logaritmus-függvényből is látható, hogy ha a modellnek egyáltalán van megoldása, akkor abban minden i, j párra $x_{i,j}/a_{i,j} = z_{i,j} \geq 0$. Tehát a GRAS-modell megoldása garantálja, hogy a mátrix elemei megtartják az előjelüket (azaz, hogy a becslés előjele az indulóérték előjelével azonos legyen).

A valamilyen információmennyiségen alapuló célfüggvényeket tartalmazó ún. entrópia-modelleken túl a kvadratikus célfüggvényt tartalmazó modelleken is megfogalmazható a becsült mátrix elemeire az előjelváltás tilalma. Jackson és Murray [2004] például (lásd a 10. sorszámú modelljüket) a $z_{i,j} = x_{i,j}/a_{i,j}$ változók szerint minimalizálandó

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (z_{i,j} \cdot a_{i,j} - a_{i,j})^2 \cdot |a_{i,j}|$$

¹¹Lásd Umed Temurshoev et al [2011] (lásd még: <http://www.wiod.org/publications/papers/wiod2.pdf>)

¹²Nevezetesen, hogy a $z \cdot \ln z$ függvény minimuma a $z = 1/e$ értéknél van (ahol e a természetes alapú logaritmus alapja és z képviseli az $x_{i,j}/a_{i,j}$ arányt, tehát a $z = 1$ helyen kellene lennie a minimumnak), míg az általa javasolt $z \cdot \ln(z/e)$ függvénynek van a $z = 1$ értéknél minimuma.

célfüggvényt alkalmazzák erre a célra a szokásos peremfeltételek és a $z_{i,j} \geq 0$ nemnegativitási feltételek mellett. A nemnegativitási feltételeket szerepeltető fenti, általuk „előjeltartó négyzetes eltérés”-nek nevezett modell ugyan elég jól megoldható a rendelkezésre álló matematikai programozási számítógépes programcsomagokkal (pl. GAMS), de ezen egyenlőtlenség tartalmú feltételek nem teszik lehetővé az optimális megoldás levezetését a Lagrange-szorók módszerével. Talán ezért is Huang et al [2008] a mátrixelemek előjelváltását nem így, hanem a Lagrange-függvénybe beépített

$$M/2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot [\min(0, z_{i,j})]^2$$

taggal akadályozza meg, ahol M egy adott kellően nagy pozitív szám.

A Junius és Oosterhaven [2003] által a negatív elemeket is tartalmazó, részben negatív peremű mátrixok kiigazítására adott számpéldán ők és későbbi publikációk szerzői empirikusan is vizsgálták, hogy az egyes, az illeszkedés jóságát mérő („assessment”) kritériumok szerint melyik becslési módszer a jobb. E módszerek közül Jackson és Murray [2004] éppen a fenti „előjeltartó négyzetes eltérés” modellt találták összességében a legjobbnak.

Hasonlóképpen Huang et al [2008] is arra a következtetésre jutottak, hogy az általuk „javított normalizált négyzetes eltérés”-nek (INSD) nevezett,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{i,j}/a_{i,j} - 1)^2 \cdot |a_{i,j}| + M/2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot [\min(0, z_{i,j})]^2 \quad (7)$$

képlettel megadott célfüggvény teljesített (átlagosan) a legjobban Junius és Oosterhaven [2003] számpéldáján. Ez – a jó becslési eredmények mellett – elvileg is alátámasztja az EU-GTAP projektben általunk választott hasonló (kvadratikus jellegű) célfüggvény indokoltságát (Rueda – Revesz et al [2016]). Ahogy Huang et al [2008] rámutattak, és ahogy Temurshoev et al [2011] precízen levezették, az INSD célfüggvény az IGRAS célfüggvényének a $z_{i,j} = 1$ hely körüli Taylor-soros felírásának első tagja:

$$|a_{i,j}| \cdot (z_{i,j} \cdot \ln(z_{i,j}/e) + 1) \approx |a_{i,j}| \cdot (0 + z_{i,j} \cdot (z_{i,j} - 2) + 1) \approx |a_{i,j}| \cdot (z_{i,j} - 1)^2.$$

Ezért, és mivel a GRAS-becslésben $z_{i,j} \geq 0$, Huang et al [2008] úgy érvelnek, hogy az INSD-módszer hajlamosabb megőrizni az elemek előjelét, mint más, nem-biproporcionális módszerek.

Fentiekben és az empirikus tesztelésen túl Huang et al [2008] felírják az egyes módszereknek megfelelő korlátozott optimalizálási feladatokhoz tartozó Lagrange-függvényeket, és ezekből levezetik az optimális megoldások

képleteit.¹³ Az INSD célfüggvény esetén ezek az alábbiak:

$$z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_{i,j} = 0 \\ 1 + \operatorname{sgn}(a_{i,j}) \cdot (\lambda_i + \tau_j) & \text{ha ez nemnegatív vagy } M = 0 \\ 0 & \text{ha } M \text{ végtelenhez tart.} \end{cases} \quad (8)$$

$$\lambda_i = \left(u_i - \sum_j a_{i,j} + \sum_j (M \cdot a_{i,j} \cdot \min(0, z_{i,j}) - \tau_j \cdot |a_{i,j}|) \right) / \sum_j |a_{i,j}| \quad (8a)$$

$$\tau_j = \left(v_j - \sum_i a_{i,j} + \sum_i (M \cdot a_{i,j} \cdot \min(0, z_{i,j}) - \lambda_i \cdot |a_{i,j}|) \right) / \sum_i |a_{i,j}| \quad (8b)$$

ahol $z_{i,j} = x_{i,j}/a_{i,j}$, λ_i és τ_j pedig a Lagrange-függvényben a sor- és oszlop-irányú eltérésekhez tartozó Lagrange-szorzők.

Konkréten akkor, ha $z_{i,j} \geq 0$, azaz ha az $a_{i,j}$ elem nem vált előjelet, λ_i és τ_j fenti képletei az alábbiakra egyszerűsödnek:

$$\lambda_i = \left(u_i - \sum_j a_{i,j} - \sum_j \tau_j \cdot |a_{i,j}| \right) / \sum_j |a_{i,j}| \quad (9)$$

$$\tau_j = \left(v_j - \sum_i a_{i,j} - \sum_i \lambda_i \cdot |a_{i,j}| \right) / \sum_i |a_{i,j}| \quad (10)$$

A $z_{i,j}$ meghatározására szolgáló (8)-beli képlet középső részéből látszik, hogy ekkor pozitív $a_{i,j}$ elemek esetében hozzáadni, negatív elemeknél pedig levonni kell a Lagrange-szorzőkat.

A (8) középső egyenletét $a_{i,j}$ -vel beszorozva

$$x_{i,j} = z_{i,j} \cdot a_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(a_{i,j}) \cdot (\lambda_i + \tau_j), \quad (11)$$

majd bevezetve a $d_{i,j} = x_{i,j} - a_{i,j}$ jelölést, mindkét oldalából $a_{i,j}$ -t levonva és figyelembe véve, hogy $a_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(a_{i,j}) = |a_{i,j}|$, a

$$d_{i,j} = x_{i,j} - a_{i,j} = |a_{i,j}| \cdot (\lambda_i + \tau_j) \quad (12)$$

összefüggés adódik a Lagrange-szorzők és a mátrix elemeinek (optimális) változása között.

A (9) és (10) egyenletekből pedig azt látjuk, hogy e szorzók egymástól függenek, valamint függenek az adott $a_{i,j}$ elem sorirányú illetve oszlop-irányú abszolútérték-részesedésétől is.

Érdeemes megjegyezni, hogy hasonlóan a RAS-módszerhez (amelynek megoldásában a sorok és az oszlopok (Lagrange-) szorzói csoportonként egymással fordított arányban, csoporton belül egységesen, de bármily arányban arányosan változhatnak) a (12) képletből látszik, hogy ugyanarra a becslésre vezet,

¹³Bár hibásan, az általuk megadott elsőrendű feltételek akkor állnának fenn, ha a Lagrange-függvényben a korlátoktól való eltérések fordított előjellel lennének felírva. Ezt később Temurshoev et al. [2011] javítják, de ők se indokolják a célfüggvény megfelelését a Lagrange-függvény képzésénél, ami egyébként a peremektől való eltéréseket büntetőfüggvény kétszeres súllyal való beszámításával egyenértékű.

ha egy tetszőleges φ értéket választva λ_i helyére $\lambda_i + \varphi$ értéket, τ_j helyére pedig $\tau_j - \varphi$ értéket adunk meg, sőt továbbra is kielégítik a (8), (9), (10) elsőrendű feltételeket is. Tehát ilyen értelemben, ha van egy megoldás, akkor végtelen sok van, csak amíg a „multiplikatív” RAS esetében a Lagrange-szorzóknak a szabadságfok egy arányossági tényezőben jelentkezik, addig az INSD esetében ez egy additív komponensben.

Mivel a Huang et al [2008] által tárgyalt általános (előjelváltást megtiltó) esetben a (8), (9), (10) egyenletrendszer szimultán (λ_i és τ_j függenek $z_{i,j}$ -től és fordítva), megoldására egy iterációs algoritmust javasolnak $z_{i,j}^{(0)} = 1$, $\lambda_i^{(0)} = 0$, $\tau_j^{(0)} = 0$ indulóértékekkel. Az általunk tárgyalt, előjelváltást megengedő esetben azonban λ_i és τ_j csak egymástól függenek, és a Huang et al [2008] által javasolt iterációs algoritmus nem rekurzívan értelmezett változatának első lépésében a (9) és (10) képletek alapján a Lagrange-szorzók a

$$\lambda_i^{(1)} = g_i / \sum_j |a_{i,j}| \tag{13}$$

$$\tau_j^{(1)} = h_j / \sum_i |a_{i,j}| \tag{14}$$

képletekkel határozódnak meg, ahol bevezettük a $g_i = u_i - \sum_j a_{i,j}$ és $h_j = v_j - \sum_i a_{i,j}$ jelöléseket az előírt sor- és oszlopösszesenek eltérésére az \mathbf{A} mátrix megfelelő sor- és oszlopösszesenjeitől.

Legyen $\mathbf{S} = |\mathbf{A}|$, ahol $|\mathbf{A}|$ az a mátrix, amely \mathbf{A} elemeinek abszolút értékeit tartalmazza, $\mathbf{w} = \mathbf{1}^T \mathbf{S}$, $\mathbf{q} = \mathbf{S} \mathbf{1}$, valamint $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{q}}^{-1} \mathbf{S}$ és $\mathbf{C} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{w}}^{-1}$ az \mathbf{S} sor- illetve oszlopírányú megoszlásait tartalmazó mátrixok. A (13) és (14) képletnek (12)-be való behelyettesítésével azt kapjuk, hogy az első iterációs lépésben a mátrix elemei a

$$\begin{aligned} d_{i,j}^{(1)} &= |a_{i,j}| \cdot (\lambda_i^{(1)} + \tau_j^{(1)}) = g_i \cdot |a_{i,j}| / \sum_j |a_{i,j}| + h_j \cdot |a_{i,j}| / \sum_i |a_{i,j}| = \\ &= g_i \cdot r_{i,j} + h_j \cdot c_{i,j} \end{aligned} \tag{15}$$

mértékben változnak meg. Ez tehát azt jelenti, hogy az első iteráció a sorok, illetve oszlopok szükséges kiigazítását éppen az egyes $a_{i,j}$ elemek sorirányú, illetve oszlopírányú abszolútérték-részesedésének arányában szétosztva végzi el. Figyeljük meg, hogy ez az első iterációs lépés a kiigazítást összességében duplán végezné el, a kapott mátrix mindösszesen je

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{i,j}^{(1)} = \sum_{i=1}^m g_i + \sum_{j=1}^n h_j$$

képletében mind a $\sum_{i=1}^m g_i$, mind a $\sum_{j=1}^n h_j$ tag önmagában biztosítaná, hogy a mátrix mindösszesen je az előírt legyen.

A közben bevezetett jelölésekkel a Lagrange-szorzók (végső) értékeit meghatározó (9) egyenleteket $q_i = \sum_j |a_{i,j}|$ -vel, a (10) egyenleteket pedig $w_j =$

$\sum_i |a_{i,j}|$ -vel beszorozva a

$$\lambda_i \cdot q_i = g_i - \sum_j \tau_j \cdot s_{i,j} \quad (16)$$

$$\tau_j \cdot w_j = h_j - \sum_i \lambda_i \cdot s_{i,j} \quad (17)$$

alakra egyszerűsödnek. Mátrixalgebrai jelölésekkel (16) és (17) a

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (18)$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerben foglalható össze, ahol $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{g} és \mathbf{h} rendre a λ_i , τ_j , g_i és h_j elemekből képzett oszlopvektorok.

Mivel $\mathbf{1}^T \mathbf{g} = \mathbf{1}^T \mathbf{h}$, valamint $\hat{\mathbf{q}} \mathbf{1} = \mathbf{q} = \mathbf{S} \mathbf{1}$ és $\hat{\mathbf{w}} \mathbf{1} = \mathbf{w} = \mathbf{S}^T \mathbf{1}$, fennáll, hogy

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

azaz a továbbiakban \mathbf{S}^* -gal jelölt $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix}$ (egyébként láthatóan szimmetrikus) mátrix szinguláris (sorai, illetve oszlopai összefüggők). Ezért a (18) egyenletrendszer nem oldható meg az \mathbf{S}^* (nem létező) inverzével balról való beszorozásával, hanem (legalább) egy változót ki kell fejezni a többivel, és el kell hagyni az egyenletrendszer hozzá tartozó (azonos sorszámú) egyenletével együtt. Végül az $(m + n - 1)$ egyenletből és változóból álló redukált egyenletrendszert lehet megoldani a redukált együtthatómátrix inverzével balról való beszorozásával.

3.1 Az előjelváltást megengedő módszerekről

A negatív elemeket is tartalmazó mátrixok elemeinek becslésénél előfordulható előjelváltást korábban értelemszerűen igyekeztek elkerülni (már csak azért is, mert negatív $z_{i,j}$ esetén a célfüggvényként definiált, az entrópia-modellekben szokásosan használt logaritmus függvény nincs értelmezve), s előjeltartó („sign-preserving”) algoritmusokat kidolgozni. Azonban előfordulhatnak olyan esetek is, amikor az előírt peremek olyanok, hogy az $a_{i,j}$ és $x_{i,j}$ elemek előjele különböző kell, hogy legyen.

Lemelin [2009] egy ilyen esetet is bemutat a cikkében. Miközben igyekszik kiterjeszteni és tesztelni a GRAS- és a Kullback – Leibler [1951]-féle kereszt-entrópia becslési módszereket zérus-peremű mátrixokra, Junius és Oosterhaven számpéldájának mátrixát először mint nettó *világkereskedelmi mátrixot* értelmezi át, ahol az inkonzisztens kiinduló adatok \mathbf{A} mátrixának $a_{i,j}$ eleme mutatja a j -edik ország nettó exportját az i -edik termékből, és amelynek becslült X mátrixának mind a sorösszesenjei, mind az oszlopösszesenjei zérusok kell, hogy legyenek, majd mint nemzetközi befektetési nettó pozíciók mátrixát, ahol az inkonzisztens kiinduló adatok \mathbf{A} mátrixának $a_{i,j}$ eleme

mutatja a j -edik ország nettó követelését az i -edik befektetési eszközből, és amely becsült X mátrixa sorösszesenjeinek ugyancsak zérusnak kell lenniük, de az egyes oszlopösszesenek negatív értékét teszi szükségessé. Ez utóbbi esetben Lemelin a mátrix eredetileg pozitív elemekből álló 2. oszlopának előírt összegét szándékosan negatív értékkel határozza meg, hogy kikényszerítse egyes elemek előjelváltását, és ezen tesztelhesse Kullback és Leibler, valamint Junius és Oosterhaven erre az esetre Lemelin által némiképpen módosított GRAS- illetve kereszt-entrópia módszerét.

Az indulómátrix és az elvárt peremek konkrétan az 1. táblázatban szereplő értékek voltak.

	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	7	3	5	-3	12	0
2. p.ü. eszköz	2	9	8	1	20	0
3. p.ü. eszköz	-2	0	2	1	1	0
Összesen	7	12	15	-1		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

1. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók mátrixának kiinduló értéke

A kereszt-entrópia módszerrel becsült mátrix a 2. táblázat szerinti lett.

Pénzügyi eszköz	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	27495.1	-36579.2	24854.4	-15770.3	0	0
2. p.ü. eszköz	-11049.5	36563.2	-34936.8	9423.2	0	0
3. p.ü. eszköz	-16436.5	0	10099.5	6337.1	0	0
Összesen	9	-16	17	-10		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

2. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók kereszt-entrópia modellel becsült mátrixa

Lemelin a kereszt-entrópia módszer nyilvánvalóan irreális eredményeit azal magyarázza, hogy a módszer igyekszik megőrizni a mátrix elemeinek arányait, így ha akár csak kis oszlopösszegeket kell korrigálni nagyobb arányban, akkor a hozzájuk tartozó oszlop elemeket is azonos nagy arányban módosítja (a RAS-hoz hasonlóan).

Lemelin [2009] a GRAS-módszerrel a 3. táblázatbeli becslést kapta (lásd a cikke 8. táblázatát).

	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	17,07	-23,44	18,65	-12,28	0	0
2. p.ü. eszköz	-2,49	7,44	-6,52	1,58	0	0
3. p.ü. eszköz	-5,57	0	4,87	0,71	0	0
Összesen	9	-16	17	-10		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

3. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók GRAS-modellel becsült mátrixa

Lemelin a két módszerrel kapott eredményeket összevetve megállapítja, hogy a módosított GRAS-módszere jobbnak bizonyult, mint a kereszt-entrópia módszer. Sajnos nem vizsgálta a kvadratikus jellegű célfüggvényekkel

kapható megoldásokat, pedig azok maguktól értetődően megengedik az előjelváltásokat. Erre a következő alfejezetben még visszatérünk.

Lenzen [2014] miután elsősorban a (az ÁKM-ekben külön oszlopban megjelenő) készletváltozások kapcsán bemutatja, hogy a készletváltozások milyen okokból, mely termékekből és milyen gyakorisággal változnak, általában is megfordítja az előjelváltás addigi negatív minősítését, és erényként hangsúlyozza, hogy ha kell, adott esetben a becslési eljárás meg tudja fordítani a mátrix elemeinek előjelét.

3.2 Az additív RAS módszer

A zérus (vagy zérus-közeli) elvárt peremek, illetve szerencsétlen helyen és nagyságrendben megjelenő negatív elemeket tartalmazó indulómátrix esetében használhatatlan RAS-módszert egy olyan iterációs algoritmusra módosítottam (Révész [2001]), hogy szorzás helyett először a sorösszegekben az elvárttól való elmaradást kell szétszteni a indulómátrix adott sorában levő elemek között az *abszolútérték-részesedésük* arányában a

$$x_{i,j}^{(1)(r)} = a_{i,j} + g_i^{(1)} \cdot r_{i,j} \quad (20)$$

képlet alapján (ahol $g_i^{(1)} = g_i$), majd oszlopírányban is hasonló kiigazítást kell végrehajtani a

$$x_{i,j}^{(1)} = x_{i,j}^{(1)(r)} + h_j^{(1)} \cdot c_{i,j} \quad (21)$$

képlet alapján, ahol $h_j^{(1)} = v_j - \sum_i x_{i,j}^{(1)(r)}$.

Általában az n -edik iteráció (amely tehát az n -edik sorirányú és n -edik oszlopírányú kiigazítás lépéseit tartalmazza) a

$$x_{i,j}^{(n)(r)} = x_{i,j}^{(n-1)} + g_i^{(n)} \cdot r_{i,j} \quad (22)$$

(ahol $g_i^{(n)} = u_i - \sum_j x_{i,j}^{(n-1)}$), illetve

$$x_{i,j}^{(n)} = x_{i,j}^{(n)(r)} + h_j^{(n)} \cdot c_{i,j} \quad (23)$$

képletekkel írható fel, ahol $h_j^{(n)} = v_j - \sum_i x_{i,j}^{(n)(r)}$. Ennek alapján az első n iteráció után az egyes elemek $d_{i,j}^{(n)} = x_{i,j}^{(n)} - a_{i,j}$ összes addigi módosulása a

$$d_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^n (g_i^{(k)} \cdot r_{i,j} + h_j^{(k)} \cdot c_{i,j}) = r_{i,j} \cdot \sum_{k=1}^n g_i^{(k)} + c_{i,j} \cdot \sum_{k=1}^n h_j^{(k)} \quad (24)$$

képlettel írható fel. Ha az eljárás konvergens, akkor nyilvánvalóan a $d_{i,j}^{(\Sigma)}$ határértékre a

$$d_{i,j}^{(\Sigma)} = r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)} \quad (25)$$

áll fenn, ahol $g_i^{(\Sigma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_i^{(n)}$ és $h_j^{(\Sigma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_j^{(n)}$.

Mivel a konvergencia nyilván csak az előírt sor- és oszlopösszesenekhez történhet (különben az eljárás tovább módosít az eltérések szétosztásával), a (25) egyenletet j -re összegezve a

$$\begin{aligned} g_i &= \sum_j d_{i,j}^{(\Sigma)} = \sum_j (r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)}) = g_i^{(\Sigma)} \cdot \sum_j (r_{i,j} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)}) = \\ &= g_i^{(\Sigma)} + \sum_j c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)} \end{aligned} \quad (26)$$

illetve i -re összegezve a

$$\begin{aligned} h_i &= \sum_j d_{i,j}^{(\Sigma)} = \sum_j (r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)}) = \sum_j r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + h_j^{(\Sigma)} \cdot \sum_i c_{i,j} = \\ &= \sum_j r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + h_j^{(\Sigma)} \end{aligned} \quad (27)$$

feltételekhez jutunk a $g_i^{(\Sigma)}$ és $h_j^{(\Sigma)}$ ez idáig ismeretlen értékeire. A (26) és (27) egyenleteket mátrixalgebrai formában rendre a

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{(\Sigma)} + \mathbf{C}\mathbf{h}^{(\Sigma)} = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{g}^{(\Sigma)} + \mathbf{S}\hat{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{h}^{(\Sigma)} \quad (28)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}^T\mathbf{g}^{(\Sigma)} + \mathbf{h}^{(\Sigma)} = \mathbf{S}^T\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{g}^{(\Sigma)} + \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{h}^{(\Sigma)} \quad (29)$$

formában írhatjuk fel, ahol $\mathbf{g}^{(\Sigma)}$ és $\mathbf{h}^{(\Sigma)}$ a $g_i^{(\Sigma)}$, illetve $h_j^{(\Sigma)}$ elemekből képzett oszlopvektorokat jelentik. A (28) és (29) egyenleteket a

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}^{-1} & \mathbf{g}^{(\Sigma)} \\ \hat{\mathbf{w}}^{-1} & \mathbf{h}^{(\Sigma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (30)$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerben foglalhatjuk össze. Összevetve ezt a kapott egyenletrendszert a (18) egyenletrendszerrel, látható, hogy mind az együtthatómátrixuk, mind a konstans vektoruk azonos. Tehát a (18) és (30) egyenletrendszernek azonosak a megoldásai is. Tehát ha a λ , τ a (18) megoldása, akkor a $\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{g}^{(\Sigma)} = \lambda$ és $\hat{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{h}^{(\Sigma)} = \tau$ összefüggéseknek eleget tevő

$$\mathbf{g}^{(\Sigma)} = \hat{\mathbf{q}}\lambda \quad (31)$$

$$\mathbf{h}^{(\Sigma)} = \hat{\mathbf{w}}\tau \quad (32)$$

$\mathbf{g}^{(\Sigma)}$ és $\mathbf{h}^{(\Sigma)}$ vektorok a megoldása a (30) egyenletrendszernek. Az így kapott értékeket behelyettesítve a (25) egyenletbe a

$$d_{i,j}^{(\Sigma)} = r_{i,j} \cdot q_i \cdot \lambda_i + c_{i,j} \cdot w_j \cdot \tau_j = s_{i,j} \cdot \lambda_i + s_{i,j} \cdot \tau_j = |a_{i,j}| \cdot (\lambda_i + \tau_j) \quad (33)$$

összefüggés adódik az additív-RAS algoritmus eredő cellamódosításaira. Ez pedig éppen megegyezik a Huang et al [2008] által levezetett INSD-módszer (12) képletben található (optimális) megoldásával.

Tehát bizonyítottuk, hogy az additív-RAS algoritmus eredménye azonos az INSD-módszerével abban az esetben, ha a mátrix elemei nem váltanak

előjelet. Szerencsére az előjelváltás csak az elvárt és tényleges peremértékek extrém arányai esetében fordulhat elő. Ugyanis (mivel az abszolútérték-részesedések kisebbek a részesedéseknél) hacsak az elvárt és tényleges peremértékek arányai nem csökkennek -100% alá, akkor az iteráció biztosan nem vezet a mátrix elemeinek előjelváltásához. Sőt, általában még ennél extrémebb arányoknál sem. Mindenesetre extrémebb arányok esetén megkérdőjeleződik a referencia mátrix használhatósága, azaz, hogy a keresett mátrix szerkezete tényleg képes-e megőrizni az eredeti mátrix szerkezetét.

A fenti „abszolútérték-részesedések kisebbek a részesedéseknél” megállapítás némi pontosításra szorul. Ugyanis ez akkor igaz, ha ugyanazon vektor elemeiből számítoznak. A fentebb bemutatott algoritmus esetében azonban az abszolútérték-részesedések mindig az indulómátrix $a_{i,j}$ elemeiből számítoznak, miközben az aktuális részesedések a mindenkori $x_{i,j}^{(n)(r)}$, illetve $x_{i,j}^{(n)}$ mátrixok elemeiből. Így ha valamilyen oknál fogva ez utóbbiak arányai jelentősen eltérnek az eredeti mátrixétól, akkor előfordulhat, hogy az additív-RAS algoritmus előjelet vált. Ettől persze még konvergálhat, és egész ésszerűnek látszó eredményekre is vezethet, de nem garantálható, hogy valamilyen szokásos optimumkritérium (távolságmetrika) alapján a legjobb becslést adja.

Ha tehát az additív-RAS algoritmus előjelváltást eredményez, és ezáltal matematikai tulajdonságai úgyis átláthatatlanná válnak, akkor már érdemes az algoritmust egy technikailag csekély módosítással használni. Nevezetesen az abszolútérték-részesedéseket is – a RAS-algoritmus szorzói logikájához hasonlóan – a mindenkori $x_{i,j}^{(n)(r)}$ illetve $x_{i,j}^{(n)}$ mátrixok (pontosabban mivel eltérnek az eredeti additív-RAS algoritmusétól, ezért jelöljük ezeket $\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)}$ -vel illetve $\tilde{x}_{i,j}^{(n)}$ -vel) arányában szétosztani. Tehát az n -edik iterációs lépés (22)-(23) képletei a következőkre módosulnak:

$$\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)} = \tilde{x}_{i,j}^{(n-1)} + g_i^{(n)} \cdot r_{i,j}^{(n)}, \quad (34)$$

ahol $r_{i,j}^{(n)} = |\tilde{x}_{i,j}^{(n-1)}| / \sum_j |\tilde{x}_{i,j}^{(n-1)}|$, illetve

$$\tilde{x}_{i,j}^{(n)} = \tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)} + h_j^{(n)} \cdot c_{i,j}^{(n)}, \quad (35)$$

ahol $c_{i,j}^{(n)} = |\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)}| / \sum_i |\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)}|$.

Általában is az additív RAS módszer általános képleteiből (lásd a (22)-(23), illetve (34)-(35) egyenleteket) látható, hogy mivel $\sum_j r_{i,j} = \sum_j r_{i,j}^{(n)} = \sum_i c_{i,j} = \sum_i c_{i,j}^{(n)} = 1$ definíciószerűen, ezért

$$\sum_j x_{i,j}^{(n)(r)} = \sum_j \tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)} = u_i, \quad \sum_i x_{i,j}^{(n)} = \sum_i \tilde{x}_{i,j}^{(n)} = v_j,$$

azaz az előírt peremfeltételek teljesülnek.

Természetesen nemnegatív elemek esetén mind az eredeti, mind a módosított additív-RAS iterációs lépései pontosan ugyanazt adják, mint a hagyományos RAS-algoritmus, azaz megoldásaik is azonosak.

Az előbb elmondottak alapján egyelőre (költői) kérdés, hogy a végeredményben kapott $\tilde{x}_{i,j}$ mátrix a fentiekben tárgyaltakon túl milyen matematikai tulajdonságú, mennyire jól illeszkedik a kiinduló mátrixhoz vagy egy, az előző bekezdésben vázolt kiigazított kiinduló mátrixhoz. A fent igazolt matematikai tulajdonságaitól eltekintve azt mondhatjuk, hogy a módosított additív-RAS algoritmus olyan, mint egy természetgyógyász készítmény, megfelelően hat, de a hatásmechanizmusa és az alkalmazhatósági/hatékonysági körülményei nem minden tekintetben tisztázottak. Valószínűleg ilyesfélék miatt nem keltette fel eddig a matematikusok figyelmét, és így a módszer matematikai tulajdonságainak részletesebb, precíz diszkussziója tehát még hátravan, és számos érdekes összefüggést tárhat fel.

Szerencsére az eddigi, több mint 25 éves tapasztalataink alapján általában az additív-RAS-módszernek mind a konvergenciája elég gyors, mind az illeszkedése rendkívül jó. De, hogy ne a saját számpéldánkkal érzékeltesük ezt, tekintsük a Huang et al [2008] cikk számpéldáját.

Természetesen az additív-RAS-t nem tartalmazza a Huang et al [2008] cikk, így a rá vonatkozó számításokat mi végeztük el. Mindenesetre az additív-RAS megoldásnak a Huang által preferált AIL (average information loss) illeszkedési mutatója ugyanakkorának adódott (11,28), mint az általa legjobbnak tartott INSD-módszer eredményéé, sőt tényleg a mátrix minden elemére pontosan azonos becslést adott az additív-RAS módszer és az INSD-célfüggvénnyel számított módszer.

Noha az előjelváltások esetében az additív-RAS illetve az INSD-becslés matematikai tulajdonságairól a Huang et al [2008] által mondottakon túl kevés konkrétumot tudunk mondani, mind az eredeti, mind a módosított additív-RAS algoritmusok a Lemelin [2009] által konstruált számpéldára is kiváló eredményt adtak. Az eredmények a 4. táblázatban láthatók.

	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	7,89	-4,42	5,10	-8,58	0	0
2. p.ü. eszköz	2,62	-11,58	9,64	-0,67	0	0
3. p.ü. eszköz	-1,52	0,00	2,27	-0,75	0	0
Összesen	9	-16	17	-10		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

4. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók additív-RAS modellel becsült mátrixa

A fenti táblázatot összevetve az előző alfejezetben már bemutatott indukciómátrixszal látható, hogy szinte minden elem a előírt peremek eléréséhez szükséges változások irányában változott meg, és a változások relatív nagysága is kielégítő. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a módszerünk nem használ semmiféle önkényes normalizálást.

Lemelin [2009] 8. táblázatában (általunk fentebb a 3. táblázatban) szereplő javasolt megoldásával összehasonlítva az eredményeinket, világosan látható, hogy az additív-RAS megoldás egyértelműen jobb, különösen az $a_{2,1}$ elemet tekintve, valamint Lemelin megoldásában az egész 2. és 4. oszlopot nézve, ahol rejtélyes, hogy miért emelkedett két elem, ha mind a hozzájuk tartozó sorösszegeknek, mind az oszlopösszegeknek csökkeniük kellett.

A MAD (mean average deviation) értékek kiszámításával próbáltuk kimutatni a Lemelin-cikk megoldásának, valamint az eredeti és a módosított additív-RAS algoritmus megoldásának az illeszkedési „pontosságát”. A Lemelin vs. additív-RAS-megoldások között persze e nélkül is látványos volt a különbség és az additív RAS-becslés abszolút fölénye, amit a MAD érték is fényesen igazol (Lemelin GRAS-megoldásában 7,28, az additív-RAS-nál pedig 3,42). Az eredeti- és módosított additív-RAS számítás MAD-je között kicsi a különbség, a módosított additív-RAS-é kicsit magasabb (3,47).

3.3 A 2010. évi EU-ÁKM-eket a GTAP-ágazati bontásban becsülő modell

A gyakorlati alkalmazási és általánosítási lehetőségek érzékeltetésére ebben az alfejezetben egy olyan friss kutatási projektről lesz szó, amelyben a mátrixkiigazítási feladatot a fentieknél általánosabban kellett megfogalmaznunk, és a megoldásánál a probléma közgazdasági-gazdaságstatisztikai vonatkozásait szem előtt tartva különféle szakmai fogásokat kellett célszerűen kombinálnunk.

Az ún. EU-GTAP projekt keretében (lásd Rueda et al (2016) a *EU-GTAP project - final report-161005.pdf* file-ban) az Európai Bizottság Kereskedelmi Főigazgatósága (DG Trade) megbízásából a Közös Kutató Központ (JRC) az Eurostat közvetítői, módszertani ellenőrei és a GTAP-konzorcium¹⁴ szakértői segítségével először az EU-országoknak az SNA2008 (lásd Eurostat [2008]) módszertana és ágazati bontása szerinti 2010. évi Ágazati Kapcsolati Mérlegeit (ÁKM-eit) és termékadó mátrixait állították elő egységes szerkezetben (beleértve a hiányzó ÁKM-eknek a becslését is, és a nettó termékadó mátrixoknak a főbb adó- és támogatások szerinti bontását is – becslésekkel – elvégezve). Ezután az így kapott „Eurostat-szerkezetű” ÁKM-eket és a hozzájuk tartozó termékadó mátrixokat transzformálva (elsősorban a bányászatot, az élelmiszer-ital-dohányipart, a textil-ruházati ipart, a kohászatot, valamint a villamosenergia-gáz-hőszolgáltatást dezaggregálva) a GTAP-adatbázis 57 ágazatára előállították mind alapáron, mind felhasználói áron a termék(csoportos) bontású EU-GTAP ÁKM-eket. Az eredményeket a GTAP világmodell adatbázis 9.2-es verziójába építették be.

E projekt keretében is sor került az additív-RAS módszer alkalmazására. Spanyolországra állítólag létezik a nettó termékadó mátrix, de titkosítva van. Ezért az additív-RAS kétirányú arányosítási módszerrel becsültük a 2010. évi Felhasználás táblát használva referenciamátrixként¹⁵. Ez az összehasonlítás-

¹⁴Erről a világmodellezési adatbázissal foglalkozó szervezetről lásd a honlapjukat (www.gtapp.org)

¹⁵Ez azokban a sorokban minden elemre negatív nettó termékadót becsült, ahol a sorösszesen, azaz az adott termékben levő összes termékadók és támogatások egyenlege (nettó termékadó) negatív volt (például a mezőgazdaság, bányászat és szárazföldi közlekedés esetében). Hasonlóan, azon ágazat (konkrétan az élelmiszeripar) oszlopában, amelynek az inputjain összességében negatív volt a termékadók és támogatások egyenlege, szintén minden elemre negatív (vagy zérus) termékadót becsült az additív-RAS módszer. Ezzel szemben a RAS-módszer a negatív peremű sorok és negatív peremű oszlopok találkozási pontjában (cellájában) *pozitív* (!) nettó termékadót becsült, ami teljességgel elfogadhatatlan.

ként szintén alkalmazott RAS-módszerhez képest jóval ésszerűbb szétosztását eredményezte a rendelkezésre álló sor- és oszlopösszeseneknek.

Az EU-GTAP projektben a kétirányú mátrix-kiigazítási probléma egy komplexebb becslési feladat részeként jelent meg. Ugyanis mind a *hazai termékáramlások mátrixát*, mind az *importmátrixot* kellett becsülnünk, de nem külön-külön, hanem úgy, hogy az oszlopösszesenek (folyó termelőfelhasználás ágazatonként, összes felhasználás végső felhasználási kategóriánként), illetve az egyes cellákra vonatkozó alsó- és felső korlátok csak a két mátrix összegére álltak rendelkezésre. Ezért a feladatot *bi-mátrix kiigazítási feladat*nak is nevezhetjük.

Ezen túlmenően (főleg az eredeti statisztikai adatok hibái, inkonzisztenciája és negatív elemekhez vezető módszertani megoldásai miatt) néhány esetben egyedi kivételekkel, de a mátrixok elemei zömére nemnegativitási kikötéssel is kellett élnünk, valamint az aggregáltabbban rendelkezésre álló adatokat figyelembe véve a becslendő (dezaggregáltabb) mátrix elemeire blokk-összesen- és egyéb feltételeket is elő kellett írunk.

E komplex feladat megoldására kidolgozott modell (az alsó, felső korlátokat az egyes ráfordítási együttthatókra, export/termelés részarányokra és készletfelhalmozásokra, az előjelkorlátokat és kivételeket nem tartalmazó) lényegi részét az alábbiakban írhatjuk fel matematikai jelölésekkel:

Halmazok

I GTAP-adatbázisban (www.gtap.org) szereplő ágazatok (általános elemét i -vel, illetve j -vel jelöljük, attól függően, hogy sor- vagy oszlopindexet jelöl)

V Végső felhasználási kategóriák (általános elemét v -vel jelöljük)

B Az Eurostat ÁKM-ek és a GTAP-ágazatok közös aggregációjának ágazatai (általános elemét b -vel illetve b' -vel jelöljük attól függően, hogy sor- vagy oszlopindexet jelöl)

$M(b, i)$ A közös aggregációs szint ágazatai és a GTAP-ágazatok megfeleltetésének halmaza, azon (b, i) párok halmaza, amelyben az i GTAP ágazat a b közös aggregációs ágazatba tartozik

Változók (normális esetben nemnegatívak, például a készletfelhalmozás)

$D^P(i, j)$ a hazai termékek folyó termelő felhasználásának mátrixa az ÁKM-ben

$D^F(i, v)$ a hazai termékek végső felhasználásának mátrixa az ÁKM-ben

$M^P(i, j)$ az importmátrixnak a folyó termelő felhasználási blokkja

$M^F(i, v)$ az importmátrixnak a végső felhasználási blokkja

Paraméterek

$x(i)$ bruttó termelési értékek GTAP-ágazatonként

$m(i)$ import GTAP-ágazatonként

$v(i)$ hozzáadott érték GTAP-ágazatonként
 ε alkalmasan megválasztott kis szám (0,1 a GAMS programban)
 λ alkalmasan megválasztott nagy szám (10 a GAMS programban)
 $D_0^p(i, j)$ referencia (prior) mátrix a $D^p(i, j)$ becsléséhez
 $D_0^f(i, v)$ referencia (prior) mátrix a $D^f(i, v)$ becsléséhez
 $M_0^p(i, j)$ referencia (prior) mátrix az $M^p(i, j)$ becsléséhez
 $M_0^f(i, v)$ referencia (prior) mátrix az $M^f(i, v)$ becsléséhez
 $D_a^p(b, b')$ a $D^p(i, j)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
 $M_a^p(b, b')$ az $M^p(i, j)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
 $D_a^f(b, v)$ a $D^f(i, v)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
 $M_a^f(b, v)$ az $M^f(i, v)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
 \vdots

*Korlátozó feltételek*¹⁶

$$\begin{aligned}
 x(i) &= \sum_j D^p(i, j) + \sum_v D^f(i, v) \\
 m(i) &= \sum_j M^p(i, j) + \sum_v M^f(i, v) \\
 v(j) &= x(j) - \sum_i \{D^p(i, j) + M^p(i, j)\} \\
 D_a^p(b, b') &= \sum_{i|(b,i) \in M} \sum_{j|(b',j) \in M} D^p(i, j) \\
 M_a^p(b, b') &= \sum_{i|(b,i) \in M} \sum_{j|(b',j) \in M} M^p(i, j) \\
 D_a^f(b, v) &= \sum_{i|(b,i) \in M} D^f(i, v) \\
 M_a^f(b, v) &= \sum_{i|(b,i) \in M} M^f(i, v) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Célfüggvény

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i,j} \left(\left[\frac{D^p(i, j) + \varepsilon}{D_0^p(i, j) + \varepsilon} - 1 \right]^2 + \left[\frac{D_0^p(i, j) + \varepsilon}{D^p(i, j) + \varepsilon} - 1 \right]^2 + \left[\frac{M^p(i, j) + \varepsilon}{M_0^p(i, j) + \varepsilon} - 1 \right]^2 + \right. \\
 &\left. + \left[\frac{M_0^p(i, j) + \varepsilon}{M^p(i, j) + \varepsilon} - 1 \right]^2 \right) + \lambda \sum_{i,v} \left(\left[\frac{D^f(i, v) + \varepsilon}{D_0^f(i, v) + \varepsilon} - 1 \right]^2 + \left[\frac{M^f(i, v) + \varepsilon}{M_0^f(i, v) + \varepsilon} - 1 \right]^2 \right)
 \end{aligned}$$

Figyeljük meg a fenti célfüggvény alábbi sajátosságait:

- ε alkalmasan választott kis számérték teszi lehetővé, hogy olyan cellákra is nemzérus becslést kaphassunk, amelyekre az indulómátrixban zérus érték szerepelt. Ezt a minimumértéket vezette be például Möhr et al

¹⁶Ebben a blokkban a $|$ függőleges vonalszakasz a „ha” szót helyettesíti, azaz azt jelenti, hogy az összegzés azon elemekre szorítkozik, amelyek a $|$ jel jobb oldalán álló feltéltel kielégítik. Itt sem soroljuk fel az egyes ráfordítási együtthatókra, exportokra és készletfelhalmozásokra vonatkozó abszolút- illetve relatív alsó, illetve felső korlátokat és az előjelkorlátokat, illetve az ezek alóli kivételeket.

(1987) a RAS-módszer alkalmazásánál az előírt feltételek (sokszor rejtett) inkonzisztenciája kiküszöbölésére (ezt a szerzők „augmentation”-nek hívják), ezáltal biztosítva, hogy rendelkezésre álljanak növelhető elemek, ha az előírt sor- és oszlopösszegek ezt kívánják meg. Később például Lemelin et al [2013] is használták ezt a módszert arra hivatkozva, hogy a kereszt-entrópia modell célfüggvényében szereplő logaritmust zérus elemekre e nélkül nem lehetne kiszámítani („To avoid having to take the log of zero in the CE /Cross Entropy/ method, the GAMS program adds a small amount to each cell value”) és ezt az érvelést szó szerint, de idézés nélkül átveszi Ming-Chang Lee [2014]. Mi azonban nem pusztán a fenti technikai okokból engedjük meg az ilyen kis pozitív értékeket, hanem azért is, hogy a ténylegesen *korábban nem létező áramlásokat is megragadhassuk*, valamint azért, hogy biztosítsuk a ritka mátrixok esetén is a gyors konvergenciát és közgazdaságilag értelmes megoldást (a kényszerigazodások mellékhatásait csökkentendő).

- Az egyes mátrixelemek relatív eltéréseit az indulómátrix megfelelő elemétől reciprok, a számlálót a nevezővel felcserélő módon is szerepeltetjük, összeadva az eredeti hányadossal. Ez az újszerű megoldás¹⁷ megakadályozza, hogy az indulómátrixbeli nagy abszolút értékű elemek nagyon kicsire változzanak a becslésben.
- A λ súlyok (konkrétan $\lambda = 10$ értékkel futott a GAMS program), amiket más elvi alapon mások is már bevezettek (Byron [1978] például az indulóértékek megbízhatóságának mutatójaként értelmezi), itt arra szolgálnak, hogy a végső felhasználásokra adott becslés jobban igazodjon az indulómátrixbeli értékhez, pontosabban annak *ellensúlyozására* lettek bevezetve, hogy a becslés ne legyen hajlamos az igen nagy számú folyó termelőfelhasználási mátrixelem relatív hibáinak csökkentése érdekében feláldozni a viszonylag kis számú végső felhasználási mátrixelem illeszkedési pontosságát.

4 A nemzetgazdasági elemzésekben használt fontosabb kiigazítandó mátrixok

Ebben a fejezetben azt a korábban megfogalmazott állítást fejtjük ki kicsit részletesebben, hogy az, hogy a kétirányú mátrixkiigazítási feladat megoldásának melyik módszerét érdemes választani, az a mátrix közgazdasági tartalmától is függ. A nemzetgazdasági modellekben használt különféle kiigazítandó mátrixok típusainak felsorolása mellett rámutatunk azokra a sajátosságokra, amelyek a matematikai becslési eljárás választását, annak várható

¹⁷A hányados reciprokának használata önmagában korábbi szerzőknél is előfordult, az újítás az eredeti és a reciprok hányados összeadása és kombinálása az ε hozzáadásával mind a számlálóhoz, mind a nevezőhöz a reciprok módszer hátrányainak (zérussal való osztás) kiküszöbölésére.

eredményességét befolyásolják, illetve azokra a módszerekre, amelyekkel a standard matematikai eljárásokat célszerű kiegészíteni.

4.1 Az „A-típusú ÁKM”

Ha a felhasználásokban nem különböztetjük meg a hazai és import eredetű termékeket, akkor a termékmérlegek az $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{1} + \mathbf{y}^h + \mathbf{z}$ egyenletrendszerrel írhatók fel, ahol az \mathbf{x} vektor az egyes ágazatok (vagy termékek) bruttó termelésének vektora, az \mathbf{u} , \mathbf{z} , és \mathbf{y}^h rendre az import, az export és a belföldi végső felhasználás termékenkénti bontását mutató vektor, a \mathbf{T} mátrix t_{ij} eleme pedig az i -edik termék (folyó termelő) felhasználását mutatja a j -edik termék előállításában. Az ún. „A” típusú ÁKM¹⁸ is együtt szerepelteti a táblázat felső hasábjában az importált és a hazai termékek elosztását, de az oszlop- és a sorösszegek egyenlőségét az importnak a végső felhasználásból való levonásával teremti meg ($\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{1} + \mathbf{y}^h + \mathbf{z} - \mathbf{u}$ képlettel felírható nettó termékmérlegeket ábrázolva, ahol $\mathbf{z} - \mathbf{u}$ a *nettó export*).

Látható, hogy a nettó termékmérlegekből készített táblázatnak (azaz a $[\mathbf{T}, \mathbf{y}^h, \mathbf{z}, -\mathbf{u}]$ mátrixnak, aminek sorösszegei az \mathbf{x} bruttó termelési értékek) egy más (új) bruttó termelési vektorhoz és más oszlopösszegekhez (összes termékfelhasználások felhasználók szerint) történő kétirányú kiigazításakor a referenciamátrixban az $-\mathbf{u}$ komponens miatt számos negatív eleme van. Ezért a standard RAS-módszer nem használható, pontosabban semmi garancia nincs arra, hogy jól működik, vagy ahogy Jackson és Murray [2004] jellemezték, a negatív elemek esetén a RAS viselkedése „erratic”, azaz kiszámíthatatlanul változékonyak lehetnek az iterációk eredményei.

A negatív elemek előfordulásának problémája a nyílt statikus ÁKM-mo-delleknél használt ÁKM-eknél a mátrix más helyein, más kategóriáknál is jelentkezik, mindenekelőtt a *készletváltozás* oszlopvektoránál (amely tehát az összes készletváltozást termékenként mutatja). Ha az egész ÁKM-et kell becsülni, azaz a hozzáadott érték elemei is ismeretlenek, akkor ritkán (ha a folyó ráfordítások nagyobbak a termelési értéknél) előfordulhat, hogy maga a *hozzáadott érték* is negatív, amiből természetesen következik, hogy valamelyik összetevője (gyakorlatilag vagy a *működési eredmény*, vagy a *termelési adók és támogatások egyenlege*) negatív.

Az ÁKM-ekben található további negatív elemek egyes rendkívüli események sajátos elszámolásából adódnak. Az Eurostat adatbázisban található 2010. évi termékcsoportos bontású ÁKM-ben például ilyeneket találhatunk az *állóeszköz-felhalmozások*, a *fogyasztás* és az *export* oszlopában (főleg a re-export jellegű tételek nettó, árkülönbözet jellegű elszámolása miatt). Az ezek okára vonatkozó vizsgálataink eredményeinek ismertetését e cikk terjedelme nem teszi lehetővé, itt csak annyit jegyzünk meg, hogy bár sokszor igen nehéz utánajárni a negatív elemek okának, de egyes fontosabb esetekben minden-

¹⁸Az ÁKM-ek két egymást átfedő mérlegből állnak. Egyfelől (az ún. felső hasábjában, vagy idegen szóhasználatlaltal a „tranzakciós-mátrixban”) tartalmazza (sorirányban) az egyes termékek mérlegeit, másfelől (oszlopirányban) a termelési érték felosztását ráfordításokra és jövedelmekre. Bővebbet lásd Zalai [2012]-ben.

képpen meg kell próbálni, mielőtt a kiigazítás „vak” általános módszereit vetnénk be.

Az ÁKM-ek kétirányú kiigazítását is problematikusabbá tehetik a sor- illetve oszlopösszesenekben található zérus elemek. Például, ha az „A-típusú ÁKM”-et próbáljuk számszerűsíteni (ahol a sorösszesenek a bruttó termelési értékek), akkor a sorösszesenek egy része könnyen lehet zérus, azaz ha az adott termékből nincs hazai termelés. A készletfelhalmozások oszlopánál is könnyen előfordulhat, hogy ennek összesenje zérus vagy ahhoz közeli. Az ÁKM-ek referenciamátrixként való alkalmazásánál fontos tudatosítani, hogy a készletfelhalmozás korábban, vagy más megfigyelt régióban megfigyelt értékei (főleg, ha a szokásos módon a statisztikai hibát is itt számolják el) a nagy mértékű esetlegessége miatt (aminek elemzését lásd például Lenzen et al [2014] cikkében) nem szolgálhat referenciaként egy ÁKM-bebecslésénél, hanem a referenciamátrixban a készletfelhalmozást valamilyen ésszerű módon kell megadni (például a termékek esetében a bruttó termelési értékek arányában).

4.2 A termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixa

Az ÁKM-ek ún. háttértáblázatai (vagy szemléletesebben „levonó mátrixai”) között szereplő ún. *termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixában* értelemszerűen negatív cellaértékeket találunk, ha az adott termék adott felhasználásán több a támogatás, mint az adó. Természetesen, ha e nettó termékadók csak egy sorban (lásd az *alapárás ÁKM*-eket, ahol az alapáron kimutatott termékáramlások alatt egy sorban vannak feltüntetve az adott felhasználó összes termékfelhasználását érintő adók és támogatások), vagy egy oszlopban (mint például az ún. *Forrás-táblában*, ahol az egyes termékek alapáron elszámolt forrásai mellett külön oszlopban tüntetik fel a termék összes felhasználására eső adókat és támogatásokat) jelennek is meg a kérdéses adattáblázatban, akkor is szerepelhetnek bennük negatív elemek.

A termékadók és -támogatások mátrixa egy „ritka” (angolul: sparse) mátrix, aminek előnyei és hátrányai vannak, és az előnyöket ügyesen megtervezett becslési eljárással ki lehet használni. Például a termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixának egyes adónemek mátrixaira és a támogatások mátrixára való felbontásánál kihasználható (ahogy a 3.3. alfejezetben ismertetett EU-GTAP projektnél meg is tettük), hogy a termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixának egyes elemei mögött többnyire csak egy-egy adónem vagy támogatás húzódik meg, így a becslési eljárás ide „húzza be” az előírt peremekről szétosztandó összegeket.

Ugyanezt a ritka jellegét használhatjuk ki a termékadók mátrixának és a terméktámogatások mátrixának kiigazítására az alábbi módon: Legyen \mathbf{T} a termékadók referenciamátrixa, \mathbf{S} a terméktámogatások referenciamátrixa (negatív vagy 0, többnyire utóbbi). Így a $\mathbf{T} + \mathbf{S}$ mátrix a termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixát jelenti. Egy ettől eltérő időszakra (vagy régióra) a statisztikai hivatalok által közzétett adatokból sok esetben (legfeljebb) csak e mátrix peremei ismeretesek (a sorösszegek, azaz a termékadók és -támogatások egyenlegének termékenkénti bontása általában a Forrás táblából,

az oszlopösszesenek, azaz a felhasználónkénti bontása pedig az ÁKM-ből). Jelöljük ezek közül a sorösszeseneket az \mathbf{r} oszlopvektorral, az oszlopösszeseneket pedig a \mathbf{c} sorvektorral! Ekkor a kiigazítási feladat sémája az alábbi táblázatban adható meg:

\mathbf{T}	\mathbf{S}	\mathbf{r}
\mathbf{S}		?
\mathbf{c}	?	

5. táblázat. Termékadók és támogatások mátrixának alapelrendezése

Látható, hogy ez a feladat a RAS-módszerrel nem oldható meg, mert a peremek egy része (amiket kérdőjellel jelöltünk a táblázatban) ismeretlen. Ezenfelül a RAS- vagy hasonló módszerek alkalmazásakor semmi sem biztosítja, hogy a becült mátrixban az \mathbf{S} mátrixot tartalmazó blokkok helyére kerülő mátrixok is azonosak lesznek.

Hogy ezt a feladatot a RAS- illetve additív-RAS módszerrel kezelni tudjuk, írjuk fel a feladatot az alábbi módon (az \mathbf{S} mátrix oszlopait illetve sorait „széthúzva”):

\mathbf{T}	$\langle \mathbf{s}_1 \rangle$	$\langle \mathbf{s}_2 \rangle$	\dots	$\langle \mathbf{s}_n \rangle$	\mathbf{r}
$\langle \mathbf{s}_1 \cdot \rangle$	$-\mathbf{S}_{11}$	$-\mathbf{S}_{12}$	\dots	$-\mathbf{S}_{1n}$	$\mathbf{0}$
$\langle \mathbf{s}_2 \cdot \rangle$	$-\mathbf{S}_{21}$	$-\mathbf{S}_{22}$	\dots	$-\mathbf{S}_{2n}$	$\mathbf{0}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
$\langle \mathbf{s}_n \cdot \rangle$	$-\mathbf{S}_{n1}$	$-\mathbf{S}_{n2}$	\dots	$-\mathbf{S}_{nn}$	$\mathbf{0}$
\mathbf{c}	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	\dots	$\mathbf{0}$	

6. táblázat. Termékadók és támogatások mátrixának elrendezése additív-RAS algoritmushoz

ahol \mathbf{s}_j az \mathbf{S} j -edik oszlopa, \mathbf{s}_i az \mathbf{S} i -edik sora, $\langle \cdot \rangle$ a diagonális mátrix képzés jele, \mathbf{S}_{ij} az \mathbf{S} mátrixból csak az $s_{i,j}$ elem megtartásával, a többi elemnek pedig a lenullázásával képzett mátrix *transzponáltja*.

Ezt az egyenértékűen átfogalmazott feladatot a RAS a 0 peremek miatt ugyan nem tudja közgazdaságilag értelmes módon megoldani, az additív-RAS viszont igen. A megoldásban a \mathbf{T} mátrix soraiban és oszlopaiban található azonos indexű becült \mathbf{S} mátrixelemek azonosak lesznek.

Viszont probléma a méret. Például az EU ÁKM-ek 64 ágazata esetén $64 \cdot 65 = 4160$ sor és oszlop lenne a táblázat belsejében. Viszont az \mathbf{S} eleve 0 elemeire nem kell felírni a mérleget! És mivel az \mathbf{S} mátrix ritka, ez lehetővé teszi a sorok és oszlopok igen nagy részének elhagyását, ami aztán kezelhetővé teszi a problémát. Az imént ismertetett elrendezés (séma) alkalmazható más olyan problémák (pl. additív-RAS-módszerrel való) kezelésére is, amelyekben csak az összesenekre rendelkezésre álló peremadatok alapján kell megbecsülni az összetevőket (például regionális ÁKM-ek becslése).

4.3 Fogyasztás- és beruházási transzformációs mátrixok

Egyes kifinomultabb CGE-modellek a beruházási keresletet a beruházó ágazatok keresletéből és az ágazatra jellemző beruházási jószág-szerkezetből („anyag-műszaki összetétel”-ből, importhányadokból) vezetik le. E szerkezeteket foglalja össze a *beruházási mátrix* (pontosabban állóeszköz felhalmozási mátrix), amelynek sorai a beruházási javak (szállítóit), oszlopai pedig a beruházó (állóeszköz felhalmozó) ágazatokat képviselik. A beruházási mátrix is egy „ritka” mátrix, mert az építőiparhoz és gépiparhoz tartozó sorain és esetleg a szervezeti besorolású ÁKM-eknél a diagonálisokban is megjelenő pozitív elemeken („saját rezsizs beruházások”) kívül alig van zérustól eltérő eleme. Így kétirányú kiigazításos becslésénél az elvárt és tényleges peremek eltérései szétszórásánál kicsi a mozgástere a becslési algoritmusnak, és a peremek (vagy azok egy-egy csoportjai) könnyen inkonzisztensnek bizonyulhatnak, azaz a feladat megoldhatatlannak bizonyul.

Természetesen, ha a termékáramlásokat e beruházási transzformációs mátrixban is alapáron számoljuk el, de az oszlopösszesenek a felhasználói áras összkiadások, akkor a felhasználói áras és alapáras összkiadások különbségét, azaz a termékadók és -támogatások egyenlegét ugyanúgy külön sorban kell elszámolni, mint magában az alapáras ÁKM-ekben. Így e transzformációs mátrix „termékadók és támogatások egyenlege” sorában is lehetnek negatív, támogatási többletet képviselő értékek.

Hasonlóan, a fogyasztást is sokszor az ún. COICOP-fogyasztási kategóriák szerinti bontásból kiindulva becslik, az ún. (Lancaster-féle) *fogyasztás-transzformációs mátrix*szal transzformálva az előállító ágazatokra (illetve termék-csoportokra). Itt is előfordulhatnak, bár többnyire statisztikai okokból inkonzisztens peremek, de mégse ez szokott a gyakorlatban a legnagyobb probléma lenni a becslésénél, hanem az árrés illetve a termékadók leválasztása a fogyasztói áron adott COICOP-kategóriákból. Ugyanis az általában alapáras ÁKM-ek az árrést és a termékadókat különválasztják, így az erre való transzformálásnál is ez történik. Viszont a statisztikai hivatalok által előállított fogyasztás-transzformációs mátrixok általában fogyasztói áron készülnek, így ez referenciamátrixként csak akkor szolgálhat az alapáras ÁKM fogyasztási oszlopára való transzformáció során, ha az árresek és a „termékadók és támogatások egyenlege” sorát előre imputáljuk bele (valamilyen becslés alapján, de felhívva a figyelmet arra, hogy a beruházási mátrixnál is jelzett módon a „termékadók és támogatások egyenlege” negatív is lehet), vagy a transzformációt fogyasztói áron hajtjuk végre, és az árresek és termékadókat utólag választjuk le termékenként (szállító ágazatonként) becsült kulcsokkal, de az összes fogyasztásra megadott termékadókkal és árresekkel összhangban. Természetesen mindkét út elég göröngyös (például hogy biztosítható, hogy a RAS-sal vagy más kiigazító módszerrel becsült árreseknek, illetve termékadóknak a fogyasztói kiadásokra vetített, „százalékos” értékei ésszerű határok között maradjanak), de e cikkben ennek kifejtésére nincs mód.

További probléma, hogy ugyan a fogyasztás transzformációs mátrixban és beruházás-transzformációs mátrixban, valamint az ún. *bilaterális külkereske-*

delmi mátrixban az ágazatok soraiban elvileg szintén nem szerepelhetnének negatív elemek, de amennyiben ezek az ÁKM fogyasztási, beruházási, illetve export oszlopainak a kibontásának tekinthetők, örökölhetik az ÁKM ezen oszlopaiban a fentebb említett negatív értékeket. Emellett, mivel a használt állóeszközök adásvétele részét képezi az egyes ágazatok állóeszköz-felhalmozásának, a beruházási mátrixban (aminek egyes oszlopai tehát azt mutatják, hogy az adott ágazat állóeszköz-felhasználása mely termékekből, „beruházási javakból” történt) már csak ezért is találhatunk negatív elemeket.

4.4 A nemzetgazdasági statisztikában előforduló további kiigazítandó mátrixok

Ha például egy háztartási rétegekre vonatkozó, a réteg *bevételeit és kiadásait* (beleértve természetesen a befektetéseket is) egy vektorban (oszlopban), de ellentétes előjellel tüntetjük fel (amire főleg azért lehet szükség, mert az összbevétel (=összkiadás) értéke sem ismert), akkor a vektor összesenje értelemszerűen zérus lesz. Ekkor a bevételek és a kiadások csak szimultán módon becsülhetők, nem lehetséges külön-külön a bevételeknek, ill. a kiadásoknak az összbevételekhez való igazítása. A zérus peremhez való igazítás azonban a hagyományos RAS-módszerrel arra vezetne, hogy már az első arányosításnál az egész oszlopot lenullázná, ami nyilvánvalóan elfogadhatatlan eredmény lenne, mivel azt jelentené, hogy a szóban forgó rétegnek se bevétele, se fogyasztása nem volt.

Hasonlóképpen, ha egy olyan *követelés-tartozás mátrixot* tekintünk, amelynek sorai az egyes hitelezési instrumentumokat (financial assets), oszlopai pedig a gazdaság szereplőit mutatják (ahol tehát az adott hitelviszonyt megtestesítő értékpapír állományát a kibocsátó adósnál negatív értékkel számoljuk el), akkor abban is számos negatív elem található (lásd például Lemelin [2009] fentebb tárgyalt számpéldáját).

Mivel az ÁKM a *Társadalmi Elszámolási Mátrix* (angol rövidítéssel: SAM) részét (egyszerűbb változatokban az egyik blokkját) képezi, értelemszerűen a SAM becslésénél is találkozhatunk a negatív elemek problémájával. Azonban a SAM más celláiban is előfordulhatnak negatív elemek. Ugyanis a SAM összeállítása sokszor egy ún. SAM-multiplikátor modell számszerűsítése céljából történik. Márpedig a SAM-multiplikátor modell az endogénnek választott számlák oszlopösszesenjeire vetített együtthatókkal számol, így fontos, hogy minden tranzakció abban az oszlopban legyen lehetőleg elszámolva, amelynek az összesenjével arányosnak tekinthető (sőt, hogy lehetőleg olyan tranzakciók szerepeljenek csak az oszlopokban, amelyek közgazdaságilag értelmes összesent képviselnek). Ezért például az i -edik számlának a j -edik számla felé történő t_{ij} kiadását fordított irányban, azaz a főátlóra tükrözve, negatív előjellel, a t_{ji} tranzakció(k) részeként számoljuk el. Így ha a j -edik számlának az i -edik számla felé történő egyéb kiadásai ennél kisebbek voltak, akkor a t_{ji} értéke negatív lesz. Ha például az exogén számlák (rendszerint az állami kiadások és a külföld kiadásai) valamely számla felé történő kiadásait (például a lakásberuházások állami támogatását) endogén módon (ennek a

szóban forgó számlának a főösszegével¹⁹ arányosan) akarjuk a modellben meghatározni, akkor ezt a szóban forgó számlának az adott exogén számla felé történő (negatív) kiadásaként számoljuk el.

Az e fejezetben elmondottakat, helyenként kiegészítve, a 7. táblázatban foglaljuk össze.

	Negatív és egyéb problémás elemek	A probléma megoldásának lehetséges módszerei
ÁKM	készletváltozás, (re)export, fogyasztás, beruházás, nettó termékadók, hozzáadott érték (és összetevői), import (A-típusú ÁKM-ben negatív oszlopként), zérus termelés (A-típusú ÁKM-ben)	készletváltozás termelési értékkel vagy összfelhasználással arányos becslése, re-export bruttósitása, a többi esetben az additív-RAS és többfokozatú becslési eljárások alkalmazása
Nettó termékadók mátrixa	támogatási többlet esetén negatív elemek, ritka mátrix	additív-RAS alkalmazása, támogatási mátrix külön becslése (ld. 6. táblázat)
Fogyasztási mátrix	negatív elemek előző időszakból származó cikkek eladása miatt	additív-RAS alkalmazása, referencia-mátrixban hasonló elemek zérusra cserélése illetve külön (exogén) kezelése
Beruházási mátrix	negatív elemek előző időszakból származó gépek eladása miatt	lásd a fogyasztási mátrixnál
Bevétel-kiadás mátrix	kiadások negatív tételként	additív-RAS vagy összbevételek előzetes becslése majd bevételek és kiadások külön-külön becslése
Követelés-tartozás mátrix	tartozások negatív tételként	hasonlóan az előzőhöz
SAM	egyes transzferek negatív tételként	additív-RAS vagy fordított irányban (átlóra szimmetrikusan) pozitívként számolni el negatív tételeket

7. táblázat. Összefoglaló táblázat a fontosabb közgazdasági mátrixkategóriák becsléséről

5 A kétirányú mátrixkiigazítási módszerek kombinált és szekvenciális alkalmazásai

Ahogy a 3.3. alfejezetben az EU ÁKM-ek GTAP-ágazati bontásban való becslésénél is már utaltunk rá, a mátrixkiigazítási feladat általánosabban, egy komplexebb feltételes optimumszámítási feladatként is megfogalmazható. Ebben a kétirányú mátrixkiigazítási módszereknek csak egyes részfeladatok megoldásában lehet szerepe, elsősorban a referenciamátrix (a prior) előállításának egyes lépéseinél. A kétirányú mátrixkiigazítási módszerek tehát nemcsak egymással versenyeznek, hanem egymás kiegészítői is lehetnek. A

¹⁹A főösszeg egyaránt képviseli az összbevételt, illetve (a modell alapfeltevéséből, illetve a kiadások kiterjesztett, a megtakarításokat is magába foglaló értelmezéséből eredően) az ezzel egyező összkiadást.

hazai és import termékek mérlegeit összevontan ábrázoló A-típusú ÁKM-eket az ún. „additív-RAS” módszerrel lehet becslni az import ágazati termékszerkezete ismerete nélkül (Révész [2009]). Ennek során először az ún. „A”-típusú ÁKM-et becsüljük az additív-RAS módszerrel, így megkapva az import ágazati jelleg szerinti bontását. Ezután a kapott becslés felső mátrixblokkjában csak a hazai termékek felhasználónkénti bontását mutató ún. „B”-típusú ÁKM-et becsüljük hasonló módszerrel, amelynek során becslést kapunk az import sorára, azaz felhasználónkénti bontására is. Végül pedig a termék \times felhasználó bontású, ún. importmátrixot becsüljük úgy, hogy a B-típusú ÁKM-becslése során kapott importsort a még hiányzó importmátrix becsült oszlopösszegeinek vége, sorösszeseneknek pedig az importnak az „A”-típusú ÁKM-becslésénél kapott ágazati jelleg szerinti bontását tekintve, a referencia (induló-) importmátrixszal (ahol a készletfelhalmozás indulóértékeit valamilyen ésszerű módon módosítjuk) RAS-becsléssel meghatározzuk az importmátrixot. A módszer érdekessége, hogy a végeredményben kapott hazai és import termékmérlegek összeadásával az első lépésben becsült „A”-típusú ÁKM-től eltérő számokat kapunk, azaz ez felülírható.

A kétirányú mátrixkiigazítási módszerek szekvenciális alkalmazására tesz javaslatot az ún. két- illetve háromfokozatú RAS módszere (lásd például Bacharach [1970] műve 93–99. oldalát, illetve Gilchrist és St. Louis [1999] TRAS-módszerét). Ebben az első fokozatban az indulómátrixot, vagy annak valamely blokkjait egy RAS-módszerrel igazítják ki az elvárt peremekhez, majd ezt a peremeknek immár eleget tevő mátrixot használják fel referenciamátrixként egy újabb RAS-becsléshez, vagy egy valamilyen bonyolultabb célfüggvény alkalmazó entrópia-modell megoldása során.

6 Összefoglalás

A kétirányú mátrixkiigazítási feladatok kezelésében a probléma szűk problémakörre való naiv, heurisztikus alkalmazásából kiindulva a tudomány nagy utat tett meg. A probléma szabatos matematikai megfogalmazásának és a megoldásra javasolt módszerek matematikai tulajdonságainak feltárásának, a jobb statisztikai adatoknak (amik jobb referenciamátrix előállítását teszik lehetővé), a számítástechnika fejlődésének (hatékonyabb megoldó szoftvereknek), valamint a felhalmozódott nemzetközi alkalmazási tapasztalatoknak köszönhetően egyre több területen lehet e módszereket alkalmazni. Természetesen még sok matematikai összefüggés tisztázandó, és cikkünkben ezekre is kitértünk. Bemutattuk, hogy a nemzetgazdasági elemzésekben való sikeres alkalmazás feltétele a konkrét közgazdasági jelenség, az erre felírt referenciamátrix sajátosságainak alapos ismerete. Az EU ÁKM-ek GTAP-ágazati bontásba való sikeres transzformációja kapcsán gyakorlati példával is érzékeltettük, hogy a jó becslési eredmények elsősorban az (alapadatokból szerkesztett indulómátrix komplex, 6 lépésben történt előzetes kiigazításával kapott) referenciamátrix jóságának köszönhető. A témával foglalkozó szerzők, többek között McNeil és Hendrickson [1985] és Round [2003] is megállapították,

hogya ha a referenciamátrix elemeinek értéke közel van a becsülendő mátrix megfelelő elemének értékéhez, akkor a kétirányú mátrixkiigazítási-modell a különböző szokásos célfüggvények mellett is hasonló becslési eredményekre vezet.

A kétirányú mátrixkiigazítási módszereket nemcsak elszigetelve, hanem egymás után („szekvenciálisan”) is lehet alkalmazni (lásd például a kétfokozatú RAS-módszert). Emellett az itt kidolgozott módszerek, szakmai fogások („trükkök”) komplexebb matematikai programozási feladatokba beépítve is hasznosíthatók.

Irodalom

1. Almon, C. [1968]: Recent methodological advances in input-output in the United States and Canada. – Előadás a 4. Nemzetközi ÁKM konferencián (Fourth International Conference on Input-Output Techniques), Genf.
2. Bacharach, M. [1970]: *Biproportional Matrices and Input-Output Change* (Cambridge, UK: Cambridge University Press)
3. Black, William R. [1972]: Interregional commodity flows: Some experiments with the gravity model. *Journal of Regional Science*, 12(1): 107–118.
4. Bregman, L. M. [1967]: Proof of the Convergence of Sheleikhovskii’s Method for a Problem With Transportation Constraints, *USSR Computational Math. and Mathem. Phys.* 1(1), 191–204.
5. Byron, R. P. [1978]: The Estimation of Large Social Account Matrices, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 141, Part 3, pp. 359–367
6. Deming, W. E. és Stephan, F. F. [1940]: On a least-squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known, *Annals of Mathematical Statistics*, 11, pp. 427–444.
7. Eurostat [2008]: „Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables”, Luxembourg: European Commission, Eurostat
8. Friedlander, D. [1961]: A technique for estimating contingency tables, given marginal totals and some supplemental data, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 124, pp. 412–420.
9. Furness, K. P. [1965]: Time function iteration, *Traffic Engineering and Control*, 7, pp. 458–460.
10. Gilchrist, D. – St. Louis, L. [1999]: Completing input-output tables using partial information with an application to Canadian data, *Economic Systems Research*, 11, pp. 185–193.
11. Günlük-Şenesen, G. – Bates, J. M. [1988]: Some Experiments with Methods of Adjusting Unbalanced Data Matrices, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 151(3), pp. 473–490
12. Harrigan, F. and Buchanan, I. [1984]: A quadratic programming approach to input-output estimation and simulation, *Journal of Regional Science*, 24: 339–358. doi:10.1111/j.1467-9787.1984.tb00807.x
13. Harthoorn, R. és J. van Dalen [1987]: On the adjustment of tables with Lagrange multipliers, NA-024. Central Bureau of Statistics, The Netherlands, National Accounts Research Division.

14. Jackson, R. W. – Murray, A. T. [2004]: Alternative Input-Output Matrix Updating Formulations, *Economic Systems Research*, 16, No. 2, June 2004, pp. 135–148.
15. Junius, T. – Oosterhaven, J. [2003]: The solution of updating or regionalizing a matrix with both positive and negative entries, *Economic Systems Research*, 15, pp. 87–96.
16. Koppány Krisztián [2016]: Növekedési hozzájárulások számítása input-output táblák strukturális felbontása alapján, *Statisztikai Szemle*, 94(8-9), 881–914, http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2016/2016-08-09/2016-08-09-881.pdf
17. KSH [2013]: Tájékoztatósi adatbázis/ Szimmetrikus Ágazati Kapcsolatok Mérlegei, Forrás- és Felhasználás Táblák, Import- és Termékadó mátrixok/ 2010. évi Szimmetrikus Ágazati Kapcsolatok Mérlege a hazai kibocsátásra, az import- és termékadó-mátrix, TEÁOR 08 szerint (<http://statinfo.ksh.hu/Statinfo/themeSelector.jsp?page=2&szst=QPA>)
18. Kullback, S. – Leibler, R. A. [1951]: „On Information and Sufficiency” *Ann. Math. Stat.* 4, pp. 99–111.
19. Lahr, M. L.: [2001]: „A strategy for producing hibrid regional input-output tables”. In: M. L. Lahr and E. Dietzenbacher (eds.): *Input-Output Analysis: Frontiers and Extensions*. New York: Palgrave, pp. 211–242.
20. Lahr, M. – Mesnard, L. [2004]: Biproportional Techniques in Input-Output Analysis: Table Updating and Structural Analysis, *Economic Systems Research*, 16(2), 115–134.
21. Lecomber, J. R. C. [1975]: A critique of methods of adjusting, updating and projecting matrices. In: R. I. G. Allen and W. F. Gossling (eds.) *Estimating and Projecting Input-Output Coefficients*. London, UK, Input-Output Publishing Company: 1–25.
22. Lemelin, A. [2009]: A GRAS variant solving for minimum information loss, *Economic Systems Research*, 21(4), 399–408.
23. Lemelin, A. – Fofana, I. – Cockburn, J. [2013]: Balancing a Social Accounting Matrix: Theory and application (revised edition), Partnership for Economic Policy working paper, <http://ssrn.com/abstract=2439868>
24. Lenzen, Manfred – Moran, Daniel D. – Geschke, Arne – Keiichiro Kanemoto [2014]: A non-sign preserving GRAS-variant, *Economic Systems Research*, 26(2), 197–208.
25. Lenzen, Manfred – Wood, Richard – Gallego, Blanca [2007]: Some Comments on the GRAS Method, *Economic Systems Research*, 19(4), 461–465, DOI:10.1080/09535310701698613
26. MacGill, S. M. [1977]: „Theoretical properties of biproportional matrix adjustments”, *Environment and Planning A*, 9: 687–701.
27. McNeil, S. and Hendrickson, C. [1985]: „A note on alternative matrix entry estimation techniques”, *Transportation Research*, 19B, 6, 509–519, Pergamon Press Ltd.
28. Mesnard, L. [2011]: Six matrix adjustment problems solved by some fundamental theorems on biproportion, working paper, University of Burgundy and CNRS, <http://ssrn.com/abstract=1692512>
29. Ming-Chang Lee [2014]: Social accounting matrix balanced based on mathematical optimization method and general algebraic modeling system, *British Journal of Economics, Management & Trade* 4(8): 1174–1190.

30. Möhr, M., – Crown, W. H. – Polenske, K. R. [1987]: A Linear Programming Approach to Solving Infeasible RAS Problems. *Journal of Regional Science*, 27, 587–603.
31. Niedercorn, J. H. – Bechdolt, B. V. Jr. [1969]: An economic derivation of the 'gravity law' of spatial interaction, *Journal of Regional Science*, 9(2): 273–282.
32. Omar, F. H. [1967]: The Projection of Input-Output Coefficients with Application to the United Kingdom. Publikálatlan PhD-értekezés, University of Nottingham.
33. Oosterhaven, J. [2005]: GRAS versus minimizing absolute and squared differences: a comment, *Economic Systems Research*, 17, 327–331.
34. Polenske, K. R. [1997]: Current uses of the RAS Technique: A Critical Review. In: A. Simonovits and A. E. Steenge (eds.) *Prices, Growth and Cycles*. London, MacMillan, 58–88.
35. Révész, T. [2001]: *Költségvetési és környezetpolitikák elemzése általános egyensúlyi modellekkel*, Budapesti Közgazdaság-tudományi Egyetem, Ph.D. értekezés, 2001. március
36. Révész, T. [2009]: Negyedéves adatokon alapuló ágazati bontású előrejelző és hatáselemző modell – Az áfa-bevallási adatbázisnak a legfrissebb hazai ÁKM-mel integrált újszerű alkalmazása – A Kockázatkutató Intézet részére készített tanulmány (TAM-REP (3).DOC file)
37. Round, J. I. [2003]: „Constructing SAMs for development policy analysis. Lessons learned and challenges ahead”, *Economic Systems Research*, 15(2), 161–183.
38. Rueda-Cantuche, José – Revesz, Tamas – Amores, Antonio F. - Velázquez, Agustín – Mraz, Marian - Ferrari, Emanuele - Mainar, Alfredo - Montinari, Letizia - Saveyn, Bert [2016]: Improving the European Input-Output Database for Global Trade Analysis (EU-GTAP), Final report June 30, 2016, European Commission JRC No33705-2014-11 and DG TRADE 2014/G2/G10
39. Schneider, M. H. – Zenios, S. A. [1990]: A comparative study of algorithms for matrix balancing, *Operations Research*, 38(3): 439–455
40. Shannon, C. E. [1948]: „A Mathematical theory of communication”, *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423.
41. SNA [2009]: System of National Accounts, 2008 (SNA2008.pdf), az Európai Bizottság, International Monetary Fund, Organisation for Economic Co-operation and Development, United Nations and World Bank közös kiadványa
42. Stone, R. [1961]: *Input-Output and National Accounts* (Organization for European Economic Cooperation, Párizs).
43. Stone, R. – Brown, A. [1962]: *A Computable Model of Economic Growth* (Chapman and Hill, London).
44. Stone, R. [1981]: Balancing the National Accounts; The Adjustment of Initial Estimates: a Neglected Stage in Measurement, paper presented at the Ivor Pearce Conference, University of Southampton, 5-7 January 1982.
45. Temurshoev, Umed – Webb, Colin – Yamano, Norihiko [2011]: Projection of Supply and Use tables: methods and their empirical assessment, *Economic Systems Research*, 23(1), 91–123, DOI: 10.1080/09535314.2010.534978
46. Temurshoev, U. – Miller, R. E. – Bouwmeester, M. C. [2013]: A note on the GRAS method, *Economic Systems Research*, 25(3), 361–367,

47. Theil, H. [1967]: *Economics and information theory*, Rand McNally & Company, Chicago, Studies in mathematical and managerial economics, 7, 488 oldal
48. Yule, G. Udny [1912]: „On the Methods of Measuring Association Between Two Attributes”. *Journal of the Royal Statistical Society*. 75(6): 579–652. doi:10.2307/2340126 (<http://www.jstor.org/stable/2340126?origin=crossref>)
49. Zalai, E. [2012]: *Matematikai közgazdaságtan I. Általános egyensúlyi modellek és mikroökonómiai elemzések. II. Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

BIPROPORTIONAL MATRIX ADJUSTMENT FOR MULTISECTORAL MACROMODELS

This paper gives a brief overview of the biproportional matrix adjustment problem. We focus on the most frequent case with certain and consistent row and column sums, and no special conditions to the cells of the matrix. After the definition and mathematical formulation of the problem, we describe the so-called distance and entropy functions assigning a non-negative real number to the difference of the estimated and reference matrices. These functions are to be minimized subject to given row and columns sums, and in special cases, some non-negativity and sign-preserving conditions. For these models, we present iterative solution methods, among them the so-called additive RAS algorithm developed and used first by Révész. On one hand, in the case of non-negative reference matrix and marginal conditions, additive RAS gives the same solution as the standard RAS, and on the other hand, in the case of negative cells, but sign-preserving margins, it gives the same solution as the improved normalized squared differences (INSD) model without penalties for sign-switching. We demonstrate that additive RAS is more efficient and more aesthetic than other INSD and GRAS iterative solution methods used by previous authors. In the case of small differences, additive RAS, especially the modified additive RAS, tends to be sign-preserving, unless it is forced by sign-switches of the margins. Using the example of Lemelin (2009), we demonstrate that additive RAS performs very well in such an extreme sign-switching case, as well, moreover, it gives the best solution compared to other algorithms. The paper overviews some standard matrix balancing problems in practice, where such methods can be used. The most important conditions for the successful application are the knowledge about the economic phenomena under investigation and the deep understanding of the related reference matrix. For an example of this, a current research project is presented, where both additive RAS and other more complex matrix adjusting models were used and showed a good performance.