FOGALMAK, MÓDSZEREK

A NEMZETGAZDASÁGI MODELLEKBEN SZEREPLŐ MÁTRIXOK KÉTIRÁNYÚ KIIGAZÍTÁSI MÓDSZEREIRŐL[1]

RÉVÉSZ TAMÁS – KOPPÁNY KRISZTIÁN
Budapesti Corvinus Egyetem – Széchenyi István Egyetem

A cikk elsőként vállalkozik a kétirányú mátrix-kiigazítási, vagy más néven peremfeltételes mátrixbecslési probléma hazai szakmai olvasóközönség számára történő, legújabb publikációk eredményeit is magában foglaló bemutatására. A rendkívül szerteágazó, sokféle általánosítási lehetőséget kínáló problémakörből csak a gyakorlatban leginkább előforduló, a biztosnak tekintett és konzisztens sor- és oszlopösszesenekhez történő, a mátrix belsejére vonatkozó összetettebb feltételek nélküli esettel foglalkozunk. A probléma lehatárolása és matematikai formalizálása után a becsült és a referencia-mátrix eltéréséhez egy nemnegatív valós számot rendelő különféle „távolság-" illetve „entrópia"-függvényeket ismertetjük, amelyek minimalizálandó célfüggvényként jelennek meg azokban a matematikai programozási feladatokban, amelyekben korlátozó feltételként a sor- és oszlopösszesenre vonatkozó követelmények, valamint egyes esetekben nemnegativitási, illetve előjelmegőrzési feltételek is szerepelnek. E matematikai programozási feladatok vagy röviden modellek közül néhánynak a megoldásához vezető iterációs algoritmusát is tárgyaljuk. Ennek kapcsán bemutatjuk a szerzők egyike által kidolgozott „additív"-RAS algoritmust, és bebizonyítjuk, hogy egyfelől nemnegatív referenciamátrix és peremfeltételek esetén azonos eredményt ad a RAS-módszerrel, másfelől pedig negatív elemeket is tartalmazó referencia-mátrix, de előjeltartó megoldások esetén azonos eredményt ad, mint a „javított normalizált négyzetes eltéréseket" minimalizáló, angol rövidítéssel INSD-modell, illetve általában is azzal az INSD-modellel, amiből elhagyjuk az előjelváltás büntetőfüggvényét. Azt is demonstráljuk, hogy az additív-RAS algoritmus a GRAS-modell lépésenként másodfokú egyenlet megoldását igénylő iterációs algoritmusával szemben nemcsak hatékonyabb, hanem esztétikusabb is. Ugyanakkor a GRAS-modell

---

[1]Révész Tamás, Budapesti Corvinus Egyetem, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszékének tudományos főmunkatársa, e-mail: `revesz.tamas@bge.hu`. Koppány Krisztián, Széchenyi István Egyetem Nemzetközi és Elméleti Gazdaságtan Tanszékének egyetemi docense, e-mail: `koppanyk@sze.hu`. A kutatást a „Közszolgáltatások közgazdasági és irányítási kérdéseinek központja Alapítvány" valamint Koppány Krisztián részéről a GINOP 2.3.4-15-2016-00003 „A KKV-k nemzetközi versenyképességét támogató szolgáltatások fejlesztése" című projekt támogatta. Beérkezett: 2017. szeptember 19.

megoldásának előjeltartó volta és amiatt, hogy az INSD-modell a GRAS-modell egy Taylor-soros közelítésének tekinthető, igazoljuk, hogy kis eltérések esetén az additív-RAS-módszer, különösen pedig az ún. módosított additív-RAS módszer is hajlamos az előjeltartásra, kivéve, ha erre például a peremek előjelváltása kényszeríti. Lemelin (2009) számpéldáján azt is demonstráljuk, hogy az additív-RAS még az ilyen extrém, előjelváltást megkövetelő esetben is jól működik, sőt a Lemelin által vizsgált modellek közül a legjobb eredményt adja. A cikk felsorolva a többszektoros nemzetgazdasági modellezés azon gyakran használt mátrix-kategóriáit, amelyekre kétirányú mátrix-kiigazítási módszereket szoktak alkalmazni, bemutatja, hogy a nemzetgazdasági elemzésekben való sikeres alkalmazás feltétele a konkrét közgazdasági jelenség és az erre felírt referencia mátrix sajátosságainak alapos ismerete. A sikeres alkalmazások egyik példájaként bemutat egy olyan friss kutatási projektet is, amelynek során mind az additív-RAS, mind pedig egy olyan összetettebb mátrixkiigazítási modell egyaránt igen jó eredményeket adott, amelyben a becsülendő mátrix elemeire blokkösszesen-feltételek szerepeltek. A célfüggvényben pedig korábbi szerzők technikai megoldásainak, illetve a szerzők újszerű elgondolásainak hatékony és kreatív ötvözésére került sor.

1 Bevezetés

Jónéhány tudományágban előfordul, hogy egy olyan, mátrixszal megadható adattábla elemeinek értékét kell megbecsülni, amelynek csak a peremeit (sor- és oszlopösszesenjeit) ismerjük. A mátrix egyes elemei vagy ismertek (ebben az esetben ezeknek a hozzájuk tartozó sor- és oszlopösszesenekből való levonásával a becslési feladatot vissza lehet vezetni azon esetre, amikor a mátrix elemei ismeretlenek) vagy csak közvetett információ áll rendelkezésre rájuk vonatkozóan. E közvetett információ általában egy referenciamátrix, amiről feltételezzük, hogy sor- illetve oszlopszerkezete valamilyen mérce szerint ,,hasonló" a keresett mátrixéhoz. A referenciamátrix lehet a keresett mátrixnak egy korábbi időszakra vagy más megfigyelési egységre vonatkozó megfelelője. A hasonlóságot illetve ennek ellentétét egy ,,távolságfüggvény" méri, a cél az, hogy ez a távolság (azaz a célfüggvény értéke) a legkisebb legyen.

Tipikus példa erre az ún. szállítási mátrix. Ennek i-edik sorának j-edik eleme az i-edik kiindulási (feladó-) helyről a j-edik rendeltetési (fogadó-) helyre szállított mennyiséget jelenti (például egy személyszállítási feladatban a szállított személyek számát). Általában ismert a mátrix korábbi időszaki megfelelője, a tárgyidőszakból pedig az, hogy melyik kiindulóhelyről mekkora mennyiséget szállítottak el (sorösszegek), illetve, hogy melyik rendeltetési helyre mekkora mennyiség érkezett meg (oszlopösszegek).

Szemléletesebben úgy fogalmazhatunk, hogy a feladat a referencia mátrix szerkezetét a legjobban megőrizve ráfeszíteni azt az új peremekre. Ennek az ún. mátrixkiigazítási problémának a megoldására már a XX. század elején az egyes szakterületeken többé-kevésbé egymástól függetlenül különböző, sokszor hasonló, sőt matematikailag azonos eljárásokat dolgoztak ki. Mégis a módszereket a különféle szakterületeken eltérően hívják. Például a cikkben részletesen ismertetésre kerülő, a közgazdaságtudományban RAS-módszernek nevezett eljárást a közlekedéstudományokban Furness [1965] nyomán Furness-, máshol pedig Fratar-algoritmusnak nevezik.

Általában a fenti ,,kétirányú" mátrixkiigazításos feladatok megoldására javasolt módszereket két nagy csoportba sorolhatjuk: az ún. ,,entrópia-modell"-nek nevezett (amelyben általában az információelméletből vett logaritmus függvény szerepel) módszerek közé (ide tartozik a RAS-módszer is) illetve a legkisebb négyzetek elvén nyugvó kvadratikus célfüggvényű modellek közé. A szakirodalomban terjedelmes vita bontakozott ki, hogy mikor melyik módszer a hatékonyabb, megbízhatóbb. Az eddigi tapasztalatok szerint az, hogy melyik módszert érdemes választani, az részben a mátrix, az elvárt peremek, valamint a becsült mátrixszal kapcsolatos elvárásaink matematikai tulajdonságaitól (nemnegativitás, zérusérték, előjelváltás megengedett volta, ritka mátrix-e stb.) függ, részben pedig a mátrix közgazdasági tartalmától. Például a negatív vagy zérus értékek akadályozzák a sztenderd módszerek alkalmazását. Gyakran előfordulhat, hogy egy kiigazítandó mátrix egyik pereme (vagy annak egyes elemei) úgy kell zérus értéket felvegyen(ek), hogy a mátrixban megmaradjanak pozitív és negatív értékek egyaránt.

A szakirodalomban az egyes szerzők között nemcsak abban volt vita, hogy a gyakorlatban melyik módszer ad jobb becslést, működik megbízhatóbban (például biztosítja-e a referenciamátrix elemei előjelének megőrzését), hanem a módszerek matematikai tulajdonságait illetően is (torzítanak-e, az egyes speciális esetekben működnek-e, egyértelmű-e a megoldás, azonos-e két különféle módon megfogalmazott modell megoldása[2] stb.)

Cikkünkben ezeket a módszereket tekintjük át, először vázlatosan matematikailag, majd megvilágítva a többszektoros modellezési gyakorlatban előforduló mátrixok (különösen a számszerűsített általános egyensúlyi (CGE-) modellek adatigényét képező különféle tranzakciós és transzformációs mátrixok) statisztikai problémáit és becslési sajátosságait. A kifejtés során néhány számpéldával is megvilágítjuk a módszerek alkalmazását.

Fentiek keretében külön hangsúlyt kap a szerzőnek a negatív elemű referencia-mátrixszal és/vagy nempozitív elvárt peremekkel rendelkező mátrixok becsléséhez kidolgozott ,,additív-RAS" módszerének ismertetése, és hatékonyságának számpéldákkal való illusztrálása. A gyakorlati tapasztalatok és a szakirodalom tanulságainak összefoglalása kapcsán javaslatokat teszünk a becslési módszerek továbbfejlesztésére és jövőbeni alkalmazásának módjára.

[2]Például, hogy az abszolút mátrixelemekre (,,tranzakciókra") vagy az abból számított együtthatókra kell-e a feladatot (illetve a célfüggvényt) felírni (lásd Mesnard [2011] 4.2. alfejezetét).

2 A mátrixkiigazítási probléma és leggyakrabban használt megoldási módszerei

Ebben a fejezetben először a fenti „kétirányú” mátrixkiigazításos feladat formális matematikai megfogalmazását adjuk meg. Ezután a feladat nemnegatív mátrixok esetében javasolt megoldási módszereinek két nagy csoportját, az ún. „entrópia-modell”-eket és a kvadratikus célfüggvényű modelleket, illetve ezek viszonyát ismertetjük.

2.1 A mátrix kiigazítási probléma

A szakirodalomban leggyakrabban tárgyalt mátrixkiigazítási problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg (lásd például Lahr & Mesnard [2004], amin a módszer alábbi ismertetése is alapul):

Legyen $\mathbf{X}^*$ egy $m \times n$-es méretű ismeretlen mátrix, amelynek sorösszesenjei az ismert $\mathbf{u}$ oszlopvektorral, oszlopösszesenjei pedig a szintén ismert $\mathbf{v}$ sorvektorral egyeznek meg (azaz $\mathbf{X}^*\mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{X}^* = \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{1}$ a megfelelő méretű öszegzővektor, a ^{T} felső index pedig a transzponálás jele).

Ha rendelkezésünkre áll egy szintén $m \times n$-es méretű $\mathbf{A}$ *indulómátrix* (vagy más néven prior- vagy referenciamátrix), ami *szerkezetében* hasonló $\mathbf{X}^*$-hoz, akkor azt azzal a szintén $m \times n$-es méretű $\mathbf{X}$ mátrixszal becsülhetjük, amelynek sorösszesenjei az $\mathbf{u}$ oszlopvektorral, oszlopösszesenjei pedig a $\mathbf{v}$ sorvektorral egyeznek meg (azaz $\mathbf{X}\mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}$) úgy, hogy $\mathbf{X}$ az $\mathbf{A}$ referenciamátrixhoz valamilyen értelemben *leghasonlóbb* legyen.

A fenti bekezdésekben a „szerkezet” szó használatát az alábbi megfontolások indokolják:

Természetesen attól függően, hogy hogyan definiáljuk két mátrix „hasonlóságát” (vagy ennek ellentéteként „eltérését” vagy „távolságát”), a feladat megoldása ($\mathbf{X}$) eltérhet. Még ha rögzítjük is a két mátrix összehasonlításának képletét, a megoldás természetesen továbbra is függ az $\mathbf{A}$ referenciamátrixtól. Ha azonban ennek nemcsak szerkezetétől (elemei belső arányaitól), hanem még $\mathbf{A}$ *„szintjétől”* is függ a megoldás (azaz, hogy valamely γ skalárral szorozva $\mathbf{A}$-t, más megoldást kapunk), akkor célszerű az $\mathbf{A}$-t γ skalárral szorozva úgy módosítani (arányosan kiigazítani), hogy mindösszesenje ($\mathbf{1}^T\mathbf{A}\mathbf{1}$) megegyezzen a keresett $\mathbf{X}^*$ mindösszesenjével ($\mathbf{1}^T\mathbf{X}^*\mathbf{1}$), azaz $\mathbf{1}^T\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{1}^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T\mathbf{1}$ legyen. Ez teszi ugyanis csak lehetővé, hogy ha ekkor még $\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{u}$ és $\mathbf{1}^T\mathbf{A} = \mathbf{v}$ is éppen teljesül, akkor az $\mathbf{A}$ indulómátrix maga legyen az $\mathbf{X}$ megoldás. Mivel eleget tesz a feltételeknek, és a lehető leghasonlóbb $\mathbf{A}$-hoz, vagyis azonos vele. Az $\mathbf{A}$ referenciamátrix fenti „szintezése” tehát csökkenti a további kiigazítás szükséges mértékét, szerencsés esetben (ha a peremfeltételeket is teljesíti) pedig szükségtelenné is tesz minden további kiigazítást.

Természetesen két mátrix „hasonlóságának” adott képlete mellett elképzelhető, hogy a feladatnak *több megoldása* van, azaz amelyekre ez a képlet azonos értéket ad. Azonban ha $\mathbf{A}$ *indekompozábilis* (irreducibilis), a lehetséges megoldások halmaza *kompakt*, és a célfüggvény e halmaz felett *folytonosan differenciálható*, akkor csak egyetlen megoldás létezik, ami az általunk tárgyalt eljárásokra általában fennáll (Mesnard [2011]). E problémával általánosságban tehát itt nem foglalkozunk, de majd visszatérünk rá a mátrixok „hasonlóságának" konkrét képletét alkalmazó eljárások (modellek) tárgyalásakor.

Mindenesetre a mátrixkiigazítási feladat *matematikai programozási feladat*ként írható fel, amelyben az adott korlátok ($\mathbf{X1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}$, valamint esetleg nemnegativitási, illetve előjel-azonossági korlátok) mellett keressük a *célfüggvény* optimális értékét (konkrétan a hasonlósági képlet maximumát vagy az eltérés valamilyen monoton növekvő függvényének minimumát). Ismeretes, hogy ha a korlátozó feltételek lineáris egyenlőségek, akkor az optimum a Lagrange-szorzók módszerével határozható meg. Az ezekkel felírt ún. Lagrange-függvényben e szorzók a korlátoktól való eltéréseket büntetik, és azt fejezik ki, hogy a korlátok egységnyi növelése mekkora mértékben változtatja meg az optimum értékét. Néhány szerző azonban eleve a Lagrange-függvényből indul ki, de azt módosítja, például úgy, hogy a korlátoktól való eltéréseket nemcsak a megfelelő Lagrange-szorzóval szorozva szerepelteti, hanem az így kapott szorzatok logaritmusát véve (lásd például Günlük-Şenesen, G. – Bates, J. M. [1988]). Ennek a célfüggvényükben logaritmust szerepeltető ún. entrópia-modellekben van haszna, amennyiben így az elsőrendű feltételekből származó (bár az eredeti feladat szempontjából nem optimális!) megoldásban az $x_{i,j} = a_{i,j} \cdot \lambda_i \cdot \tau_j$ egyszerű szorzatalakban fejezhető ki a referenciamátrix megfelelő eleme, valamint az előírt sor- és oszlopösszegektől való eltérésekhez tartozó λ_i illetve τ_j Lagrange-szorzók között.

Felvetődik, hogy ahelyett, hogy azt vizsgálnánk, hogy mennyire őrzi meg a kiinduló struktúrát az adott (programozási modell megoldását biztosító) eljárás, inkább azt kellene vizsgálni, hogy *mennyire módosítja azt a peremeken elvárt változásoknak megfelelően,* azokkal összhangban. Például, ha mind a vízszintes, mind a függőleges perem növekedett, akkor jogos elvárás, hogy az ezek *metszéspontjában* álló elem is növekedjen (persze lehetőleg csak az indokolt mértékben). E kérdést jelen mű következő fejezeteiben többször érintjük, de általános tárgyalására nem vállalkozhatunk. Mindenesetre ilyen és ehhez hasonló szempontokat vizsgáló kritériumrendszer összeállításán érdemes elgondolkodni.

2.2 A RAS-módszer

A legkézenfekvőbb, már az 1930-as években dokumentált, s az 1940-es években már az input-output-modellezésben is használt megoldási algoritmus a RAS-módszer, amelyet a közgazdasági szakirodalomba, elsősorban az Ágazati Kapcsolatok Mérlegének becslésére Richard Stone vezetett be (Stone [1961]; Stone és Brown, [1962]).

Ennek az iterációs módszernek első lépése az $\mathbf{A}$ mátrixnak (aminek sorösszesenjeit jelölje a $\mathbf{b}$ oszlopvektor, oszlopösszesenjeit pedig az $\mathbf{f}$ sorvektor) először a sorait szorozza meg a hozzátartozó kívánt sorösszesen és a tényleges sorösszesen (u_i/b_i) arányában (ezáltal a mátrixot kiigazítva az elvárt sorösszesenekhez), majd az így kapott mátrixot oszlopirányban igazítja ki hasonló arányos módon az elvárt $\mathbf{v}$ oszlopösszesenekhez[3]. A második lépésben az így kapott $\mathbf{A}^1$ mátrixra hajtja végre a fenti sor- és oszlopirányú arányos kiigazításokat, majd így tovább, az i-edik lépésben az $(i-1)$-edik lépésben kapott $\mathbf{A}^{i-1}$ mátrixra végrehajtva a fenti sor- és oszlopirányú kiigazításokat kapja az $\mathbf{A}^i$ mátrixot. Ez az eljárás rendszerint konvergens[4], az $\mathbf{A}^i$ mátrix-sorozat határértéke, azaz a megoldásul kapott $\mathbf{X}$ mátrix az

$$\mathbf{X1} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}, \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \ln(x_{i,j}/a_{i,j}) \to \min \tag{1}$$

matematikai programozási feladat megoldása (Bacharach [1970][5]), és (a feladatot a Lagrange multiplikátor módszerrel megoldva) előáll az

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{r}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}} \tag{2}$$

szorzat alakban, ahol $\hat{}$ a vektorból diagonális mátrix képzésének a jele, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$ pedig rendre az $\mathbf{X1} = \mathbf{u}$ és $\mathbf{1}^T\mathbf{X} = \mathbf{v}$ korlátok árnyékáraiból képzett vektorok (Bacharach [1970]). Mivel a célfüggvény konvex és folytonosan differenciálható egy kompakt halmazon, ha az $\mathbf{A}$ mátrix indekompozábilis (teljesen összefüggő, lásd Zalai [2012]), akkor az $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{r}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}$ megoldás egyértelmű, pontosabban az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$ vektoroknál egy tetszőleges δ skalárszorzót leszámítva (Bacharach [1970], Mesnard [2011]). Ez azt jelenti, hogy ha egy $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$ vektorpár egy megoldás, akkor az $\mathbf{r}\cdot\delta$ és $\mathbf{s}/\delta$ vektorpár is az.

A RAS-módszer tehát egy *biproporcionális* (kétirányú arányosítási) módszer, ami végeredményben az eredeti mátrixot egyfelől soronként, másfelől oszloponként (az adott soron, illetve oszlopon belül) egységes szorzókkal igazítja ki.

A RAS-módszer fenti célfüggvényét a szakirodalom az analóg információelméleti képlet alapján információveszteségnek nevezi.[6] Lemelin et al. [2013] precízen levezetik, hogy a RAS-feladat egyenértékű a

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i,j} = p_{\cdot,j}\,, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = p_{i,\cdot}\,, \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \ln(p_{i,j}/p^{\mathrm{a}}_{i,j}) \to \min \tag{3}$$

feladattal, ahol $p^{\mathrm{a}}_{i,j} = a_{i,j}/\mathbf{1}^T\mathbf{A1}$, $p_{i,j} = x_{i,j}/w$, $p_{\cdot,j} = h_j/w$, $p_{i,\cdot} = u_i/w$, és ahol $w = \mathbf{u}^T\mathbf{1}$ (azaz az $\mathbf{X}$ mátrix elemeinek előírt mindösszesenje). Ekkor tehát a keresendő $p_{i,j}$ értékek egy kétdimenziós együttes valószínűségeloszlás elemeinek tekinthetők, a célfüggvény pedig azon *„idegen” információnak,* amit a $p_{i,j}$ valószínűségeloszlás tartalmaz a $p^{\mathrm{a}}_{i,j}$ valószínűségeloszláshoz képest.

---

[3] Az általánosság rovása nélkül a sor- és oszlopirányú kiigazítás sorrendje felcserélhető, a megoldást nem érinti.

[4] A konvergencia szükséges és elégséges feltételeit MacGill [1977] mutatta ki (lásd még Lemelin et al [2013])

[5] Schneider és Zenios [1990] szerint ezt Bregman [1967] már Bacharach [1970] előtt bebizonyította.

[6] A matematikai információelméletet Shannon [1948] dolgozta ki, és Theil [1967] vezette be a közgazdaságtudományba.

Az ilyen alakra hozható feladatokat illetve megoldási módszerüket kereszt-entrópia (cross-entropy) feladatoknak illetve módszereknek nevezi[7]. A RAS-módszer tehát a kereszt-entrópia módszerek speciális esete.

Lemelin et al. [2013] levezetését általánosítva elmondhatjuk, hogy a RAS-módszer ugyanolyan eredményre vezet akkor is, ha az $\mathbf{A}$ indulómátrixot tetszőleges pozitív számmal megszorozzuk. Ugyanis a γ skalárral való szorzás esetén a célfüggvény

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\ln(x_{i,j}/(\gamma\cdot a_{i,j})) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\{\ln(x_{i,j}/a_{i,j}) - \ln\gamma\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}\ln(x_{i,j}/a_{i,j}) - w\cdot\ln\gamma\,,$$

azaz csak egy konstansban tér el az eredeti feladatétól, és emiatt ugyanazon helyen van minimuma. Tehát matematikai szempontból nincs annak sem jelentősége, ha az $\mathbf{A}$ mátrixot a $\gamma = w/\mathbf{1}^T\mathbf{A}\mathbf{1}$ skalárral átszorozva biztosítjuk, hogy mindösszesenje megegyezzen az előírt peremekével (w-vel). Természetesen egészen más kérdés, hogy érdemes-e az $\mathbf{A}$ indulómátrixot úgy módosítani $\mathbf{A}^*$-ra, hogy az eleve kielégítse az $\mathbf{A}^*\mathbf{1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{A}^* = \mathbf{v}$ peremfeltételeket, azaz az (1) feladat egy *lehetséges megoldása* legyen. További kérdés, hogy a keresett referenciamátrix $m\cdot n$ elemével szemben támasztott mindössze $n+m-1$ független feltétel miatt meglévő *jelentős szabadságfok* miatt létező sok ilyen lehetséges módosítás közül melyiket válasszuk. Így eljuthatunk a kétfokozatú mátrixbecslés problematikájához, azaz, amelyben az első fokozatban valamilyen modellel az $\mathbf{A}$ kiinduló mátrixot igazítjuk ki e modell szerint optimális $\mathbf{A}^*$-ra, majd ezt használva referenciamátrixként egy másik mátrix-kiigazító modellben határozzuk meg a végső becslést, azaz az $\mathbf{X}$ mátrixot. Felvethető, hogy a két fokozatban használt modelleknek mennyire kell „harmonizálniuk" (kevésbé költői kifejezéssel elméletileg koherensnek lenniük), illetve eltérniük (nyilván teljesen azonos modellt használva nincs értelme az eljárást két fokozatra bontani: ugyanis minden optimalizáló eljárás amúgy is egy lehetséges megoldás megkeresésével kezdi a számításokat).

2.3 Egyéb mátrix kiigazító modellek

Természetesen, még nemnegatív mátrixok esetén is, a mátrixkiigazítási problémára ettől az információveszteségtől eltérő célfüggvények is használatosak és indokolhatók. Az egyik igen hasonló célfüggvény a

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ln(a_{i,j}/x_{i,j})\,,$$

ami éppen megfordítja a célfüggvénybeli szereposztást a referenciamátrix elemeinek és a becsült mátrix elemeinek értékei között (e célfüggvénnyel

[7] A kereszt-entrópia fogalmát Kullback, S. és Leibler, R. A. [1951] vezette be és tárgyalta először.

kapott megoldások összehasonlító elemzését lásd például McNeil és Hendrickson [1985] cikkében). E célfüggvény előnye, hogy minden $x_{i,j}$ változó csak egyszer szerepel a képletben, így könnyebb kiszámítani, és matematikai tulajdonságai (monotonitás, nemnegativitás, stb.) is könnyebben átláthatóak.

Az elsősorban a szállítási mátrix[8] becslésére alkalmazott ún. gravitációsmodellek (lásd például Niedercorn és Bechdolt [1969] illetve Black [1972]) alapváltozata is a RAS-módszerrel egyenértékűnek tekinthető (Mesnard [2011]).

A további, természetes alapú logaritmus-függvényt tartalmazó, de eltérő súlyozású lehetséges célfüggvényekre itt nem térünk ki, hanem e helyett áttérünk a „korlátozott legkisebb-négyzetek" jellegű célfüggvényekre.

Lahr és Mesnard [2004] szerint Pearson χ^2 mutatóját avagy a normalizált négyzetes eltérést (más néven a normalizált legkisebb négyzetek módszerét) először Deming és Stephan [1940] majd Friedlander [1961] használta a mátrixkiigazítási feladat megoldására, majd Lecomber [1975] ajánlotta a szimmetrikus ágazati kapcsolatok mérlegeinek (SIOT-ok) frissítésére („update"-elésére). A minimalizálandó célfüggvény az alábbi két egyenértékű formulával írható fel:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{i,j}-a_{i,j})^2/a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{i,j}/a_{i,j}-1)^2 \cdot a_{i,j}\,. \tag{4}$$

A második képletből látható, hogy ez a célfüggvény a becsült és eredeti mátrixelemek relatív (%-os) eltérésének az eredeti mátrixelemek nagyságával súlyozott négyzetösszegét jelenti. Ezáltal kompromisszumot jelent a szakirodalom által Almon [1968] tanulmányához társított

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{i,j}-a_{i,j})^2 \tag{5}$$

egyszerű négyzetösszeg[9], és a súlyozatlan relatív négyzetes eltérés

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{i,j}/a_{i,j}-1)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{i,j}-a_{i,j})^2/a_{i,j}^2 \tag{6}$$

célfüggvények között.

Könnyen belátható, hogy az egyszerű négyzetösszeg a kis elemeknél hajlamosabb nagyobb eltéréseket megengedni, míg a súlyozatlan relatív négyzetes eltérés éppen fordítva, a szétosztandó (az előírt sor- és oszlopösszeghez szükséges hozzáadandó, illetve levonandó) mennyiségeket a nagyobb elemekhez hajlamos osztani, ahol a módosítás százalékosan kisebb értéket jelent.

---

[8] A szállítási feladat abból áll, hogy az u_i termékmennyiséggel rendelkező i-edik kiindulóhelyről a v_j termékmennyiséget igénylő j-edik érkezési helyre mekkora $x_{i,j}$ mennyiséget szállítsunk úgy, hogy a szállítási költség minimális legyen.

[9] Bár Almon ezt a képletet az ÁKM együtthatóira alkalmazta, azaz az $\mathbf{X1}=\mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{X}=\mathbf{v}$ peremfeltételek helyett az $\mathbf{Xg}=\mathbf{u}$, $\mathbf{1}^T\mathbf{X}\hat{\mathbf{g}}=\mathbf{v}$ peremfeltételek mellett történik a szóban forgó célfüggvény minimalizálása, ahol $\mathbf{g}$ a bruttó termelési értékek ismertnek feltételezett vektora.

A négyzetes eltéréseket, illetve azokat az $1/a_{i,j}$ illetve $1/a_{i,j}^2$ súlyokkal összesítő (4), (5) és (6) célfüggvények általánosításaként Harthoorn és van Dalen [1987] a

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{i,j}-a_{i,j})^2/g_{i,j}$$

képlettel írják fel a célfüggvényt, ahol az $1/g_{i,j}$ súlyok képviselik az $x_{i,j}$ elemek ,,első közelítésének" tekintett $a_{i,j}$ elemek ,,relatív megbízhatóságát" (Timurshoev et al [2011]).

Az is könnyen látható, hogy az entrópia jellegű, azaz logaritmus függvényt tartalmazó célfüggvényekkel szemben a négyzetes eltéréseken alapuló célfüggvények elvben megengedik azt, hogy a becsült $x_{i,j}$ az eredeti $a_{i,j}$-től eltérő előjelű legyen. Hasonlóképpen nyilvánvaló, hogy az eredeti zérus elemek is válhatnak nemzérussá. E problémákkal a következő fejezetben foglalkozunk.

3 Negatív elemeket is tartalmazó, illetve zérus peremértékű mátrixok kiigazítási módszerei

Ebben a fejezetben először a ,,kétirányú" mátrixkiigazításos feladatnak a 2. fejezetben ismertetett módszereinek olyan módosításait mutatjuk be, amelyek ahhoz szükségesek, hogy ezeket eredményesen lehessen alkalmazni olyan esetekben is, amelyekben a mátrix elemei és/vagy előírt sor- illetve oszlopösszesenjei között negatív elemek is vannak.

Egy különféle dezaggregációkat tartalmazó gazdasági modellezés adatbázisában gyakran szerepel ilyen dezaggregált kategóriák kereszt-táblázata (vagy más néven kontingencia-táblázata). Ha ezek becslésére van szükség, akkor sok esetben a negatív vagy zérus értékek akadályozzák a sztenderd módszerek alkalmazását. Például, ha a kiigazítandó mátrix egyik peremének (vagy annak egyes elemeinek) előírt értéke zérus, akkor a RAS-becslés az egész induló sort illetve oszlopot lenullázná, még akkor is, ha valóságban mind pozitív, mind negatív irányban léteznek nullától nyilvánvalóan jelentősen eltérő elemek. Az se sokkal szerencsésebb eset, ha a referencia mátrix valamelyik sor- vagy oszlopösszesenje zérus (természetesen ekkor a szóban forgó sor illetve oszlop vagy minden eleme zérus, vagy negatív elem(ek)nek is lennie kell benne), de a megfelelő előírt peremérték zérustól eltérő. A probléma súlyát érzékeltetendő megemlíthető, hogy az erre az esetre egyébként nem ajánlott RAS-algoritmus az adott sor illetve oszlop arányos kiigazítása során zérussal való osztást kísérelne meg.

Mint a 2. fejezetben bemutatott képleteikből is sejthető, a mátrix-kiigazítás eddig tárgyalt módszerei nem, vagy nem megfelelően működnek akkor, ha az indulómátrix egyes elemei vagy az előírt sor- illetve oszlopösszesenek egy része negatív. E problémák banális ad hoc kezeléseit leszámítva, mint például a kis negatív $a_{i,j}$ elemek zérusra cserélését (Omar [1967][10]) vagy

[10] Idézi Lahr és Mesnard [2004].

változatlanul hagyását (amit Huang et al [2008] szokásos módszernek nevez), Günlük-Şenesen és Bates [1988], majd az ő eredményeiket újrafelfedezve[11] Junius és Oosterhaven [2003] foglalkozott először alaposan a negatív elemek kezelésével. Azonban az általuk kidolgozott ún. ,,generalized"-RAS (GRAS) módszernek az általuk a

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\cdot x_{i,j}/a_{i,j}\cdot \ln(x_{i,j}/a_{i,j})$$

képlettel felírható célfüggvénye torzít (Huang et al [2008]), és nem is alkalmazható, ha nem minden oszlopban és sorban van pozitív elem (Temurshoev [2013]), illetve, mint majd látjuk, még normál esetben sem mindig a legjobb eredményt adja a becslési módszerek közül. Később Oosterhaven [2005] is rámutatott, hogy az eredetileg javasolt célfüggvényében a negatív és pozitív eltérések kiolthatják egymást (a tökéletes illeszkedés illúzióját keltve), és helyette az abszolút információveszteségnek (AIL) elnevezett

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}\cdot x_{i,j}/a_{i,j}\cdot \ln(x_{i,j}/a_{i,j})|$$

célfüggvényt javasolta. Később a GRAS-módszer célfüggvényének torzítását[12] Lenzen et al [2007] korrigálták. Huang et al [2008] pedig a célfüggvényt a

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\cdot (z_{i,j}\cdot \ln(z_{i,j}/e)+1)$$

alakra tovább módosítva (bár ez utóbbi módosítás csak egy olyan konstanst ad a függvényhez, amire a $z_{i,j} = 1$ értékek mellett a függvény éppen zérus lesz, de ez nem érinti az optimumhelyet) a módszert ,,javított-GRAS"-nak (IGRAS) nevezi.

Mindenesetre már a célfüggvényben szereplő logaritmus-függvényből is látható, hogy *ha a modellnek egyáltalán van megoldása,* akkor abban minden i, j párra $x_{i,j}/a_{i,j} = z_{i,j} \geq 0$. Tehát a GRAS-modell megoldása garantálja, hogy a mátrix elemei megtartják az előjelüket (azaz, hogy a becslés előjele az indulóérték előjelével azonos legyen).

A valamilyen információmennyiségen alapuló célfüggvényeket tartalmazó ún. entrópia-modelleken túl a kvadratikus célfüggvényt tartalmazó modellekben is megfogalmazható a becsült mátrix elemeire az előjelváltás tilalma. Jackson és Murray [2004] például (lásd a 10. sorszámú modelljüket) a $z_{i,j} = x_{i,j}/a_{i,j}$ változók szerint minimalizálandó

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(z_{i,j}\cdot a_{i,j}-a_{i,j})^2\cdot|a_{i,j}|$$

[11] Lásd Umed Temurshoev et al [2011] (lásd még: http://www.wiod.org/publications/papers/wiod2.pdf)

[12] Nevezetesen, hogy a $z \cdot \ln z$ függvény minimuma a $z = 1/e$ értéknél van (ahol e a természetes alapú logaritmus alapja és z képviseli az $x_{i,j}/a_{i,j}$ arányt, tehát a $z = 1$ helyen kellene lennie a minimumnak), míg az általa javasolt $z \cdot \ln(z/e)$ függvénynek van a $z = 1$ értéknél minimuma.

célfüggvényt alkalmazzák erre a célra a szokásos peremfeltételek és a $z_{i,j} \geq 0$ nemnegativitási feltételek mellett. A nemnegativitási feltételeket szerepeltető fenti, általuk ,,előjeltartó négyzetes eltérés"-nek nevezett modell ugyan elég jól megoldható a rendelkezésre álló matematikai programozási számítógépes programcsomagokkal (pl. GAMS), de ezen egyenlőtlenség tartalmú feltételek nem teszik lehetővé az optimális megoldás levezetését a Lagrange-szorzók módszerével. Talán ezért is Huang et al [2008] a mátrixelemek előjelváltását nem így, hanem a Lagrange-függvénybe beépített

$$M/2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot [\min(0, z_{i,j})]^2$$

taggal akadályozza meg, ahol M egy adott kellően nagy pozitív szám.

A Junius és Oosterhaven [2003] által a negatív elemeket is tartalmazó, részben negatív peremű mátrixok kiigazítására adott számpéldán ők és későbbi publikációk szerzői empirikusan is vizsgálták, hogy az egyes, az illeszkedés jóságát mérő (,,assessment") kritériumok szerint melyik becslési módszer a jobb. E módszerek közül Jackson és Murray [2004] éppen a fenti ,,előjeltartó négyzetes eltérés" modellt találták összességében a legjobbnak.

Hasonlóképpen Huang et al [2008] is arra a következtetésre jutottak, hogy az általuk ,,javított normalizált négyzetes eltérés"-nek (INSD) nevezett,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{i,j}/a_{i,j} - 1)^2 \cdot |a_{i,j}| + M/2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot [\min(0, z_{i,j})]^2 \qquad (7)$$

képlettel megadott célfüggvény teljesített (átlagosan) a legjobban Junius és Oosterhaven [2003] számpéldáján. Ez – a jó becslési eredmények mellett – elvileg is alátámasztja az EU-GTAP projektben általunk választott hasonló (kvadratikus jellegű) célfüggvény indokoltságát (Rueda – Revesz et al [2016]). Ahogy Huang et al [2008] rámutattak, és ahogy Temurshoev et al [2011] precízen levezették, az INSD célfüggvény az IGRAS célfüggvényének a $z_{i,j} = 1$ hely körüli Taylor-soros felírásának első tagja:

$$|a_{i,j}| \cdot (z_{i,j} \cdot \ln(z_{i,j}/e) + 1) \approx |a_{i,j}| \cdot (0 + z_{i,j} \cdot (z_{i,j} - 2) + 1) \approx |a_{i,j}| \cdot (z_{i,j} - 1)^2 \,.$$

Ezért, és mivel a GRAS-becslésben $z_{i,j} \geq 0$, Huang et al [2008] úgy érvelnek, hogy az INSD-módszer hajlamosabb megőrizni az elemek előjelét, mint más, nem-biproporcionális módszerek.

Fentieken és az empirikus tesztelésen túl Huang et al [2008] felírják az egyes módszereknek megfelelő korlátozott optimalizálási feladatokhoz tartozó Lagrange-függvényeket, és ezekből levezetik az optimális megoldások képleteit.[13] Az INSD célfüggvény esetén ezek az alábbiak:

$$z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_{i,j} = 0 \\ 1 + \operatorname{sgn}(a_{i,j}) \cdot (\lambda_i + \tau_j) & \text{ha ez nemnegatív vagy } M = 0 \\ 0 & \text{ha } M \text{ végtelenhez tart.} \end{cases} \tag{8}$$

$$\lambda_i = \Big(u_i - \sum_j a_{i,j} + \sum_j (M \cdot a_{i,j} \cdot \min(0, z_{i,j}) - \tau_j \cdot |a_{i,j}|)\Big) / \sum_j |a_{i,j}| \tag{8a}$$

$$\tau_j = \Big(v_j - \sum_i a_{i,j} + \sum_i (M \cdot a_{i,j} \cdot \min(0, z_{i,j}) - \lambda_i \cdot |a_{i,j}|)\Big) / \sum_i |a_{i,j}| \tag{8b}$$

ahol $z_{i,j} = x_{i,j}/a_{i,j}$, λ_i és τ_j pedig a Lagrange-függvényben a sor- és oszlopirányú eltérésekhez tartozó Lagrange-szorzók.

Konkrétan akkor, ha $z_{i,j} \geq 0$, azaz ha az $a_{i,j}$ *elem nem vált előjelet,* λ_i és τ_j fenti képletei az alábbiakra egyszerűsödnek:

$$\lambda_i = \Big(u_i - \sum_j a_{i,j} - \sum_j \tau_j \cdot |a_{i,j}|\Big) / \sum_j |a_{i,j}| \tag{9}$$

$$\tau_j = \Big(v_j - \sum_i a_{i,j} - \sum_i \lambda_i \cdot |a_{i,j}|\Big) / \sum_i |a_{i,j}| \tag{10}$$

A $z_{i,j}$ meghatározására szolgáló (8)-beli képlet középső részéből látszik, hogy ekkor pozitív $a_{i,j}$ elemek esetében hozzáadni, negatív elemeknél pedig levonni kell a Lagrange-szorzókat.

A (8) középső egyenletét $a_{i,j}$-vel beszorozva

$$x_{i,j} = z_{i,j} \cdot a_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(a_{i,j}) \cdot (\lambda_i + \tau_j)\,, \tag{11}$$

majd bevezetve a $d_{i,j} = x_{i,j} - a_{i,j}$ jelölést, mindkét oldalából $a_{i,j}$-t levonva és figyelembe véve, hogy $a_{i,j} \cdot \operatorname{sgn}(a_{i,j}) = |a_{i,j}|$, a

$$d_{i,j} = x_{i,j} - a_{i,j} = |a_{i,j}| \cdot (\lambda_i + \tau_j) \tag{12}$$

összefüggés adódik a Lagrange-szorzók és a mátrix elemeinek (optimális) változása között.

A (9) és (10) egyenletekből pedig azt látjuk, hogy e szorzók egymástól függenek, valamint függenek az adott $a_{i,j}$ elem sorirányú illetve oszlopirányú *abszolútérték-részesedés*étől is.

Érdemes megjegyezni, hogy hasonlóan a RAS-módszerhez (amelynek megoldásában a sorok és az oszlopok (Lagrange-) szorzói csoportonként egymással fordított arányban, csoporton belül egységesen, de bármily arányban arányosan változhatnak) a (12) képletből látszik, hogy ugyanarra a becslésre vezet,

[13] Bár hibásan, az általuk megadott elsőrendű feltételek akkor állnának fenn, ha a Lagrange-függvényben a korlátoktól való eltérések fordított előjellel lennének felírva. Ezt később Temurshoev et al. [2011] javítják, de ők se indokolják a célfüggvény megfelezését a Lagrange-függvény képzésénél, ami egyébként a peremektől való eltéréseket büntető függvény kétszeres súllyal való beszámításával egyenértékű.

ha egy tetszőleges φ értéket választva λ_i helyére $\lambda_i + \varphi$ értéket, τ_j helyére pedig $\tau_j - \varphi$ értéket adunk meg, sőt továbbra is kielégítik a (8), (9), (10) elsőrendű feltételeket is. Tehát ilyen értelemben, ha van egy megoldás, akkor végtelen sok van, csak amíg a „multiplikatív" RAS esetében a Lagrange-szorzókban a *szabadságfok* egy arányossági tényezőben jelentkezik, addig az INSD esetében ez egy additív komponensben.

Mivel a Huang et al [2008] által tárgyalt általános (előjelváltást megtiltó) esetben a (8), (9), (10) egyenletrendszer szimultán (λ_i és τ_j függenek $z_{i,j}$-től és fordítva), megoldására egy iterációs algoritmust javasolnak $z_{i,j}^{(0)} = 1$, $\lambda_i^{(0)} = 0$, $\tau_j^{(0)} = 0$ indulóértékekkel. Az általunk tárgyalt, előjelváltást megengedő esetben azonban λ_i és τ_j csak egymástól függenek, és a Huang et al [2008] által javasolt iterációs algoritmus nem rekurzívan értelmezett változatának első lépésében a (9) és (10) képletek alapján a Lagrange-szorzók a

$$\lambda_i^{(1)} = g_i / \sum_j |a_{i,j}| \tag{13}$$

$$\tau_j^{(1)} = h_j / \sum_i |a_{i,j}| \tag{14}$$

képletekkel határozódnak meg, ahol bevezettük a $g_i = u_i - \sum_j a_{i,j}$ és $h_j = v_j - \sum_i a_{i,j}$ jelöléseket az előírt sor- és oszlopösszesenek eltérésére az $\mathbf{A}$ mátrix megfelelő sor- és oszlopösszesenjeitől.

Legyen $\mathbf{S} = |\mathbf{A}|$, ahol $|\mathbf{A}|$ az a mátrix, amely $\mathbf{A}$ elemeinek abszolút értékeit tartalmazza, $\mathbf{w} = \mathbf{1}^T\mathbf{S}$, $\mathbf{q} = \mathbf{S1}$, valamint $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{S}$ és $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{w}}^{-1}$ az $\mathbf{S}$ sor- illetve oszlopirányú megoszlásait tartalmazó mátrixok. A (13) és (14) képletnek (12)-be való behelyettesítésével azt kapjuk, hogy az első iterációs lépésben a mátrix elemei a

$$\begin{aligned} d_{i,j}^{(1)} &= |a_{i,j}| \cdot (\lambda_i^{(1)} + \tau_j^{(1)}) = g_i \cdot |a_{i,j}| / \sum_j |a_{i,j}| + h_j \cdot |a_{i,j}| / \sum_i |a_{i,j}| = \\ &= g_i \cdot r_{i,j} + h_j \cdot c_{i,j} \end{aligned} \tag{15}$$

mértékben változnak meg. Ez tehát azt jelenti, hogy az első iteráció a sorok, illetve oszlopok szükséges kiigazítását éppen az egyes $a_{i,j}$ elemek sorirányú, illetve oszlopirányú *abszolútérték-részesedésének arányában szétosztva* végzi el. Figyeljük meg, hogy ez az első iterációs lépés a kiigazítást összességében duplán végezné el, a kapott mátrix mindösszesenje

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{i,j}^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} g_i + \sum_{j=1}^{n} h_j$$

képletében mind a $\sum_{i=1}^{m} g_i$, mind a $\sum_{j=1}^{n} h_j$ tag önmagában biztosítaná, hogy a mátrix mindösszesenje az előírt legyen.

A közben bevezetett jelölésekkel a Lagrange-szorzók (végső) értékeit meghatározó (9) egyenleteket $q_i = \sum_j |a_{i,j}|$-vel, a (10) egyenleteket pedig $w_j =$

$\sum_i |a_{i,j}|$-vel beszorozva a

$$\lambda_i \cdot q_i = g_i - \sum_j \tau_j \cdot s_{i,j} \tag{16}$$

$$\tau_j \cdot w_j = h_j - \sum_i \lambda_i \cdot s_{i,j} \tag{17}$$

alakra egyszerűsödnek. Mátrixalgebrai jelölésekkel (16) és (17) a

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \tag{18}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerben foglalható össze, ahol $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{g}$ és $\mathbf{h}$ rendre a λ_i, τ_j, g_i és h_j elemekből képzett oszlopvektorok.

Mivel $\mathbf{1}^T\mathbf{g} = \mathbf{1}^T\mathbf{h}$, valamint $\hat{\mathbf{q}}\mathbf{1} = \mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{1}$ és $\hat{\mathbf{w}}\mathbf{1} = \mathbf{w} = \mathbf{S}^T\mathbf{1}$, fennáll, hogy

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{19}$$

azaz a továbbiakban $\mathbf{S}^*$-gal jelölt $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix}$ (egyébként láthatóan szimmetrikus) mátrix szinguláris (sorai, illetve oszlopai összefüggők). Ezért a (18) egyenletrendszer nem oldható meg az $\mathbf{S}^*$ (nem létező) inverzével balról való beszorzásával, hanem (legalább) egy változót ki kell fejezni a többivel, és el kell hagyni az egyenletrendszer hozzá tartozó (azonos sorszámú) egyenletével együtt. Végül az $(m + n - 1)$ egyenletből és változóból álló redukált egyenletrendszert lehet megoldani a redukált együtthatómátrix inverzével balról való beszorzásával.

3.1 Az előjelváltást megengedő módszerekről

A negatív elemeket is tartalmazó mátrixok elemeinek becslésénél előfordulható előjelváltást korábban értelemszerűen igyekeztek elkerülni (már csak azért is, mert negatív $z_{i,j}$ esetén a célfüggvényként definiált, az entrópia-modellekben szokásosan használt logaritmus függvény nincs értelmezve), s előjeltartó („sign-preserving") algoritmusokat kidolgozni. Azonban előfordulhatnak olyan esetek is, amikor az előírt peremek olyanok, hogy az $a_{i,j}$ és $x_{i,j}$ elemek előjele különböző kell, hogy legyen.

Lemelin [2009] egy ilyen esetet is bemutat a cikkében. Miközben igyekszik kiterjeszteni és tesztelni a GRAS- és a Kullback – Leibler [1951]-féle keresztentrópia becslési módszereket zérus-peremű mátrixokra, Junius és Oosterhaven számpéldájának mátrixát először mint nettó *világkereskedelmi mátrixot* értelmezi át, ahol az inkonzisztens kiinduló adatok $\mathbf{A}$ mátrixának $a_{i,j}$ eleme mutatja a j-edik ország nettó exportját az i-edik termékből, és amelynek becsült X mátrixának mind a sorösszesenjei, mind az oszlopösszesenjei zérusok kell, hogy legyenek, majd mint nemzetközi befektetési nettó pozíciók mátrixát, ahol az inkonzisztens kiinduló adatok $\mathbf{A}$ mátrixának $a_{i,j}$ eleme mutatja a j-edik ország nettó követelését az i-edik befektetési eszközből, és amely becsült X mátrixa sorösszesenjeinek ugyancsak zérusnak kell lenniük, de az egyes oszlopösszesenek negatív értékét teszi szükségessé. Ez utóbbi esetben Lemelin a mátrix eredetileg pozitív elemekből álló 2. oszlopának előírt összegét szándékosan negatív értékkel határozza meg, hogy kikényszerítse egyes elemek előjelváltását, és ezen tesztelhesse Kullback és Leibler, valamint Junius és Oosterhaven erre az esetre Lemelin által némiképpen módosított GRAS- illetve kereszt-entrópia módszerét.

Az indulómátrix és az elvárt peremek konkrétan az *1. táblázatban* szereplő értékek voltak.

	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	7	3	5	-3	12	0
2. p.ü. eszköz	2	9	8	1	20	0
3. p.ü. eszköz	-2	0	2	1	1	0
Összesen	7	12	15	-1		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

1. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók mátrixának kiinduló értéke

A kereszt-entrópia módszerrel becsült mátrix a *2. táblázat* szerinti lett.

Pénzügyi eszköz	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	27495.1	-36579.2	24854.4	-15770.3	0	0
2. p.ü. eszköz	-11049.5	36563.2	-34936.8	9423.2	0	0
3. p.ü. eszköz	-16436.5	0	10099.5	6337.1	0	0
Összesen	9	-16	17	-10		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

2. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók kereszt-entrópia modellel becsült mátrixa

Lemelin a kereszt-entrópia módszer nyilvánvalóan irreális eredményeit azzal magyarázza, hogy a módszer igyekszik megőrizni a mátrix elemeinek arányait, így ha akár csak kis oszlopösszegeket kell korrigálni nagyobb arányban, akkor a hozzájuk tartozó oszlop elemeket is azonos nagy arányban módosítja (a RAS-hoz hasonlóan).

Lemelin [2009] a GRAS-módszerrel a *3. táblázatbeli* becslést kapta (lásd a cikke 8. táblázatát).

	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	17,07	-23,44	18,65	-12,28	0	0
2. p.ü. eszköz	-2,49	7,44	-6,52	1,58	0	0
3. p.ü. eszköz	-5,57	0	4,87	0,71	0	0
Összesen	9	-16	17	-10		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

3. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók GRAS-modellel becsült mátrixa

Lemelin a két módszerrel kapott eredményeket összevetve megállapítja, hogy a módosított GRAS-módszere jobbnak bizonyult, mint a kereszt-entrópia módszer. Sajnos nem vizsgálta a kvadratikus jellegű célfüggvényekkel kapható megoldásokat, pedig azok maguktól értetődően megengedik az előjelváltásokat. Erre a következő alfejezetben még visszatérünk.

Lenzen [2014] miután elsősorban a (az ÁKM-ekben külön oszlopban megjelenő) készletváltozások kapcsán bemutatja, hogy a készletváltozások milyen okokból, mely termékekből és milyen gyakorisággal változnak, általában is megfordítja az előjelváltás addigi negatív minősítését, és erényként hangsúlyozza, hogy ha kell, adott esetben a becslési eljárás meg tudja fordítani a mátrix elemeinek előjelét.

3.2 Az additív RAS módszer

A zérus (vagy zérus-közeli) elvárt peremek, illetve szerencsétlen helyen és nagyságrendben megjelenő negatív elemeket tartalmazó indulómátrix esetében használhatatlan RAS-módszert egy olyan iterációs algoritmusra módosítottam (Révész [2001]), hogy szorzás helyett először a sorösszegekben az elvárttól való elmaradást kell szétosztani a indulómátrix adott sorában levő elemek között az *abszolútérték-részesedésük* arányában a

$$x_{i,j}^{(1)(r)} = a_{i,j} + g_i^{(1)} \cdot r_{i,j} \tag{20}$$

képlet alapján (ahol $g_i^{(1)} = g_i$), majd oszlopirányban is hasonló kiigazítást kell végrehajtani a

$$x_{i,j}^{(1)} = x_{i,j}^{(1)(r)} + h_j^{(1)} \cdot c_{i,j} \tag{21}$$

képlet alapján, ahol $h_j^{(1)} = v_j - \sum_i x_{i,j}^{(1)(r)}$.

Általában az n-edik iteráció (amely tehát az n-edik sorirányú és n-edik oszlopirányú kiigazítás lépéseit tartalmazza) a

$$x_{i,j}^{(n)(r)} = x_{i,j}^{(n-1)} + g_i^{(n)} \cdot r_{i,j} \tag{22}$$

(ahol $g_i^{(n)} = u_i - \sum_j x_{i,j}^{(n-1)}$), illetve

$$x_{i,j}^{(n)} = x_{i,j}^{(n)(r)} + h_j^{(n)} \cdot c_{i,j} \tag{23}$$

képletekkel írható fel, ahol $h_j^{(n)} = v_j - \sum_i x_{i,j}^{(n)(r)}$. Ennek alapján az első n iteráció után az egyes elemek $d_{i,j}^{(n)} = x_{i,j}^{(n)} - a_{i,j}$ összes addigi módosulása a

$$d_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (g_i^{(k)} \cdot r_{i,j} + h_j^{(k)} \cdot c_{i,j}) = r_{i,j} \cdot \sum_{k=1}^{n} g_i^{(k)} + c_{i,j} \cdot \sum_{k=1}^{n} h_j^{(k)} \tag{24}$$

képlettel írható fel. Ha az eljárás konvergens, akkor nyilvánvalóan a $d_{i,j}^{(\Sigma)}$ határértékre a

$$d_{i,j}^{(\Sigma)} = r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)} \tag{25}$$

áll fenn, ahol $g_i^{(\Sigma)} = \lim_{n\to\infty} g_i^{(n)}$ és $h_j^{(\Sigma)} = \lim_{n\to\infty} h_j^{(n)}$.

Mivel a konvergencia nyilván csak az előírt sor- és oszlopösszesenekhez történhet (különben az eljárás tovább módosít az eltérések szétosztásával), a (25) egyenletet j-re összegezve a

$$g_i = \sum_j d_{i,j}^{(\Sigma)} = \sum_j (r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)}) = g_i^{(\Sigma)} \cdot \sum_j (r_{i,j} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)}) = \\ = g_i^{(\Sigma)} + \sum_j c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)} \tag{26}$$

illetve i-re összegezve a

$$h_i = \sum_i d_{i,j}^{(\Sigma)} = \sum_i (r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + c_{i,j} \cdot h_j^{(\Sigma)}) = \sum_j r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + h_j^{(\Sigma)} \cdot \sum_i c_{i,j} = \\ = \sum_j r_{i,j} \cdot g_i^{(\Sigma)} + h_j^{(\Sigma)} \tag{27}$$

feltételekhez jutunk a $g_i^{(\Sigma)}$ és $h_j^{(\Sigma)}$ ez idáig ismeretlen értékeire. A (26) és (27) egyenleteket mátrixalgebrai formában rendre a

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{(\Sigma)} + \mathbf{C}\mathbf{h}^{(\Sigma)} = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{g}^{(\Sigma)} + \mathbf{S}\hat{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{h}^{(\Sigma)} \tag{28}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}^T\mathbf{g}^{(\Sigma)} + \mathbf{h}^{(\Sigma)} = \mathbf{S}^T\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{g}^{(\Sigma)} + \hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{h}^{(\Sigma)} \tag{29}$$

formában írhatjuk fel, ahol $\mathbf{g}^{(\Sigma)}$ és $\mathbf{h}^{(\Sigma)}$ a $g_i^{(\Sigma)}$, illetve $h_j^{(\Sigma)}$ elemekből képzett oszlopvektorokat jelentik. A (28) és (29) egyenleteket a

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}^{-1} & \mathbf{g}^{(\Sigma)} \\ \hat{\mathbf{w}}^{-1} & \mathbf{h}^{(\Sigma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \tag{30}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerben foglalhatjuk össze. Összevetve ezt a kapott egyenletrendszert a (18) egyenletrendszerrel, látható, hogy mind az együtthatómátrixuk, mind a konstans vektoruk azonos. Tehát a (18) és (30) egyenletrendszernek azonosak a megoldásai is. Tehát ha a λ, τ a (18) megoldása, akkor a $\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{g}^{(\Sigma)} = \lambda$ és $\hat{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{h}^{(\Sigma)} = \tau$ összefüggéseknek eleget tevő

$$\mathbf{g}^{(\Sigma)} = \hat{\mathbf{q}}\lambda \tag{31}$$

$$\mathbf{h}^{(\Sigma)} = \hat{\mathbf{w}}\tau \tag{32}$$

$\mathbf{g}^{(\Sigma)}$ és $\mathbf{h}^{(\Sigma)}$ vektorok a megoldása a (30) egyenletrendszernek. Az így kapott értékeket behelyettesítve a (25) egyenletbe a

$$d_{i,j}^{(\Sigma)} = r_{i,j} \cdot q_i \cdot \lambda_i + c_{i,j} \cdot w_j \cdot \tau_j = s_{i,j} \cdot \lambda_i + s_{i,j} \cdot \tau_j = |a_{i,j}| \cdot (\lambda_i + \tau_j) \tag{33}$$

összefüggés adódik az additív-RAS algoritmus eredő cellamódosításaira. Ez pedig éppen megegyezik a Huang et al [2008] által levezetett INSD-módszer (12) képletben található (optimális) megoldásával.

Tehát bizonyítottuk, hogy az additív-RAS algoritmus eredménye azonos az INSD-módszerével abban az esetben, ha a mátrix elemei nem váltanak előjelet. Szerencsére az előjelváltás csak az elvárt és tényleges peremértékek extrém arányai esetében fordulhat elő. Ugyanis (mivel az abszolútérték-részesedések kisebbek a részesedéseknél) hacsak az elvárt és tényleges peremértékek arányai nem csökkennek -100% alá, akkor az iteráció biztosan nem vezet a mátrix elemeinek előjelváltásához. Sőt, általában még ennél extrémebb arányoknál sem. Mindenesetre extrémebb arányok esetén megkérdőjeleződik a referencia mátrix használhatósága, azaz, hogy a keresett mátrix szerkezete tényleg képes-e megőrizni az eredeti mátrix szerkezetét.

A fenti ,,abszolútérték-részesedések kisebbek a részesedéseknél" megállapítás némi pontosításra szorul. Ugyanis ez akkor igaz, ha ugyanazon vektor elemeiből számítódnak. A fentebb bemutatott algoritmus esetében azonban az abszolútérték-részesedések mindig az indulómátrix $a_{i,j}$ elemeiből számítódnak, miközben az aktuális részesedések a mindenkori $x_{i,j}^{(n)(r)}$, illetve $x_{i,j}^{(n)}$ mátrixok elemeiből. Így ha valamilyen oknál fogva ez utóbbiak arányai jelentősen eltérnek az eredeti mátrixétól, akkor előfordulhat, hogy az additív-RAS algoritmus előjelet vált. Ettől persze még konvergálhat, és egész ésszerűnek látszó eredményekre is vezethet, de nem garantálható, hogy valamilyen szokásos optimumkritérium (távolságmetrika) alapján a legjobb becslést adja.

Ha tehát az additív-RAS algoritmus előjelváltást eredményez, és ezáltal matematikai tulajdonságai úgyis átláthattalanná válnak, akkor már érdemes az algoritmust egy technikailag csekély módosítással használni. Nevezetesen az abszolútérték-részesedéseket is – a RAS-algoritmus szorzói logikájához hasonlóan – a mindenkori $x_{i,j}^{(n)(r)}$ illetve $x_{i,j}^{(n)}$ mátrixok (pontosabban mivel eltérnek az eredeti additív-RAS algoritmusétól, ezért jelöljük ezeket $\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)}$-vel illetve $\tilde{x}_{i,j}^{(n)}$-vel) arányában szétosztani. Tehát az n-edik iterációs lépés (22)-(23) képletei a következőkre módosulnak:

$$\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)} = \tilde{x}_{i,j}^{(n-1)} + g_i^{(n)} \cdot r_{i,j}^{(n)} , \tag{34}$$

ahol $r_{i,j}^{(n)} = |\tilde{x}_{i,j}^{(n-1)}| / \sum_j |\tilde{x}_{i,j}^{(n-1)}|$, illetve

$$\tilde{x}_{i,j}^{(n)} = \tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)} + h_j^{(n)} \cdot c_{i,j}^{(n)} , \tag{35}$$

ahol $c_{i,j}^{(n)} = |\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)}| / \sum_i |\tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)}|$.

Általában is az additív RAS módszer általános képleteiből (lásd a (22)-(23), illetve (34)-(35) egyenleteket) látható, hogy mivel $\sum_j r_{i,j} = \sum_j r_{i,j}^{(n)} = \sum_i c_{i,j} = \sum_i c_{i,j}^{(n)} = 1$ definíciószerűen, ezért

$$\sum_j x_{i,j}^{(n)(r)} = \sum_j \tilde{x}_{i,j}^{(n)(r)} = u_i , \qquad \sum_i x_{i,j}^{(n)} = \sum_i \tilde{x}_{i,j}^{(n)} = v_j ,$$

azaz az előírt peremfeltételek teljesülnek.

Természetesen nemnegatív elemek esetén mind az eredeti, mind a módosított additív-RAS iterációs lépései pontosan ugyanazt adják, mint a hagyományos RAS-algoritmus, azaz megoldásaik is azonosak.

Az előbb elmondottak alapján egyelőre (költői) kérdés, hogy a végeredményben kapott $\tilde{x}_{i,j}$ mátrix a fentiekben tárgyaltakon túl milyen matematikai tulajdonságú, mennyire jól illeszkedik a kiinduló mátrixhoz vagy egy, az előző bekezdésben vázolt kiigazított kiinduló mátrixhoz. A fent igazolt matematikai tulajdonságaitól eltekintve azt mondhatjuk, hogy a módosított additív-RAS algoritmus olyan, mint egy természetgyógyász készítmény, megfelelően hat, de a hatásmechanizmusa és az alkalmazhatósági/hatékonysági körülményei nem minden tekintetben tisztázottak. Valószínűleg ilyesfélék miatt nem keltette fel eddig a matematikusok figyelmét, és így a módszer matematikai tulajdonságainak részletesebb, precíz diszkussziója tehát még hátravan, és számos érdekes összefüggést tárhat fel.

Szerencsére az eddigi, több mint 25 éves tapasztalataink alapján általában az additív-RAS-módszernek mind a konvergenciája elég gyors, mind az illeszkedése rendkívül jó. De, hogy ne a saját számpéldánkkal érzékeltessük ezt, tekintsük a Huang et al [2008] cikk számpéldáját.

Természetesen az additív-RAS-t nem tartalmazza a Huang et al [2008] cikk, így a rá vonatkozó számításokat mi végeztük el. Mindenesetre az additív-RAS megoldásnak a Huang által preferált AIL (average information loss) illeszkedési mutatója ugyanakkorának adódott (11,28), mint az általa legjobbnak tartott INSD-módszer eredményéé, sőt tényleg a mátrix minden elemére pontosan azonos becslést adott az additív-RAS módszer és az INSD-célfüggvénnyel számított módszer.

Noha az előjelváltások esetében az additív-RAS illetve az INSD-becslés matematikai tulajdonságairól a Huang et al [2008] által mondottakon túl kevés konkrétumot tudunk mondani, mind az eredeti, mind a módosított additív-RAS algoritmusok a Lemelin [2009] által konstruált számpéldára is kiváló eredményt adtak. Az eredmények a *4. táblázatban* láthatók.

	1. ország	2. ország	3. ország	4. ország	Összesen	Előírt összesen
1. p.ü. eszköz	7,89	-4,42	5,10	-8,58	0	0
2. p.ü. eszköz	2,62	-11,58	9,64	-0,67	0	0
3. p.ü. eszköz	-1,52	0,00	2,27	-0,75	0	0
Összesen	9	-16	17	-10		
Előírt összesen	9	-16	17	-10		

4. táblázat. Nemzetközi befektetési nettó pozíciók additív-RAS modellel becsült mátrixa

A fenti táblázatot összevetve az előző alfejezetben már bemutatott indulómátrixszal látható, hogy szinte minden elem a előírt peremek eléréséhez szükséges változások irányában változott meg, és a változások relatív nagysága is kielégítő. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a módszerünk nem használ semmiféle önkényes normalizálást.

Lemelin [2009] 8. táblázatában (általunk fentebb a 3. táblázatban) szereplő javasolt megoldásával összehasonlítva az eredményeinket, világosan látható, hogy az additív-RAS megoldás egyértelműen jobb, különösen az $a_{2,1}$ elemet tekintve, valamint Lemelin megoldásában az egész 2. és 4. oszlopot nézve, ahol rejtélyes, hogy miért emelkedett két elem, ha mind a hozzájuk tartozó sorösszegeknek, mind az oszlopösszegeknek csökkeniük kellett.

A MAD (mean average deviation) értékek kiszámításával próbáltuk kimutatni a Lemelin-cikk megoldásának, valamint az eredeti és a módosított additív-RAS algoritmus megoldásának az illeszkedési „pontosságát". A Lemelin vs. additív-RAS-megoldások között persze e nélkül is látványos volt a különbség és az additív RAS-becslés abszolút fölénye, amit a MAD érték is fényesen igazol (Lemelin GRAS-megoldásában 7,28, az additív-RAS-nál pedig 3,42). Az eredeti- és módosított additív-RAS számítás MAD-je között kicsi a különbség, a módosított additív-RAS-é kicsit magasabb (3,47).

3.3 A 2010. évi EU-ÁKM-eket a GTAP-ágazati bontásban becslő modell

A gyakorlati alkalmazási és általánosítási lehetőségek érzékeltetésére ebben az alfejezetben egy olyan friss kutatási projektről lesz szó, amelyben a mátrix-kiigazítási feladatot a fentieknél általánosabban kellett megfogalmaznunk, és a megoldásánál a probléma közgazdasági-gazdaságstatisztikai vonatkozásait szem előtt tartva különféle szakmai fogásokat kellett célszerűen kombinálnunk.

Az ún. EU-GTAP projekt keretében (lásd Rueda et al (2016) a *EU-GTAP project - final report-161005.pdf* file-ban) az Európai Bizottság Kereskedelmi Főigazgatósága (DG Trade) megbízásából a Közös Kutató Központ (JRC) az Eurostat közvetítői, módszertani ellenőrei és a GTAP-konzorcium[14] szakértői segítségével először az EU-országoknak az SNA2008 (lásd Eurostat [2008]) módszertana és ágazati bontása szerinti 2010. évi Ágazati Kapcsolati Mérlegeit (ÁKM-eit) és termékadó mátrixait állították elő egységes szerkezetben (beleértve a hiányzó ÁKM-eknek a becslését is, és a nettó termékadó mátrixoknak a főbb adó- és támogatások szerinti bontását is – becslésekkel – elvégezve). Ezután az így kapott „Eurostat-szerkezetű" ÁKM-eket és a hozzájuk tartozó termékadó mátrixokat transzformálva (elsősorban a bányászatot, az élelmiszer-ital-dohányipart, a textil-ruházati ipart, a kohászatot, valamint a villamosenergia-gáz-hőszolgáltatást dezaggregálva) a GTAP-adatbázis 57 ágazatára előállították mind alapáron, mind felhasználói áron a termék(csoportos) bontású EU-GTAP ÁKM-eket. Az eredményeket a GTAP világmodell adatbázis 9.2-es verziójába építették be.

E projekt keretében is sor került az additív-RAS módszer alkalmazására. Spanyolországra állítólag létezik a nettó termékadó mátrix, de titkosítva van. Ezért az additív-RAS kétirányú arányosítási módszerrel becsültük a 2010. évi Felhasználás táblát használva referenciamátrixként[15]. Ez az összehasonlítás-

[14]Erről a világmodellezési adatbázissal foglalkozó szervezetről lásd a honlapjukat (www.gtap.org)

[15]Ez azokban a sorokban minden elemre negatív nettó termékadót becsült, ahol a sorösszesen, azaz az adott terméken levő összes termékadók és támogatások egyenlege (nettó termékadó) negatív volt (például a mezőgazdaság, bányászat és szárazföldi közlekedés esetében). Hasonlóan, azon ágazat (konkrétan az élelmiszeripar) oszlopában, amelynek az inputjain összességében negatív volt a termékadók és támogatások egyenlege, szintén minden elemre negatív (vagy zérus) termékadót becsült az additív-RAS módszer. Ezzel szemben a RAS-módszer a negatív peremű sorok és negatív peremű oszlopok találkozási pontjában (cellájában) *pozitív* (!) nettó termékadót becsült, ami teljességgel elfogadhatatlan.

ként szintén alkalmazott RAS-módszerhez képest jóval ésszerűbb szétosztását eredményezte a rendelkezésre álló sor- és oszlopösszeseneknek.

Az EU-GTAP projektben a kétirányú mátrix-kiigazítási probléma egy komplexebb becslési feladat részeként jelent meg. Ugyanis mind a *hazai termékáramlások mátrix*át, mind az *importmátrix*ot kellett becsülnünk, de nem külön-külön, hanem úgy, hogy az oszlopösszesenek (folyó termelőfelhasználás ágazatonként, összes felhasználás végső felhasználási kategóriánként), illetve az egyes cellákra vonatkozó alsó- és felső korlátok csak a két mátrix összegére álltak rendelkezésre. Ezért a feladatot *bi-mátrix kiigazítási feladat*nak is nevezhetjük.

Ezen túlmenően (főleg az eredeti statisztikai adatok hibái, inkonzisztenciája és negatív elemekhez vezető módszertani megoldásai miatt) néhány esetben egyedi kivételekkel, de a mátrixok elemei zömére nemnegativitási kikötéssel is kellett élnünk, valamint az aggregáltabban rendelkezésre álló adatokat figyelembe véve a becslendő (dezaggregáltabb) mátrix elemeire blokkösszesen- és egyéb feltételeket is elő kellett írnunk.

E komplex feladat megoldására kidolgozott modell (az alsó, felső korlátokat az egyes ráfordítási együtthatókra, export/termelés részarányokra és készletfelhalmozásokra, az előjelkorlátokat és kivételeket nem tartalmazó) lényegi részét az alábbiakban írhatjuk fel matematikai jelölésekkel:

Halmazok

I GTAP-adatbázisban (www.gtap.org) szereplő ágazatok (általános elemét i-vel, illetve j-vel jelöljük, attól függően, hogy sor- vagy oszlopindexet jelöl)

V Végső felhasználási kategóriák (általános elemét v-vel jelöljük)

B Az Eurostat ÁKM-ek és a GTAP-ágazatok közös aggregációjának ágazatai (általános elemét b-vel illetve b'-vel jelöljük attól függően, hogy sor- vagy oszlopindexet jelöl)

$M(b,i)$ A közös aggregációs szint ágazatai és a GTAP-ágazatok megfeleltetésének halmaza, azon (b,i) párok halmaza, amelyben az i GTAP ágazat a b közös aggregációs ágazatba tartozik

Változók (normális esetben nemnegatívak, például a készletfelhalmozás)

$D^p(i,j)$ a hazai termékek folyó termelő felhasználásának mátrixa az ÁKM-ben

$D^f(i,v)$ a hazai termékek végső felhasználásának mátrixa az ÁKM-ben

$M^p(i,j)$ az importmátrixnak a folyó termelő felhasználási blokkja

$M^f(i,v)$ az importmátrixnak a végső felhasználási blokkja

Paraméterek

$x(i)$ bruttó termelési értékek GTAP-ágazatonként

$m(i)$ import GTAP-ágazatonként

$v(i)$ hozzáadott érték GTAP-ágazatonként
ε alkalmasan megválasztott kis szám (0,1 a GAMS programban)
λ alkalmasan megválasztott nagy szám (10 a GAMS programban)
$D_0^p(i,j)$ referencia (prior) mátrix a $D^p(i,j)$ becsléséhez
$D_0^f(i,v)$ referencia (prior) mátrix a $D^f(i,v)$ becsléséhez
$M_0^p(i,j)$ referencia (prior) mátrix az $M^p(i,j)$ becsléséhez
$M_0^f(i,v)$ referencia (prior) mátrix az $M^f(i,v)$ becsléséhez
$D_a^p(b,b')$ a $D^p(i,j)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
$M_a^p(b,b')$ az $M^p(i,j)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
$D_a^f(b,v)$ a $D^f(i,v)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
$M_a^f(b,v)$ az $M^f(i,v)$ közös aggregációs ágazatokra vonatkozó blokk-összesenjei
$\vdots$

Korlátozó feltételek[16]

$x(i) = \sum_j D^p(i,j) + \sum_v D^f(i,v)$
$m(i) = \sum_j M^p(i,j) + \sum_v M^f(i,v)$
$v(j) = x(j) - \sum_i \{D^p(i,j) + M^p(i,j)\}$
$D_a^p(b,b') = \sum_{i|(b,i)\in M} \sum_{j|(b',j)\in M} D^p(i,j)$
$M_a^p(b,b') = \sum_{i|(b,i)\in M} \sum_{j|(b',j)\in M} M^p(i,j)$
$D_a^f(b,v) = \sum_{i|(b,i)\in M} D^f(i,v)$
$M_a^f(b,v) = \sum_{i|(b,i)\in M} M^f(i,v)$
$\vdots$

Célfüggvény

$$\sum_{i,j}\Big(\Big[\frac{D^p(i,j)+\varepsilon}{D_0^p(i,j)+\varepsilon}-1\Big]^2+\Big[\frac{D_0^p(i,j)+\varepsilon}{D^p(i,j)+\varepsilon}-1\Big]^2+\Big[\frac{M^p(i,j)+\varepsilon}{M_0^p(i,j)+\varepsilon}-1\Big]^2+$$
$$+\Big[\frac{M_0^p(i,j)+\varepsilon}{M^p(i,j)+\varepsilon}-1\Big]^2\Big)+\lambda\sum_{i,v}\Big(\Big[\frac{D^f(i,v)+\varepsilon}{D_0^f(i,v)+\varepsilon}-1\Big]^2+\Big[\frac{M^f(i,v)+\varepsilon}{M_0^f(i,v)+\varepsilon}-1\Big]^2\Big)$$

Figyeljük meg a fenti célfüggvény alábbi sajátosságait:

- ε alkalmasan választott kis számérték teszi lehetővé, hogy olyan cellákra is nemzérus becslést kaphassunk, amelyekre az indulómátrixban zérus érték szerepelt. Ezt a minimumértéket vezette be például Möhr et al

[16]Ebben a blokkban a | függőleges vonalszakasz a „ha” szót helyettesíti, azaz azt jelenti, hogy az összegzés azon elemekre szorítkozik, amelyek a | jel jobb oldalán álló feltételt kielégítik. Itt sem soroljuk fel az egyes ráfordítási együtthatókra, exportokra és készletfelhalmozásokra vonatkozó abszolút- illetve relatív alsó, illetve felső korlátokat és az előjelkorlátokat, illetve az ezek alóli kivételeket.

(1987) a RAS-módszer alkalmazásánál az előírt feltételek (sokszor rejtett) inkonzisztenciája kiküszöbölésére (ezt a szerzők „augmentation"-nek hívják), ezáltal biztosítva, hogy rendelkezésre álljanak növelhető elemek, ha az előírt sor- és oszlopösszegek ezt kívánják meg. Később például Lemelin et al [2013] is használták ezt a módszert arra hivatkozva, hogy a kereszt-entrópia modell célfüggvényében szereplő logaritmust zérus elemekre e nélkül nem lehetne kiszámítani („To avoid having to take the log of zero in the CE /Cross Entropy/ method, the GAMS program adds a small amount to each cell value") és ezt az érvelést szó szerint, de idézés nélkül átveszi Ming-Chang Lee [2014]. Mi azonban nem pusztán a fenti technikai okokból engedjük meg az ilyen kis pozitív értékeket, hanem azért is, hogy a ténylegesen *korábban nem létező áramlásokat is megragadhassuk*, valamint azért, hogy biztosítsuk a ritka mátrixok esetén is a gyors konvergenciát és közgazdaságilag értelmes megoldást (a kényszerigazodások mellékhatásait csökkentendő).

- Az egyes mátrixelemek relatív eltéréseit az indulómátrix megfelelő elemétől reciprok, a számlálót a nevezővel felcserélő módon is szerepeltetjük, összeadva az eredeti hányadossal. Ez az újszerű megoldás[17] megakadályozza, hogy az indulómátrixbeli nagy abszolút értékű elemek nagyon kicsire változzanak a becslésben.

- A λ súlyok (konkrétan $\lambda = 10$ értékkel futott a GAMS program), amiket más elvi alapon mások is már bevezettek (Byron [1978] például az indulóértékek megbízhatóságának mutatójaként értelmezi), itt arra szolgálnak, hogy a végső felhasználásokra adott becslés jobban igazodjon az indulómátrixbeli értékhez, pontosabban annak *ellen*súlyozására lettek bevezetve, hogy a becslés ne legyen hajlamos az igen nagy számú folyó termelőfelhasználási mátrixelem relatív hibáinak csökkentése érdekében feláldozni a viszonylag kis számú végső felhasználási mátrixelem illeszkedési pontosságát.

4 A nemzetgazdasági elemzésekben használt fontosabb kiigazítandó mátrixok

Ebben a fejezetben azt a korábban megfogalmazott állítást fejtjük ki kicsit részletesebben, hogy az, hogy a kétirányú mátrixkiigazítási feladat megoldásának melyik módszerét érdemes választani, az a mátrix közgazdasági tartalmától is függ. A nemzetgazdasági modellekben használt különféle kiigazítandó mátrixok típusainak felsorolása mellett rámutatunk azokra a sajátosságokra, amelyek a matematikai becslési eljárás választását, annak várható

[17] A hányados reciprokának használata önmagában korábbi szerzőknél is előfordult, az újítás az eredeti és a reciprok hányados összeadása és kombinálása az ε hozzáadásával mind a számlálóhoz, mind a nevezőhöz a reciprok módszer hátrányainak (zérussal való osztás) kiküszöbölésére.

eredményességét befolyásolják, illetve azokra a módszerekre, amelyekkel a standard matematikai eljárásokat célszerű kiegészíteni.

4.1 Az „A-típusú ÁKM"

Ha a felhasználásokban nem különböztetjük meg a hazai és import eredetű termékeket, akkor a termékmérlegek az $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{T1} + \mathbf{y}^h + \mathbf{z}$ egyenletrendszerrel írhatók fel, ahol az $\mathbf{x}$ vektor az egyes ágazatok (vagy termékek) bruttó termelésének vektora, az $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$, és $\mathbf{y}^h$ rendre az import, az export és a belföldi végső felhasználás termékenkénti bontását mutató vektor, a $\mathbf{T}$ mátrix t_{ij} eleme pedig az i-edik termék (folyó termelő) felhasználását mutatja a j-edik termék előállításában. Az ún. *„A" típusú ÁKM*[18] is együtt szerepelteti a táblázat felső hasábjában az importált és a hazai termékek elosztását, de az oszlop- és a sorösszegek egyenlőségét az importnak a végső felhasználásból való levonásával teremti meg ($\mathbf{x} = \mathbf{T1} + \mathbf{y}^h + \mathbf{z} - \mathbf{u}$ képlettel felírható nettó termékmérlegeket ábrázolva, ahol $\mathbf{z} - \mathbf{u}$ a *nettó export*).

Látható, hogy a nettó termékmérlegekből készített táblázatnak (azaz a $[\mathbf{T}, \mathbf{y}^h, \mathbf{z}, -\mathbf{u}]$ mátrixnak, aminek sorösszegei az $\mathbf{x}$ bruttó termelési értékek) egy más (új) bruttó termelési vektorhoz és más oszlopösszegekhez (összes termékfelhasználások felhasználók szerint) történő kétirányú kiigazításakor a referenciamátrixban az $-\mathbf{u}$ komponens miatt számos negatív eleme van. Ezért a standard RAS-módszer nem használható, pontosabban semmi garancia nincs arra, hogy jól működik, vagy ahogy Jackson és Murray [2004] jellemezték, a negatív elemek esetén a RAS viselkedése „erratic", azaz kiszámíthatatlanul változékonyak lehetnek az iterációk eredményei.

A negatív elemek előfordulásának problémája a nyílt statikus ÁKM-modelleknél használt *ÁKM-ek*nél a mátrix más helyein, más kategóriáknál is jelentkezik, mindenekelőtt a *készletváltozás* oszlopvektoránál (amely tehát az összes készletváltozást termékenként mutatja). Ha az egész ÁKM-et kell becsülni, azaz a hozzáadott érték elemei is ismeretlenek, akkor ritkán (ha a folyó ráfordítások nagyobbak a termelési értéknél) előfordulhat, hogy maga a *hozzáadott érték* is negatív, amiből természetszerűleg következik, hogy valamelyik összetevője (gyakorlatilag vagy a *működési eredmény*, vagy a *termelési adók és támogatások egyenlege*) negatív.

Az ÁKM-ekben található további negatív elemek egyes rendkívüli események sajátos elszámolásából adódnak. Az Eurostat adatbázisban található 2010. évi termékcsoportos bontású ÁKM-ben például ilyeneket találhatunk az *állóeszköz-felhalmozások*, a *fogyasztás* és az *export* oszlopában (főleg a re-export jellegű tételek nettó, árkülönbözet jellegű elszámolása miatt). Az ezek okára vonatkozó vizsgálataink eredményeinek ismertetését e cikk terjedelme nem teszi lehetővé, itt csak annyit jegyzünk meg, hogy bár sokszor igen nehéz utánajárni a negatív elemek okának, de egyes fontosabb esetekben minden-

[18] Az ÁKM-ek két egymást átfedő mérlegből állnak. Egyfelől (az ún. felső hasábban, vagy idegen szóhasználattal a „tranzakciós-mátrixban") tartalmazzák (sorirányban) az egyes termékek mérlegeit, másfelől (oszlopirányban) a termelési érték felosztását ráfordításokra és jövedelmekre. Bővebbet lásd Zalai [2012]-ben.

képpen meg kell próbálni, mielőtt a kiigazítás ,,vak" általános módszereit vetnénk be.

Az ÁKM-ek kétirányú kiigazítását is problematikusabbá tehetik a sor- illetve oszlopösszesenekben található zérus elemek. Például, ha az ,,A-típusú ÁKM"-et próbáljuk számszerűsíteni (ahol a sorösszesenek a bruttó termelési értékek), akkor a sorösszesenek egy része könnyen lehet zérus, azaz ha az adott termékből nincs hazai termelés. A készletfelhalmozások oszlopánál is könnyen előfordulhat, hogy ennek összesenje zérus vagy ahhoz közeli. Az ÁKM-ek referenciamátrixként való alkalmazásánál fontos tudatosítani, hogy a készletfelhalmozás korábban, vagy más megfigyelt régióban megfigyelt értékei (főleg, ha a szokásos módon a statisztikai hibát is itt számolják el) a nagy mértékű esetlegessége miatt (aminek elemzését lásd például Lenzen et al [2014] cikkében) nem szolgálhat referenciaként egy ÁKM-becslésénél, hanem a referenciamátrixban a készletfelhalmozást valamilyen ésszerű módon kell megadni (például a termékek esetében a bruttó termelési értékek arányában).

4.2 A termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixa

Az ÁKM-ek ún. háttértáblázatai (vagy szemléletesebben ,,levonó mátrixai") között szereplő ún. *termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixá*ban értelemszerűen negatív cellaértékeket találunk, ha az adott termék adott felhasználásán több a támogatás, mint az adó. Természetesen, ha e nettó termékadók csak egy sorban (lásd az *alapáras ÁKM*-eket, ahol az alapáron kimutatott termékáramlások alatt egy sorban vannak feltüntetve az adott felhasználó összes termékfelhasználását érintő adók és támogatások), vagy egy oszlopban (mint például az ún. *Forrás-táblá*ban, ahol az egyes termékek alapáron elszámolt forrásai mellett külön oszlopban tüntetik fel a termék összes felhasználására eső adókat és támogatásokat) jelennek is meg a kérdéses adattáblázatban, akkor is szerepelhetnek bennük negatív elemek.

A termékadók és -támogatások mátrixa egy ,,ritka" (angolul: sparse) mátrix, aminek előnyei és hátrányai vannak, és az előnyöket ügyesen megtervezett becslési eljárással ki lehet használni. Például a termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixának egyes adónemek mátrixaira és a támogatások mátrixára való felbontásánál kihasználható (ahogy a 3.3. alfejezetben ismertetett EU-GTAP projektnél meg is tettük), hogy a termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixának egyes elemei mögött többnyire csak egy-egy adónem vagy támogatás húzódik meg, így a becslési eljárás ide ,,húzza be" az előírt peremekről szétosztandó összegeket.

Ugyanezt a ritka jelleget használhatjuk ki a termékadók mátrixának és a terméktámogatások mátrixának kiigazítására az alábbi módon: Legyen $\mathbf{T}$ a termékadók referenciamátrixa, $\mathbf{S}$ a terméktámogatások referenciamátrixa (negatív vagy 0, többnyire utóbbi). Így a $\mathbf{T}+\mathbf{S}$ mátrix a termékadók és -támogatások egyenlegének mátrixát jelenti. Egy ettől eltérő időszakra (vagy régióra) a statisztikai hivatalok által közzétett adatokból sok esetben (legfeljebb) csak e mátrix peremei ismeretesek (a sorösszegek, azaz a termékadók és -támogatások egyenlegének termékenkénti bontása általában a Forrás táblából, az oszlopösszesenek, azaz a felhasználónkénti bontása pedig az ÁKM-ből). Jelöljük ezek közül a sorösszeseneket az $\mathbf{r}$ oszlopvektorral, az oszlopösszeseneket pedig a $\mathbf{c}$ sorvektorral! Ekkor a kiigazítási feladat sémája az alábbi táblázatban adható meg:

T	**S**	**r**
S		?
c	?	

5. táblázat. Termékadók és támogatások mátrixának alapelrendezése

Látható, hogy ez a feladat a RAS-módszerrel nem oldható meg, mert a peremek egy része (amiket kérdőjellel jelöltünk a táblázatban) ismeretlen. Ezenfelül a RAS- vagy hasonló módszerek alkalmazásakor semmi sem biztosítja, hogy a becsült mátrixban az $\mathbf{S}$ mátrixot tartalmazó blokkok helyére kerülő mátrixok is azonosak lesznek.

Hogy ezt a feladatot a RAS- illetve additív-RAS módszerrel kezelni tudjuk, írjuk fel a feladatot az alábbi módon (az $\mathbf{S}$ mátrix oszlopait illetve sorait ,,széthúzva"):

$\mathbf{T}$	$\langle \mathbf{s}_{\cdot 1} \rangle$	$\langle \mathbf{s}_{\cdot 2} \rangle$	$\cdots$	$\langle \mathbf{s}_{\cdot n} \rangle$	$\mathbf{r}$
$\langle \mathbf{s}_{1 \cdot} \rangle$	$-\mathbf{S}_{11}$	$-\mathbf{S}_{12}$	$\cdots$	$-\mathbf{S}_{1n}$	$\mathbf{0}$
$\langle \mathbf{s}_{2 \cdot} \rangle$	$-\mathbf{S}_{21}$	$-\mathbf{S}_{22}$	$\cdots$	$-\mathbf{S}_{2n}$	$\mathbf{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\langle \mathbf{s}_{n \cdot} \rangle$	$-\mathbf{S}_{n1}$	$-\mathbf{S}_{n2}$	$\cdots$	$-\mathbf{S}_{nn}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$	

6. táblázat. Termékadók és támogatások mátrixának elrendezése additív-RAS algoritmushoz

ahol $\mathbf{s}_{\cdot j}$ az $\mathbf{S}$ j-edik oszlopa, $\mathbf{s}_{i \cdot}$ az $\mathbf{S}$ i-edik sora, $\langle \cdot \rangle$ a diagonális mátrix képzés jele, $\mathbf{S}_{ij}$ az $\mathbf{S}$ mátrixból csak az $s_{i,j}$ elem megtartásával, a többi elemnek pedig a lenullázásával képzett mátrix *transzponáltja*.

Ezt az egyenértékűen átfogalmazott feladatot a RAS a 0 peremek miatt ugyan nem tudja közgazdaságilag értelmes módon megoldani, az additív-RAS viszont igen. A megoldásban a $\mathbf{T}$ mátrix soraiban és oszlopaiban található azonos indexű becsült $\mathbf{S}$ mátrixelemek azonosak lesznek.

Viszont probléma a méret. Például az EU ÁKM-ek 64 ágazata esetén $64 \cdot 65 = 4160$ sor és oszlop lenne a táblázat belsejében. Viszont az $\mathbf{S}$ eleve 0 elemeire nem kell felírni a mérleget! És mivel az $\mathbf{S}$ mátrix ritka, ez lehetővé teszi a sorok és oszlopok igen nagy részének elhagyását, ami aztán kezelhetővé teszi a problémát. Az imént ismertetett elrendezés (séma) alkalmazható más olyan problémák (pl. additív-RAS-módszerrel való) kezelésére is, amelyekben csak az összesenekre rendelkezésre álló peremadatok alapján kell megbecsülni az összetevőket (például regionális ÁKM-ek becslése).

4.3 Fogyasztás- és beruházási transzformációs mátrixok

Egyes kifinomultabb CGE-modellek a beruházási keresletet a beruházó ágazatok keresletéből és az ágazatra jellemző beruházási jószág-szerkezetből („anyagi-műszaki összetétel"-ből, importhányadokból) vezetik le. E szerkezeteket foglalja össze a *beruházási mátrix* (pontosabban állóeszköz felhalmozási mátrix), amelynek sorai a beruházási javak (szállítóit), oszlopai pedig a beruházó (állóeszköz felhalmozó) ágazatokat képviselik. A beruházási mátrix is egy „ritka" mátrix, mert az építőiparhoz és gépiparhoz tartozó sorain és esetleg a szervezeti besorolású ÁKM-eknél a diagonálisokban is megjelenő pozitív elemeken („saját rezsis beruházások") kívül alig van zérustól eltérő eleme. Így kétirányú kiigazításos becslésénél az elvárt és tényleges peremek eltérései szétosztásánál kicsi a mozgástere a becslési algoritmusnak, és a peremek (vagy azok egy-egy csoportjai) könnyen inkonzisztensnek bizonyulhatnak, azaz a feladat megoldhatatlannak bizonyul.

Természetesen, ha a termékáramlásokat e beruházási transzformációs mátrixban is alapáron számoljuk el, de az oszlopösszesenek a felhasználói áras összkiadások, akkor a felhasználói áras és alapáras összkiadások különbségét, azaz a termékadók és -támogatások egyenlegét ugyanúgy külön sorban kell elszámolni, mint magában az alapáras ÁKM-ekben. Így e transzformációs mátrix „termékadók és támogatások egyenlege" sorában is lehetnek negatív, támogatási többletet képviselő értékek.

Hasonlóan, a fogyasztást is sokszor az ún. COICOP-fogyasztási kategóriák szerinti bontásból kiindulva becslik, az ún. (Lancaster-féle) *fogyasztás-transzformációs mátrix*szal transzformálva az előállító ágazatokra (illetve termékcsoportokra). Itt is előfordulhatnak, bár többnyire statisztikai okokból inkonzisztens peremek, de mégse ez szokott a gyakorlatban a legnagyobb probléma lenni a becslésénél, hanem az árrés illetve a termékadók leválasztása a fogyasztói áron adott COICOP-kategóriákból. Ugyanis az általában alapáras ÁKM-ek az árrést és a termékadókat különválasztják, így az erre való transzformálásnál is ez történik. Viszont a statisztikai hivatalok által előállított fogyasztás-transzformációs mátrixok általában fogyasztói áron készülnek, így ez referenciamátrixként csak akkor szolgálhat az alapáras ÁKM fogyasztási oszlopára való transzformáció során, ha az árrések és a „termékadók és támogatások egyenlege" sorát előre imputáljuk bele (valamilyen becslés alapján, de felhívva a figyelmet arra, hogy a beruházási mátrixnál is jelzett módon a „termékadók és támogatások egyenlege" negatív is lehet), vagy a transzformációt fogyasztói áron hajtjuk végre, és az árréseket és termékadókat utólag választjuk le termékenként (szállító ágazatonként) becsült kulcsokkal, de az összes fogyasztásra megadott termékadókkal és árrésekkel összhangban. Természetesen mindkét út elég göröngyös (például hogy biztosítható, hogy a RAS-sal vagy más kiigazító módszerrel becsült árréseknek, illetve termékadóknak a fogyasztói kiadásokra vetített, „százalékos" értékei ésszerű határok között maradjanak), de e cikkben ennek kifejtésére nincs mód.

További probléma, hogy ugyan a fogyasztás transzformációs mátrixban és beruházás-transzformációs mátrixban, valamint az ún. *bilaterális külkereske-*

*delmi mátrix*ban az ágazatok soraiban elvileg szintén nem szerepelhetnének negatív elemek, de amennyiben ezek az ÁKM fogyasztási, beruházási, illetve export oszlopainak a kibontásának tekinthetők, örökölhetik az ÁKM ezen oszlopaiban a fentebb említett negatív értékeket. Emellett, mivel a használt állóeszközök adásvétele részét képezi az egyes ágazatok állóeszköz-felhalmozásának, a beruházási mátrixban (aminek egyes oszlopai tehát azt mutatják, hogy az adott ágazat állóeszköz-felhasználása mely termékekből, ,,beruházási javakból" történt) már csak ezért is találhatunk negatív elemeket.

4.4 A nemzetgazdasági statisztikában előforduló további kiigazítandó mátrixok

Ha például egy háztartási rétegekre vonatkozó, a réteg *bevételeit és kiadásait* (beleértve természetesen a befektetéseket is) egy vektorban (oszlopban), de ellentétes előjellel tüntetjük fel (amire főleg azért lehet szükség, mert az összbevétel (=összkiadás) értéke sem ismert), akkor a vektor összesenje értelemszerűen zérus lesz. Ekkor a bevételek és a kiadások csak szimultán módon becsülhetők, nem lehetséges külön-külön a bevételeknek, ill. a kiadásoknak az összbevételekhez való igazítása. A zérus peremhez való igazítás azonban a hagyományos RAS-módszerrel arra vezetne, hogy már az első arányosításnál az egész oszlopot lenullázná, ami nyilvánvalóan elfogadhatatlan eredmény lenne, mivel azt jelentené, hogy a szóban forgó rétegnek se bevétele, se fogyasztása nem volt.

Hasonlóképpen, ha egy olyan *követelés-tartozás mátrix*ot tekintünk, amelynek sorai az egyes hitelezési instrumentumokat (financial assets), oszlopai pedig a gazdaság szereplőit mutatják (ahol tehát az adott hitelviszonyt megtestesítő értékpapír állományát a kibocsátó adósnál negatív értékkel számoljuk el), akkor abban is számos negatív elem található (lásd például Lemelin [2009] fentebb tárgyalt számpéldáját).

Mivel az ÁKM a *Társadalmi Elszámolási Mátrix* (angol rövidítéssel: SAM) részét (egyszerűbb változatokban az egyik blokkját) képezi, értelemszerűen a SAM becslésénél is találkozhatunk a negatív elemek problémájával. Azonban a SAM más celláiban is előfordulhatnak negatív elemek. Ugyanis a SAM összeállítása sokszor egy ún. SAM-multiplikátor modell számszerűsítése céljából történik. Márpedig a SAM-multiplikátor modell az endogénnek választott számlák oszlopösszesenjeire vetített együtthatókkal számol, így fontos, hogy minden tranzakció abban az oszlopban legyen lehetőleg elszámolva, amelynek az összesenjével arányosnak tekinthető (sőt, hogy lehetőleg olyan tranzakciók szerepeljenek csak az oszlopokban, amelyek közgazdaságilag értelmes összesent képviselnek). Ezért például az i-edik számlának a j-edik számla felé történő t_{ij} kiadását fordított irányban, azaz a főátlóra tükrözve, negatív előjellel, a t_{ji} tranzakció(k) részeként számoljuk el. Így ha a j-edik számlának az i-edik számla felé történő egyéb kiadásai ennél kisebbek voltak, akkor a t_{ji} értéke negatív lesz. Ha például az exogén számlák (rendszerint az állami kiadások és a külföld kiadásai) valamely számla felé történő kiadásait (például a lakásberuházások állami támogatását) endogén módon (ennek a szóban forgó számlának a főösszegével[19] arányosan) akarjuk a modellben meghatározni, akkor ezt a szóban forgó számlának az adott exogén számla felé történő (negatív) kiadásaként számoljuk el.

Az e fejezetben elmondottakat, helyenként kiegészítve, a *7. táblázatban* foglaljuk össze.

	Negatív és egyéb problémás elemek	A probléma megoldásának lehetséges módszerei
ÁKM	készletváltozás, (re)export, fogyasztás, beruházás, nettó termékadók, hozzáadott érték (és összetevői), import (A-típusú ÁKM-ben negatív oszlopként), zérus termelés (A-típusú ÁKM-ben)	készletváltozás termelési értékkel vagy összfelhasználással arányos becslése, reexport bruttósítása, a többi esetben az additív-RAS és többfokozatú becslési eljárások alkalmazása
Nettó termékadók mátrixa	támogatási többlet esetén negatív elemek, ritka mátrix	additív-RAS alkalmazása, támogatási mátrix külön becslése (ld. 6. táblázat)
Fogyasztási mátrix	negatív elemek előző időszakból származó cikkek eladása miatt	additív-RAS alkalmazása, referencia-mátrixban hasonló elemek zérusra cserélése illetve külön (exogén) kezelése
Beruházási mátrix	negatív elemek előző időszakból származó gépek eladása miatt	lásd a fogyasztási mátrixnál
Bevétel-kiadás mátrix	kiadások negatív tételként	additív-RAS vagy összbevételek előzetes becslése majd bevételek és kiadások különkülön becslése
Követelés-tartozás mátrix	tartozások negatív tételként	hasonlóan az előzőhöz
SAM	egyes transzferek negatív tételként	additív-RAS vagy fordított irányban (átlóra szimmetrikusan) pozitívként számolni el negatív tételeket

7. táblázat. Összefoglaló táblázat a fontosabb közgazdasági mátrixkategóriák becsléséről

5 A kétirányú mátrixkiigazítási módszerek kombinált és szekvenciális alkalmazásai

Ahogy a 3.3. alfejezetben az EU ÁKM-ek GTAP-ágazati bontásban való becslésénél is már utaltunk rá, a mátrixkiigazítási feladat általánosabban, egy komplexebb feltételes optimumszámítási feladatként is megfogalmazható. Ebben a kétirányú mátrixkiigazítási módszereknek csak egyes részfeladatok megoldásában lehet szerepe, elsősorban a referenciamátrix (a prior) előállításának egyes lépéseinél. A kétirányú mátrixkiigazítási módszerek tehát nemcsak *egymással versenyeznek*, hanem *egymás kiegészítői* is lehetnek. A

[19]A főösszeg egyaránt képviseli az összbevételt, illetve (a modell alapfeltevéséből, illetve a kiadások kiterjesztett, a megtakarításokat is magába foglaló értelmezéséből eredően) az ezzel egyező összkiadást.

hazai és import termékek mérlegeit összevontan ábrázoló A-típusú ÁKM-eket az ún. ,,additív-RAS” módszeremmel lehet becsülni az import ágazati termékszerkezete ismerete nélkül (Révész [2009]). Ennek során először az ún. ,,A”-típusú ÁKM-et becsüljük az additív-RAS módszerrel, így megkapva az import ágazati jelleg szerinti bontását. Ezután a kapott becslés felső mátrix-blokkjában csak a hazai termékek felhasználónkénti bontását mutató ún. ,,B”-típusú ÁKM-et becsüljük hasonló módszerrel, amelynek során becslést kapunk az import sorára, azaz felhasználónkénti bontására is. Végül pedig a termék $\times$ felhasználó bontású, ún. importmátrixot becsüljük úgy, hogy a B-típusú ÁKM-becslése során kapott importsort a még hiányzó importmátrix becsült oszlopösszegeinek véve, sorösszeseneknek pedig az importnak az ,,A”-típusú ÁKM-becslésénél kapott ágazati jelleg szerinti bontását tekintve, a referencia (induló-) importmátrixszal (ahol a készletfelhalmozás indulóértékeit valamilyen ésszerű módon módosítjuk) RAS-becsléssel meghatározzuk az importmátrixot. A módszer érdekessége, hogy a végeredményben kapott hazai és import termékmérlegek összeadásával az első lépésben becsült ,,A”-típusú ÁKM-től eltérő számokat kapunk, azaz ez felülírható.

A kétirányú mátrixkiigazítási módszerek szekvenciális alkalmazására tesz javaslatot az ún. két- illetve háromfokozatú RAS módszere (lásd például Bacharach [1970] műve 93–99. oldalát, illetve Gilchrist és St. Louis [1999] TRAS-módszerét). Ebben az első fokozatban az indulómátrixot, vagy annak valamely blokkjait egy RAS-módszerrel igazítják ki az elvárt peremekhez, majd ezt a peremeknek immár eleget tevő mátrixot használják fel referenciamátrixként egy újabb RAS-becsléshez, vagy egy valamilyen bonyolultabb célfüggvényt alkalmazó entrópia-modell megoldása során.

6 Összefoglalás

A kétirányú mátrixkiigazítási feladatok kezelésében a probléma szűk problémakörre való naiv, heurisztikus alkalmazásából kiindulva a tudomány nagy utat tett meg. A probléma szabatos matematikai megfogalmazásának és a megoldásra javasolt módszerek matematikai tulajdonságainak feltárásának, a jobb statisztikai adatoknak (amik jobb referenciamátrix előállítását teszik lehetővé), a számítástechnika fejlődésének (hatékonyabb megoldó szoftvereknek), valamint a felhalmozódott nemzetközi alkalmazási tapasztalatoknak köszönhetően egyre több területen lehet e módszereket alkalmazni. Természetesen még sok matematikai összefüggés tisztázandó, és cikkünkben ezekre is kitértünk. Bemutattuk, hogy a nemzetgazdasági elemzésekben való sikeres alkalmazás feltétele a konkrét közgazdasági jelenség, az erre felírt referenciamátrix sajátosságainak alapos ismerete. Az EU ÁKM-ek GTAP-ágazati bontásba való sikeres transzformációja kapcsán gyakorlati példával is érzékeltettük, hogy a jó becslési eredmények elsősorban az (alapadatokból szerkesztett indulómátrix komplex, 6 lépésben történt előzetes kiigazításával kapott) referenciamátrix jóságának köszönhető. A témával foglalkozó szerzők, többek között McNeil és Hendrickson [1985] és Round [2003] is megállapították, hogy ha a referenciamátrix elemeinek értéke közel van a becsülendő mátrix megfelelő elemének értékéhez, akkor a kétirányú mátrixkiigazítási-modell a különböző szokásos célfüggvények mellett is hasonló becslési eredményekre vezet.

A kétirányú mátrixkiigazítási módszereket nemcsak elszigetelve, hanem egymás után („szekvenciálisan") is lehet alkalmazni (lásd például a kétfokozatú RAS-módszert). Emellett az itt kidolgozott módszerek, szakmai fogások („trükkök") komplexebb matematikai programozási feladatokba beépítve is hasznosíthatók.

Irodalom

1. Almon, C. [1968]: Recent methodological advances in input-output in the United States and Canada. – Előadás a 4. Nemzetközi ÁKM konferencián (Fourth International Conference on Input-Output Techniques), Genf.
2. Bacharach, M. [1970]: *Biproportional Matrices and Input-Output Change* (Cambridge, UK: Cambridge University Press)
3. Black, William R. [1972]: Interregional commodity flows: Some experiments with the gravity model. *Journal of Regional Science*, 12(1): 107–118.
4. Bregman, L. M. [1967]: Proof of the Convergence of Sheleikhovskii's Method for a Problem With Transportation Constraints, *USSR Computational Math. and Mathem. Phys.* 1(1), 191–204.
5. Byron, R. P. [1978]: The Estimation of Large Social Account Matrices, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A,* 141, Part 3, pp. 359–367
6. Deming, W. E. és Stephan, F. F. [1940]: On a least-squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known, *Annals of Mathematical Statistics*, 11, pp. 427–444.
7. Eurostat [2008]: „Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables", Luxembourg: European Commission, Eurostat
8. Friedlander, D. [1961]: A technique for estimating contingency tables, given marginal totals and some supplemental data, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 124, pp. 412–420.
9. Furness, K. P. [1965]: Time function iteration, *Traffic Engineering and Control*, 7, pp. 458–460.
10. Gilchrist, D. – St. Louis, L. [1999]: Completing input-output tables using partial information with an application to Canadian data, *Economic Systems Research*, 11, pp. 185–193.
11. Günlük-Şenesen, G. – Bates, J. M. [1988]: Some Experiments with Methods of Adjusting Unbalanced Data Matrices, *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*, 151(3), pp. 473–490
12. Harrigan, F. and Buchanan, I. [1984]: A quadratic programming approach to input-output estimation and simulation, *Journal of Regional Science,* 24: 339–358. doi:10.1111/j.1467-9787.1984.tb00807.x
13. Harthoorn, R. és J. van Dalen [1987]: On the adjustment of tables with Lagrange multipliers, NA-024. Central Bureau of Statistics, The Netherlands, National Accounts Research Division.

14. Jackson, R. W. – Murray, A. T. [2004]: Alternative Input-Output Matrix Updating Formulations, *Economic Systems Research*, 16, No. 2, June 2004, pp. 135–148.

15. Junius, T. – Oosterhaven, J. [2003]: The solution of updating or regionalizing a matrix with both positive and negative entries, *Economic Systems Research*, 15, pp. 87–96.

16. Koppány Krisztián [2016]: Növekedési hozzájárulások számítása input-output táblák strukturális felbontása alapján, *Statisztikai Szemle*, 94(8-9), 881–914, http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2016/2016_08-09/2016_08- 09_881.pdf

17. KSH [2013]: Tájékoztatási adatbázis/ Szimmetrikus Ágazati Kapcsolatok Mérlegei, Forrás- és Felhasználás Táblák, Import- és Termékadó mátrixok/ 2010. évi Szimmetrikus Ágazati Kapcsolatok Mérlege a hazai kibocsátásra, az import- és termékadó-mátrix, TEÁOR 08 szerint (http://statinfo.ksh.hu/Statinfo/themeSelector.jsp?page=2&szst=QPA)

18. Kullback, S. – Leibler, R. A. [1951]: „On Information and Sufficiency” *Ann. Math. Stat.* 4, pp. 99–111.

19. Lahr, M. L.: [2001]: „A strategy for producing hibrid regional input-output tables”. In: M. L. Lahr and E. Dietzenbacher (eds.): *Input-Output Analysis: Frontiers and Extensions*. New York: Palgrave, pp. 211–242.

20. Lahr, M. – Mesnard, L. [2004]: Biproportional Techniques in Input-Output Analysis: Table Updating and Structural Analysis, *Economic Systems Research*, 16(2), 115–134.

21. Lecomber, J. R. C. [1975]: A critique of methods of adjusting, updating and projecting matrices. In: R. I. G. Allen and W. F. Gossling (eds.) *Estimating and Projecting Input-Output Coefficients*. London, UK, Input-Output Publishing Company: 1–25.

22. Lemelin, A. [2009]: A GRAS variant solving for minimum information loss, *Economic Systems Research*, 21(4), 399–408.

23. Lemelin, A. – Fofana, I. – Cockburn, J. [2013]: Balancing a Social Accounting Matrix: Theory and application (revised edition), Partnership for Economic Policy working paper, http://ssrn.com/abstract=2439868

24. Lenzen, Manfred – Moran, Daniel D. – Geschke, Arne – Keiichiro Kanemoto [2014]: A non-sign preserving GRAS-variant, *Economic Systems Research*, 26(2), 197–208.

25. Lenzen, Manfred – Wood, Richard – Gallego, Blanca [2007]: Some Comments on the GRAS Method, *Economic Systems Research*, 19(4), 461–465, DOI:10.1080/09535310701698613

26. MacGill, S. M. [1977]: „Theoretical properties of biproportional matrix adjustments”, *Environment and Planning A,* 9: 687–701.

27. McNeil, S. and Hendrickson, C. [1985]: „A note on alternative matrix entry estimation techniques”, *Transportation Research*, 19B, 6, 509–519, Pergamon Press Ltd.

28. Mesnard, L. [2011]: Six matrix adjustment problems solved by some fundamental theorems on biproportion, working paper, University of Burgundy and CNRS, http://ssrn.com/abstract=1692512

29. Ming-Chang Lee [2014]: Social accounting matrix balanced based on mathematical optimization method and general algebraic modeling system, *British Journal of Economics, Management & Trade* 4(8): 1174–1190.

30. Möhr, M., – Crown, W. H. – Polenske, K. R. [1987]: A Linear Programming Approach to Solving Infeasible RAS Problems. *Journal of Regional Science*, 27, 587–603.

31. Niedercorn, J. H. – Bechdolt, B. V. Jr. [1969]: An economic derivation of the 'gravity law' of spatial interaction, *Journal of Regional Science*, 9(2): 273–282.

32. Omar, F. H. [1967]: The Projection of Input-Output Coefficients with Application to the United Kingdom. Publikálatlan PhD-értekezés, University of Nottingham.

33. Oosterhaven, J. [2005]: GRAS versus minimizing absolute and squared differences: a comment, *Economic Systems Research*, 17, 327–331.

34. Polenske, K. R. [1997]: Current uses of the RAS Technique:A Critical Review. In: A. Simonovits and A. E. Steenge (eds.) *Prices, Growth and Cycles.* London, MacMillan, 58–88.

35. Révész, T. [2001]: *Költségvetési és környezetpolitikák elemzése általános egyensúlyi modellekkel*, Budapesti Közgazdaság-tudományi Egyetem, Ph.D. értekezés, 2001. március

36. Révész, T. [2009]: Negyedéves adatokon alapuló ágazati bontású előrejelző és hatáselemző modell – Az áfa-bevallási adatbázisnak a legfrissebb hazai ÁKM-mel integrált újszerű alkalmazása – A Kockázatkutató Intézet részére készített tanulmány (TAM-REP (3).DOC file)

37. Round, J. I. [2003]: ,,Constructing SAMs for development policy analysis. Lessons learned and challenges ahead", *Economic Systems Research*, 15(2), 161–183.

38. Rueda-Cantuche, José – Revesz, Tamas – Amores, Antonio F. - Velázquez, Agustín – Mraz, Marian - Ferrari, Emanuele - Mainar, Alfredo - Montinari, Letizia - Saveyn, Bert [2016]: Improving the European Input-Output Database for Global Trade Analysis (EU-GTAP), Final report June 30, 2016, European Commission JRC No33705-2014-11 and DG TRADE 2014/G2/G10

39. Schneider, M. H. – Zenios, S. A. [1990]: A comparative study of algorithms for matrix balancing, *Operations Research*, 38(3): 439–455

40. Shannon, C. E. [1948]: ,,A Mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423.

41. SNA [2009]: System of National Accounts, 2008 (SNA2008.pdf), az Európai Bizottság, International Monetary Fund, Organisation for Economic Co-operation and Development, United Nations and World Bank közös kiadványa

42. Stone, R. [1961]: *Input-Output and National Accounts* (Organization for European Economic Cooperation, Párizs).

43. Stone, R. – Brown, A. [1962]: *A Computable Model of Economic Growth* (Chapman and Hill, London).

44. Stone, R. [1981]: Balancing the National Accounts; The Adjustment of Initial Estimates: a Neglected Stage in Measurement, paper presented at the Ivor Pearce Conference, University of Southampton, 5-7 January 1982.

45. Temurshoev, Umed – Webb, Colin – Yamano, Norihiko [2011]: Projection of Supply and Use tables: methods and their empirical assessment, *Economic Systems Research*, 23(1), 91–123, DOI: 10.1080/09535314.2010.534978

46. Temurshoev, U. – Miller, R. E. – Bouwmeester, M. C. [2013]: A note on the GRAS method, *Economic Systems Research*, 25(3), 361–367,

47. Theil, H. [1967]: *Economics and information theory*, Rand McNally & Company, Chicago, Studies in mathematical and managerial economics, 7, 488 oldal
48. Yule, G. Udny [1912]: „On the Methods of Measuring Association Between Two Attributes". *Journal of the Royal Statistical Society.* 75(6): 579–652. doi:10.2307/2340126 (http://www.jstor.org/stable/2340126?origin=crossref)
49. Zalai, E. [2012]: *Matematikai közgazdaságtan I. Általános egyensúlyi modellek és mikroökonómiai elemzések. II. Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

BIPROPORTIONAL MATRIX ADJUSTMENT FOR MULTISECTORAL MACROMODELS

This paper gives a brief overview of the biproportional matrix adjustment problem. We focus on the most frequent case with certain and consistent row and column sums, and no special conditions to the cells of the matrix. After the definition and mathematical formulation of the problem, we describe the so-called distance and entropy functions assigning a non-negative real number to the difference of the estimated and reference matrices. These functions are to be minimized subject to given row and columns sums, and in special cases, some non-negativity and sign-preserving conditions. For these models, we present iterative solution methods, among them the so-called additive RAS algorithm developed and used first by Révész. On one hand, in the case of non-negative reference matrix and marginal conditions, additive RAS gives the same solution as the standard RAS, and on the other hand, in the case of negative cells, but sign-preserving margins, it gives the same solution as the improved normalized squared differences (INSD) model without penalties for sign-switching. We demonstrate that additive RAS is more efficient and more aesthetic than other INSD and GRAS iterative solution methods used by previous authors. In the case of small differences, additive RAS, especially the modified additive RAS, tends to be sign-preserving, unless it is forced by sign-switches of the margins. Using the example of Lemelin (2009), we demonstrate that additive RAS performs very well in such an extreme sign-switching case, as well, moreover, it gives the best solution compared to other algorithms. The paper overviews some standard matrix balancing problems in practice, where such methods can be used. The most important conditions for the successful application are the knowledge about the economic phenomena under investigation and the deep understanding of the related reference matrix. For an example of this, a current research project is presented, where both additive RAS and other more complex matrix adjusting models were used and showed a good performance.