NYUGDÍJPÉNZTÁRAK JÖVŐBELI KIFIZETÉSEINEK BECSLÉSE A CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁS TÉTEL ALKALMAZÁSÁVAL[1]

FARAGÓ MIKLÓS
Központi Statisztikai Hivatal

Egy nyugdíjpénztár jövőbeli járadék-kifizetéseinek egy adott pillanatra vonatkoztatott jelenértéke valószínűségi változó, mely a tagok koreloszlásától és halálozási valószínűségeitől függ. Biztonsági szempontból szükséges, hogy a pénztár időről időre vizsgálja e valószínűségi változó eltérését a várható értéktől. E dolgozatban megmutatjuk —először tagok egy kohorszára, majd a teljes tagságra vonatkozóan—, hogy e valószínűségi változó eloszlása bizonyos feltételek mellett normális eloszláshoz tart a létszám növelésével. A dolgozat utolsó részében tovább általánosítjuk az addig elért eredményeket valószínűségi változók sorozatának egy még bővebb osztályára.

Bevezetés

Egy életjáradékot nyújtó pénztár jövőbeli kifizetései jelenértékének összege —*a tagság követelése*— valószínűségi változó, mely az egyes *tagok követelése*inek összege. Egy tagcsoport követelésének várható értéke a tagcsoport tartaléka. A biztosításmatematikában elterjedt „tartalék" elnevezés azért indokolt, mert a pénztárnak pontosan ennyi pénzt kell félretennie, hogy ebből —és a kamatokból— a jövőbeli kifizetéseket várható értékben finanszírozza.

Fontos, hogy a pénztár vizsgálja a tagság követelésének eltérését a várható értéktől, mert, ha nem számol vele, még a valóságos pénztári halandóságnak megfelelő halandósági táblák használata esetén is tönkremehet, különösen, ha taglétszáma alacsony.

Az 1. pontban bebizonyítjuk, hogy a követelések eloszlása —tagok egy adott korú állományának kohorszára vonatkozóan— nagy létszám esetén a normális eloszláshoz közelít. Az állítás a centrális határeloszlás tételéből közvetlenül következne abban a speciális esetben, ha minden tagnak azonos lenne a *szolgáltatása* (havi járadéka). Mi az általános esetet vizsgáljuk. Erre vonatkozóan megadunk egy minimális kohorsz-létszámot, mely fölött a kohorsz követelése a várható érték adott környezetébe esik adott valószínűséggel. A 2. pontban az 1. pont eredményeit általánosítjuk a teljes pénztári tagság követelésére vonatkozóan. A 3. pontban pedig tovább általánosítjuk az addig elért eredményeket és kimondunk egy tisztán matematikai tételt.

[1]A cikk az Állami Pénztárfelügyelet megbízásából Stáhl János által irányított kutatás keretében készült. Beérkezett: 1999. szeptember 14.

1 Egyetlen kohorsz esete

Egy nyugdíjpénztár egy tetszőlegesen rögzített t_0 időpontban rendelkezik olyan tagokkal is, akiknek már folyósít valamilyen nyugdíjjáradékot. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy t_0 valamely naptári hónap „első pillanata"; a *járadék* egy havonta kifizetett, a „járadékos" számára személyesen meghatározott, időben változatlan összeg, melynek utalása éppen t_0-ban, t_0+1-ben, stb., azaz mindig hónap elején „előlegesen" —a járadékos haláláig— esedékes.

S forint t_0+t időpontbeli értékének t_0-beli *jelenértéke* Sv^t, ahol $v = 1/(1+i)$ és i valamely havi kamatráta. Ha pénzünk havonta i kamatrátával kamatozik, akkor t_0-ban Sv^t forinttal kell rendelkeznünk ahhoz, hogy t_0+t -ben S forintunk legyen. S forint havi járadék t hónapon keresztül történő kifizetésének jelenértéke az egyes kifizetések jelenértékének összege:

$$S + Sv + Sv^2 + \ldots + Sv^{t-1} = S\frac{1-v^t}{1-v}, \qquad \text{ha} \quad i \neq 0.$$

Ezentúl feltesszük, hogy $i > 0$. Miután a tag halálának időpontja t_0-ban ismeretlen, ezért t valószínűségi változó és így $S(1-v^t)/(1-v)$ is az.

Egy t_0-ban x éves tagnak t hónapon keresztül folyósított előleges *egységjáradék* jelenértéke $v \neq 1$ havi kiértékelési diszkontláb mellett

$$\eta = \frac{1-v^t}{1-v}, \tag{1}$$

melynek várható értéke, ill. szórásnégyzete:

$$\mu = \sum_{t=0}^{\infty} r_{x,t}\frac{1-v^{t+1}}{1-v}, \tag{2}$$

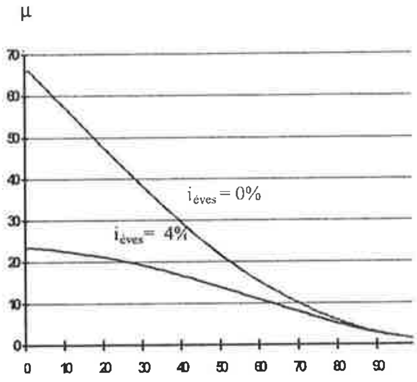
$$\sigma^2 = \sum_{t=0}^{\infty} r_{x,t}\left(\frac{1-v^{t+1}}{1-v}\right)^2 - \left(\sum_{t=0}^{\infty} r_{x,t}\frac{1-v^{t+1}}{1-v}\right)^2, \tag{3}$$

ahol $r_{x,t}$ annak a valószínűsége, hogy a t_0-ban x éves tag t hónappal később még él, de további egy hónapon belül meghal. Értéke adott. (A KSH által évente kiadott halandósági táblákban szereplő valószínűségekből egyszerűen számítható.) Feltesszük, hogy az emberi élet véges, azaz $r_{x,t} = 0$, ha $x+t/12$ elég nagy.

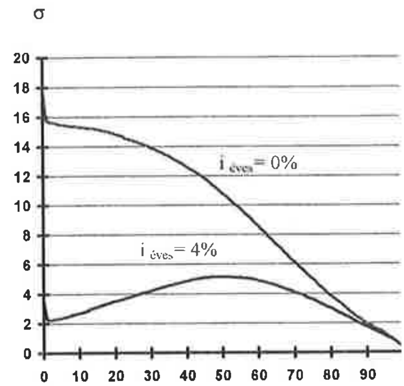
Mivel a továbbiakban egy ideig az x éves járadékosok kohorszával foglalkozunk, η, μ, σ mögül elhagyjuk az x indexet. Azonban később, amikor már a különböző kohorszokkal egyidejűleg foglalkozunk, használni fogjuk a η_x, μ_x, σ_x jelöléseket. Megjegyezzük, hogy (2) és (3) a $v \to 1$ határátmenet esetén természetszerűleg az x éves korú ember hátralévő élettartamának várható értékét és szórását adja hónapokban.

Az alábbi ábrák x függvényében ábrázolják a μ, σ és μ/σ értékeket 0%, illetve 4% éves kamatráta mellett, ahol az éves és havi kamatráta közötti összefüggés:

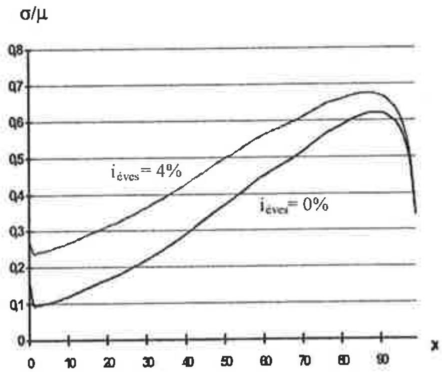
$$i_{\text{éves}} = \left((1+i)^{12} - 1\right)^{1/12}.$$



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Vizsgáljunk tehát egy pénztár adott nemű x éves tagjaiból álló n létszámú kohorszot. A kohorsz k-adik tagja t_k hónapig S_k járadékot kap ($k = 1, \ldots, n$), ahol t_k azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozata. Tehát feltesszük, hogy a pénztártagok halálának pillanata „egymástól független". Így a k- adik tag követelése

$$S_k \frac{1 - v^{t_k}}{1 - v} = S_k \eta_k \,,$$

ahol η_k is azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozata. A kohorsz követelése $\sum_{k=1}^{n} S_k \eta_k$, melynek várható értéke (a kohorsz tartaléka), ill. szórásnégyzete $\mu \sum_{k=1}^{n} S_k$, ill. $\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} S_k^2$, hiszen feltételezésünk szerint η_k várható értéke és szórása minden tagra μ, ill. σ.

Ha minden tag azonos szolgáltatással rendelkezne ($S_1 = S_2 = \ldots$), akkor a tagok követelése azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozatát alkotná. Ekkor pedig a centrális határeloszlás tételéből közvetlenül következne, hogy összegük közelítően normális eloszlású lenne és az ismert módon fennállna, hogy ha $n > (\delta\lambda/\mu\epsilon)^2$, akkor a kohorsz követelésének relatív eltérése várható értékétől $p_0 = 2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel ϵ-nál kisebb mértékű, ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Fontos már most felhívni a figyelmet, hogy a további számítások során sehol sem fogjuk kihasználni az η valószínűségi változót meghatározó formula alakját. Csak a szórását és várható értékét kell ismernünk. Ez azt is jelenti, hogy nem szükséges, hogy a kiértékelési diszkontláb időben konstans legyen, lehet sorozat is, sőt lehet valószínűségi változók sorozata is adott eloszlással. Ekkor a (2), ill. (3) formulák helyébe bonyolultabbak lépnek.

A most következő centrális határeloszlástétel központi helyet foglal el ebben a dolgozatban. (A tételt ebben a formában tartalmazza [3].) Jelölje ezentúl "$\to$" az $n \to \infty$ melletti konvergenciát, $M(\xi)$ és $D(\xi)$ pedig a ξ valószínűségi változó várható értékét, ill. szórását.

Laplace-Ljapunov-féle tétel

Ha ξ_1, ξ_2, ... független valószínűségi változók, melyeknek harmadik (következésképpen minden alacsonyabb rendű) momentuma létezik, $M(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, továbbá

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} \to 0\,,$$

ahol

$$\Delta_n = \left(\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k)\right)^{1/2}, \quad \beta_k = M(|\xi_k|^3)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

akkor

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\Delta_n} < x\right) \to \Phi(x)\,.$$

Alkalmazzuk a tételt a mi $\xi_k = S_k(\eta_k - \mu)$ sorozatunkra. Feltesszük, hogy valamennyi ξ_k harmadik momentuma létezik. Fennáll

$$\Delta_n = \sigma \sqrt{\sum_{k=1}^{n} S_k^2} \qquad \text{és} \qquad \beta = M\left(|\eta - \mu|^3\right) \sum_{k=1}^{n} S_k^3\,.$$

Ekkor a tétel szerint teljesül

$$P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k(\eta_k - \mu)}{\sigma \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2}} < x\right) \to \Phi(x)\,,$$

feltéve, hogy

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} = \frac{M\left(|\eta - \mu|^3\right) \sum\limits_{k=1}^{n} S_k^3}{\sigma^3 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2\right)^{3/2}} \to 0\,, \qquad (4)$$

azaz, ha

$$\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^3\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2\right)^3} \to 0. \tag{5}$$

Ehhez pedig elégséges, ha a járadékok korlátosak, hiszen ha valamely s-re és S-re $0 < s < S_k < S$, akkor a fenti törtnél nagyobb

$$\frac{n^2 S^6}{n^3 s^6} = \frac{\text{const}}{n} \to 0.$$

Az eddigi megfontolások eredményét a következőképpen foglalhatjuk össze: az x éves járadékosok követelése (a nekik szánt jövőbeli összkifizetések jelenértéke) —mely azonos eloszlású független valószínűségi változók lineáris kombinációja— standardizálva normális eloszlású valószínűségi változóhoz tart a létszám növelésével, ha a járadékosok havi szolgáltatásait —melyek a lineáris kombináció együtthatói—- pozitív korlátok közé szorítjuk.

Most levezetünk egy feltételt, melynek teljesülése esetén a kohorsz követelése a várható érték egy előre meghatározott környezetébe esik.

Ha a konvergencia elég gyors (ennek teljesülését feltesszük, és e cikkben nem vizsgáljuk), akkor nem túl nagy n-re a konvergáló sorozat n-edik tagjának eloszlásfüggvényét gyakorlatilag helyettesíthetjük a limesszel és írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\Phi(\lambda) - 1 \approx \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k\eta_k - \mu\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{\sigma\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2}}\right| < \lambda\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k\eta_k - \mu\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{\mu\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}\right| < \lambda\frac{\sigma\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2}}{\mu\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Azonban mivel

$$\lambda\frac{\sigma\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2}}{\mu\sum\limits_{k=1}^{n} S_k} < \lambda\frac{\sigma\sqrt{nS^2}}{\mu n s} = \lambda\frac{\sigma}{\mu}\frac{S}{s}\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon, \tag{7}$$

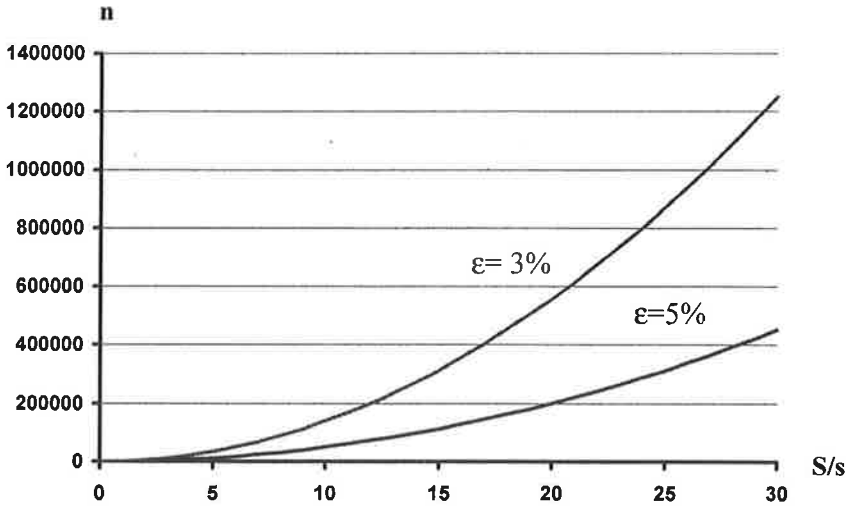
ezért, ha

$$n > \left(\frac{\sigma\lambda}{\mu\epsilon}\right)^2\left(\frac{S}{s}\right)^2,$$

akkor a kohorsz követelésének relatív eltérése a várható értéktől $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel kisebb ϵ-nál.

A fenti egyenlőtlenségben μ, σ adott, λ-t pedig rögzítsük (pl. úgy, hogy $2\Phi(\lambda) - 1 = 0,99$).

Ha a pénztár csupán a már meglévő tagságának kohorszát kívánja vizsgálni, akkor a (7) egyenlőtlenségben n és S_k is adott, és így kiszámítható a λ-hoz tartozó ϵ. Ha azonban egy jövőbeli járadékos-állományra vonatkozóan akarunk vizsgálódni, akkor rögzített ϵ mellett kiszámíthatjuk, hogy különböző n létszámokhoz mekkora S/s 'rés' engedhető meg. Az n, S/s és ϵ közötti függvénykapcsolatot szemlélteti az alábbi ábra:



4. ábra

2 A teljes pénztári tagság esete

Általánosíthatóak-e az eddigiek a pénztár összes járadékosára? Igen. Legyen az x éves tagok száma n_x, $x \in X$, a kohorszok száma $N = |X|$, $N \leq n$. A k-adik x éves tag követelése egy forint havi járadék esetén

$$\eta_{x,k} = \frac{1 - v^{t_{x,k}}}{1 - v}$$

a μ_x, σ_x^2 várható értékkel, ill. szórásnégyzettel. Ekkor a teljes állomány összkövetelése

$$\sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{n_x} S_{x,k} \eta_{x,k} \, ,$$

melynek várható értéke és szórásnégyzete

$$\sum_{x \in X} \mu_x \sum_{k=1}^{n_x} S_{x,k} \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{x \in X} \sigma_x^2 \sum_{k=1}^{n_x} S_{x,k}^2 \, .$$

Az összkövetelés standardizált eloszlásának konvergenciája a normális eloszláshoz a $0 < s < S_{x,k} < S$ feltételezés esetén ugyanúgy igazolható, mint egy rögzített kohorszra vonatkozóan, ha a Laplace-Ljapunov-féle tételt most a

$$\xi_{x,k} = S_{x,k}(\eta_{x,k} - \mu_x)$$

sorozatra alkalmazzuk. Ehhez azonban értelmezni kell a konvergenciát: jelölje n az összes járadékos számát, $n_x = n_x(n)$ a mindenkori x évesek számát, $\sum_{x\in X} n_x(n) = n$, továbbá $n_x(n+1) = n_x$ v. $n_x + 1$, azaz n eggyel történő növelése egy új járadékos belépését jelenti valamelyik kohorszba. n új értelmezése mellett is megtartjuk azt a konvenciót, hogy "$\to$" az $n \to \infty$ melletti konvergenciát jelenti. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} &= \frac{\sum_{x\in X} M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3}{\left(\sum_{x\in X} \sigma_x^2 \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^{3/2}} \le \\ &\le \frac{\max_{x\in X} M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) \sum_{x\in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3}{\sqrt{N} \min_{x\in X} \sigma_x^3 \left(\sum_{x\in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^{3/2}} . \end{aligned} \tag{4'}$$

Mivel pedig x véges halmazon fut végig, az eloszlás konvergenciájához elégséges, ha

$$\frac{\left(\sum_{x\in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3\right)^2}{\left(\sum_{x\in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^3} \to 0 , \tag{5'}$$

ehhez pedig valóban elegendő $0 < s < S_{x,k} < S$, hiszen a fenti törtnél most is nagyobb

$$\frac{n^2 S^6}{n^3 s^6} = \frac{\text{const}}{n} \to 0 .$$

A teljes állomány követelésének a várható értéktől való eltérésére pedig azt kapjuk —megismételve a kohorsz esetén alkalmazott bizonyítás (5), (6) lépéseit—, hogy az $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel kisebb ϵ-nál, ha

$$\lambda \frac{S\sqrt{\sum_{x\in X} \sigma_x^2 n_x}}{s \sum_{x\in X} \mu_x n_x} < \epsilon . \tag{7'}$$

Amennyiben a pénztár úgy dönt, hogy az összes járadékos befizetéseire vonatkozó s, ill. S korlátok helyett kohorszonkénti s_x, ill. S_x korlátokat állít, akkor a becslését így finomíthatja:

$$\lambda \frac{\sqrt{\sum_{x\in X} \sigma_x^2 n_x S_x^2}}{\sum_{x\in X} \mu_x n_x s_x} < \epsilon . \tag{7''}$$

E formulának —$s_x = s$, ill. $S_x = S$ választás esetén— nyilván speciális esete a megelőző.

Ha a pénztár jövőbeli tagságának nyújtandó $S_{x,k}$ szolgáltatásokról —a fenti korlátok megállapítása mellett vagy helyett— egyéb információk is ismertek, akkor a becslések tovább javíthatóak. Például, ha $S_{x,k}$-t egy adott eloszláscsaládhoz tartozó valószínűségi változónak tekinthetjük, akkor az eddigiekhez hasonlóan egyenlőtlenségeket vezethetünk le az eloszláscsalád paramétereire vonatkozóan.

3 Az általános eset

A pénztári vonatkozásoktól eltekintve általánosabban is megfogalmazhatjuk az eddieket.

TÉTEL. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók sorozata, melyeknek harmadik momentumai léteznek, továbbá tegyük fel, hogy a sorozat elemei egy táblázatban vannak elrendezve úgy, hogy az egy sorban lévők egy konstans szorzótól eltekintve azonos eloszlásúak, azaz az x-edik sor k-adik tagja $S_{x,k}\eta_{x,k}$ alakú, ahol $\eta_{x,1}, \eta_{x,2}, \ldots$ azonos eloszlású. Legyen $\eta_{x,k}$ várható értéke μ_x és szórása σ_x. Az egy sorban lévő elemek száma, valamint a sorok száma egymástól függetlenül lehet véges vagy végtelen. A táblázat kitöltése "természetes módon" történik: ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az első $N(n)$ sor valamelyikébe került és ξ_n elhelyezése után az x-edik sor 'hossza' $n_x(n)$, akkor ξ_{n+1} vagy az $N(n)+1$-edik sor első helyére kerül, vagy egy már korábban elhelyezett elem mellé. Azaz formálisan vagy $S_{N(n)+1,1}\eta_{N(n)+1,1}$, vagy $S_{x,n_x(n)+1}\eta_{x,n_x(n)+1}$ alakú lesz $(1 \leq x \leq N(n))$. Nyilván teljesül $\sum_{x\in X} n_x(n) = n$.

Ha valamely s, S, c, C konstansokra $0 < s < S_{x,k} < S$; $0 < c < \sigma_x^3$ és

$$M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) < C \qquad (x = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\Delta_n} < x\right) \to \Phi(x),$$

ahol

$$\Delta_n = \left(\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k)\right)^{1/2}.$$

BIZONYÍTÁS. A Laplace-Ljapunov tétel szerint elég igazolni, hogy

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} \to 0,$$

ahol $\beta_k = M\left(|\xi_k|^3\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. Ehhez elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} \leq \frac{\max_{1\leq x\leq N(n)} M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) \sum_{x=1}^{N(n)} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3}{\min_{1\leq x\leq N(n)} \sigma_x^3 \left(\sum_{x=1}^{N(n)} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^{3/2}} \to 0. \qquad (4'')$$

A (4") konvergencia teljesül, ha a szorzat első tényezője korlátos, a második pedig nullához tart. Utóbbi azért igaz, mert a második tényezőt majorálja

$$\frac{nS^3}{n^{3/2}s^3},$$

az első tényező korlátosságának pedig szükséges és elégséges feltétele $0 < c < \sigma_x^3$ és $M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) < C$, $(x = 1, 2, \ldots)$, mivel a számláló első tényezője monoton növekvő, a nevezőjé pedig monoton csökkenő függvénye n-nek. Tehát a feltételek szerint (4") -et majorálja

$$\frac{C}{c}\frac{n}{n^{3/2}}\frac{S^3}{s^3} = \frac{\text{const}}{\sqrt{n}} \to 0. \qquad (5'')$$

Az első két pontban bizonyított állítások a most bebizonyított tétel speciális esetei: az egyetlen vagy több kohorszból álló tagság a véges számú sorból álló táblázatnak felel meg oly módon, hogy minden kohorszhoz a táblázat egy sora tartozik.

Irodalom

1. J. J. McCutcheon and W. F. Scott: Mathematics of Finance and Investment, (Heinemann, 1986)
2. B. Benjamin and J. H. Pollard: The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics, (Institute and Faculty of Actuaries, London, 1993)
3. Prékopa A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972)
4. Life Insurance Mathematics Hans, Gerber (Springer, Zürich,1995)
5. Actuarial Mathematics (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Negbitt, 1986)

ESTIMATION OF THE FUTURE ANNUITY PAYMENTS OF PENSION FOUNDS APPLYING THE CENTRAL LIMIT THEOREM

At a given moment the net present value of the future annuity payments of a pension found is a random variable that depends on the age distribution of the members and their probabilities of death. In safety respect for a pension found it is necessary to analyse the deviations of this random variable from its expected value from time to time. In this paper we prove —first for a single cohort of members, than for the total pool of members— that under certain conditions the distribution of this random variable is assimptotically normal. In the last part of the paper we generalise the results achieved for a larger class of sequences of random variables.