Szigma, XXXIII. (2002) 1-2.

EGERVÁRY RANGSZÁMCSÖKKENTŐ ALGORITMUSA ÉS ALKALMAZÁSAI [1]

GALÁNTAI AURÉL
Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet

A rangszámcsökkentő eljárást Egerváry az ötvenes évek elejétől fejlesztette ki nemzetközileg is jelentős mátrixelméleti kutatásai keretében. A rangszámcsökkentést Egerváry többek között mátrixok rangjának megállapítására, faktorizációjára és egyenletmegoldó eljárások kifejlesztésére alkalmazta. A rangszámcsökkentő eljárás alkalmazása és vizsgálata új lendületet kapott az ABS módszerek megjelenésével [1], [3]. Dolgozatunkban az Egerváry-féle rangszámcsökkentő eljárás történetével és alkalmazásaival, valamint a rangszámcsökkentéshez kapcsolódó újabb eredményekkel foglalkozunk.

1 Bevezetés

Egerváry az ötvenes évek elején kezdett el intenzíven foglalkozni a mátrixszámítással. Akadémiai székfoglalója [7] lényegében már tartalmazza azt a szemléletet és technikát, amely egyértelműen Egerváryra és tanítványaira jellemző. Ezek közül kiemelhető a bázisfaktorizáció, a diadikus felbontás és a rangszámcsökkentés kapcsolatának felismerése és messzemenő kihasználása. Egerváry mátrixelméleti munkássága alapvetően konstruktív jellegű. Korai halála, amely a numerikus lineáris algebrában is bekövetkezett paradigmaváltás (számítógéporientált algoritmusok fejlesztésének) kezdetére esett, megakadályozta abban, hogy eredményeit ilyen irányban továbbfejlessze, ill. elterjessze. Ezért Egerváry munkásságának főként az elméleti része maradt meg a szakmai köztudatban. A nyolcvanas évek elején Abaffy, Broyden és Spedicato [1], [3] kifejlesztette az ABS-módszereket, amelyek, mint később kiderült, a rangszámcsökkentésen alapulnak. Az ABS-módszerek meglehetősen intenzív kutatása adott új lendületet a rangszámcsökkentő eljárásra vonatkozó további vizsgálatoknak.

A következőkben áttekintjük az Egerváry-féle rangszámcsökkentő eljárás történetét és alkalmazásait. Az

$$A' = A - Auv^T A / v^T Au \quad (A \in R^{m\times n},\ u \in R^n,\ v \in R^m)$$

transzformációt rangszámcsökkentésnek nevezzük. A rangszámcsökkentést, amelynek számos fontos alkalmazása van, többször is felfedezték. Különböző okok miatt a története ellentmondásos. A külföldön megjelent idevágó dolgozatok (Chu, Funderlic, Golub [6], Hubert, Meulman, Heiser [30]) hiányosak, illetve bizonyos értelemben torzítanak is.

[1] Beérkezett: 2002. március 4.

Mai ismereteink szerint a rangszámcsökkentés Wedderburn [38] 1934-ben megjelent könyvében szerepel először kvadratikus alakok Lagrange-féle redukciójával kapcsolatban. Wedderburn a következő eredményt igazolta.

1. Tétel (Wedderburn, 1934.) *Legyen $A \in R^{m\times n}$ tetszőleges $r \geq 1$ rangú mátrix. Ha $u \in R^m$, $v \in R^n$ olyan tetszőleges vektorok, amelyekre $v^T Au \neq 0$, akkor az $A' = A - Auv^T A/v^T Au$ mátrix rangja pontosan $r-1$.*

Wedderburn megjegyezte, hogy a rangszámcsökkentés ismételt alkalmazásával az r rangú A mátrix r darab 1-rangú mátrix összegére történő ún. diadikus felbontását kapjuk [38].

1. Definíció. *Egy $A \in R^{m\times n}$ $(A \neq 0)$ mátrix diadikus felbontásán az*

$$A = \sum_{i=1}^{k} b_i c_i^T \qquad (b_i \in R^m,\ c_i \in R^n)$$

előállítást értjük. A diadikus felbontás minimális, ha k a legkisebb ilyen tulajdonságú természetes szám.

A Wedderburn által javasolt algoritmus, amely megegyezik az Egerváry-féle rangszámcsökkentő eljárással, mai jelölésekkel a következő:

Rangszámcsökkentő eljárás. *Legyen $A \in R^{m\times n}$ egy tetszőleges $r \geq 1$ rangú mátrix és legyen*

$$H_1 = A \tag{1}$$

$$H_{i+1} = H_i - H_i x_i y_i^T H_i / y_i^T H_i x_i, \quad i = 1,\ldots,k\ , \tag{2}$$

ahol $x_i \in R^n$ és $y_i \in R^m$ olyan, amelyre $y_i^T H_i x_i \neq 0$ és $k \leq r$ □

Minthogy $H_{r+1} = 0$, az A mátrix diadikus felbontása:

$$A = \sum_{i=1}^{r} H_i x_i y_i^T H_i / y_i^T H_i x_i\ . \tag{3}$$

Wedderburn eredményét nem ismerve Egerváry 1953 és 1958 között egy sor dolgozatban fejlesztette ki és alkalmazta a róla elnevezett rangszámcsökkentő eljárást ([8]-[13], [15]-[18]). Egerváry a rangszámcsökkentő eljárás első speciális változatát mátrixok rangjának, illetve bázisfaktorizációjának meghatározására fejlesztette ki 1953-ban. Ismeretes, hogy Egerváry a mátrixok rangját a mátrixok minimális diadikus felbontásával definiálta [7]. Mátrixok minimális diadikus felbontása és az ún. bázisfaktorizációja között szoros kapcsolat van.

2. Definíció (Frazer, Duncan, Collar, 1938.) *Egy $A \in R^{m\times n}$ $(A \neq 0)$ mátrix bázisfaktorizációján az $A = FG^T$ szorzatfelbontást értjük, ahol $F \in R^{m\times r}$, $G \in R^{n\times r}$ és* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(G)$.

A bázisfaktorizáció nem egyértelmű. Ha adott egy $A = FG^T$ bázisfaktorizáció, akkor minden más bázisfaktorizáció felírható

$$A = (FM)\left(M^{-1}G^T\right)$$

alakban, ahol $M \in R^{r \times r}$ tetszőleges.

Legyen $F = [f_1, \ldots, f_r]$ ($f_i \in R^m$) és $G = [g_1, \ldots, g_r]$ ($g_i \in R^n$). Ekkor az

$$A = FG^T = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i^T$$

bázisfaktorizáció a mátrix egy minimális diadikus felbontását adja. Fordítva, ha ismert az

$$A = \sum_{i=1}^{r} b_i c_i^T$$

minimális diadikus felbontás, akkor ez az

$$A = BC^T = [b_1, \ldots, b_r]\,[c_1, \ldots, c_r]^T$$

bázisfaktorizációt adja.

Egerváry 1953-ban definiált rangszámcsökkentő eljárása a következő:

$$H_1 = A\,,$$

$$H_{l+1} = H_l - \frac{H_l e_{j_l} e_{i_l}^T H_l}{e_{i_l}^T H_l e_{j_l}}, \quad e_{i_l}^T H_l e_{j_l} \neq 0, \quad l = 1, \ldots, r\,.$$

Ez nyilván speciális esete az általános algoritmusnak. Közvetlenül is belátható, hogy

1. $\operatorname{rank}(H_{l+1}) = \operatorname{rank}(H_l) - 1$;
2. $H_{l+1} e_{j_l} = 0$ és $e_{i_l}^T H_{l+1} = 0$;
3. $H_l e_j = 0 \Rightarrow H_{l+1} e_j = 0$ és $e_i^T H_l = 0 \Rightarrow e_i^T H_{l+1} = 0$;
4. A egy minimális diadikus felbontása és a hozzátartozó bázisfaktorizációja

$$A = \sum_{l=1}^{r} \frac{H_l e_{j_l} e_{i_l}^T H_l}{e_{i_l}^T H_l e_{j_l}} = \underbrace{[H_1 e_{j_1}, \ldots, H_r e_{j_r}]}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{e_{i_1}^T H_1 e_{j_1}} e_{i_1}^T H_1 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{e_{i_r}^T H_k e_{j_r}} e_{i_r}^T H_r \end{bmatrix}}_{C^T}$$

Érdemes megjegyezni, hogy Egerváry a fenti eljárást Jacobi bilineáris alakokra vonatkozó transzformációjának mátrixelméleti analógonjaként kapta (E. Pascal [33]). További vizsgálatainak fő eszköze az 1956-ban publikált alábbi tétel volt ([12], [17], [18]).

2. Tétel (Egerváry, 1956.) *Legyen $A \in R^{m \times n}$ tetszőleges $r \geq 1$ rangú mátrix. Ekkor*

$$\operatorname{rank}\left(A - bc^T\right) = \operatorname{rank}(A) - 1 \qquad (b \in R^m,\ c \in R^n) \tag{4}$$

akkor és csak akkor áll fenn, ha $bc^T = Auv^T A / v^T Au$, *ahol* $u \in R^m$, $v \in R^n$ *tetszőleges a* $v^T Au \neq 0$ *feltételt kielégítő vektorok.*

A tételnek több bizonyítása is ismert [12], [17], [19], [32]. A 2. Tételt felhasználva definiálta Egerváry az általános rangszámcsökkentési algoritmust, szintén 1956-ban. Megmutatta, hogy az algoritmus meghatározza a rangot, előállít egy

$$A = \sum_{i=1}^{r} H_i x_i y_i^T H_i / y_i^T H_i x_i \tag{5}$$

minimális diadikus felbontást és a hozzátartozó

$$A = QD^{-1}P^T \tag{6}$$

bázisfaktorizációt, ahol

$$P = \left[H_1^T y_1, \ldots, H_r^T y_r\right], \quad Q = \left[H_1 x_1, \ldots, H_r^T x_r\right]$$

és

$$D = \operatorname{diag}\left(y_1^T H_1 x_1, \ldots, y_r^T H_r x_r\right).$$

Egerváry kimutatta, hogy eljárásával LU-típusú és egyéb szorzatfelbontások állíthatók elő. Több, a rangszámcsökkentésen alapuló eljárást javasolt homogén mátrixegyenletek [8], [11], [12], [15], [17], illetve lineáris diofantikus egyenletrendszerek általános megoldására [13]. Kimutatta továbbá, hogy eljárása kapcsolatban áll a Purcell- és a Hestenes-Stiefel-féle konjugált irány módszerekkel is [17], [17]. Észrevette a rangszámcsökkentés és a rendszámnöveléses mátrixinvertálás kapcsolatát, amelynek segítségével eljárást adott módosított diszkrét peremértékproblémák megoldására [18]. Ez az eljárás tulajdonképpen egy fordított „rendszámcsökkentéses" mátrixinvertálásnak felel meg, amelyet Brezinski és társai 1996-ban újra felfedeztek [4].

A rangszámcsökkentéssel kapcsolatban kifejlesztett technikájával Egerváry számos más eredményt is elért [9], [16], [10], [14].

Megállapíthatjuk, hogy Egerváry a rangszámcsökkentési eljárást meghatározott célokra fejlesztette ki és széles körben szisztematikusan alkalmazta. Egerváry munkásságáról részletes áttekintés kapható Rózsa Pál [34], [35], [36] cikkeiből, aki egyébként Egerváry utolsó poszthumusz cikkeit is sajtó alá rendezte.

Egerváry rangszámcsökkentéssel kapcsolatos munkássága 1986-ig nem sok nemzetközi visszhangot kapott. Householder 1964-ben megjelent klasszikus és befolyásos *The Theory of Matrices in Numerical Analysis* című könyvében ugyan idézi Egerváry több idevágó munkáját (tételesen a [9], [10], [11], [16], [17] dolgozatokat), de a 2. Tételt Wedderburn tételének nyilvánítja ([29], Exercise 34, p. 33). A rangszámcsökkentő eljárást azonban Egervárynak tulajdonítja a következő formában:

„Apply the obvious identity

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)(v_1, v_2, \ldots, v_n)^H = u_1 v_1^H + \ldots + u_n v_n^H$$

along with Wedderburn's theorem (Exercise 1.34) to obtain Egervary's "rank-reducing" transformations, and thereby derive the methods of triangularization and of orthogonal triangularization."

Householder könyvének megjelenése után több szerző Egerváry tételét Householdernek ([32], Thm. 2.6b, p. 200), vagy Wedderburnnak és Householdernek tulajdonította ([5]).

1984-ben Abaffy, Broyden és Spedicato kvázi-Newton technikával egy konjugált irányokon alapuló módszerosztályt fejlesztettek ki $Ax = b$ alakú lineáris egyenletrendszerek megoldására [1].

Az ABS módszerosztály:

$y_1 \in R^m$, $H_1 \in R^{m\times m}$ $(\det(H_1) \neq 0)$

for $k = 1 : m$

$p_k = H_k^T z_k \quad (z_k \in R^m,\ p_k^T A^T v_k \neq 0)$

$\alpha_k = v_k^T r_k / v_k^T A p_k \quad (r_k = A y_k - b)$

$y_{k+1} = y_k - \alpha_k p_k$

$H_{k+1} = H_k - H_k A^T v_k w_k^T H_k / w_k^T H_k A^T v_k \quad (w_k \in R^m,\ w_k^T H_k A^T v_k \neq 0)$

end

$A y_{m+1} = b$

Az eljárás nyilvánvalóan tartalmazza az Egerváry-féle rangszámcsökkentési eljárást. E tény felismerésére 1986-ban került sor [2], és azóta az ún. ABS módszerekkel kapcsolatos irodalomban Egerváry idevágó eredményei szerepelnek (lásd pl. [3]). Az ABS módszerek kiterjesztésre kerültek nemlineáris egyenletrendszerek megoldására (lásd [3]), valamint alkalmazásra kerültek az optimalizálásban is (lásd [39]).

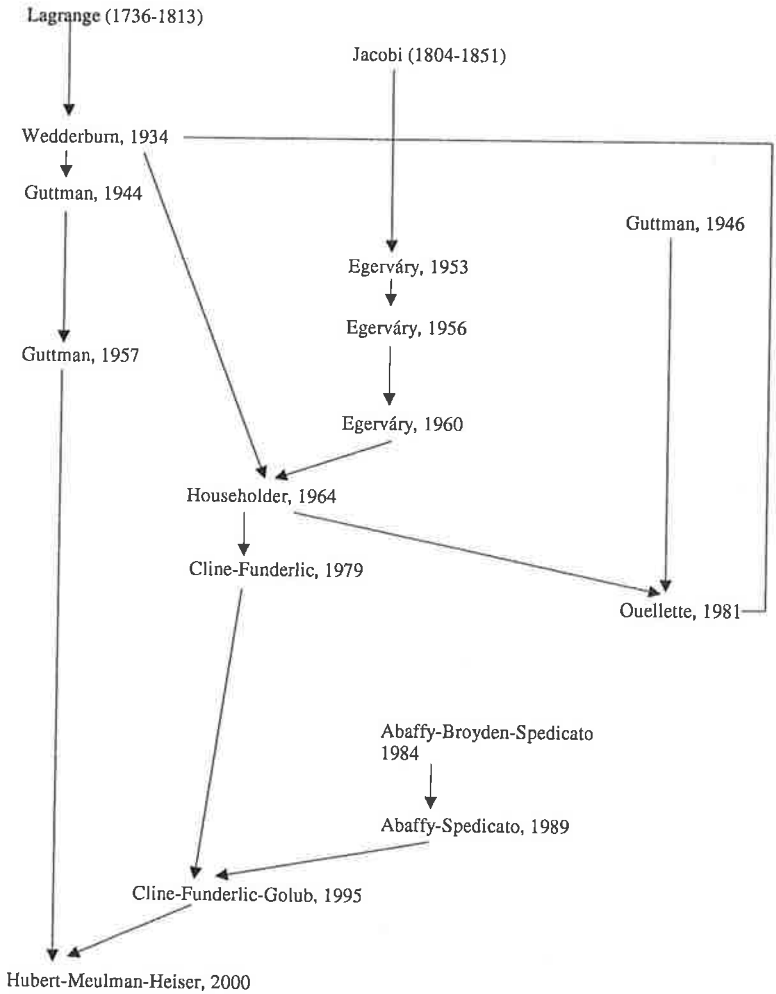
1995-ben Chu, Funderlic és Golub a rangszámcsökkentésről egy jelentős cikket publikált a SIAM Review-ban [6]. Ebben a dolgozatban Egerváry számos eredményét idézik, de ezt igen sajátos formában teszik. Például elismerik, hogy a 2. Tétel Egerváry eredménye, de meg akarnak arról győzni, hogy Householder ezt már Egerváry előtt felfedezte, noha ennek írásos nyoma nincs.

Ezt a dolgozatot követi Hubert, Meulman és Heiser 2000-ben megjelent [30] dolgozata, amelyben kimutatják, hogy a 2. Tétel blokkváltozatát Guttman 1957-ben igazolta. Tehát Ő a tétel első felfedezője. Ezt a következtetést azért vonták le, mert külföldön csak az 1960-ban megjelent Egerváry cikket ismerik.

Tény, hogy Guttman a 2. Tétel blokkváltozatát 1957-ben publikálta. Ezt megelőzően 1944-ben az 1. Tétel blokkváltozatát igazolta. Guttman a rangszámcsökkentés blokkváltozatát statisztikában alkalmazta ([30]).

Ouellette kimutatta, hogy Guttman egy 1946-os, a Schur-komplementálásnál alapvető eredményéből azonnal következik a Wedderburn és a Householder, azaz Egerváry-tétele (lásd [32]). Érdekesség, hogy Guttman ezt nem vette észre.

A most vázolt bonyolult összefüggéseket az alábbi ábrával szemléltethetjük, amely az eszmék haladási irányát mutatja.



1. ábra

Mindent összevetve megállapíthatjuk a következőket:

1. Wedderburn volt az első, aki az 1. Tételt és a rangszámcsökkentést felfedezte.

2. Egerváry a rangszámcsökkentési eljárást szisztematikusan fejlesztette ki és széles körben alkalmazta. Egerváry valójában egy egész elméletet épített ki, amelynek kulcstételét, a 2. Tételt, Ő bizonyította elsőként.

3. Egerváry után közvetlenül Guttman volt az első, aki a 2. Tételt újra felfedezte és egy más körben (statisztikában) alkalmazta.

2 Új eredmények

A következőkben bemutatok néhány eredményt, amelyet a rangszámcsökkentő eljárással kapcsolatban értem el.

Egy A^- mátrixot az A (1)-inverzének, vagy g-inverzének nevezünk, ha fennáll, hogy $AA^-A = A$. A G mátrixot az A reflexív inverzének nevezzük, ha $AGA = A$ és $GAG = G$.

Egy nemszinguláris A mátrixot erősen nemszingulárisnak nevezünk, ha létezik LU-felbontása. Egy nemszinguláris A mátrixnak akkor és csak akkor van LU-felbontása, ha minden főminor mátrixa nemszinguláris.

A rangszámcsökkentési eljárást zérusosztómentesnek nevezzük, ha

$$y_i^T H_i x_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, k) .$$

Ez a pontos feltétele annak, hogy k egymás utáni rangszámcsökkentést végrehajthassunk. Legyen

$$X = [x_1, \ldots, x_k] , \quad Y = [y_1, \ldots, y_k]$$

és

$$X^{(i)} = [x_1, \ldots, x_i] , \quad Y^{(i)} = [y_1, \ldots, y_i] .$$

Ekkor a következő eredmény igaz.

3. Tétel. *A rangszámcsökkentő eljárás akkor és csak akkor zérusosztómentes, ha az* $Y^T AX = \left[y_i^T A x_j\right]_{i,j=1}^k$ *mátrix erősen nemszinguláris. Ebben az esetben a rangszámcsökkentés a következő kanonikus alakba írható:*

$$A_{i+1} = A - AX^{(i)} \left(Y^{(i)T} AX^{(i)}\right)^{-1} Y^{(i)T} A \quad (i = 1, \ldots, k) . \tag{7}$$

A tétel szükséges részét elsőként Abaffy, Broyden és Spedicato igazolták az ABS módszerekkel kapcsolatban [1], [3]. A kanonikus alak Egerválynál is megtalálható [17], [18], aki azt vizsgálta, hogy k egymás utáni rangredukció helyettesíthető-e egyetlen blokk rangredukcióval.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $k = r$. Ekkor a rangszámcsökkenő eljárás az

$$A = QD^{-1}P^T \tag{8}$$

bázisfaktorizációt szolgáltatja. Felmerül a kérdés, hogy adott A, X és Y paraméterek esetén mi a kapott P, a Q és a D? Ezt néhány speciális esetben már Egerváry [17], Abaffy, Broyden, Spedicato [1], [3], valamint Chu, Funderlic és Golub [6 is megválaszolta.

Ha egy B kvadratikus mátrixnak van LDU-felbontása, akkor ezt az egyértelmű felbontást jelölje $B = L_B D_B U_B$, ahol a B index a mátrixra utal.

4. Tétel. *Legyen* $Y^T AX$ *erősen nemszinguláris. Ekkor a (6) bázisfaktorizáció tényezői*

$$P = A^T Y L_{Y^T AX}^{-T}, \quad Q = AXU_{Y^T AX}^{-1}, \quad D = D_{Y^T AX} , \tag{9}$$

és az A kifejezhető az

$$A = \left(AXU_{Y^TAX}^{-1}\right) D_{Y^TAX}^{-1} \left(L_{Y^TAX}^{-1} Y^T A\right) \tag{10}$$

alakban.

Az eredmény és igazolása különféle formákban a [20], [21], [23], [24] munkákban található meg. A tételnek számos fontos következménye van:

1. A rangszámcsökkentési eljárással minden bázisfaktorizáció előállítható ([6] sejtése).
2. Ha A, X és Y négyzetes nemszinguláris, akkor

$$A = \underbrace{\left(Y^{-T} L_{Y^TAX} D_{Y^TAX}\right)}_{Q} D_{Y^TAX}^{-1} \underbrace{\left(D_{Y^TAX} U_{Y^TAX} X^{-1}\right)}_{P^T}. \tag{11}$$

3. Egyértelmű jellemzés adható arra, hogy P, vagy Q mikor lesz háromszög alakú, illetve B ortogonális.
4. A Lánczos-féle tridiagonális formára történő hasonlósági transzformáció mátrixa és annak inverze egyszerre előállítható a rangszámcsökkentéssel.

3. Definíció. *Legyen $A \in R^{m\times n}$, $V \in R^{m\times r}$ és $P \in R^{n\times r}$. A (P, V) mátrixpárt A-konjugáltnak nevezzük, ha $L = V^TAP$ nemszinguláris alsó háromszögmátrix. A (P, V) pár A-bikonjugált, ha $D = V^TAP$ nemszinguláris diagonális.*

A rangszámcsökkentő eljárásnak a következő konjugálási tulajdonságai vannak.

1. Állítás. *Ha $X = B^TV$ és $Y = C^TW$, akkor a (P, V) pár B-konjugált, a (Q, W) pár pedig C-konjugált.*

2. Állítás. *Tetszőleges B-konjugált (P, V) mátrixpár esetén létezik olyan Y ortogonális mátrix, hogy a rangszámcsökkentő eljárás az $A = I$, $X = B^TV$ és Y választással éppen ezt a P mátrixot adja.*

3. Állítás. *Legyen A^- az A mátrix tetszőleges g-inverze. Ekkor a (Q, P) pár A^--bikonjugált.*

Megmutatható, hogy egy sor ismert konjugálási eljárás a rangszámcsökkentés speciális esete, vagy éppen azzal ekvivalens. A 3. Állítás miatt a rangszámcsökkentés speciális esetként tartalmazza a kétoldali Gram-Schmidt eljárást, amellyel bikonjugált párokat állíthatunk elő.

Megmutatható, hogy a rangszámcsökkentéssel kapott (Q, P) pár stabil, ha az Y^TAX mátrix LDU-felbontása stabil [22].

Végül megemlítem, hogy a rangszámcsökkentő eljárás és a rendszámnöveléses mátrix invertálás között több új és érdekes összefüggést sikerült találni.

Ezek egyik következménye a kanonikus alakra adott három újabb multiplikatív reprezentáció, amelyekkel a rangszámcsökkentési eljárást különféle szempontokból jellemezhetjük. Példaként megemlítjük a következőt:

$$A_{i+1} = AX\left(\left(Y^TAX\right)^{-1} - \begin{bmatrix} \left(Y^{(i)T}AX^{(i)}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)Y^TA\,.$$

A formulából látható, hogy az eljárás során az Y^TAX mátrix inverzét közelítjük a főminor mátrixok inverzeivel.

3 Összefoglalás

Az eddig ismert tények alapján jogos Egerváry-féle rangszámcsökkentő eljárásról beszélni. Az eljárás egy széles körben használható, hatékony eszköz, amelynek rendkívül érdekes tulajdonságai vannak. Remélni lehet, hogy az eljárás végre a szakirodalomban is a megfelelő helyre kerül. Mindenesetre Egerváry munkásságának növekvő elismerését az is jelzi, hogy a Bergamói Egyetem 1998-ban Egerváry díjat adott Zhang Liwei kínai matematikusnak idevágó munkásságáért.

Irodalom

1. J. Abaffy, C. G. Broyden, E. Spedicato, A class of direct methods for linear equations, *Numerische Mathematik*, 45, 361-376, 1984.
2. Abaffy J., Galántai A.: Conjugate direction methods for linear and nonlinear systems of algebraic equations, *Colloquia Mathematica Soc. János Bolyai, 50. Numerical Methods, Miskolc (Hungary) 1986.* (ed. P. Rózsa) North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 481-502
3. J. Abaffy, E. Spedicato, *ABS-projection Algorithms: Mathematical Techniques for Linear and Nonlinear Algebraic Equations*, Ellis Horwood, Chichester, 1989.
4. Brezinski, C., Morandi Cecchi, M., Redivo-Zaglia, M.: The reverse bordering method, SIAM J. Matrix. Anal. Appl. 15, 1994, pp. 922-937
5. R.E. Cline, R.E. Funderlic, The rank of a difference of matrices and associated generalized inverses, *Lin. Alg. Appl.*, 24, 185-215, 1979.
6. M.T. Chu, R.E. Funderlic and G.H. Golub, A rank-one reduction formula and its applications to matrix factorizations, *SIAM Review*, 37, 512-530, 1995.
7. Egerváry J.: Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról, *Az MTA III. Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei* 3, 1953, 417-458
8. J. Egerváry, Mátrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására (A method based on the dyadic representation of matrices for the transformation of bilinear forms and for solving systems of linear equations, in Hungarian), *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei*, 2, 11–32, 1953.

9. J. Egerváry, On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions, *Acta Sci. Math.*, 15, 1-6, 1953.

10. J. Egerváry, On a lemma of Stieltjes on matrices, *Acta Sci. Math.* 15, 99-103, 1954.

11. J. Egerváry, Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 35, 111-118, 1955.

12. J. Egerváry, Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására (Old and new methods for solving linear equations, in Hungarian), *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* (Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences), 1, 109–123, 1956.

13. J. Egerváry, Auflösung eines homogenes linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen, *Publicationes Mathematicae*, 4, 481–483, 1956.

14. J. Egerváry, Az inverz mátrix általánosítása (On a generalized inverse for matrices, in Hungarian), *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* (Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences), 1, 315–324, 1956.

15. J. Egerváry, Über eine Verallgemeinerung der Purcelschen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssyteme, *Österreichisches Ingeniur-Archiv*, 11, 249–251, 1957.

16. J. Egerváry, Über einigekonstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordansche Normalform, *Acta Math. Acad. Hung.*, 10, 31–54, 1959.

17. E. Egerváry, On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations, *ZAMP*, 11, 376–386, 1960.

18. J. Egerváry, Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebige Gebiete, *Acta Mathematica Academiae Scientiarium Hungaricae*, 11, 341–361, 1960.

19. L. Elsner, P. Rózsa, On eigenvectors and adjoints of modified matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 10, 235–247, 1981.

20. A. Galántai, Generalized implicit LU algorithms in the class of ABS methods for linear and nonlinear systems of algebraic equations, *Quaderno DMSIA* 93/5, University of Bergamo, Bergamo, 1993.

21. A. Galántai, The global convergence of the ABS methods for a class of nonlinear problems, *Optimization Methods and Software*, 4, 283–295, 1995.

22. Galántai A.: Perturbation theory for full rank factorizations, Quaderni DMSIA, 1999/40, University of Bergamo, Bergamo, 1999.

23. Galántai A.: Rank reduction and conjugation, Mathematical Notes, Miskolc, 1 (2000), pp. 11–33.

24. Galántai A.: Rank reduction, factorization and conjugation, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. 49, 2001, pp. 195–207

25. L. Guttman, General theory and methods for matric factoring, *Psychometrika*, 22, 1–16, 1944.

26. L. Guttman, Enlargement methods for computing the inverse matrix, *Ann. Math. Statist.* 17, 336–343, 1946.

27. L. Guttman, A necessary and sufficient formula for matrix factoring, *Psychometrika*, 22, 79–91, 1957.
28. Hegedűs Cs., *Mátrixelmélet*, MTA Matematikai Kutató Intézete, 1974
29. A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.
30. L. Hubert, J. Meulman, W. Heiser, Two purposes for matrix factorization: A historical appraisal, *SIAM Review* 42, 68–82, 2000.
31. Lovass-Nagy V., *Matrixszámítás*, Műszaki matematikai gyakorlatok, C. IV., Tankönykiadó, Budapest, 1956
32. D. V. Ouellette, Schur complements and statistics, *Lin. Alg. Appl.*, 36, 187–295, 1981.
33. E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik I: Analysis*, Teubner, Leipzig, 1910.
34. Rózsa P., Egerváry Jenő munkásságáról, *Matematikai Lapok*, 10, 1959, 195–225
35. Rózsa P., Egerváry Jenő, 1891-1958, *MTA III. Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei*, 10, 1960, 1–7
36. P. Rózsa, *Lineáris algebra és alkalmazásai* (Linear algebra and its applications, in Hungarian), Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
37. P. Rózsa, Jenô Egerváry(1891-1958), a great personality of the Hungarian mathematical school, *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering*, 28, 287–298, 1984.
38. J. H. M. Wedderburn, *Lectures on Matrices*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XVII., 1934.
39. Zhang Liwei, Xia Zunquan, Feng Enmin, *Introduction to ABS Methods in Optimization*, Chinese, Dalian University of Technology Press, China, 1999.

THE RANK-REDUCTION ALGORITHM OF EGERVÁRY AND ITS APPLICATION

The history and applications of the rank-reduction algorithm of Egerváry is examined. New results concerning the rank reduction are also mentioned.