AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT POISSON ELOSZLÁS ÚJ BAYESIÁNUSI BECSLÉSE[1]

ANWAR HASSAN – HERMAN SÁNDOR
University of Kashmir, Srinagar, India – PTE Közgazdaságtudományi Kar

A kétparaméteres általánosított Poisson eloszlás paraméterbecsléséhez Bayes becslőfüggvényét ajánljuk, feltéve a paraméter a priori (előzetes) eloszlását, amely általánosabb, mint amit Shoukri-Consul (1989) ajánlott. Szimulációs tanulmányt folytattunk, hogy meghatározzuk az új Bayes becslőfüggvény torzítását és hatékonyságát. Kiszámítottuk az ajánlott becslőfüggvény relatív hatékonyságát és relatív torzítását a Shoukri-Consul becslőfüggvényhez képest, a paraméterek bizonyos kiválasztott értékeire. Az illeszkedés jóságának mérésére is végeztünk teszteket, felhasználva mindkét Bayes becslőfüggvényt.

1 Bevezetés

Consul és Jain (1973) a következő eloszlásfüggvénnyel adott általánosított Poisson eloszlást (GPD).

$$P(x = X) = \lambda_1(\lambda_1 + x\lambda_2)^{x-1} \exp[-(\lambda_1 + x\lambda_2)]/x! \tag{1.1}$$

$$\lambda_1 > 0; \quad |\lambda_2| < 1; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Azt találták, hogy a vizsgált eloszlás tagja a Lagrange eloszlások Consul-Shenton (1972) féle csoportjának és Gupta (1972) módosított hatványsor eloszlás (MPSD) csoportjának is.

Megmutatták, hogy a GPD-nek sok hasznos tulajdonsága van és különböző területeken alkalmazhatónak találták, úgymint "biológia, sorbanállási elmélet, epidemiológia és genetika". Valószínűleg ezen okokból sok kutatatót vonzott a téma és így nagyon rövid idő alatt sok kutatási dolgozat jelent meg a statisztikai irodalomban. Ezek jó összefoglalását kapjuk Consul (1989)-ben megjelent művében.

A GPD becslés problémájával sok szerző foglalkozott. Miközben Consul-Shoukri (1984), Consul-Famoye (1988, 1989) a GPD ML (maximum likelihood) becslését elemezte, Gupta (1977), Kumar-Consul (1980) annak MVU (minimális varianciájú torzítatlan) becslését elemezte, Shoukri-Consul (1989) pedig annak Bayes-i szemléletű becslését tanulmányozta.

Shoukri-Consul (1989) a GPD kissé megváltoztatott formáját vette alapul következőképpen

$$P(x = X) = (1 + \beta x)^{x-1} \alpha^x \exp[-\alpha(1 + \beta x)]/x! \tag{1.2}$$

[1] A tanulmány a két tanszék között a Magyar Oktatási Minisztérium közreműködésével létrejött kutatási és együttműködési szerződés keretében készült. Beérkezett: 2002. június 11.

$\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = \alpha\beta$ helyettesítéssel (1.1)-ben. A szerzők α és különböző függvényei bayesi becslését kapták, miközben α értékeket előre nem meghatározott formában kezelik.

A másik paramétert, β-t ismertnek tekintve a következő Bayes szemléletű becslést kapták

$$\hat{\alpha} = Y/(N + \beta Y)\,, \tag{1.3}$$

ahol N a mintanagyság és Y az egyedi megfigyelések összege.

Ebben a dolgozatban α bayesi szemléletű becslést tanulmányoztuk inverz gamma eloszlást feltételezve, ami általánosabb eloszlást ad annál, amelyet Shoukri-Consul α a priori eloszlásának tekintett. Az így nyert Bayes becslőfüggvény kapott átlagát és varianciáját szimuláció alapján határoztuk meg. Az új becslőfüggvény hatékonyságát és relatív hibáját összevetettük Shoukri-Consul (1989)-es becslőfüggvény megfelelő értékeivel néhány kiválasztott paraméterértékre.

A két becslőfüggvényt az illeszkedés szempontjából is teszteltük.

2 Az új Bayes becslőfüggvény

Ha $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ véletlen minta (1.2)-ből, akkor likelihood függvénye a következőképpen adott

$$L = \prod_{i=1}^{N} \left[(1 + \beta x_i)^{x_i - 1}/x_i!\right] \alpha^Y \exp(-N\alpha - \alpha\beta Y)\,, \tag{2.1}$$

ahol $Y = \sum x_i$. Feltesszük, hogy α a priori eloszlása a következő sűrűségfüggvénnyel adott inverz gamma eloszlás

$$f(a) = [a^b/\Gamma(b)]e^{-a\alpha}\alpha^{b-1}; \qquad \alpha > 0;\ a, b > 0\,. \tag{2.2}$$

Könnyen látható, hogy Shoukri-Consulnak az a priori eloszlása nem informatív és konkrét esete (2.2)-nek, valamint $a = b = 0$ értéket véve nyerhetjük konkrét formáját.

Alkalmazva a (2.1) likelihood függvényt α a posteriori eloszlására a következőt kapjuk

$$P(\alpha \mid Y) = [(N + a + \beta Y)^{b+Y}/\Gamma(b+Y)]\alpha^{Y+b-1}e^{-(N+a+\beta y)}; \quad \alpha > 0 \tag{2.3}$$

és így α Bayes becslő függvénye

$$\alpha^* = (b + Y)/(N + a + \beta Y) \tag{2.4}$$

Nyilvánvaló, ez α általánosabb becslése annál, melyet Shoukri-Consul kapott, mivel az előző az utóbbit $a = b = 0$-ra redukálja.

3 Az a posteriori átlag és variancia érték

Az α^* a posteriori átlagának és varianciájának meghatározására 100 véletlen mintát vettünk a GPD-ből, mindegyik minta nagysága 200, $\alpha = 0.5$ és $\beta = 0.4$, 0.7 és 0.9 értékkel. Így összesen 300 véletlen mintát vettünk. Mivel nem volt információnk a és b értékéről, kivéve, hogy valós és pozitív számok, (a, b) 25 kombinációjának értékét tekintettük $a, b = 1$, 2, 3, 4 és 5-re és azokat az a és b értékeket választottuk, melyekre az α^* varianciája minimális.

Az α^* átlagára és varianciájára kapott eredményeket összegzik a *3.1-3.3 táblázatok.* A nem zárójelben levő értékek az átlagot jelölik, a zárójelben levők a szórást jelölik minden táblázatban.

Azonnal látható ezekből a táblázatokból, hogy α^* alulbecsült az alacsony értékekre ($\beta = 0.4$ és 0.7), miközben $\beta = 0.9$-re ez nem igaz. Ebben az esetben pozitívan és negatívan is torzított. Továbbá megfigyelhető, hogy a torzítás mértéke csökkenő tendenciájú magasabb β értékre.

	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
$a=1$	0.4206 (0.00124)	0.4288 (0.00161)	0.4294 (0.00134)	0.4359 (0.00113)	0.4371 (0.00186)
$a=2$	0.4204 (0.00102)	0.4260 (0.00146)	0.4220 (0.00140)	0.4364 (0.00155)	0.4397 (0.00151)
$a=3$	0.4212 (0.00140)	0.4205 (0.00122)	0.4239 (0.00103)	0.4303 (0.00132)	0.4334 (0.00090)
$a=4$	0.4120 (0.00136)	0.4264 (0.00146)	0.4299 (0.00147)	0.4313 (0.00149)	0.4359 (0.00164)
$a=5$	0.4122 (0.00139)	0.4258 (0.00174)	0.4252 (0.00151)	0.4302 (0.00110)	0.4269 (0.00071)

3.1 táblázat. α^* átlaga és szórása $\beta = 0.4$-re és (a, b) különböző értékeire

	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
$a=1$	0.4961 (0.00141)	0.4820 (0.00141)	0.4848 (0.00140)	0.5094 (0.00117)	0.4943 (0.00128)
$a=2$	0.4749 (0.00118)	0.4861 (0.00139)	0.4884 (0.00110)	0.4897 (0.00119)	0.4843 (0.00119)
$a=3$	0.4739 (0.00136)	0.4821 (0.00163)	0.4876 (0.00118)	0.4857 (0.00107)	0.4998 (0.00152)
$a=4$	0.4799 (0.000994)	0.4828 (0.00161)	0.4854 (0.00102)	0.4859 (0.000991)	0.4946 (0.00139)
$a=5$	0.4678 (0.00128)	0.4790 (0.00144)	0.4812 (0.00174)	0.4862 (0.00205)	0.5124 (0.00139)

3.2 táblázat. α^* átlaga és szórása $\beta = 0.7$-re és (a, b) különböző értékeire

	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
$a=1$	0.4937 (0.00148)	0.5008 (0.00104)	0.5024 (0.00125)	0.5014 (0.00140)	0.5006 (0.00971)
$a=2$	0.4960 (0.00160)	0.4990 (0.00202)	0.5017 (0.00118)	0.5040 (0.00140)	0.5024 (0.00163)
$a=3$	0.4928 (0.00103)	0.5024 (0.00174)	0.4981 (0.000933)	0.4949 (0.00151)	0.4995 (0.000156)
$a=4$	0.4844 (0.00122)	0.4902 (0.00102)	0.4947 (0.00133)	0.5017 (0.00181)	0.4993 (0.00108)
$a=5$	0.4912 (0.00130)	0.4971 (0.00112)	0.4968 (0.00102)	0.4953 (0.00135)	0.4883 (0.00119)

3.3 táblázat. α^* átlaga és szórása $\beta = 0.9$-re és (a, b) különböző értékeire

Ami α^* varianciáját illeti, érdekes jelenséget figyelhetünk meg. Először: a variancia a és b egyenlő értékeire minimális mindhárom esetben. $\beta = 0.4$-re a minimum $a = b = 5$-nél van; $\beta = 0.7$-re a minimum $a = b = 4$-nél van és $\beta = 0.9$-re a minimum $a = b = 3$-nál van. E jelenség indoklása további elemzéseket kíván. Vizsgálataink alapján egyenlőre csak annyit állíthatunk, hogy α^* varianciája (amely ismeretlen) olyan formájú lehet, amely egyenlő a és b értéknél veszi fel a minimumát, illetve a és b azon értéke, melynél a variancia minimális, magasabb β értékekre ismét csökken. Ezért a (2.4) szerint ajánlott Bayes becslő függvénybe egyenlő és magas a és b értékeket célszerű venni. Magasabb β értékek esetében a-nak és b-nek alacsonyabbnak kell lennie.

Az ajánlott Bayes becslő függvény átlagát és varianciáját összehasonlítottuk a Shoukri-Consul becslő függvényével. Először az Shoukri-Consul becslést számítottunk a GPD-ből vett véletlen mintákra és meghatároztuk átlagukat és varianciájukat. Az így kapott átlagokat és varianciákat összehasonlítjuk az új Bayes becslőfüggvény megfelelő értékeivel a ($\beta = 0.4$; $a = b = 5$); ($\beta = 0.7$; $a = b = 4$) és ($\beta = 0.9$; $a = b = 3$) esetekben, ahol a varianciákat minimálisnak találtuk. Az eredményeket a *3.4 táblázat* tartalmazza.

Kiderül a táblázatból, hogy az ajánlott α^* becslő átlaga közelebb van α pontos értékéhez ($= 0.5$) mint $\hat{\alpha}$-é. Bár a két átlag közötti különbség nem tűnik nagynak, a mind a 100 mintára meghatározott α^* és $\hat{\alpha}$ egyedi értékek alakulása sajátos tendenciát mutat. Felfedezhető, hogy mind a 100 α^* érték nagyobb, mint $\hat{\alpha}$ megfelelő értékei, azaz közelebb vannak α pontos értékéhez $\beta = 0.4$, 0.7 és 0.9 minden értékére. Ez kétségtelenül azt jelenti, hogy az ajánlott becslőfüggvény jobb, mint Shoukri-Consul (1989) becslőfüggvénye, nemcsak átlagosan, hanem egyedileg is. Az is megfigyelhető, hogy α^* relatív hatékonysága $\hat{\alpha}$-hoz viszonyítva mindig több mint 100%, és β értékével együtt növekszik. Ez azt jelenti, hogy α^* nemcsak kevésbé torzított, hanem hatékonyabb is, mint $\hat{\alpha}$.

		$\beta = 0.4$ $a = b = 5$	$\beta = 0.7$ $a = b = 4$	$\beta = 0.9$ $a = b = 5$
Átlag	α^*	0.4269	0.4859	0.4987
	$\hat{\alpha}$	0.4147	0.4784	0.4926
Variancia	α^*	0.000689	0.000751	0.000883
	$\hat{\alpha}$	0.000737	0.001077	0.001048
Relatív hatékonyság		106.97	112.51	118.46

3.4 táblázat. α^* torzítása és százalékos relatív hatékonysága a Shoukri-Consul becsléshez képest

4 Az illeszkedés jósága

Annak érdekében, hogy eldöntsük, a vizsgált két α-ra vonatkozó becslőfüggvény közül melyik illeszkedik jobban, teszteléseket végeztünk Ezért három szimulált értékhalmazt képeztünk az ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$, $a = b = 5$); ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.7$, $a = b = 4$) és ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.9$, $a = b = 3$) paraméterkombinációkra. A szimulált értékek generálására a szokásos Monte

Carlo-módszert használtuk. Először a GPD-nek megfelelő kumulatív valószínűségeket $P(X \leq x)$ számítottuk ki $x = 0, 1, 2, \ldots$-re, és képeztük a kumulatív valószínűségi osztályokat, úgymint $P(X \leq x)$-től $P(X \leq x+1)$-ig. Aztán 200 egynél kisebb véletlen számot generáltunk minden megfigyeléshez. Ezek képviselik a kumulatív valószínűségeket. A különböző valószínűségi osztályokhoz tartozó ilyen véletlen számoknak a számát (gyakoriságát) kaptuk, melyek végül is az $x = 0, 1, 2, \ldots$ gyakoriságai. Az eredményeket a *4.1 – 4.3 táblázatok* mutatják.

A táblázatokban található eredmények azt igazolják, hogy az új Bayes becslőfüggvény szorosabb illeszkedést ad a szimulált adatokhoz, mint a Shoukri-Consul becslőfüggvény.

Mindhárom esetben annak valószínűsége, $P(\chi^2)$, hogy a megfigyelt χ^2 értékeket túllépjük, nagyobb α^*-ra mint $\hat{\alpha}$-ra, ezért várható, hogy az új becslőfüggvény mindig szorosabb illeszkedést ad annál, melyet a Shoukri-Consul becslőfüggvény adott.

	Megfigyelt gyakoriság	Várható gyakoriság	
		α^* alapján	$\hat{\alpha}$ alapján
$X = 0$	124	121	122
$X = 1$	43	50	50
$X = 2$	21	50	18
$X = 3$	10	19	7
$X = 4$	2	3	3
Összesen	200	200	200
α		0.50354	0.49358
Szabadságfok		2	2
χ^2		1.66491	1.91279
$P(\chi^2)$		0.45	0.41

4.1 táblázat. 200 nagyságú véletlen minta GPD-ből $a = b = 5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$-re és a várható gyakoriságok α^* és $\hat{\alpha}$ alapján

	Megfigyelt gyakoriság	Várható gyakoriság	
		α^* alapján	$\hat{\alpha}$ alapján
$X = 0$	113	118	119
$X = 1$	46	43	44
$X = 2$	19	19	19
$X = 3$	11	10	9
$X = 4$	6	5	5
$X = 5$	3	3	3
$X = 6$	2	2	1
Összesen	200	200	200
α		0.53483	0.52897
Szabadságfok		4	4
χ^2		0.72117	1.28787
$P(\chi^2)$		0.95	0.86

4.2 táblázat. 200 nagyságú véletlen minta GPD-ből $a = b = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.7$-re és a várható gyakoriságok α^* és $\hat{\alpha}$ alapján

	Megfigyelt gyakoriság	Várható gyakoriság	
		α^* alapján	$\hat{\alpha}$ alapján
$X = 0$	125	122	121
$X = 1$	33	39	37
$X = 2$	17	17	21
$X = 3$	9	9	9
$X = 4$	6	5	5
$X = 5$	6	3	3
$X = 6$	2	2	2
$X = 7$	1	2	1
$X = 8$	1	1	1
Összesen	200	200	200
α		0.4936	0.48951
Szabadságfok		6	6
χ^2		1.69685	2.81228
$P(\chi^2)$		0.79	0.59

4.3 táblázat. 200 nagyságú véletlen minta GPD-ből $a = b = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.9$-re és a várható gyakoriságok α^* és $\hat{\alpha}$ alapján

Az eredmények gyakorlati felhasználási lehetőségei a bevezetőben megemlítettekhez képest nagyon sokrétűek, a tudomány és a gazdaság számos területén segíthetik a folyamatok jobb megismerését. Ezeken a területeken a Poisson eloszlás modellezése közvetlenül, vagy megfelelő feltételek fennállása esetén a binomiális eloszlást helyettesítve adhat segítséget a döntéshozóknak.

Néhány kiragadott példa:

- A tudományos kutatások vizsgálják a meteoritok, a természetes és mesterséges különböző méretű szilárd testek a világűr egy adott pontján történő megjelenésének (becsapódásának) valószínűségét. Ezeknek az elemzéseknek az űrkutatásban van jelentőségük.

- Az ipari termelésben elsősorban a minőségbiztosítás és minőség-ellenőrzés területén alkalmazhatók a vizsgált eredmények. A selejtarányra, az anyaghibákra vonatkozó információk elősegítik a gyártási folyamatok jobb megszervezését, a gyártásközi ellenőrzés hatékonyabbá tételét, a szavatossági kötelezettségek tervezhetőségét.

- Az ún. sorbanállási elmélet gyakorlati alkalmazása számos területen nagy jelentőségű. A pályaudvari, bevásárlóközponti pénztárrendszerek átbocsátóképességének tervezése is fontos feladat. A telefonközpontok kapacitástervezésekor hasonló kérdések merülnek fel a tervezéskor.

- Ismert a légi közlekedésben és a szállodaiparban a túlvállalás. Ennek ésszerű kockázata szintén modellezendő.

- Az egészségügyben a kórházi ágykapacitás tervezésekor ésszerű határok közé kell szorítani annak kockázatát, hogy adott körzetben, adott típusú ellátás ne legyen biztosítható. Fenti probléma modellezése a rugalmas kockázatcsökkentésre is ötleteket adhat.

- A postaforgalomban az irányítószám hiánya az automatikus szortírozást akadályozza, ennek modellezése elemi érdek.

A példák még sorolhatók, a jövő feladata e konkrét területeken modellkísérleteket végezni.

Irodalom

1. Consul, P. C. and Shoukri, M. M. (1984): The maximum likelihood estimation for generalized Poisson distribution, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Vol. 10, no. 12, pp. 1533–47.
2. Gupta, R. C. (1974): Modified power series distribution and its applications, Sankhya ser. B, Vol. 36, no. 3, pp. 288–298.
3. Gupta, R. C. (1977): Minimum variance unbiased estimation in a modified power series distribution and some of its applications, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Ser. A, Vol. 6, no. 10, pp. 977–991.
4. Kumar, A. and Consul, P. C. (1980): Minimum variance unbiased estimation for modified power series distribution, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Ser. A, Vol. 9, no. 12, pp. 1261–75.
5. Shoukri, M. M. and Consul P. C. (1989): Bayesian analysis of generalized Poisson distribution, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Vol. 18, no. 4, pp. 1465–80.
6. Solt György (1993): *Valószínűségszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.
7. Denkinger Géza (1990): *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

BAYESIAN ESTIMATION FOR GENERALIZED POISSON DISTRIBUTION

A new Bayes estimator for one of the parameters of the two-parameter generalized Poisson distribution has been suggested by assuming a prior distribution of the parameter which is more general than that suggested by Shoukri and Consul (1989). A simulation study has been done to find amount of bias and efficiency of the new Bayes estimator. Relative efficiencies and relative bias of the proposed estimator with respect to the Shoukri and Consul's estimator have been computed at some selected values of parameters. Some tests on goodness of fit have also been done using both the Bayes estimators. The study contains three approach. In all these three cases, $P(\chi^2)$, the probability for the observed value of χ^2 to be exeed is higher for α^* than $\hat{\alpha}$, it is therefore, expected that the new estimator should invariably provide closer fits than that provided by the Shoukri and Consul's estimator. The practical uses of the results are complex. The study proves it with several examples.