A DINAMIKUS PROGRAMOZÁS MEGOLDÁSI MÓDSZEREINEK SZEMLÉLTETÉSE [1]

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA, Közgazdaságtudományi Kutatóközpont

Ebben a dolgozatban egy dinamikus optimalizálási feladatot mutatok be, amelyet *skalár lineáris–homotetikus (LH) szabályozási feladat*nak nevezek. Az állapotegyenlet lineáris, és az alapfüggvény az állapot- és a szabályozási változó ugyanazon hatványfüggvényének a konvex kombinációja. Ez a modell magában foglal két népszerű közgazdasági modellt és egy harmadik modell is belefoglalható. Az LH-modellben a dinamikus programozás három módszere (találgatásos, a közvetlen és az értékfüggvény-iteráció) jól szemléltethető.

1 Bevezetés

Manapság a dinamikus optimalizálás egyre fontosabb szerepet kap a közgazdaságtanban. Diszkrét idejű rendszerek megoldásánál nagyon kedvelt eljárás a *dinamikus programozás*, és az optimalitás elve, azaz a Bellman egyenlet a megoldási módszer sarokköve. Több módszer is ismert az optimális megoldás megtalálására: a találgatásos módszer, az értékfüggvény iterálása és a Howard-módszer.

Ebben a dolgozatban egy absztrakt matematikai feladatot vezetek be, amelyet *skalár lineáris–homotetikus (LH) szabályozási feladat*nak nevezek. Az állapotegyenlet lineáris, és az alapfüggvény az állapot- és a szabályozási változó ugyanazon hatványfüggvényének a konvex kombinációja. Ez a modell magában foglal két népszerű közgazdasági modellt és egy harmadik modell is belefoglalható: 1. A lineáris–kvadratikus (LQ) szabályozási modell (Stokey és Lucas, 1989, 95–96. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000). 2. Az optimális fogyasztási pálya CRRA (állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú) hasznossági függvény esetén (vö. Obstfeld és Rogoff, 1996, 720–721. o.). 3. Az optimális felhalmozási pálya Cobb–Douglas termelési függvény teljes amortizáció és Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény esetén (Stokey és Lucas, 1989, 11–13 o. és Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34. o.). Az LH-modellben a dinamikus programozás három módszere (találgatásos, a közvetlen és az értékfüggvény-iteráció) jól szemléltethető.

Először a dinamikus programozás *találgatásos* módszerét körvonalazom. Itt egy sejtéssel kezdünk: az értékfüggvény ugyanaz a hatványfüggvény mint ami az alapfüggvényben szerepel, csak egy határozatlan állandóval van megszorozva. Végrehajtva a Bellman-egyenlet jobb oldalán szereplő parametrikus

[1] Köszönetemet fejezem ki Tasnádi Attilának és Valentinyi Ákosnak segítségükért. Beérkezett: 2003. január 14. e-mail: simonov@econ.core.hu.

optimalizálást és ellenőrizve az egyenlet két oldalának egyenlőségét, a határozatlan együttható —s vele együtt az optimális megoldás— kiszámítható.

Másodiknak egy *közvetlen módszert* mutatok be: felismerve, hogy az optimális szabályozás az állapotváltozó lineáris függvénye, az optimális visszacsatolási együttható közvetlenül meghatározható a célfüggvényből. Figyelemre méltó, hogy ez a módszer az ún. Howard-módszer első lépése.

Harmadiknak az *értékfüggvény iterációját* említjük, ahol az értékfüggvényt fokozatosan közelítjük meg. E módszer konvergenciája esetünkben jól szemléltethető.

A három módszer összehasonlítása kétségeket ébreszt: hasznos-e a találgatásos módszer. Inkább arra következtethetünk, hogy e módszer csak az értékfüggvény-iteráció gyakorló terepe.

A cikk szerkezete a következő: a 2. pont a dinamikus programozás alapfeladatát vázolja. A 3. pontban bemutatjuk az LH-feladatot. A 4. pont a találgatásos, az 5. pont a közvetlen és a 6. pont az értékfüggvény-iteráció módszerét szemlélteti. A 7. pont a speciális eseteket mutatja be és a 8. pont a következtetéseket tartalmazza.

2 A dinamikus programozásról

Röviden felidézzük a végtelen időhorizontú, stacionárius és diszkontált célfüggvényű dinamikus programozás alapfeladatát (vö. Simonovits, 1998, 7–8. fejezet).

Legyen $t = 0, 1, \ldots,$ diszkrét időváltozó, x_t állapot- és u_t szabályozási változó. Legyen $f(x,u)$ egy folytonos kétváltozós skalárértékű függvény, az *alapfüggvény*, amely azt mutatja meg, hogy egy időszakban az x állapot és az u szabályozás mennyit ér. Legyen $g(x,u)$ egy folytonos kétváltozós skalárértékű függvény, a *transzferfüggvény*, amely azt mutatja meg, hogy az x állapot és az u szabályozás milyen új állapothoz vezet.

A dinamikus programozási feladat célfüggvénye

$$(2.1) \qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t) \to \max, \qquad 0 < \beta < 1,$$

ahol β a *leszámítolási együttható*. A feladat a (2.1) célfüggvény maximalizálása (vagy minimalizálása) a következő feltételek mellett:

$$(2.2) \qquad x_{t+1} = g(x_t, u_t), \qquad t = 0, 1, \ldots,, \qquad x_0 \text{ adott.}$$

A dinamikus programozás alapötlete az *értékfüggvény bevezetése*:

$$(2.3) \qquad V(x) = \max_{u_0,\ldots,u_t,\ldots} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} f(x_t, u_t) | \qquad (2.2), \qquad x_0 = x \right\}.$$

Gondoljuk azt, hogy a $t = 0$ időszakban $x_0 = x$-ből $u_0 = u$ szabályozással eljutottunk $x_1 = x^*$-ba. Ekkor (2.1) alapján $V(x)$ a következő két rész összegének a maximuma: $f(x,u)$ és $\beta V(x^*)$. Innen adódik az

1. Tétel (Bellman, 1957). *Standard feltételek mellett létezik az időben változatlan $u = h(x)$ optimális válaszfüggvény, közte és $V(x)$ értékfüggvény között a következő kapcsolat teljesül:*

$$V(x) = \max_u \{ f(x, u) + \beta V(x^*) | \quad x^* = g(x, u) \}. \tag{2.4}$$

A (2.4) *függvényegyenletet* felfedezőjéről *Bellman-egyenletnek* nevezzük. Látható, hogy egy végtelen sok tagból álló összeg végtelen sok feltétel melletti optimalizálása helyett csupán a Bellmann-egyenlet jobb oldalán álló kéttagú összeget egy feltétel mellett kell maximalizálni; igaz, hogy az értékfüggvény (2.3) definíciójában végtelen tagú összeg és végtelen sok feltétel áll.

A dolgozat hátralévő részében a feladat különféle megoldási módszerével foglalkozunk.

3 A lineáris–homotetikus (LH) szabályozási modell

Ebben a szabályozási feladatban az állapot és a szabályozásváltozó pozitív skalár, az állapotegyenlet lineáris és az alapfüggvény az állapot- és a szabályozási változónak ugyanazon hatványfüggvényének a konvex kombinációja: $\sigma^{-1}(Fx_t^\sigma + Gu_t^\sigma)$, ahol σ, A, B, F és G skalár paraméter, a következő megszorításokkal: $\sigma < 1$ $(\sigma \neq 0)$, $A > 0$, $B > 0$, $F \geq 0$ és $G > 0$. Ekkor a dinamikus programozási feladat

$$\sigma^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (Fx_t^\sigma + Gu_t^\sigma) \to \max \tag{3.1}$$

a következő korlátok esetén:

$$x_{t+1} = Ax_t - Bu_t, \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.2}$$

ahol az $x_0 = 0$ kezdőállapot adott.

Ha $\sigma = 0$, akkor

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (F \log x_t + G \log u_t) \to \max. \tag{3.1'}$$

Ha $\sigma > 1$, akkor maximalizálás helyett minimalizáljuk (3.1)-et.

Esetünkben az értékfüggvény

$$V(x) = \max_{u_0, \ldots, u_t, \ldots} \left\{ \sigma^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (Fx_t^\sigma + Gu_t^\sigma), (3.2) \text{ mellett, } x_0 = x \right\}, \tag{3.3}$$

és a Bellman-egyenlet

$$V(x) = \max_u \{ \sigma^{-1}(Fx^\sigma + Gu^\sigma) + \beta V(Ax - Bu) \}. \tag{3.4}$$

Rátérünk a megoldási módszerek ismertetésére.

4 Találgatásos módszer

Első látásra a találgatásos módszer a legegyszerűbb. A bevezetésben említetteket némileg pontosítva, a módszer a következő: 1. megsejtjük az értékfüggvény alakját, 2. megoldjuk a (3.4) egyenlet jobb oldalán szereplő parametrikus maximalizálási feladatot, 3. egyenlővé téve a bal és a jobb oldalt, adódik az ismeretlen paraméter, s vele együtt az optimális szabályozás. Bár a módszer hatásköre nagyon korlátozott, néhány szerző (Obstfeld és Rogoff, 1996, 721–722. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34. o.) nagy teret szentel neki. Figyelemre méltó, hogy Stokey és Lucas (1989, 15. o.) csak utal a módszerre és rögtön hozzáfűzi: „Ez a példa egy gondosan kiválasztott kivétel: a legtöbb parametrikus példa esetén lehetetlen explicit zárt képletet kapni."

Rátérünk a részletekre:

1. lépés. Hatványfüggvényes alapfüggvény esetén sejthető, hogy az értékfüggvény alakja is azonos kitevőjű hatványfüggvény:

$$V(x) = \sigma^{-1}\vartheta x^\sigma \,, \tag{4.1}$$

ahol ϑ a határozatlan állandó.

2. lépés. Helyettesítsük be (3.2)-t és (4.1)-et (3.4)-be. Maximalizáljuk az

$$R(\vartheta, x, u) = \sigma^{-1}(Fx^\sigma + Gu^\sigma) + \beta\sigma^{-1}\vartheta(Ax - Bu)^\sigma$$

függvényt u szerint!

Nullává téve az $R(\vartheta, x, u)$ függvény u szerinti parciális deriváltját:

$$R'_u(\vartheta, x, u) = Gu^{\sigma-1} - \beta\vartheta(Ax - Bu)^{\sigma-1}B = 0 \,.$$

Bevezetve a $\gamma = 1/(\sigma - 1)$ jelölést, rendezéssel az egyenlet

$$G^\gamma u = (\beta B\vartheta)^\gamma (Ax - Bu)$$

lineáris egyenletre egyszerűsödik, azaz az optimum lineáris visszacsatolás:

$$u = K(\vartheta)x, \tag{4.2}$$

ahol

$$K(\vartheta) = \frac{(\beta B\vartheta)^\gamma A}{G^\gamma + (\beta B\vartheta)^\gamma B}. \tag{4.3}$$

3. lépés. Behelyettesítve (4.2)-t (3.2)-be, az új állapot $x^* = (A - BK(\vartheta))x$, szintén lineáris függvénye a régi állapotnak. Visszatérve $R(\vartheta, x, u)$-hez, az u változó kiesik:

$$\mathbf{R}(\vartheta, x) = \sigma^{-1}(F + GK(\vartheta)^\sigma)x^\sigma + \sigma^{-1}\beta\vartheta[(A - BK(\vartheta))x]^\sigma = \sigma^{-1}\mathcal{R}(\vartheta)x^\sigma \,.$$

áll. Egyenlővé téve a Bellman-egyenlet bal és a jobb oldalát, $\vartheta = \mathcal{R}(\vartheta)$ adódik, ahol

$$\mathcal{R}(\vartheta) = F + G\left[\frac{(\beta B\vartheta)^\gamma A}{G^\gamma + (\beta B\vartheta)^\gamma B}\right]^\sigma + \beta\vartheta\left[\frac{G^\gamma A}{G^\gamma + (\beta B\vartheta)^\gamma B}\right]^\sigma . \tag{4.4}$$

Megoldva a fixpont-feladatot, a gyökök egyike az optimális megoldás $\bar{\vartheta}$.

5 A közvetlen megoldás

Most megmutatom, hogy a (4.2) optimális visszacsatolás közvetlenül is meghatározható az értékfüggvény (3.1) alakjából, a Bellman-egyenlet nélkül. Ez a *közvetlen módszer* rövidebb és egyszerűbb, mint a találgatásos módszer. Sőt, ez a módszer a Howard-módszer első lépése, és az általános feladatoknál a többi lépésre is szükség van.

Az alapfüggvény homoteticitása miatt nemcsak azt tudjuk, hogy az optimális visszacsatolás időben állandó, de azt is, hogy lineáris:

$$u_t^{\circ} = Kx_t, \tag{5.1}$$

ahol K a meghatározandó együttható. Ekkor (3.2) értelmében, $x_t = (A - BK)x_{t-1} = \cdots = (A-BK)^t x_0$, sőt, $u_t = K(A-BK)^t x_0$, tehát (3.3) szerint

$$V(x) = \max_K \sigma^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (F + GK^\sigma)(A - BK)^{\sigma t} x^\sigma = \max_K \sigma^{-1} \Theta(K) x^\sigma. \tag{5.2}$$

Vegyük észre, hogy ez a lépés igazolja a (4.1) sejtést is.

(5.2)-ből közvetlenül meghatározhatjuk K optimális értékét. Valóban, a végtelen mértani sor összegképletét alkalmazva:

$$\Theta(K) = \frac{F + GK^\sigma}{1 - \beta(A - BK)^\sigma}. \tag{5.3}$$

Nullává téve $\Theta(K)$ deriváltját, és elhagyva σ-t és a nevező négyzetét:

$$\Theta'(K) \approx GK^{\sigma-1}[1 - \beta(A - BK)^\sigma] - (F + GK^\sigma)\beta(A - BK)^{\sigma-1}B = 0\,.$$

Összevonás után

$$GK^{\sigma-1} - \beta(A - BK)^{\sigma-1}(AGK^{\sigma-1} + BF) = 0\,. \tag{5.4}$$

Megoldva (5.4)-et K-ra, adódik egy vagy több érték, s egyikük az optimális visszacsatolásé: $\bar{K}$.

Azok számára, akik kételkednek a heurisztikában, megjegyezzük, hogy a Bellman-egyenletbe visszahelyettesítve belátható, hogy tényleg optimális a lineáris visszacsatolás. Ekkor (3.3) teljesül, mert kiemelve $\sigma^{-1}x^\sigma$, az egyenlet

$$\Theta = F + GK^\sigma + \beta\Theta(A - BK)^\sigma$$

egyenletre egyszerűsödik, amely ekvivalens (5.3)-mal.

6 Az értékfüggvény iterációja

Harmadszor utalunk az *értékfüggvény iterációjá*ra: Ez a fokozatos megközelítés módszerének alkalmazása, amely a matematika egyik legfontosabb tételén

– a kontrakciós leképezés tételén – alapul: az n-edik lépésben a legújabb közelítő megoldást, V_n-t helyettesítjük be (3.3) jobb oldalába. Optimalizáljuk (3.3) jobb oldalát, s megkapjuk a bal oldalon V_{n+1}-et. A függvényiterációt addig folytatjuk, ameddig a közelítés nem válik elég pontossá.

Esetünkben ez az eljárás

(6.1)
$$V_{n+1}(x) = \max_u \left[\sigma^{-1}(Fx^\sigma + Gu^\sigma) + \beta V_n(Ax - Bu)\right], \qquad n = 0,\ 1, \ldots,$$

azaz teljes indukcióval belátható, hogy $\vartheta_0 = 0$ és

$$V_n(x) = \sigma^{-1}\vartheta_n x^\sigma, \tag{6.2}$$

ahol a paramétersorozatot a 4. pont 3. lépésében bevezetett $\mathcal{R}$ függvény szerinti paraméter-rekurzió határozza meg:

$$\vartheta_{n+1} = \mathcal{R}(\vartheta_n), \qquad n = 0,\ 1, \ldots,.$$

Igazolható, hogy ϑ_n konvergál $\bar{\vartheta}$-hoz.

7 Alkalmazások

A bevezetésben említetteknek megfelelően három esetet mutatunk be.

1. eset. A lineáris–kvadratikus (LQ) szabályozási modell (Stokey és Lucas, 1989, 95–96. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000). $\sigma = 2$, mind az állapot-, mind a szabályozási változó lehet negatív vagy nulla is (nemcsak pozitív). A pozitív optimális visszacsatolási együttható (5.4) értelmében

$$\beta ABGK^2 - [\beta(A^2G - B^2F) - G]K + \beta ABF = 0 \tag{7.1*}$$

másodfokú egyenletből egyértelműen meghatározható. Stokey és Lucas bemutatja az értékfüggvények paramétereinek az iterációját.

2. eset. Az optimális fogyasztási pálya CRRA hasznossági függvény esetén (vö. Obstfeld és Rogoff, 1996, 720–721. o.). Itt $A = B$, $F = 0$ és $G = 1$. Most

$$K^{\sigma-1} - \beta[A(1-K)]^{\sigma-1}AK^{\sigma-1} = 0\,. \tag{7.1**}$$

ahonnan $\bar{K} = 1 - (\beta A^\sigma)^{1/(1-\sigma)}$.

3. eset. Az optimális felhalmozási pálya Cobb–Douglas termelési függvény teljes amortizáció és Cobb–Douglas hasznosságfüggvény esetén (Stokey és Lucas, 1989, 11–13. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34. o.). Itt (3.2)-t általánosítani kell:

$$x_{t+1} = Ax_t^\alpha - Bu_t, \qquad t = 0,\ 1, \ldots, \tag{7.2}$$

(4.2) helyére

$$u_t^\circ = Kx_t^\alpha \tag{7.3}$$

lép. Most azonban a találgatásos módszer egyszerűbb, mint a közvetlen módszer.

Végül megemlítjük, hogy a (3.2) és (7.2) összeadásából keletkező

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_t^\alpha - B u_t, \qquad t = 0,\ 1, \ldots, \tag{7.2'}$$

feladatnak nincs explicit megoldása. (Ez annak felel meg, hogy egy időszak alatt a tőke csak részben kopik el.) Ugyancsak nincs explicit megoldás, ha Cobb–Douglas függvény helyett CRRA függvényt írunk.

Megemlítjük, hogy a közvetett módszer most is működik, csak a lineáris optimum nem fogja kielégíteni a Bellman-egyenletet. Most már szükségünk lesz a Howard-módszerre vagy az értékfüggvény iterációjára.

Számpéldán szemléltetve az elmondottakat: az 1. esetben $\sigma = 2$, $A = B = 1$, $F = G = 1$ esetén a fixpont-egyenlet megoldása $\bar{\vartheta} = \sqrt{2}$, azaz $\bar{K} = \sqrt{2} - 1$. A paraméteriteráció (ϑ_n) első négy értéke a következő: 1,000; 1,333; 1,400; 1,412; 1,414.

8 Következtetések

A dinamikus programozás nehéz téma, ezért tanítása nagyon sok figyelmet igényel. Az oktatásban népszerű találgatásos módszert összehasonlítva a közvetlen módszerrel, kétségeink támadnak: tényleg a találgatásos módszer a dinamikus programozás erejének legjobb szemléltetése. Helyesebb e módszert a tényleg hatékony Howard-módszer vagy az értékfüggvény-iterálás gyakorló terepének tekinteni.

Irodalom

1. Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. (2000): *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.
2. Obstfeld, M. and Rogoff, K. (1996) *Foundations of International Macroeconomics*, Cambridge MA, MIT Press.
3. Simonovits, A. (1998): *Matematikai módszerek a közgazdasági dinamikában*, Budapest, KJK.
4. Stokey, N. and Lucas, R. (1989): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge MA, Harvard University Press (with a contribution: Prescott, E.).

ILLUSTRATION OF SOLUTION METHODS IN DYNAMIC PROGRAMMING

In this note, I present an abstract model, to be called the scalar linear–homothetic (LH) control problem, where the state equation is linear and the reward function is a linear combination of the same power function of the state and of control variables. This model encompasses two popular economic models and a third one can also be similarly treated. In the LH model, three standard methods (guessing, direct and value-function iteration) of dynamic programming can be ideally illustrated.