SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság

ISSN 0039-8128

TARTALOM

ELŐSZÓ

Tisztelt Olvasó!

A SZIGMA következő két tematikus száma pénzügy elmélettel és gyakorlattal foglalkozó dolgozatokat közöl. Ebben, a témához mérten rövid bevezetőben felvázolom a pénzügy elmélet fejlődését, jelenlegi helyzetét, amellyel talán sikerül érzékeltetnem, hogy a közlésre kerülő dolgozatok ennek a rendkívül összetett területnek mely részeihez kapcsolódnak. Nem törekedhettem teljességre, csupán az elmúlt néhány évtized fontosabb vonulatainak vázlatos bemutatása lehetett a célom.

A pénzügy elmélet története érdekes példája az absztrakt elmélet és a gyakorlati alkalmazások közötti kölcsönhatásnak. Számos eredeti elgondolása olyan elméleti absztrakcióként indult, amelyről kezdetben azt gondolták, hogy legfeljebb korlátozott gyakorlati haszna lehet. Bizonyos feltételezésekkel és megszorításokkal kiegészítve azonban ugyanezek az elméletek hamarosan általánosan alkalmazottakká váltak: a fontos pénzügyi piacokon a piacok működésének és a pénzügyi döntések elemzésének standard kereteként funkcionáltak. A fejlődés további lépéseként értékelhető, hogy az a pénzügy elmélet, amely korábban egymással laza vagy szorosabb kapcsolatban álló elméletek csoportjának volt csupán tekinthető, ma már egységesíthető, általános keretbe foglalható. Ez a fejlődés viszonylag rövid időszak alatt következett be. A kiindulásnak tekinthető elképzelések kidolgozása az 1950-es, 1960-as években kezdődött, míg a csúcspont az általános elméleti struktúrák 1980-as, 1990-es években történt publikálása.

A pénzügy elmélet jelenlegi állapotának megértéséhez vissza kell nyúlnunk Arrow (1963) és Debreu (1953) alapvető munkáihoz. Hozzájárulásuk a pénzügy elmélethez azért alapvető jelentőségű, mert azt mutatták meg, hogyan lehet beépíteni a bizonytalanságot a közgazdasági modellekbe. Az ötlet, mint általában a nagy ötletek rendkívül egyszerű. A hagyományos modellt kibővítették a gazdasági, természeti környezet lehetséges jövőbeli állapotaival. A piac rendszere ezzel teljessé vált olyan értelemben, hogy minden árucikk számára léteztek véletlen eseményektől függő piacok. A verseny egyensúly és a Pareto-optimum létezésének standard elméletei újrainterpretálhatókká váltak, így tehát lehetőség nyílt források bizonytalan feltételek melletti hatékony allokációjára.

Az 1950-es években még két fontos elméleti eredmény születetett. Az 1958-ban publikált Modigliani-Miller tanulmány legfőbb újdonsága a pénzügyi arbitrázs fogalmának bevezetése. A következő évtizedekben az arbitrázs fogalma jelentős szerepet játszott a rendkívül komplex eszköz árazási problémák megértésében.

A másik nagyon jelentős eredmény Markowitz 1959-ben publikált monográfiájában látott napvilágot az átlag-variancia portfólió kiválasztásról. Az alapötlet az, hogy mivel a befektető a portfólió átlagos hozamában és annak változékonyságában érdekelt elsősorban, ezért a portfólió kiválasztásnak egyszerű elemzési módszerét kell megadni a portfólióbeli eszközök várható értékei és kovarianciái segítségével. Ez volt az első lépés az átlag-variancia elemzésen alapuló eszköz árazás és portfólió elemzés területén.

Az 1960-as évek szintén két jelentős eredményt hoztak a pénzügy elméletben. Az első eredmény az Arrow-Debreu elmélet részletes kiterjesztése pénzügyi piacokra. Hirshleifer (1965) mutatta meg, hogyan alkalmazható az Arrow-Debreu elmélet alapvető pénzügyi problémák megoldására. Különösen említésre méltó, hogy bebizonyította a Modigliani-Miller pénzügyi irrelevancia tételt Arrow-Debreu elméleti háttér mellett. Ez volt az első eset, amikor az Arrow-Debreu elméletet összekapcsolták az arbitrázs elmélettel. Az 1960-as évek másik fejlődési iránya a Markowitz-féle átlag-variancia analízis kiterjesztése verseny gazdaságra. Sharpe (1964), Lintner (1965) és Mossin (1966) figyelte meg, hogy a piac szabaddá tétele esetén a befektetők olyan portfóliót választanak, amely egy kockázatmentes eszköz és a piaci portfólió lineáris kombinációja. Ennek a megfigyelésnek közvetlen következménye, hogy az egyensúlyi eszköz árak a kötvény ár és a piaci portfólió piaci értékének lineáris kombinációjaként írhatók fel. Ez a modell a tőkeeszköz értékelés egyensúlyi modelljeként (CAPM) vált ismertté.

Az 1970-es években számos jelentős eredmény látott napvilágot a pénzügy elméletben. Az első a CAPM kutatási programjának folytatása volt, kiterjesztve a modellt többperiódusos gazdaságra (Merton, 1973), a kölcsönfelvétel korlátozása (Black, 1972), valamint tranzakciós költségek beépítése esetére (Milne és Smith 1980). Az elmélet fejlődése mellett különféle területeket érintő empirikus tanulmányok sorát publikálták ezekben az években. A CAPM mint empirikus modell jelentős hatást gyakorolt a befektetők és az alapkezelők portfólió kezelési gyakorlatára és értékelte teljesítményüket.

A második jelentős fejlődési irányt a CAPM empirikus próbáival kapcsolatos elégedetlenség indukálta. A CAPM első tesztjei azt mutatták, hogy az elmélet jól illeszkedik az adatokhoz, későbbi részletesebb elemzések azonban a CAPM előrejelzési képességének gyengeségeire mutattak rá. Ross (1976) kidolgozta az arbitrázs árazás elméletét (APT), amelyet a CAPM általános versenytársának szánt. Megmutatta, hogy az eszköz árak néhány alapvető tényező lineáris függvényeként állíthatók elő. Ez a modell potenciálisan rugalmasabbnak és robusztusabbnak tűnt a CAPM-nél, és a következő évtizedben jelentős szerepet játszott az eszköz árazás elméletében. A harmadik fejlődési szakasz drámai hatást gyakorolt az elméletre és a tőkepiaci döntések gyakorlatára. Black és Scholes (1973) és Merton (1973) egy viszonylag egyszerű formulát találtak a részvény vételi opcióra. Ez az eredmény a modell számos változatának gyors kidolgozásához vezetett. Mivel a modell származtatásához felhasznált eszközök meglehetősen bonyolultak (a részvény hozamok diffúzió folyamatot követnek, a sztochasztikus kalkulus eredményeit, a hőátadás egyenletének megoldását kell felhasználni a formula származtatására), eleinte misztikum övezte a származtatott eszközök árazását. Cox és szerzőtársai (1979) azonban megmutatták, hogy a Black-Scholes logika és ezzel az ár meghatározása jelentősen egyszerűsíthető. A részvény árára elemi binomiális sztochasztikus folyamat feltételezésével könnyen alkalmazható az arbitrázs elmélet binomiális opció árazási formula meghatározására. Emellett azt is megmutatták, hogy alkalmas korlátok mellett a Black-Scholes formula is levezethető a fenti módszer segítségével. Egy másik érdekes fejlemény ebből az időszakból a Black-Scholes formula levezetése diszkrét idejű nem teljes piaci egyensúlyi modellből (Rubinstein, 1976). Ez volt az első reprezentatív fogyasztói modell, amelyben ugyan korlátozott formában, de szerepelt a martingál árazás (kockázat semleges árazás) módszere. A martingál árazás ötletét részletesen Harrison és Kreps (1979) használta fel először. Megmutatták, hogy a martingál binomiális logika általánosítható egy absztraktabb környezetben folytonos vagy diszkrét eszköz ár folyamatok segítségével. Ez az absztrakt megközelítés jelentős hatást gyakorolt a pénzügy elméletre a következő évtizedben, tisztázva azt a zavaros helyzetet, amely a hatékony piaci hipotézisből (EMH) eredt. A hatékony piaci hipotézis fogalmát Fama (1970) vezette be, támaszkodva Samuelson (1965) és más szerzők munkáira. A hatékony piaci hipotézis szerint a szabad belépésű pénzügyi piacokon nem érhető el abnormális hozam nyilvánosan elérhető információ felhasználásával. Ez az egyszerű hipotézis rendkívüli hatással volt az empirikus kutatásokra, és főként arra, ahogyan a pénzügyi piacok résztvevői a szerepüket és a teljesítményüket értékelték. Ennek az elméletnek a kezdetekben az volt a legfőbb problémája, hogy nem volt kapcsolata az eszköz árazási modellekkel. Az 1980-as években azonban a martingál árazás elméleti alapjainak felhasználásával sikerült ezt a hátrányt kiküszöbölni.

Két további jelentős fejlemény közül az első a teljes és nem teljes eszköz piacok elméletének kidolgozása és ezek elemzése, több árucikk, illetve véges és nem véges időhorizontok esetére (Radner, 1972, Hart, 1974). Sajnálatos módon ezekre az eredményekre, illetve a tranzakciós költségeknek a bevezetésére legalább két évtizedig nem hivatkoztak a szakirodalomban. A másik fontos újítás az aszimmetrikus információ több területen történő bevezetése volt. Gossman (1976) olyan részvénypiacot elemzett, ahol a befektetők aszimmetrikus információval rendelkeznek, és azt állította, hogy a részvényárak teljesen vagy részben tükrözik a magán jellegű információt. Ezt a feltételezést számosan vizsgálták igen részletesen (Brunnermeier, 2001). Az aszimmetrikus információ elgondolását a vállalati pénzügy elmélet azon problémájának a vizsgálatára vezették be, amikor eltérés van a részvényesek és a vállalati vezetők információja között. Az ehhez kapcsolódó kutatások vizsgálták a Modigliani-Miller tétel robusztusságát abban az esetben, amikor a pénzügyi struktúra egy jel vagy ösztönző mechanizmus szerepét tölti be (Huang és Litzenberger, 1988, De Matos, 2002).

Az 1980-as évek közepétől kezdett kialakulni a magatartási pénzügy (behavioural finance, Thaler és De Bondt), amely paradigmának a lényege, hogy elejti a hagyományos elmélet feltételezését, amely szerint hatékony piacokon racionális befektetők a várható hasznosság maximalizálására törekednek. Olyan modelleket alkalmaz, amelyekben a döntéshozók nem teljesen racionálisak vagy a preferenciáik, vagy téves vélekedéseik miatt. Két építő eleme a kognitív pszichológia (hogyan gondolkodik az ember) és az arbitrázs korlátok meghatározása, vagyis annak előrejelzése, hogy milyen körülmények között hatásosak, illetve hatástalanok az arbitrázs erőfeszítések.

Az 1980-as évekre az addig kialakult elméletek egységesítése és kiterjesztése a jellemző. A különféle elképzeléseket az általános Arrow-Debreu keretbe foglalták, és megmutatták, hogy mennyire rugalmasak ezek a módszerek a származékos termékek piaca gyors expanziójának megértésében. A derivatív termék különleges példája a portfólió biztosítás. Ez, a lényegét tekintve, az opció fedezeti elvek portfólió menedzsmentben történő alkalmazása.

Az elmélet területén a martingál központi szerepet játszó eszközzé vált az eszköz árazás jellemzésében. A sztochasztikus integrál alkalmazásával a Black-Scholes és a Merton modellt jelentős mértékben általánosították (Harrison és Pliska, 1981, Duffie és Huang, 1985). Ezeknek a modelleknek speciális változatait dolgozták ki a sztochasztikus kamatlábaknak az eszköz árazásra gyakorolt hatásainak vizsgálatára (Cox és társai 1985). Ezek a modellek kiindulásul szolgáltak a kötvényekhez kapcsolódó fedezeti műveletek vagy a kötvényekre értelmezett derivatív értékpapírok irányába történő kiterjesztésre. Ilyen például az arbitrázs árazás általános modelljének alkalmazása kötvényekre (Heath és társai, 1992).

Egy másik fejlődési irány a Ross-féle APT kérdéses területeinek tisztázása volt. Két alternatív megközelítés érdemel említést: az első egy approximációs (Chamberlain, 1983, Huberman, 1983), a második pedig általános egyensúlyi megfontolásokat felhasználó érvelés (Connor, 1984, Kelsey és Milne, 1995). Az árazási tényezők APT felfogása annyira áthatotta az eszköz árazási modelleket, hogy nagyon sok modell lényegében statikus vagy dinamikus faktor árazási modellnek tekinthető. A diffúzió folyamatokon alapuló dinamikus eszköz árazási modelleket az általánosabb dinamikus faktor modellek speciális eseteinek tekinthetjük.

A kockáztatott érték (VaR) és különböző általánosításainak és finomításainak az 1990-es évek elején történt megjelenése óta a regulációval foglalkozó kutatók, valamint banki és biztosítási szakemberek felépítettek egy globális pénzügyi biztosítási rendszervédelmet. Az általános kockázati biztonság növelése irányában tett lépések kétségtelenül nagyon jelentősek voltak, mégis folyamatosan merültek fel kérdések a biztonsággal összefüggésben.

A pénzügyi modellek jelentős része tartalmaz ún. normalitási feltételezéseket, vagyis felteszik, hogy bizonyos változók normális eloszlást követnek. Empirikus vizsgálatok alapján a normális eloszlástól való eltérés, illetve a vastag eloszlásszélek vizsgálata a kutatások középpontjába került. Az utóbbi például az integrált kockázat menedzsment (IRM) standard eszközének, a szélsőséges értékek elméletének (EVT) kialakulásához vezetett. A megfigyelt adatokon alapuló piaci hozamok korrelálatlansági tendenciát mutatnak, de összefüggőek, a hozam eloszlások vastag szélűek, szélsőséges értékek lépnek fel klaszterekben, továbbá a volatilitás véletlenszerű. A fenti kérdések tisztázásának igénye keltette fel az érdeklődést a kopulák alkalmazása iránt (Nelsen, 1999, Marshall, 1999).

A pénzügy elmélet egységesedésével párhuzamosan haladt a modern makro-ökonómia egységes elméletté válása. A makro-ökonómia és a pénzügy elmélet ugyanarra az Arrow-Debreu modellre épített. Rendkívül meglepő, hogy ugyanazok a Modigliani-Miller típusú eredmények jelennek meg az állami pénzügyek és a nyílt piaci műveletek elemzése során (a Ricardo-féle ekvivalencia tételek köntösében). Az erre utaló növekvő mennyiségű irodalom szerint ez a két diszciplina olyan mértékben integrálódott, hogy a közöttük addig fennálló határok teljesen elmosódtak. Érdekes módon, azok a fogalmak és ötletek amelyekről az 1950-es és 1960-as években még azt gondolták a szakemberek, hogy egyáltalán nem, vagy csak korlátozott módon alkalmazhatók, mára a pénzügyi piacok általánosan használt nyelvének részeivé váltak.

Magyarországon ismert okokból csak több évtizedes késéssel indult meg a pénzügy elmélet kutatása, az eredmények gyakorlati alkalmazása. Ma már több generáció dolgozik együtt, eredményes munkájukat tudományos műhelyek kialakulása, számos e területen megszerzett tudományos fokozat, nemzetközi konferencia részvétel, szakkönyvek és publikációk sora jelzi. A SZIGMA matematikai-közgazdasági folyóirat szerkesztőbizottsága felismerve ezt a helyzetet, lehetőséget biztosított néhány tematikus szám megjelenésére pénzügy elmélet, gyakorlat, illetve a szorosan kapcsolódó biztosítás elmélet és gyakorlat témakörében. A számok szerzői nevében szeretném megköszönni ezt a lehetőséget. Nem feledkezhetem meg azokról sem, akik a publikáció tervezetek lektorálásának fáradságos munkáját magukra vállalták, és akik szokásaink szerint ismeretlenek maradnak. Köszönet illeti őket lelkiismeretes, áldozatkész munkájukért.

A közreműködőknek, a kötetek szerzőinek és lektorainak további eredményes munkát kívánok.

Varga József
vendégszerkesztő

KOPULÁK ALKALMAZÁSA A PÉNZÜGYI KOCKÁZAT MENEDZSMENTBEN — MATEMATIKAI ALAPOK [1]

VARGA JÓZSEF
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Bevezetés

Az integrált kockázat menedzsment (integrated risk management, IRM) a pénzpiaci üzletek kockázatainak kvantitatív leírásával foglalkozik. Az IRM kvalitatív aspektusai rendkívül fontosak ugyan, ebben a tanulmányban azonban csak a kvantitatív jellemzőkre összpontosítunk. A kockáztatott érték (Value at risk,VaR) és ennek különböző általánosításai és finomításai a kilencvenes évek elején történt megjelenése óta a regulációval foglalkozó, valamint a banki és biztosítási szakemberek felépítettek egy óriási globális pénzügyi rendszer védelmet. Az általános kockázati biztonság növelése irányában tett lépések kétségtelenül nagyon jelentősek voltak, mégis folyamatosan merültek fel kérdések a biztonsági konstrukció minőségével kapcsolatban.

Minden kvantitatív modell azoknak a piacoknak a feltételeire alapul, amely piacokon a modellt alkalmazzák. A standard fedezeti technikák a vizsgált instrumentumok magas likviditási szintjét kívánják meg, sok pénzpiaci termék ára ,,normalitási" feltételeken alapul. Az utóbbi egy ún. eloszlás feltételezés, amely szerint bizonyos adatok normális eloszlást követnek. Különösen az IRM esetében a normális eloszlástól való eltérés a kutatások elsőrendű forrásává vált. Ezért a klasszikus irodalom bőségesen tartalmaz a véletlen bolyongás modelljétől (Brown-mozgás folyamat) való eltéréssel, illetve a vastag eloszlásszélekkel kapcsolatos tanulmányokat. Az utóbbi például az IRM standard eszközének a szélsőséges értékek elméletének (Extreme Value Theory, EVT) kialakulásához vezetett. A piaci kockázat menedzsment így jellemzi ezt a helyzetet: *a megfigyelt adatokon alapuló piaci hozamok korrelálatlansági tendenciát mutatnak, de összefüggőek, a hozam eloszlások vastag eloszlásszélekkel rendelkeznek, szélsőséges értékek lépnek fel klaszterekben és a volatilitás véletlenszerű.*

Célunk olyan eszköz bemutatása, amellyel megvizsgálhatjuk, hogy milyen tényezők játszhatnak szerepet a pénzpiaci adatok függőségi kapcsolataiban. Választ kereshetünk arra a kérdésre, hogy lehetséges-e az ún. normális függőség jobb megértése, és arra is, hogyan szerkeszthetünk olyan modelleket, amelyekkel a normális függőségtől eltérő kapcsolatokat is vizsgálhatunk. Néhány más kérdés is tisztázásra vár. Ilyen például a korrelációk viselkedése szélsőséges piaci mozgások mellett, valamint érvek és ellenérvek felsorakoztatása a lineáris korreláció mint függőségi mértékkel kapcsolatban. Az összefüggő

[1] Beérkezett: 2004. március 11. e-mail: varga@ktk.pte.hu.

kockázatok függvényei kockázat mértékeinek meghatározása ugyancsak kritikus szerepet játszik a hitel kockázat értékelésében.

Ebben a dolgozatban nem oldjuk meg a fent említett problémákat, csupán olyan eszközöket mutatunk be, amelyek a megoldások előállításában segítségünkre lehetnek.

A kopula fogalma, amellyel itt foglalkozunk, már egy bizonyos ideje ismert a statisztikai irodalomban. A kopula szó először Sklar (1959) dolgozatában fordul elő, de hasonló ötleteket és eredményeket már Hoeffding (1940) munkájában is találhatunk. A kopulák lehetővé teszik olyan modellek szerkesztését, amelyek túlmutatnak a függőségi szint mérésének standard modelljein. Ideális eszközt biztosítanak különféle portfóliók ellenőrzésére, valamint biztosítási és pénzpiaci termékek vizsgálatára szélsőséges korreláció mozgások esetében, továbbá az eddig ismerteknél általánosabb függőségi mértékként alkalmazhatók.

Az első négy szakaszban a fontosabb fogalmakat és tételeket ismertetjük. A bizonyos szempontból összetartozó fogalmak, tételek kerültek azonos szakaszba. Az ötödik szakasz a kopulák szerkesztésének fontosabb módszereivel foglalkozik, a hatodik szakaszban pedig a véletlen változók kopulából történő generálásának általános algoritmusát írjuk le. A fontosabb fogalmakat, tételeket, eljárásokat példákkal illusztráljuk. Befejezésül a kockázat menedzsment területén lehetséges alkalmazásokról szólunk.

1 Alapvető fogalmak, jelölések

Az általánosan használt megfogalmazás szerint a kopula függvény (röviden kopula) olyan n-változós eloszlásfüggvény, amelynek értelmezési tartománya a $[0,1]^n$ kocka, marginális eloszlásfüggvényei pedig egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Ez a definíció különösen akkor tűnik nagyon természetesnek, ha arra gondolunk hogyan származtatjuk a kopulát folytonos együttes eloszlásfüggvényből. Ebben az esetben ugyanis a kopula egyszerűen az eredeti többváltozós eloszlásfüggvény transzformált egyváltozós marginális eloszlásokkal. Ez a definíció azonban elfedi azoknak a problémáknak egy részét, amelyek a különböző kopulák más módszerekkel történő konstrukciójakor fellépnek. (Nem mondja meg például azt, hogy mit értünk többváltozós eloszlásfüggvényen). Ezért kissé elvontabb definícióval kell kezdenünk, a gyakorlatiasabb definícióra azonban később még visszatérünk.

Nelsen (1999) tárgyalásmódját követve először az általános többváltozós eloszlásokra összpontosítunk, és csak ezután vizsgáljuk a kopula részhalmaz speciális tulajdonságait.

A dolgozatban $\operatorname{dom} H$ a H függvény értelmezési tartományát, $\operatorname{Ran} H$ pedig az értékkészletét jelöli. Egy $S \subset \Re^n$ halmazon érvényes állításról akkor mondjuk, hogy majdnem mindenütt teljesül, ha azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben az állítás nem érvényes, Lebesgue szerint nullmértékű halmaz.

1.1 definíció. *Jelölje $S_1, \ldots, S_n$ az $\overline{\Re}$ nem-üres részhalmazait, ahol $\overline{\Re}$ a* *valós számegyenes* $[-\infty, \infty]$ *kiterjesztése. Legyen továbbá* H *olyan* n*-változós valós függvény, amelyre* $\operatorname{dom} H = S_1 \times \ldots \times S_n$*, és bármely* $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$ $(a_k \le b_k$ *minden* k*-ra) esetében legyen*

$$B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

olyan n*-dimenziós tégla, amelynek csúcspontjai* $\operatorname{dom} H$*-ban vannak. Ekkor* B H*-térfogata a következő:*

$$V_H(B) = \sum \operatorname{sgn}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}) \ , \tag{1}$$

ahol az összegzést B *minden* $\mathbf{c}$ *csúcspontjára ki kell terjeszteni, és*

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } c_k = a_k \text{ páros számú } k \text{ indexre,} \\ -1 & \text{ha } c_k = a_k \text{ páratlan számú } k \text{ indexre.} \end{cases} \tag{2}$$

Ekvivalens megfogalmazásban a $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ n-dimenziós tégla H-térfogata a H n-ed rendű differenciája a B téglán:

$$V_H(B) = \Delta_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \ldots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}) \ , \tag{3}$$

ahol az n számú elsőrendű differencia

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \ldots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) - H(t_1, \ldots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) \ . \tag{4}$$

1.2 definíció. *Az* n*-változós* H *valós függvény* n*-növekvő, ha* $V_H(B) \ge 0$ *minden olyan* n*-dimenziós* B *tégla esetében, amelynek csúcspontjai* $\operatorname{dom} H$*-ban fekszenek.*

Tegyük fel, hogy az n-változós H valós függvény értelmezési tartománya $\operatorname{dom} H = S_1 \times \ldots \times S_n$, ahol van S_k-nak legkisebb eleme, amelyet a_k jelöl. Azt mondjuk, hogy H *megalapozott*, ha $H(\mathbf{t}) = 0$ minden $\mathbf{t} \in \operatorname{dom} H$ pontban úgy, hogy $t_k = a_k$ legalább egy k-val teljesül. Ha mindegyik S_k nem üres halmaz és legnagyobb eleme b_k, akkor vannak a H függvénynek marginális függvényei, és az egydimenziós H_k marginális függvény értelmezési tartománya S_k, továbbá minden $x \in S_k$ pontban

$$H_k(x) = H(b_1, \ldots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \ldots, b_n) \ .$$

A magasabb dimenziójú marginális függvények definíciója a fentiek alapján nyilvánvaló.

1.1 lemma. *Jelölje* $S_1, \ldots, S_n$ *az* $\overline{\Re}$ *nem-üres részhalmazait és legyen* H *megalapozott,* n*-növekvő függvény* $S_1 \times \ldots \times S_n$ *értelmezési tartománnyal. Ekkor* H *minden változójának nem-csökkenő függvénye, vagyis, ha* $x \le y$*, és* $(t_1, \ldots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ *és* $(t_1, \ldots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ *elemei a* H *értelmezési tartományának akkor*

$$H(t_1, \ldots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \ldots, t_n) \le H(t_1, \ldots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \ldots, t_n) \ .$$

1.2 lemma. *Legyenek $S_1, \ldots, S_n$ az $\overline{\Re}$ nem-üres részhalmazai, jelöljön H megalapozott, n-növekvő, marginális függvényekkel rendelkező függvényt $S_1 \times \ldots \times S_n$ értelmezési tartománnyal. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_1 \times \ldots \times S_n$ pontokban*

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^{n} |H_k(x_k) - H_k(y_k)| \, . \tag{5}$$

1.3 definíció. *n-dimenziós eloszlásfüggvénynek nevezzük azt a H függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\overline{\Re}^n$, megalapozott, n-növekvő és*

$$H(\infty, \ldots, \infty) = 1 \, .$$

Az 1.1 lemmából következően az n-dimenziós eloszlásfüggvény marginális függvényei szintén eloszlásfüggvények, amelyeket $F_1, \ldots, F_n$ jelöl.

1.4 definíció. *Az n-dimenziós kopula olyan C függvény, amelynek értelmezési tartománya $[0,1]^n$, továbbá*

(a) *C megalapozott és n-növekvő,*

(b) *Vannak C_k, $k = 1, \ldots, n$ marginális függvényei, amelyek minden $u \in [0,1]$ pontban kielégítik a $C_k(u) = u$ feltételt.*

Vegyük észre, hogy az $n \geq 3$ esetben tetszőleges C n-kopula mindegyik k-dimenziós marginális függvénye k-kopula.

Ekvivalens megfogalmazásban az n-kopula egy olyan $C : [0,1]^n \to [0,1]$ függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Minden $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ pontban $C(\mathbf{u}) = 0$, ha $\mathbf{u}$ legalább egyik koordinátája 0, és $C(\mathbf{u}) = u_k$, ha u_k kivételével $\mathbf{u}$ mindegyik koordinátája 1.
2. Minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$ pont esetében, ha $a_i \leq b_i$ minden i-re, akkor $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

Mivel a kopula függvény a $[0,1]^n$ tartományon értelmezett együttes eloszlásfüggvény, ezért valószínűségi mértéket határoz meg a

$$V_C([0, u_1] \times \ldots \times [0, u_n]) = C(u_1, \ldots, u_n) \tag{6}$$

szerint. A mértékelmélet ismert eredménye szerint van a $[0,1]^n$ Borel-részhalmazain olyan egyértelmű valószínűségi mérték, amely egybeesik a $[0,1]^n$ n-dimenziós tégláin értelmezett V_C mértékkel. Ezt a valószínűségi mértéket is V_C jelöli.

Az 1.4 definícióból adódik, hogy a C kopula a $[0,1]^n$ tartományon értelmezett eloszlásfüggvény a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású marginális függvényekkel. A következő tétel az 1.2 lemmából következik.

1.1 tétel. *Legyen C n-dimenziós kopula. Ekkor minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^n$ pontban*

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_k - u_k| \, . \tag{7}$$

A kopula tehát egyenletesen folytonos a $[0,1]^n$ tartományon.

2 Sklar tétele

A következő tétel, amely Sklar-tételként ismert, talán a legfontosabb eredmény a kopulákkal kapcsolatban, amelyet lényegében minden kopula alkalmazásban felhasználnak.

2.1 tétel. *Jelöljön H n-dimenziós eloszlásfüggvényt, $F_1, \ldots, F_n$ pedig legyenek a marginális eloszlásfüggvények. Ekkor létezik olyan C n-kopula, hogy minden $x \in \Re^n$ esetében*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C\big(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\big) . \tag{8}$$

Ha F_1, ..., F_n mindegyike folytonos, akkor C egyértelműen meghatározott, másképpen egyértelműen meghatározott a $\operatorname{Ran} F_1 \times \ldots \times \operatorname{Ran} F_n$ *halmazon. Megfordítva, ha C n-kopula és F_1, ..., F_n eloszlásfüggvények, akkor a fent értelmezett H függvény n-dimenziós eloszlásfüggvény F_1, ..., F_n marginális eloszlásfüggvényekkel.*

A tétel bizonyítása megtalálható Sklar (1996) dolgozatában. A Sklar-tétel azt mutatja meg, hogy folytonos többváltozós eloszlásfüggvények esetében az egyváltozós marginális eloszlásfüggvények és a többváltozós függőségi struktúra szétválasztható, továbbá a függőségi struktúra kopulával reprezentálható.

Jelöljön F egyváltozós eloszlásfüggvényt. Az F függvény általánosított inverzét az $F^{-1}(t) = \inf\{\, x \in \Re \mid F(x) \geq t \,\}$ minden $t \in [0, 1]$ definiálja, ahol megállapodás szerint $\inf \emptyset = +\infty$.

2.1 következmény. *Legyen H n-dimenziós eloszlásfüggvény F_1, ..., F_n folytonos marginális eloszlásfüggvényekkel és a (8) feltételt kielégítő C kopulával. Ekkor minden $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$-re*

$$C(u_1, \ldots, u_n) = H\big(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)\big) . \tag{9}$$

A folytonossági kikötés nem teljesülése elővigyázatosságot követel (ld. Nelsen (1999) vagy Marshall (1996)).

2.1 példa. Jelölje Φ az egyváltozós standard normális eloszlásfüggvényt és Φ_{R}^n az n-változós standard normális eloszlásfüggvényt $\mathbf{R}$ lineáris korrelációs mátrixszal. Ekkor

$$C(u_1, \ldots, u_n) = \Phi_{\mathrm{R}}^n\big(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_n)\big) \tag{10}$$

a *Gauss-típusú*, vagy másképpen, *normális n-kopula.*

3 Fréchet-Hoeffding korlátok

Tekintsük a halmazon az alábbiak szerint értelmezett M^n, Π^n és W^n függvényeket

$$M^n = \min(u_1, \ldots, u_n) ,$$

$$\Pi^n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n ,$$

$$W^n = \max(u_1 + \ldots + u_n - n + 1, 0)\ .$$

Az M^n és Π^n függvények kopulák minden $n \geq 2$ számú változóra, míg W^n nem kopula az $n \geq 3$ esetben, amint azt a következő példa mutatja.

3.1 példa. Tekintsük az $[1/2, 1]^n \subseteq [0, 1]^n$ n-dimenziós kockát.

$$\begin{aligned} V_{W^n}\left([1/2,1]^n\right) &= \max(1 + \ldots + 1 - n + 1, 0) - \\ &\quad - n \max(1/2 + 1 + \ldots + 1 - n + 1, 0) + \\ &\quad + \binom{n}{2} \max(1/2 + 1/2 + 1 + \ldots + 1 - n + 1, 0) - \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n \max(1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 - n + 1, 0) \\ &= 1 - n/2 + 0 + \ldots + 0 < 0\ . \end{aligned}$$

Tehát W^n nem kopula, ha $n \geq 3$.

A következő tételt Frechét-Hoeffding egyenlőtlenségnek nevezik (Frechét (1957)).

3.1 tétel. *Ha C tetszőleges kopula, akkor minden $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ pontban*

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u})\ . \tag{11}$$

A geometriai interpretáció és a részletesebb elemzés megtalálható Mikusinski, Sherwood, Taylor (1992) dolgozatában. A W^n Frechét-Hoeffding-féle alsó korlát nem kopula ugyan az $n \geq 3$ esetben, a következő értelemben mégis a lehetséges legjobb alsó korlát.

3.2 tétel. *Tetszőleges $n \geq 3$ dimenzió és $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ esetében van olyan C n-kopula, amelyre*

$$C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u})\ . \tag{12}$$

A bizonyítás megtalálható Nelsen (1999) könyvének 42. oldalán.

Jelölje C n számú valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényét, és legyen $\overline{C}$ az együttes továbbélési függvény, vagyis, ha $(U_1, \ldots, U_n)^T$ eloszlásfüggvénye C, akkor $\overline{C}(u_1, \ldots, u_n) = P(U_1 > u_1, \ldots, U_n > u_n)$.

3.1 definíció. *Ha C_1 és C_2 kopulák, akkor C_1 kisebb, mint C_2 (jelekben $C_1 \prec C_2$), ha*

$$C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u}) \quad \text{és} \quad \overline{C}_1(\mathbf{u}) \leq \overline{C}_2(\mathbf{u}) \tag{13}$$

minden $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ pontban.

A kétdimenziós esetben $\overline{C}_1(u_1, u_2) \leq \overline{C}_2(u_1, u_2) \Leftrightarrow 1 - u_1 - u_2 + C_1(u_1, u_2) \leq 1 - u_1 - u_2 + C_2(u_1, u_2) \Leftrightarrow C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, u_2)$.

A W^2 Fréchet-Hoeffding-féle alsó korlát kisebb bármelyik kétdimenziós kopulánál, és bármely n-kopula kisebb a Fréchet-Hoeffding-féle M^n felső korlátnál. A kopulák halmazának ezt a parciális rendezését *konkordancia rendezésnek* nevezik. Ez a rendezés parciális rendezés, mivel nem minden kopula pár összehasonlítható ebben a rendezésben. Azonban sok fontos parametrikus kopula család teljesen rendezett. A $\{C_\theta\}$ egyparaméteres kopula családot pozitívan rendezettnek nevezzük, ha $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$, hacsak $\theta_1 \leq \theta_2$ teljesül.

4 Kopulák és a valószínűségi változók eloszlása

Jelöljön $X_1, \ldots, X_n$ olyan valószínűségi változókat, amelyek folytonos eloszlásfüggvényei rendre $F_1, \ldots, F_n$, együttes eloszlásfüggvényük pedig H. Ekkor egyértelműen létezik az $(X_1, \ldots, X_n)^T$ valószínűségi vektorváltozó kopulája. Az $(X_1, \ldots, X_n)^T$ valószínűségi vektor eloszlásának standard kopula reprezentációja tehát

$$H(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) \,. \quad (14)$$

A fenti reprezentációban alkalmazott $X_i \to F_i(X_i)$ transzformációt valószínűségi integrál transzformációnak nevezik, és a szimuláció módszertanának standard eszközeként ismert.

Mivel $X_1, \ldots, X_n$ akkor és csak akkor függetlenek, ha $H(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$ minden $x_1, \ldots, x_n \in \overline{\Re}$ pontban, a 2.1 tételből a következő eredmény származik.

4.1 tétel. *Ha $(X_1, \ldots, X_n)^T$ folytonos valószínűségi változók vektora C kopulával, akkor $X_1, \ldots, X_n$ akkor és csak akkor függetlenek, ha $C = \Pi^n$.*

A kopulák egyik kedvező tulajdonsága, hogy valószínűségi változók szigorúan monoton transzformációival szemben vagy invariánsak, vagy nagyon egyszerű módon változnak. Ha az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos és α szigorúan monoton függvény $\operatorname{Ran} X$ értelmezési tartománnyal, akkor az $\alpha(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye szintén folytonos.

4.2 tétel. *Legyen $(X_1, \ldots, X_n)^T$ folytonos valószínűségi változók vektora C kopulával. Ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szigorúan monoton növekvő függvények rendre a $\operatorname{Ran} X_1$, ..., $\operatorname{Ran} X_n$ számhalmazon, akkor az $(\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n))^T$ valószínűségi vektorváltozó kopulája szintén C.*

Bizonyítás. Jelölje $F_1, \ldots, F_n$ rendre az $X_1, \ldots, X_n$, $G_1, \ldots, G_n$ pedig az $\alpha(X_1), \ldots, \alpha(X_n)$ eloszlásfüggvényeit. Legyen $(X_1, \ldots, X_n)^T$ kopulája C, az $(\alpha(X_1), \ldots, \alpha(X_n))^T$ kopulája pedig C_α. Mivel α_k minden k-ra szigorúan monoton növekvő függvény, $G_k(x) = P(X_k \leq \alpha^{-1}(x)) = F_k(\alpha_k^{-1}(x))$ bármely $x \in \overline{\Re}$ pontban teljesül, ezért

$$\begin{aligned}
C_\alpha\big(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)\big) &= P\big(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \ldots, \alpha_n(X_n) \leq x_n\big) \\
&= P\big(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \ldots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)\big) \\
&= C\big(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \ldots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))\big) \\
&= C\big(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)\big) \,.
\end{aligned}$$

$X_1, \ldots, X_n$ folytonos valószínűségi változók, $\operatorname{Ran} G_1 = \ldots = \operatorname{Ran} G_n = [0,1]$. Ezért $C_\alpha = C$ a $[0,1]^n$ tartományon mindenütt.

A 2.1. tételből ismert, hogy a C kopula függvény szétválasztja az n-dimenziós eloszlásfüggvényt egyváltozós marginális függvényeire. A következő tétel azt mutatja meg, hogy van olyan $\hat{C}$ függvény is, amely az n-dimenziós továbbélési függvényt választja szét az egyváltozós marginális továbbélési függvényekre. Megmutatható továbbá, hogy ez a $\hat{C}$ függvény kopula, és hogy ez a továbbélési kopula könnyebben kifejezhető C-vel és a k-dimenziós továbbélési függvényeivel.

4.3 tétel. *Legyen $(X_1, \ldots, X_n)^T$ folytonos valószínűségi vektor $C_{X_1,\ldots,X_n}$ kopulával, és jelöljön $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rendre a* $\operatorname{Ran} X_1, \ldots, \operatorname{Ran} X_n$ *tartományokon szigorúan monoton függvényeket. Legyen $C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}$ az $(\alpha_1(X_1), \ldots, \alpha_n(X_n))^T$ valószínűségi vektor kopulája, továbbá legyen α_k valamely k-ra szigorúan csökkenő függvény. Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy legyen $k = 1$. Ekkor*

$$C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}(u_1, \ldots, u_n) =$$
$$= C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(u_2, \ldots, u_n) - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(1 - u_1, u_2, \ldots, u_n)\,. \tag{15}$$

Bizonyítás. Jelölje $F_1, \ldots, F_n$ rendre az $X_1, \ldots, X_n$, $G_1, \ldots, G_n$ pedig az $\alpha(X_1), \ldots, \alpha(X_n)$ eloszlásfüggvényeit. Ekkor

$$\begin{aligned}
C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}&(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)) = P(\alpha_1(X_1) \le x_1, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) = \\
&= P(X_1 > \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \le x_2, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) = \\
&= P(\alpha_2(X_2) \le x_2, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) - \\
&\qquad - P(X_1 \le \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \le x_2, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) = \\
&= C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) - \\
&\qquad - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) = \\
&= C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) - \\
&\qquad - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(1 - G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n))\,,
\end{aligned}$$

ahonnan az állítás közvetlenül adódik. A két utóbbi tétel rekurzív alkalmazásával nyilvánvaló, hogy a $C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}$ kopula kifejezhető a $C_{X_1,\ldots,X_n}$ kopulával és az alacsonyabb dimenziós marginális függvényeivel. Ezt mutatja a következő példa.

4.1 példa. Tekintsük a kétváltozós esetet.

a. Legyen α_1 szigorúan csökkenő, α_2 pedig szigorúan növekvő függvény. Ekkor

$$\begin{aligned}
C_{\alpha_1(X_1),\alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1,\alpha_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) = \\
&= u_2 - C_{X_1,X_2}(1 - u_1, u_2)\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

b. Legyen most α_1 és α_2 mindegyike szigorúan csökkenő. Ekkor

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1),\alpha_2(X_2)}(u_1,u_2) = u_2 - C_{X_1,\alpha_2(X_2)}(1-u_1,u_2) = \\ u_2 - \big(1 - u_1 - C_{X_1,X_2}(1-u_1, 1-u_2)\big) \; . \end{aligned} \tag{17}$$

Itt $C_{\alpha_1(X_1),\alpha_2(X_2)}$ az $(X_1,X_2)^T$ valószínűségi vektor $\hat{C}$ továbbélési kopulája, vagyis

$$\overline{H}(x_1,x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \hat{C}\big(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)\big) \; . \tag{18}$$

n számú $U(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó együttes továbbélési függvénye

$$\overline{C}(u_1,\dots,u_n) = \hat{C}(1-u_1,\dots,1-u_n) \; , \tag{19}$$

ahol C az n számú $U(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényét és egyben kopuláját jelöli.

4.4 tétel. *A C kopula $\partial^k C(\mathbf{u})/\partial u_1 \dots \partial u_n$ k-ad rendű vegyes parciális deriváltjai majdnem minden $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ pontban léteznek. Ezekben az $\mathbf{u}$ pontokban*

$$0 \le \frac{\partial^k C}{\partial u_1 \dots \partial u_k}(\mathbf{u}) \le 1 \; .$$

(Részletesebben ld. Nelsen (1999)).

A fentieket figyelembe véve

$$C(u_1,\dots,u_n) = A_C(u_1,\dots,u_n) + S_C(u_1,\dots,u_n) \; , \tag{20}$$

ahol

$$A_C(u_1,\dots,u_n) = \int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} C(s_1,\dots,s_n)\, ds_1 \dots ds_n \; , \tag{21}$$

$$S_C(u_1,\dots,u_n) = C(u_1,\dots,u_n) - A_C(u_1,\dots,u_n) \; .$$

Az általános többváltozós eloszlásfüggvényekkel ellentétben a kopula marginális függvényei folytonosak, mivel a kopulának nincsenek olyan $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ pontjai, amelyekben $V_C(\mathbf{u}) > 0$. Ha $C = A_C$ a $[0,1]^n$ tartományon, akkor a C kopulát abszolút folytonosnak mondjuk. Ebben az esetben van a kopulának

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1,\dots,u_n)$$

sűrűségfüggvénye. Ha $C = S_C$ a $[0,1]^n$ tartományon, akkor a C kopula szinguláris, és

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} C(u_1,\dots,u_n) = 0$$

a $[0,1]^n$ majdnem minden pontjában.

5 Kopulák szerkesztése

A többváltozós normális eloszlás hosszú időn keresztül uralta a többváltozós eloszlásokkal foglalkozó tanulmányokat. A többváltozós analízis irodalma sokáig kizárólag a többváltozós normális eloszlásokkal és a vele kapcsolatos, belőle származtatható eloszlásokra (például a Student t- és a Fisher F-eloszlások kiterjesztései) összpontosított (Anderson (1958), Johnson és Wichern (1988)).

A többváltozós normális eloszlás azért vonzó, mert bármely két véletlen kimenetel (valószínűségi változó) közötti kapcsolat teljesen leírható (1) a marginális eloszlásokkal és (2) egy járulékos paraméter, a korrelációs együttható ismeretében.

A többváltozós analízissel foglalkozó újabb irodalom, mint például Krzanowski (1988) kezdte felismerni a normális eloszlás alternatívái vizsgálatának szükségességét. Ilyen igény merült fel az aktuárius tudomány területén, például az élettartam valószínűségi változókkal kapcsolatban (Bowers et al. 1977, 3. fejezet) és a hosszú szélű kár változók esetében, ahol a normális eloszlás nem megfelelő közelítése az adathalmaznak.

Kiterjedt statisztikai irodalom foglakozik a nem-normális többváltozós eloszlásokkal. (Ld. Johnson és Kotz (1972) és Johnson, Kotz és Balakrishnan (1997)). Történelmileg azonban sok többváltozós eloszlás az egyváltozós eloszlások közvetlen kiterjesztéseiként kerültek kifejlesztésre. Ilyen például a kétváltozós Pareto, a kétváltozós gamma és több más eloszlás. Az ilyen módon nyert eloszlásokat az alábbi hátrányok jellemzik: (1) különböző eloszláscsaládokkal írhatók le az egyes marginális eloszlások; (2) nem nyilvánvalóak a kettőnél több dimenziós esetekre történő kiterjesztések; (3) a kapcsolat mértékek gyakran a marginális eloszlásokban mutatkoznak meg.

A fenti hátrányokat nem mutató többváltozós eloszlás konstruáló módszerek a kopula függvény elvén alapulnak.

Annak ellenére, hogy a Sklar-tétel szerint a kopula függvény mindig létezik, a következő példa azt mutatja, hogy a kopula identifikálása nem mindig egyszerű, kényelmes feladat.

5.1 példa. *A Marshall-Olkin exponenciális sokk modell.* Tegyük fel, hogy olyan két élettartamot kívánunk modellezni, amelyekről gyanítjuk, hogy azonos végzetes eseménnyel, megrázkódtatással kapcsolatosak, ami függőséget indukálhat a két élet között. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Y_1 és Y_2 két független élettartam valószínűségi változó H_1 és H_2 eloszlásfüggvényekkel. Feltesszük továbbá, hogy létezik egy független λ paraméterű exponenciális eloszlású Z valószínűségi változó, amely a közös végzetes esemény bekövetkeztéig eltelt időtartamot reprezentálja. Mindkét élet ugyanazzal a nem kívánt eseménnyel függ össze, így az aktuális halálozási életkort az $X_1 = \min(Y_1, Z)$ és $X_2 = \min(Y_2, Z)$ változók határozzák meg. A marginális eloszlások tehát

$$P(X_k \leq x_k) = F_k(x_k) = 1 - \exp(-\lambda x_k)(1 - H_k(x_k)) \,, \quad k = 1, 2 \,, \tag{22}$$

az együttes eloszlásfüggvény pedig

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \\
&= 1 - P(X_1 > x_1) - P(X_2 > x_2) + P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= 1 - \big(1 - F_1(x_1)\big) - \big(1 - F_2(x_2)\big) + \exp\big(-\lambda \max(x_1, x_2)\big) \times \\
&\qquad \times \big(1 - H_1(x)\big)\big(1 - H_2(x)\big) \\
&= F_1(x_1) + F_2(x_1) - 1 + \exp\big(-\lambda \max(x_1, x_2)\big) \times \\
&\qquad \times \exp\big(\lambda(x_1 + x_2)\big)\big(1 - F_1(x_1)\big)\big(1 - F_2(x_2)\big) \\
&= F_1(x_1) + F_2(x_1) - 1 + \exp\big(\lambda \min(x_1, x_2)\big)\big(1 - F_1(x_1)\big)\big(1 - F_2(x_2)\big)\,.
\end{aligned}$$

Az együttes eloszlásfüggvénynek ez a kifejezése azonban nem kopula alakú, mert F nem csak az $F_1(x_1)$ és $F_2(x_2)$ függvénye.

A következő példa a kopula függvény konstrukciójának ún. egyesítési módszerét mutatja be.

5.2 példa. *A kétváltozós Pareto modell.* Tekintsük az X kár valószínűségi változót, amely a γ kockázat klasszifikáció paraméter mint feltétel mellett exponenciális eloszlással modellezhető, tehát

$$P(X \le x \mid \gamma) = 1 - e^{-\gamma x}\,.$$

Amint az a megbízhatóság, hitelképesség elméletből ismert (ld. például Klugman et al. 1997), ha a γ kockázat klasszifikáció paraméter gamma eloszlású, akkor az X változó marginális eloszlása (az összes kockázati osztály felett) Pareto típusú. Tehát, ha $\gamma \sim \text{gamma}(\alpha, \gamma)$, akkor

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \le x) = \int_C P(X \le x \mid \gamma) \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \gamma^{\alpha-1} e^{-\lambda\gamma}\, d\gamma = \\
1 - \int_C e^{-\gamma x} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \gamma^{\alpha-1} e^{-\lambda\gamma}\, d\gamma = 1 - \Big(1 - \frac{x}{\lambda}\Big)^\alpha
\end{aligned} \tag{23}$$

Pareto eloszlásfüggvény (C a kockázati osztályok összességét jelöli).

Tegyük fel, hogy γ kockázati osztály feltétel mellett X_1 és X_2 független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Az a feltevés, hogy mindkettő ugyanabból a kockázati osztályból való, függőséget indukál közöttük. Az együttes eloszlásfüggvény

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 + \Big[\big(1 - F_1(x_1)\big)^{-1/\alpha} + \big(1 - F_2(x_2)\big)^{-1/\alpha} - 1\Big]^{-\alpha}\,.$$

Ez pedig a következő kopula függvényhez vezet:

$$C(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \Big[(1 - u_1)^{-1/\alpha} + (1 - u_2)^{-1/\alpha} - 1\Big]^{-\alpha}\,.$$

Ezzel a függvénnyel pedig a kétváltozós eloszlásfüggvény

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

alakban írható. A $P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ együttes továbbélési függvény kopulája pedig

$$C^*(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) = (u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha} ,$$

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = C^*(S_1(x_1), S_2(x_2)), \quad \text{ahol} \quad S = 1 - F .$$

A többváltozós eloszlások konstruálásának többféle módszere ismert. Részletesebb áttekintést nyújtanak Hougaard (1987) továbbá Hutchinson és Lai (1990) munkái. Az 5.1 példa az ún. közös változók módszerét mutatta be, amelyben egy közös elem indukálja a különböző változók közötti függőséget. Az 5.2 példában az egyesítés módszerét alkalmaztuk, amely két okból is követendő módszer. Először azért, mert főleg az aktuárius tudományban nagy hagyományai vannak az egyesített eloszlások kockázat klasszifikációra történő alkalmazásának. Másodszor pedig azért, mert Marshall és Olkin (1988) megmutatta, hogy az eloszlás egyesítés különféle fontos kopula családok generálására alkalmas. Ugyancsak hasznos lehet az ún. arkhimedeszi kopulák néven ismert függvényosztály tanulmányozása, amely osztály az asszociativitás matematikai elméletéből ered, és amelynek speciális esete a Frank kopula (Frank, 1979), a következő összefüggéssel írható le:

$$C(u, v) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)}{e^{\alpha} - 1}\right) . \tag{24}$$

Annak ellenére, hogy a Frank kopula nem bír közvetlen valószínűségi jelentéssel, más kedvező tulajdonságai következtében nagyon megfelelő a gyakorlati alkalmazásokban. (ld. Nelsen (1986), Genest (1987)).

6 Véletlen változó generálása kopulából – az általános algoritmus

Tekintsük azt az általános esetet, amikor az n-dimenziós C kopula felhasználásával generálunk véletlen változót. Jelölje

$$C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1}) = C(u_1, \ldots, u_k, 1, \ldots, 1) , \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{25}$$

a C kopula k-dimenziós marginális függvényeit, $C_1(u_1) = u_1$ és $C_n(u_1, \ldots, u_n) = C(u_1, \ldots, u_n)$. Legyen U_1, …, U_n együttes eloszlásfüggvénye C. Akkor az U_k feltételes eloszlása adott U_1, …, U_{k-1} értékek mellett

$$\begin{aligned} C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1}) &= P(U_k \le u_k \mid U_1 = u_1, \ldots, U_{k-1} = u_{k-1}) = \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \ldots, u_k)}{\partial u_1 \ldots \partial u_{k-1}} \Big/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \ldots, u_{k-1})}{\partial u_1 \ldots \partial u_{k-1}} , \end{aligned} \tag{26}$$

feltéve, hogy a számláló, illetve a nevező létezik és a nevező nem zérus. A következő algoritmussal előállítható a C-ből származó $(u_1, \ldots, u_n)^T$ véletlen változó. Jelölje $U(0,1)$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlást.

Az algoritmus lépései a következők.

1. Szimulálunk egy u_1 véletlen változót az $U(0,1)$ eloszlásból
2. Szimulálunk egy u_2 véletlen változót $C_2(\cdot \mid u_1)$-ből

$\vdots$

n. Szimulálunk egy u_n véletlen változót $C_n(\cdot \mid u_1, \ldots, u_{n-1})$-ből.

Ez az algoritmus tulajdonképpen speciális esete az ún. standard konstrukció módszerének. Az algoritmus helyességét mutatja, hogy az $U(0,1)$ eloszlásból származó Y_1, …, Y_n valószínűségi változókra teljesül, hogy

$$\left(Y_1, C_2^{-1}(Y_2 \mid Y_1), \ldots, C_n^{-1}\big(Y_n \mid Y_1, C_2^{-1}(Y_2 \mid Y_1), \ldots\big)\right)^T \tag{27}$$

együttes eloszlásfüggvénye C. Általánosan fogalmazva az u_k érték szimulálása a $C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ kopulából azt jelenti, hogy szimulálunk egy olyan, $U(0,1)$ eloszlásból származó q értéket, amelyből $u_k = C_k^{-1}(q \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ a $q = C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ egyenlet megoldásával nyerhető numerikus gyökkeresés módszerével. Ha $C_k^{-1}(q \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ megadható zárt alakban (és ezért nincs szükség numerikus gyökkeresésre), akkor ezt az algoritmust célszerű alkalmazni.

7 További alkalmazási lehetőségek

A fenti vagy más speciális algoritmussal generált véletlen minta alkalmazható a kockázati tényező hozamok Monte Carlo szcenárióinak előállítására. Ezek a kockázati tényezők befolyásolják a hitel, illetve a piaci portfólió értékét. Az általánosan alkalmazott modellek többsége feltételezi ezeknek a kockázati tényező hozamoknak (vagy logaritmikus hozamoknak) az együttes normális eloszlását. Ez a hipotézis azzal járhat, hogy alábecsülik olyan szélsőséges események bekövetkezési valószínűségét, mint a részvény árfolyamok együttes zuhanása, vagy az együttes nem teljesítés a hitel portfóliókban. Ugyancsak felhasználható a kopula függvény a kockáztatott értékek meghatározására összefüggő kockázatok függvényei esetében.

A biztosítási kockázat és a piaci kockázat elemzésben is hasznos eszköz a kopula. Tekintsük például azt a portfóliót, amely az X_1, …, X_n kockázatos eszközöket tartalmazza, és egy biztosító társaság potenciális veszteségeit képviseli a különböző üzletágakban. Tegyük fel, hogy a biztosító társaság a portfólió kockázat csökkentése érdekében védelmet keres a szimultán nagy veszteségekkel szemben. Alkalmas viszontbiztosítási szerződés lehet az, amelyben megfizetik az $X_i - k_i$, $i \in K = \{1, \ldots, n\}$ többlet veszteséget, ahol K az üzletágak meghatározott halmaza, és feltesszük, hogy minden $i \in K$ esetében $X_i > k_i$. Ezért az f kifizető függvény

$$f((X_i, k_i); i \in K) = \left(\prod_{i \in K} 1_{\{X_i > k_i\}}\right)\left(\sum_{i \in K}(X_i - k_i)\right). \tag{28}$$

Ennek a szerződésnek az árazásához a viszontbiztosítónak szüksége van az $E(f((X_i, k_i); i \in K))$ becslésére. Az általánosságot nem sértve feltehetjük, hogy $K = \{1, \ldots, l\}$, $l \leq n$. Ha az X_1, …, X_n Hegyüttes eloszlása pontosan becsülhető, akkor az f várható értékének kiszámítása (numerikus módszerek alkalmazásával) nem túlságosan nehéz feladat. Sajnálatos módon azonban a H pontos becslésére csak ritkán van alkalom, elsősorban a megfelelő adatok hiánya miatt. A valóságban inkább csak a H F_1, …, F_n marginális eloszlásainak és a páronkénti rangkorrelációknak a becsléséhez szükséges adatok állnak rendelkezésünkre. A kifizetés valószínűségét a

$$\overline{H}(k_1, \ldots, k_l) = \hat{C}(\overline{F}_1(k_1), \ldots, \overline{F}_l(k_l)) \tag{29}$$

összefüggés adja meg, ahol $\overline{H}$ és $\hat{C}$ az $X_1, \ldots, X_l$ együttes továbbélési függvényét, illetve továbbélési kopuláját jelöli. Ha a küszöbértékeknek az X_i változók kvantiliseit választjuk, vagyis ha $k_i = F_i^{-1}(\alpha_i)$ minden i-re, akkor (29) jobb oldala $\hat{C}(1 - \alpha_1, \ldots, 1 - \alpha_l)$-re egyszerűsödik. A viszontbiztosítási összefüggésben ezek a kvantilis szintek gyakran adottak a megtérülési periódusokként, és a biztosítási ügynök ismeri ezeket a szinteket. A kopulák alkalmazását mutatja be Benedek, Kóbor, Pataki (2002) kapcsolat szorosság mérésére, illetve portfólió kockázat kezelési problémák megoldására. Kopula fogalmán alapuló eloszlással függőségek vizsgálatával és tőzsdeindexekből kialakított portfóliók elemzésével foglalkozik Varga és Lukács (2005) dolgozata.

Irodalom

1. Anderson, T. W. 1958. *An Introduction to Multivariate Analysis.* New York, John Wiley.
2. Benedek, G., Kóbor, Á., Pataki, A. 2002. A kapcsolat szorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle*, XLIX. évf., 2002. február, 480–497. o.
3. Bowes, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., Nesbitt, C. 1997. *Actuarial Mathematics.* 2nd ed. Schaumburg, Ill. : Society of Actuaries.
4. Caperaa, P., C. Genest. 1993. Spearman's rho is larger than Kendall's tau for positively dependent random variables. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2, 183–194.
5. Embrechts, P., A. McNeil, D. Straumann. 1999. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. To appear in *Risk Management: Value at Risk and Beyond,* ed. by M. Dempster and H. K. Moffat, Cambridge University Press (2001).
6. Frank, M. J. 1979. On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Mathematicae*, 19, 194–226.
7. Fréchet, M. Les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon*, Sciences Mathématiques et Astronomie, 20, 13–31.
8. Genest, C. 1987. Frank's Family of Bivariate Distributions, *Biometrika,* 74, 549–555.

9. Hoeffding, W. 1940. Massstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5, 181-233.
10. Hougaard, P. 1987. Modelling Multivariate Survival, *Scandinavian Journal of Statistics*, 14, 291–304.
11. Hutchinson, T. P., Lai, C. D. 1990. *Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications.* Adelaide, South Australia, Rumsby Scientific Publishing.
12. Johnson, R., Kotz, S. 1972. *Distributions in Statistics: Continuous Multivriate Distributions.* New York, John Wiley.
13. Johnson, R., Wichern, D. 1988. *Applied Multivariate Statistical Analysis.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall.
14. Kendall, M., A. Stuart. 1979. *Handbook of Statistics.* Griffin & Company, London.
15. Klugman, S., Panjer, H., Venter, G., Willmot, G. 1997. *Loss Models: From Data to Decisions.* Unpublished Monograph.
16. Kruskal, W.. 1958. Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 53, 814–861.
17. Krzanowski, W. J. 1988. *Principles of Multivariate Analysis: A User's Perspective.* Oxford University Press.
18. Lehmann, E. 1975. *Nonparametric Statistical Methods Based on Ranks.* Holden-Day, Inc., San Francisco.
19. Marshall, A. 1996. Copulas, marginals and joint distributions, in: *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. by L. Rüschendorf, B. Schweizer, M. Taylor, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA. pp. 213–222.
20. Marshall, A. W., Olkin, I. 1988. Families of Multivariate Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 834–841.
21. Mikushinski, P., H. Sherwood, M. Taylor, 1992. The Fréchet bounds revisited. *Real Analysis Exchange*, 17, 759–764.
22. Nelsen, R. B. 1986. Properties of a One-Parameter Family of Bivariate Distributions with Specified Marginals. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 15, 3277–85.
23. Nelsen, R. B. 1999. *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
24. Sklar, A. 1959. Functions de réparation a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8*, 229–231.
25. Sklar, A. 1996. Random variables, distribution functions, and copulas – a personal look backward and forward. In *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. by L. Rüschendorf, B. Schweizer, and M. Taylor, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA. pp. 1–14.
26. Schweizer. B., E. Wolff. 1981. On nonparametric measures of dependence for random variables, *Annals of Statistics*, 9, 879–885.
27. Varga, J., P. Lukács. 2005. Valószínűség-eloszlások szélfüggősége, tőzsdeindex portfólió szélsőséges veszteségeinek elemzése kopula alkalmazásával. *Szigma*, 36, 1-2. szám.

APPLYING COPULAS TO RISK MANAGEMENT

The copula function describes the dependence structure of a multivariate random variable. In this paper we give a brief summary of basic concepts and theorems. It is also shown that copulas can be used as a flexible and practical instrument to generate Monte Carlo scenarios of risk factor returns. These risk factors affect the value of a credit or market portfolio. Many of the models commonly used assume multivariate normal distribution of such risk factor returns or log-returns. This hypothesis underestimates the probability that an extremal event such as simultaneous slump of equity prices or the joint default of several counterparties in a credit portfolio, might occur. Our goal is to show that the use of an appropriate copula function can model such extreme events effectively.

ESEMÉNYTANULMÁNY-ELEMZÉS MAGYAR RÉSZVÉNYÁRFOLYAMOKRA — VAN-E ÉRTÉKE AZ ÁRFOLYAMOKAT BEFOLYÁSOLÓ HÍREKNEK?[1]

BEDŐ ZSOLT – RAPPAI GÁBOR
PTE Közgazdaságtudományi Kar

1 Bevezetés

Tőzsdei árfolyamokat, illetve a belőlük számítható befektetési hozamokat elemző cikkünkben bemutatjuk az *eseménytanulmány-elemzés módszertanát*, valamint annak gyakorlati alkalmazását. Ezen eljárás lehetőséget nyújt a kutató számára, hogy a piaci hatékonyságot illetően olyan következtetéseket vonjon le, melyeknek igen nagy jelentősége van számviteli, pénzügyi, valamint piacszabályozási szempontból. Az eseménytanulmány-elemzés módszerével azt vizsgáljuk, vajon egy adott hír megjelenése milyen változást idéz elő a tőkepiaci árfolyamokban, illetve áttételesen a hozamokban; a változás már a ,,hírre várva", vagy csak a hír bejelentését követően jelenik-e meg.

Tanulmányunkban a hír, azaz a vizsgálandó esemény, a Budapesti Értéktőzsde néhány részvénye vonatkozásában az egy részvényre jutó jövedelem (Earning per Share, EPS) hivatalos kihirdetése.[2] Azzal, hogy a hivatalosan publikált hírt vettünk alapul, mint hozambefolyásoló tényezőt, egyben a *közepesen erős piaci hatékonysági forma* vizsgálatát is elvégezzük. E szerint ugyanis a sajtóban megjelent hírek a megjelenés időpontjában azonnal beépülnek az árfolyamokba, így ezt követően ezen hír felhasználásával kialakított kereskedési stratégiák már nem alkalmasak extra[3] hozam realizálására. Amennyiben az eseményt követően abnormális hozam jelentkezik, a piacról elmondható, hogy nem képes hatékonyan beépíteni a megjelent információt az értékpapírok árfolyamába, ez jelentheti a szereplők kereskedésében megbúvó tökéletlenséget, vagy a piaci infrastruktúra működésében jelentkező hiányosságokat egyaránt.

Az eseménytanulmány elemzés módszertanának megalkotása és empirikus alkalmazása Fama és szerzőtársai (1969) nevéhez fűződik. Ők a módszert éppen a hatékony piacok hipotézisének az igazolása kapcsán alkalmazták, az elemzési technikát ezt követően a hipotézist megkérdőjelezők is felhasználták vizsgálataikban és bizonyításaikban.[4] A módszer statisztikai vizsgálatát

[1]Beérkezett: 2004. március 11. e-mail: rappai@ktk.pte.hu, zsoltbe@ktk.pte.hu.

[2]Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani dr. Mohai Györgynek, valamint Lengyel Juditnak, az adatbázis összegyűjtésében végzett felbecsülhetetlen értékű segítségükért.

[3]A továbbiakban az extra hozamot inkább abnormális hozamnak nevezzük, el kívánjuk ugyanis kerülni, hogy az Olvasó csak a pozitív hozamokra gondoljon, amikor extra hozamot említünk!

[4]Lásd DeBondt és Thaler (1985), Lakonishok és szerzőtársai (1994).

és továbbfejlesztését Brown és Warner (1980, 1985), Dyckman, Philbrick, Stephans és Ricks (1984), valamint Campbell és Wasley (1993) tették meg, de elsősorban rövid, napos eseményablakban megjelenő abnormális hozam esetén. Ezzel szemben Barber és Lyon (1997) hosszú távú (egytől öt év) horizonton vizsgálták a módszer statisztikai szignifikanciáját, melynek eredménye az alkalmazhatóság elfogadása volt.

Tanulmányunkban először röviden áttekintjük az eseménytanulmány-elemzés módszertanát, majd a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) néhány jelentősebb forgalmú részvénye, illetve ezen részvények kibocsátóira vonatkozó adatok alapján megvizsgáljuk, hatékonynak tekinthető-e a BÉT, illetve alkalmazhatók-e a más (nagyobb forgalmi, hosszabb múlttal rendelkező) tőzsdék esetén kidolgozott módszerek hazánkban is.

2 Eseménytanulmány-elemzés módszere

A részvényhozam befolyásolása szempontjából alkalmazott *események típusainak* spektruma igen széles. A hír lehet a gazdaság állapotát leíró makroinformáció, vagy a vállalat teljesítményéről hírt adó periodikus jelentés, vagy éppen egy előre nem várt esemény bekövetkezte, mint például egy háborús helyzet kialakulása (pl. 2002. szeptember 11.). Ball és Brown (1968), Chari, Jegannathan és Ofer (1988), Easton és Zmijewski (1989), Gennotte és Truemann (1996), valamint Kross és Schroeder (1984) a vállalati jövedelmek kihirdetése kapcsán azt találták, hogy a jövedelemnövekedés pozitívan, míg az előző periódushoz képest bekövetkező csökkenés negatívan hat a részvényárfolyamokra. Ezen vizsgálatuk az Egyesült Államok tőkepiacait vette figyelembe, de hasonló eredményre jutott Alford, Jones, Leftwish és Zmijewski (1993), valamint Chan és Seow (1996) is, más nem USA-beli tőkepiac esetében is. Az események osztályozása, azon felül, hogy milyen jellegű az esemény, történhet azon az alapon is, hogy vajon a hír anticipálható vagy nem. Az események egyik típusa az előre nem várt esemény, mely a piacot teljes mértékben váratlanul éri. Az ebbe a csoportba tartozó hírek igen hatékonyan felhasználhatóak a piaci reakció mérésére, hiszen az eseménnyel kapcsolatban semmiféle várakozás nincs, éppen annak előreláthatatlanságából adódóan. Az előre anticipált hírek esetében viszont éppen a piaci várakozás tökéletességét lehet lemérni. Ha a szereplők, mondjuk az egy részvényre jutó jövedelem (EPS) következő negyedévre vonatkozó mértékét helyesen ítélik meg, akkor a mutató publikálásakor nem jelentkezik abnormális hozam. Ezzel szemben a helytelen várakozások rögtön nyomon követhetőek a hír megjelenésekor megugró, a referenciahozamtól eltérő hozam realizációkon keresztül.

Az esemény megválasztásán kívül lényeges az eseményt megelőző és azt követő úgynevezett *pre- és post-ablak* kijelölése. Ezeknek az idő periódusoknak a jelentősége az információ-szivárgás illetve -beépülés gyorsaságának a meghatározása. Abban az esetben, ugyanis, ha a nulla időpontot megelőzően (pre-ablak) hozamemelkedés mutatható ki, akkor sejthető, hogy valamilyen informális csatornán megkezdődött az eseménnyel kapcsolatos információk piacon való megjelenése. A post időszak esetében, ha a hozamemelkedés tovább folytatódik (pozitív hír esetén) vagy éppen tovább csökken (negatív hír esetén), akkor feltételezhető, hogy a szereplők nem voltak képesek a hír konzekvenciáit pontosan felmérni, és azok hatása a későbbiekben jelenik meg az árfolyamban.

Az elemző tehát megválasztja azt a bizonyos eseményt, melynek hatását megfigyelni kívánja az előre kijelölt vállalati részvények hozamain. Meghatározza az esemény megjelenése körüli pre- és post-ablakot, valamint a becslési periódus hosszát, melyeket minden részvényre azonosnak tételez fel. Napi hozamok esetén, a becslési periódus hossza jellemzően 100 és 300 kereskedési nap közötti intervallumot ölel fel, míg havi adatok esetében ez 24 és 60 adatból álló periódust jelent. A pre- és post-ablakok mérete napi adatok esetében 21-től 121 kereskedési napig jellemző, míg havi adatok használatakor ez a kiterjedés 12 és 21 havi adat között van.[5] Az *1. ábra* —a szakirodalomban alkalmazott tipikus minta-periódusokat feltételezve— szemlélteti az eseményablak elhelyezkedését.

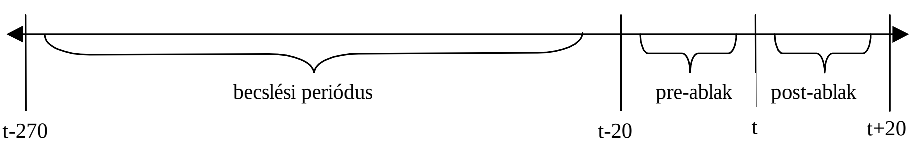
Noha az előbbiekben úgy fogalmaztunk, hogy az eseményablak elhelyezkedése minden részvény esetében azonos elven határozódik meg, lényeges kiemelni, hogy az esemény bekövetkezte —a kihirdetés napját tekintve— nem feltétlenül egyezik meg minden értékpapírnál, így ezen periódusokat „egymásra csúsztatva” kell az elemzést lefolytatni. Az eseményablak-elemzés tehát egy olyan technika, ahol azonos típusú, de valós időben máskor lejátszódó eseményeket egymásra vetítve vizsgálunk, és megpróbáljuk azonosítani az események közös jellemzőit.

A fentebb említett *referenciahozam*, vagy más néven *normál hozam* meghatározása a korábbi (becslési) periódusban realizálódott hozamalakulás figyelembevételével történik. A becslési periódus adatai alapján becsült várt hozamok generálására az irodalomban három modellt találhatunk: vizsgálhatjuk a piac-kiigazított modellt, az átlag-kiigazított modellt, valamint a piaci modellt.

A *piac-kiigazított modell* esetében a normális (várt) hozam megfelel a vizsgált tőkepiac piaci indexéből számított piaci átlaghozammal, azaz

$$E(r_{it}) = \hat{r}_{it} = r_{mt} \;, \tag{1}$$

ahol az i-edik részvény hozamát a t periódusban r_{it}, a piaci átlaghozamot az ugyanebben a periódusban r_{mt} jelöli.



1. ábra. Az eseményablak elhelyezkedésének tipikus esete (az esemény időpontja t)

[5] Lásd Su (2003).

Az *átlag-kiigazított modellel* kapott várt hozam a $t = 1, 2, \ldots, T$ időperiódusra számított átlag hozamnak felel meg:

$$E(r_{it}) = \hat{r}_{it} = \overline{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it} \ . \tag{2}$$

Az eseménytanulmány módszertanának megszületésekor Fama, Fisher, Jensen, és Roll (1969) az ún. *piaci modellt* alkalmazta. Ennek lényege, hogy egy konkrét befektetés (részvény) hozamát a piaci átlagos hozamot, mint magyarázó változót tartalmazó, kétváltozós lineáris regresszió-függvénnyel becsüli. A paraméterbecslést a legkisebb négyzetek módszerével (OLS) végezték; az alkalmazott regressziófüggvény:

$$E(r_{it}) = \hat{r}_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it} \ , \tag{3}$$

ahol ε_{it} a szokásos tulajdonságokkal (fehér zaj) rendelkező véletlen változó. A piaci modell alapgondolatának megtartása mellett számos továbbfejlesztési változat látott napvilágot. A kritikák zöme a becslési módszer, illetve a specifikáció változtatását javasolta.

Az egyes tőkepiacokon jelenlevő kereskedési sajátosságok, vagy az értékpapírok forgalmának eltérő nagysága torzítást okozhat a becslés során, melyet ki kell igazítani. A továbbiakban két ilyen lehetséges kiigazító eljárást mutatunk be, melyek az alacsony forgalmú részvények vizsgálata során jelentkező torzításokat hivatottak megszüntetni.[6]

A Scholes és Williams (1977) által ajánlott eljárás során három OLS becslést végeznek el a becslési periódusban:

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_{i1} + \hat{\beta}_{i1} r_{mt} \qquad t = 1, 2, \ldots, T \ , \tag{4a}$$

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_{i2} + \hat{\beta}_{i2} r_{m,t+1} \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1 \ , \tag{4b}$$

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_{i3} + \hat{\beta}_{i3} r_{m,t-1} \qquad t = 2, 3, \ldots, T \ . \tag{4c}$$

A kapott regressziós együtthatók és tengelymetszetek felhasználásával számoljuk ki a β^{SW} koefficienst és a tengelymetszetet, és ezek alkotják a normálhozamot generáló modell paramétereit. A Scholes-Williams béta:

$$\hat{\beta}_i^{SW} = \frac{\hat{\beta}_{i1} + \hat{\beta}_{i2} + \hat{\beta}_{i3}}{1 + 2\rho_{mt}} \ , \tag{5}$$

ahol ρ_{mt} az r_{mt}, azaz a piaci hozam idősorán számított autókorrelációt jelenti, melyet a $t = 2, 3, \ldots, T-1$ időszaki értékek alapján számítunk.

A Scholes-Williams tengelymetszet becslése az alábbi módon történik:

$$\hat{a}_i^{SW} = \frac{1}{T-2}\left(\sum_{t=2}^{T-1} r_{it} - \hat{\beta}_i^{SW}\sum_{t=2}^{T-1} r_{mt}\right) \ . \tag{6}$$

[6]Léteznek olyan technikák is, melyek a nem szinkronizált kereskedésű részvények esetében használatosak, lásd pl. Kalman, Hawanini, Maier, Schwartz, Whitecomb (1983) a torzítás kiküszöbölésére, de ezekkel tanulmányunkban nem foglalkozunk.

(5) és (6) felhasználásával meghatározható a várt hozamok Scholes-Williams becslése:

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_i^{SW} + \hat{\beta}_i^{SW} r_{mt} \,.$$

Egy másik megoldás a torzítás kiküszöbölésére a Dimson (1979) által javasolt kiigazítás, amely egy többváltozós regressziós becsléssel történik. A regresszióban a piaci hozam előző, jelen, illetve következő napi értéke szerepel magyarázó változóként, így mindegyikhez tartozik parciális regressziós együttható:

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_{i1} R_{m,t-1} + \hat{\beta}_{i2} R_{m,t} + \hat{\beta}_{i3} R_{m,t+1} \,, \quad t = 2, 3, \ldots, T-1 \,. \tag{7}$$

A becsült iránytangensek összege alkotja a Dimson bétát, vagyis

$$\hat{\beta}_i^D = \hat{\beta}_{i1} + \hat{\beta}_{i2} + \hat{\beta}_{i3} \,. \tag{8}$$

A Dimson által javasolt tengelymetszet becslés:

$$\hat{\alpha}_i^D = \frac{1}{T-2} \left(\sum_{t=3}^{T-3} r_{it} - \hat{\beta}_i^D \sum_{t=3}^{T-3} r_{mt} \right) \,. \tag{9}$$

A Dimson esztimátor:

$$\hat{r}_{it} = \hat{\alpha}_i^D + \hat{\beta}_i^D r_{mt} \,.$$

A torzítás kiküszöbölésének másik módját javasolja Varga és Rappai (2002). Tanulmányukban a hozamok modellezése során a véletlen változóra vonatkozóan GARCH-specifikációt javasolnak,[7] megállapítják, hogy az így felírt modellek hatékonyabb béta-becslést tesznek lehetővé. A GARCH-specifikáció lényege, hogy a (3) modell reziduális változójára vonatkozóan nem a fehér zaj specifikációt tételezzük fel, hanem annak varianciáját —a pénzügyi idősorokban gyakran kimutatható autokorrelált volatilitás kiküszöbölése végett— múltbeli innovációk osztott késleltetésű modelljeként vizsgáljuk (ahol $\rho(L)$ és $\theta(L)$ a szokásos késleltetési polinomok):

$$\operatorname{Var}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) \sigma_t^2 = \omega + \rho(L)\sigma_{t-1}^2 + \theta(L)\xi_t^2 \,. \tag{10}$$

Empirikusan igazolható, hogy általában elégséges a GARCH(1,1) specifikáció használata, vagyis a modellünk a következő alakúra redukálódik:

$$\begin{aligned} r_{it} &= \alpha + \beta r_{mt} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \rho\sigma_{t-1}^2 + \theta\varepsilon_{t-1}^2 \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Elemzésünkben a paraméterbecslés során a (11)-ben bemutatott specifikációt alkalmaztuk.

[7] Lásd pl. Engle (1982).

3 Abnormális hozam, illetve kumulált abnormális hozam

Valamennyi eddig tárgyalt becslési eljárás végterméke a várt hozam ($\hat{r}_{it}$), illetve az egyes periódusokban realizált tényleges hozam (r_{it}) különbségeként előállítható *abnormális hozam*, amelynek kalkulálása a pre-ablak első periódusától a post-ablak utolsó periódusáig történik. Az abnormális hozam számszerűsítése:

$$AR_{it} = r_{it} - \hat{r}_{it} \ . \tag{12}$$

Annak érdekében, hogy az egyes részvényekre ható izolált híreket semlegesítsük, a vizsgálatot egyszerre több részvényen szokás elvégezni, így az összes részvény esetében az egyetlen közös hatás az EPS hír megjelenése lesz. Az átlagos abnormális hozam az eseményablakon belül egy napra:

$$\overline{AR}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} AR_{it} \ , \tag{13}$$

ahol N azon részvények száma, melyekre az adott napon AR kalkulálható.

Az abnormális hozamok vizsgálata mellett kiemelt jelentősége van annak is, vajon milyen mértékben téríti el a hír a hozamokat összességében a várt hozamoktól, illetve milyen gyorsan zajlik le a „visszarendeződés”. Ennek érdekében az egyes részvényekre kumulált abnormális hozamot (CAR) is számolunk, ennek meghatározása a K naptól az L napig az alábbi formában írható fel:

$$CAR_i^{K,L} = \sum_{t=K}^{L} AR_{it} \ . \tag{14}$$

Az egyedi részvényekre kalkulált CAR-ek eseményablakon belüli átlagolásával az átlagos (piaci) CAR-t kapjuk meg, vagyis

$$CAR^{K,L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} CAR_i^{K,L} \ . \tag{15}$$

A kumulált abnormális hozamok ábráját vizsgálva látható, hogy milyen mértékű volt a maximális eltérés, valamint milyen időtávon zajlott le a hír okozta hozam-változás „lecsengése”. Vizsgálatunkban tesztelni fogjuk, hogy vajon szignifikánsan eltérnek-e a CAR értékek a 0-tól, azaz okoz-e a hír valóban extra nyereséget, illetve veszteséget azok számára, akik erre számítva kereskednek.

A világ különböző tőkepiacaira jellemző eltérő sűrűségű, illetve tartalmú információszolgáltatás ugyancsak problémát jelenthet a vizsgálatok precizitását illetően. Vannak olyan esetek, amikor a kérdéses esemény sajtóban, hírként való megjelenése nem a kereskedés idején, hanem attól eltérő időpontban lát napvilágot. Ez az apró részlet jelentősen befolyásolhatja a következő kereskedési napon bekövetkező hatást, mellyel, ha nem számolunk, akkor a következtetések helytelenek lehetnek. Lehetséges ugyanakkor, hogy a hír több kereskedési napon keresztül szivárog be a piacra formális csatornákon keresztül. Ez akkor lehetséges, ha mondjuk a negyedéves jelentések adatai nem szervezetten jelennek meg, és a hivatalos szaklap egy nappal a megjelenés után publikálja azokat. Ezeknek a problémáknak a kiküszöbölése érdekében a két napos eseményablak kiterjesztést kell használni. Ennek értelmében

$$CAR_{i,-1,0} = AR_{i,t-1} + AR_{i,t} \ , \tag{16}$$

vagyis az i részvény hírmegjelenést megelőző napon realizált abnormális hozamát hozzáadjuk a hírmegjelenés napján bekövetkező abnormális hozamhoz, ezzel egy kiterjesztett eseményablakot hozunk létre. A Budapesti Értéktőzsde esetében ez a probléma, elemzésünk során, nem áll fenn, hiszen a börzén egy szinkronizált Internet alapú hálózat biztosítja a megjelenés precizitását.

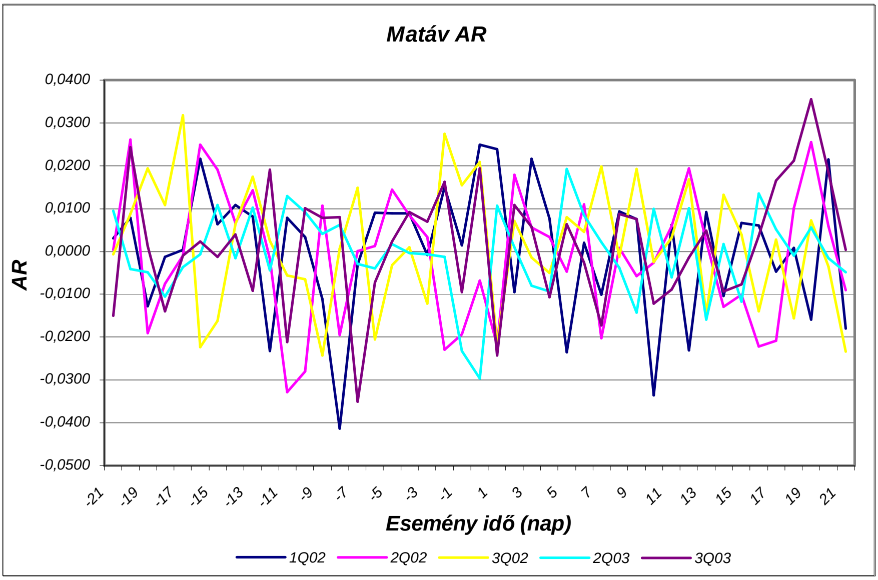
A várakozások, valamint a hír által generált reakció pontosabb összevetése érdekében csoportosítani kell a részvényeket a piaci várakozások alapján. A pozitív illetve negatív csoportba való sorolás a hírmegjelenés előtti piaci konszenzus, várakozások figyelembevételével történik. A piaci várakozást többféleképpen is lehet mérni, ugyanis alkalmazható az elemzők várakozásából számolt piaci konszenzus vagy az előző időperiódusban realizálódott mutató is. Ha ugyanis az előző periódus a jelenbeli realizációhoz képest magasabb, akkor a részvény a *negatív portfólióba* kerül és annak a csoportnak a kumulált abnormális hozamához járul hozzá. Ha a jelenben megjelent hír az előző perióduséhoz képest növekedést mutat, akkor viszont a részvény a *pozitív csoportba* kerül besorolásra. Ez a szétválasztás azt garantálja, hogy a pozitív illetve a negatív hírek által keltett abnormális hozamok nem oltják ki egymást, valamint következtetéseket vonhatunk le a befektetők viselkedésére vonatkozóan is. Nem biztos ugyanis, hogy a pozitív hír ugyanazt a hatást váltja ki, mint a negatív hír. Ezt a feltételezést a következő részben empirikusan is megvizsgáljuk.

4 Adatok és empirikus vizsgálat

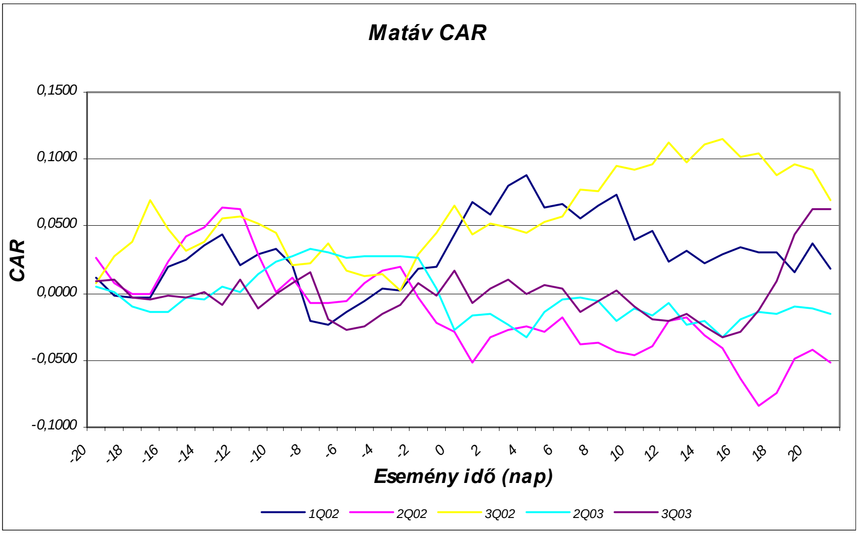
Az elemzés a Budapesti Értéktőzsdén forgó részvények közül az „A" kategóriás részvények egy csoportját vette figyelembe. Ennek oka egyrészről ezen részvények forgalmának megfelelően nagy mértéke, valamint az adathozzáférés kivitelezhetősége. A vizsgált részvények: Antenna Hungária, BorsodChem, Démász, Egis, Matáv, MOL, NABI, OTP, Pannonplast, Richter. Az esemény, ahogy azt már többször is említettük, az egy részvényre jutó jövedelem (EPS) kihirdetése. Ezt a mutatót negyedévente a gyorsjelentésekben jelentetik meg a vállalatok. Mi, ismét csak adathozzáférési okok miatt, öt ilyen negyedéves jelentési periódust vontunk vizsgálat alá. A periódusok 2002 I. negyedévétől 2003 III. negyedévéig tartanak (1Q02, 2Q02, 3Q02, 2Q03, 3Q03). A részvények árfolyamadatait, illetve a gyorsjelentések pontos megjelenésének időpontját a Budapesti Értéktőzsde központi adatbázisából nyertük. A részvényt kibocsátó vállalatok negyedéves jelentéseit a `www.portfolio`

.hu internetes újság adatbázisából töltöttük le. Az eseményablak kialakítása során a pre-ablak és a post-ablak is egyaránt 21 napos kiterjedésű lett, míg a pre-ablakot megelőző becslési periódus hosszát 250 kereskedési napban határoztuk meg. A becslést egyaránt elvégeztük hagyományos, illetve GARCH specifikációkkal is. A becsült paraméterek nem mutatattak nagy eltérést, ebből következően a GARCH-specifikáció alapján becsült paraméter-értékekkel dolgoztunk az abnormális hozamok és kumulált abnormális hozamok meghatározása során. Abban az esetben, ha valamelyik értékpapírra nem volt kereskedés, akkor az előzőnapi záróárfolyamot feltételeztük és így arra a kereskedési napra a hozam nullával lett egyenlő. A részvények csoportosítását, pozitív illetve negatív várakozások szerint az előző negyedévi EPS mutató alapján végeztük el. Ha az előző EPS mutató a jelenleginél nagyobb volt, tehát csökkenés következett be, akkor a részvény a negatív csoportba került. Ezzel szemben, ha a növekedés volt a jellemző az előző jelentéshez képest, akkor a részvény a pozitív csoportba került besorolásra. Ez természetesen azt jelentette, hogy minden portfólióalkotás során, tehát minden negyedévben, a csoportok tagjai mások voltak.

Elsőként tekintsük a vizsgálatba vont egyik legstabilabb forgalmú részvény, a MATÁV egyedi adatait! Az öt eltérő időpont köré rendezett (-21)-21 eseményablakok napi abnormális hozamait a (12) formula felhasználásával kaptuk. Az abnormális hozamok —valamennyi negyedéves jelentés köré szerkesztett esemény-ablakban— a -4% és $+4\%$ intervallumban szóródnak, az ábra alapján trendet nem tartalmaznak. A *2. ábrán* szemléltetett öt megfigyelésre a kalkulált abnormális hozamokat a (14) formula felhasználásával számítjuk, ahol a K a -21. nap, az L pedig a -20. naptól a 21. napig tartó időintervallumot öleli fel.



2. ábra. A MATÁV részvény árfolyamából képzett abnormális hozamok

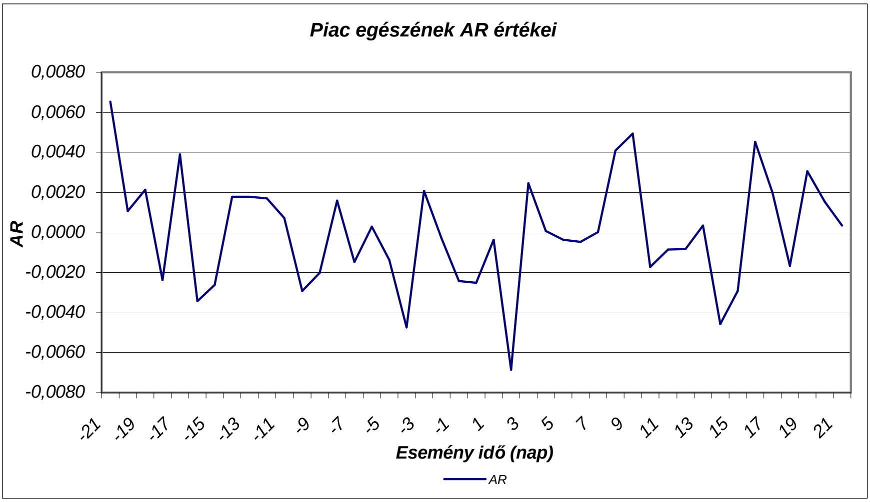


3. ábra. Kumulált abnormális hozamok a MATÁV részvényre

A MATÁV részvények árfolyamai alapján képzett kumulált abnormális hozamok az eltérő időszakokban szinte teljesen eltérően viselkedtek; tulajdonképpen alig lehet közös vonást találni az idősorok között. Talán az egyetlen általánosan megfogalmazható megállapítás, miszerint a kumulált hozamok az esemény időpontjában gyakorlatilag a 0 körül szóródnak, valamint úgy tűnik —az öt eseményből legalább háromszor— a 21 napos post-ablak nem elégséges a hír teljes hatásának „lecsengetéséhez".

Vizsgáljuk meg, mennyiben módosulnak az előző megállapításaink, ha a piac egészét,[8] és valamennyi „ablakot" aggregáltan kezeljük! Az eredményt a (13) formula felhasználásával kaptuk. Fontos megjegyezni, hogy a *4. ábrán* a $t = 0$ nap (az EPS kihirdetetésének napja) egy megfigyelésen (negyedéven) belül nem feltétlenül jelenti ugyanazt a naptári napot minden részvény esetében. Más szóval, a $t = 0$ nap egy olyan „virtuális" időpont, mely az eseményt tekintve minden részvénynél megegyezik, de naptári nap szempontjából eltér. Továbbá a részvények közötti keresztmetszeti aggregáláson túl az öt megfigyelés (negyedév) összevonása is megtörtént, melynek eredménye a 4. ábrán látható grafikon.

[8]Piac egésze alatt természetesen csak a vizsgálatba vont részvényeket tekintjük, ám az elemzésbe vont 10 részvény a tőzsdei kapitalizáció közel 60%-át, a napi átlagos forgalom több mint kétharmadát teszi ki!



4. ábra. A piac egészére vonatkozó abnormális hozamok

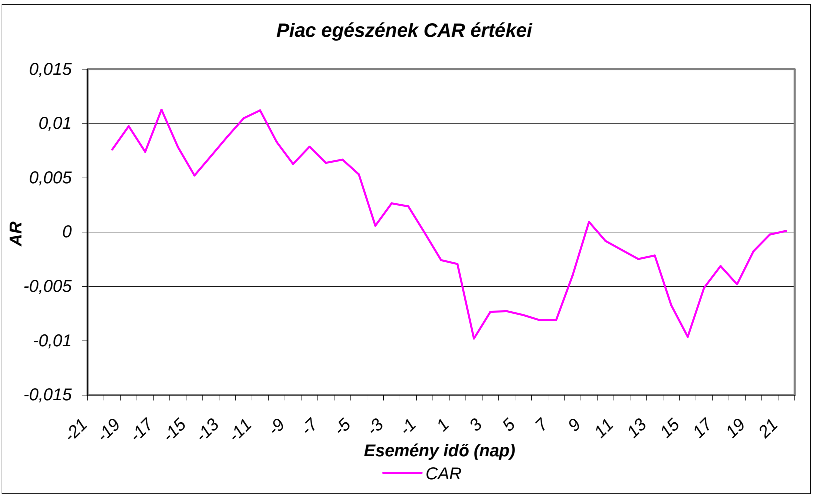
Az ábrára tekintve tendenciát, illetve a pre-ablak és a post-ablak közötti jelentős eltérést nem fedezhetünk fel. Az idősor egészére elvégeztük a kiterjesztett Dickey-Fuller tesztet (trend és tengelymetszet nélkül), a stacionaritás tesztelése érdekében, melynek értéke[9] $-5{,}058$; vagyis minden ésszerű szignifikanciaszinten állíthatjuk, hogy az empirikus idősor 0 várható értékű, stacioner folyamatból származik.

Azzal tehát, hogy az eseményablak $t = 0$ időpontjába a gyorsjelentésekben publikált EPS híreket helyeztük, azt vizsgáljuk, hogy vajon a tőkepiac megfelel-e a hatékony piacok hipotézis félig erős formájának. A fentiek szerint, mivel senki nem képes 0-tól szignifikánsan különböző extra hozam realizálására, a hír felhasználásával épített kereskedési stratégiákon keresztül, az árfolyamnak tökéletesen kell tartalmaznia az eseménnyel kapcsolatos információkat. Esetünkben ennek a feltevésnek kétféle implikációja van.

(1) A tőkepiaci szereplők tökéletesen képesek megbecsülni a részvényeket kibocsátó vállalatok következő negyedéves EPS mutatóját. Ezért azon részvények esetében melyek csalódást okoznak (negatív csoport) a szereplők eladási nyomása az esemény bekövetkezte előtt (pre-ablak) az árfolyamot lefelé mozdítja, ezzel a kumulált abnormális hozamokat a negatív térbe szorítja le. Ezzel szemben a jól teljesítő részvények (pozitív csoport) árfolyamának emelkedése ennek a csoportnak az abnormális hozamait a pozitív térben tartja már a hírmegjelenést megelőzően is.

(2) Az ezt követő napok, tehát a hír megjelenése és a post-ablak napjainak, kumulált abnormális hozamai véletlenszerű mozgást kellene, hogy kövessenek, mely biztosítaná annak a feltételét, hogy hatékony kereskedési stratégia nem alkalmazható a hír ismételt felhasználásával.

[9] A próbafüggvény empirikus értékének megítélésekor ne feledkezzünk meg arról a tényről, hogy mindössze 43 adatból áll a vizsgált idősor!



5. ábra. A kumulált abnormális hozam alakulása a piac egészére és valamennyi ablakra vonatkozóan

Láthatjuk, hogy a piac egészére és valamennyi eseményablakra aggregálva az abnormális hozamok stacioner folyamatból származnak, vagyis úgy tűnik, mintha a hír bejelentése nem lenne lényeges eltérítő hatással a tőkepiaci eseményekre. Ez tehát azt jelenti, hogy az abnormális hozamok alakulásának figyelembevételével nem építhető fel hatékony befektetési stratégia. A következőkben az abnormális hozamok kumulálásával azt vizsgáljuk, hogy ez a stacioner tulajdonság fennmarad-e. Ha igen, akkor az információ beépülése hatékonyan megy végbe, ha viszont nem, akkor kereskedési stratégia alakítható ki, mely nyereséggel kecsegtet.

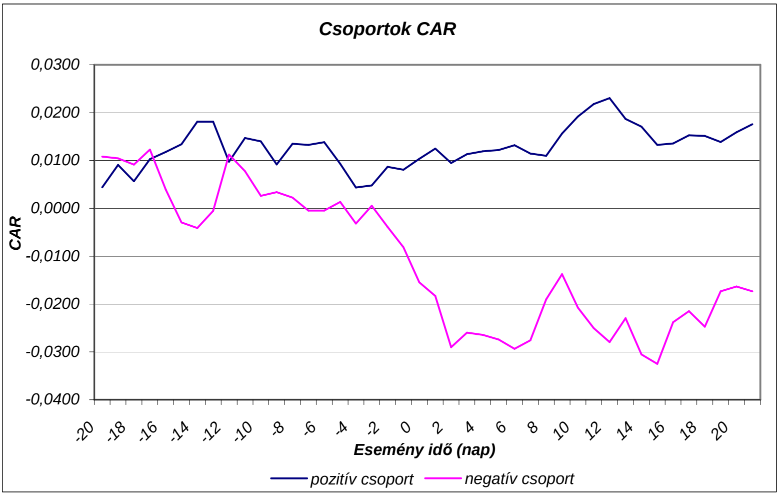
Az *5. ábrán* bemutatott eredmény a (15) formula felhasználásával született, ahol a K és L értékek a MATÁV részvény vizsgálatakor használt értékekkel megegyeznek. A piac egészére számolt abnormális hozamhoz hasonlóan a $t = 0$ egy „virtuális” nap, mely az esemény szempontjából minden részvényre, valamint minden megfigyelésre (negyedévre) megegyezik, de naptári nap tekintetében eltér. Más szóval, az eredmény a kumulált abnormális hozamok, részvények, valamint megfigyelések közötti keresztmetszeti aggregálásából származik.

A kumulált abnormális hozamok ábráját vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a piac egészén, az EPS bejelentésére várva optimális hangulat uralkodik. A pre-ablak abnormális hozam értékeinek kumulálásával mindvégig 0-t meghaladó (helyenként 1%-ot is meghaladó) összhozamot látunk, vagyis a piaci modell által becsült hozamnál magasabbak a tényleges hozamok (az árfolyamok a becsültnél gyorsabban nőnek). Láthatjuk, hogy az abnormális hozamok kumulált értéke nagyságrendileg az esemény bekövetkeztekor, majd a CAR érték —tendenciáját tekintve— negatív. A 4. ábra alapján úgy tűnhet, hogy a piac a hír napvilágra kerülését követően korrigálja a korábbi optimista álláspontját. Felmerülhet annak a lehetősége, hogy a fenti —korrekciót feltételező— kép azért alakul, mert a hírek általában „rosszak”, vagyis az

EPS érték a vártnál alacsonyabb lesz. Ennek ellenőrzése érdekében megvizsgáltuk csoportokba bontva az elemzésbe vont részvényeket, ahol a csoportképző ismérv a hír tartalma volt. Az *6. ábrán* elkülöníthetjük a pozitív hír, illetve negatív hír esetén kumulált abnormális hozamokat.

Láthatjuk, hogy a negatív csoport esetében a pre-ablak kezdetén a szereplők optimista várakozásai az árfolyamokat még magasan tartják egészen a 16. napig, amikor is egy hirtelen esés következik be. A jó eredményben való bizakodásuk a 14. napon tér vissza és egészen a 7. napig tart, melyet egy „racionális" periódus követ. Két nappal az eredmény publikálása előtt az szereplők bizalma elszáll és az árfolyamok esésnek indulnak. Ez a tendencia nem áll meg a nulla időpontban sem, ami azt jelenti, hogy a szereplők várakozásaiktól jóval elmaradó eredménnyel szembesülnek. A részvény árfolyama a post időszak második napján stabilizálódik és azt követően véletlen mozgást követ a negatív térben. Ez a kumulált abnormális hozam lefutás, hatékonyság szempontjából nem túl kecsegtető, hiszen az előrelátás és az azonnali reakció nem teljesül. Ugyanakkor nem tekinthetünk el annak megállapításától sem, hogy úgy tűnik, a 21 napos post-ablak nem elégségesen hosszú ahhoz, hogy az abnormális hozamok kumulálásával keletkező extra hozam eltűnjön!

A pozitív csoport esetében a helyes anticipáció a (-21) - (-7) intervallumban jól látható, melyet a (-7) - (-3) időszegmensben egy bizalomcsökkenés követ. Ezen bizonytalankodás után, azonban a piaci optimizmus visszatér, melyet a pozitív EPS eredmény tovább erősít. A hozamok emelkedése, és ezáltal a kumulált abnormális hozamok növekedése, egészen a post-ablak 12. napjáig eltart, mely időpontot követően mozgása ismételten véletlenszerűvé válik. Ez az eredmény, ugyancsak a félig erős hatékonyság elvetését eredményezi, hiszen, ha egy szereplő a hírmegjelenést követő napon vásárol részvényt, mely a pozitív csoportba tartozik, akkor egészen a 12. napig addicionális hozamemelkedéssel számolhat.



6. ábra. Kumulált abnormális hozamok különböző csoportokban

5 Következtetések

Belátható tehát, hogy a széles körben alkalmazott, eseménytanulmány-elemzés módszere a Budapesti Értéktőzsde viszonylatában is alkalmazható. Eredményeink, még ha nem fedik is le a börzén forgó részvények mindegyikét, azt mondhatjuk, hogy általánosításra adnak lehetőséget. Így tehát azt lehet mondani, hogy a börze forgalmának nagyobb részét kitevő vállalati részvények esetében, az egy részvényre jutó jövedelem kihirdetése árfolyam befolyásoló tényezőként fogható fel. Más szóval, kereskedési stratégia építés szempontjából releváns hírnek számít.

Az eredmény ugyanakkor az általunk használt eseményablak, és elsősorban a post-ablak hosszának a rövidségéről tanúskodik. Az abban fedezhető fel, hogy a zérus CAR-hez való visszatérés nem következik be a (-21) napon belül, így ennek a post periódusnak a kiterjesztése szükséges a továbbiakban.

Eredményeink továbbá arról tanúskodnak, hogy a BÉT esetében a hatékony piacok hipotézisének félig erős formája sérül, mely nem biztos, hogy korrigálódna további részvények bevonásával, hiszen azok kereskedési intenzitása jóval elmarad az elemzés alá vontakétól.

A módszertan felhasználása a jövőben elképzelhető lehet más típusú hírek eseményablakba helyezésével, melyek között az előre nem látható hírek is helyet foglalhatnának. Lehetséges kiterjesztési irány lehet ugyanakkor a régióban, Közép-Kelet-Európában működő börzék hatékonyság vizsgálatának elvégzése is.

Irodalom

1. Alford A., Jones J., Leftwish R. és Zmijewski M.: The relative informativeness of accounting disclosures in different countries, *Journal of Accounting Research* 31, 1993, p. 183–223.
2. Ball Ray és Philip Brown: An empirical evaluation of accounting income numbers, *Journal of Accounting Research* 6, 1968, p. 159–178.
3. Brad M. Barber és John D. Lyon: Detecting long-run abnormal stock returns: The empirical power and specification of test statistics, *Journal of Financial Economics* 43, 1997, p. 341–372.
4. Brown Stephen J. és Jerold B. Warner: Measuring security price performance, *Journal of Financial Economics* 8, 1980, p. 205–258.
5. Brown Stephen J. és Jerold B. Warner: Using daily stock returns: The case of event studies, *Journal of Financial Economics* 14, 1985, p. 3–32.
6. Campbell C. J., és Charles E. Wasley: Measuring security price performance using daily NASDAQ returns, *Journal of Financial Economics* 33, 1993, p. 73–92.
7. Chan K. és Seow G.: The association between stock returns and foreign GAAP earnings versus earnings adjusted to US GAAP, *Journal of Accounting and Economics* 21, 1996, p. 139–158.
8. Chari V. Jagannathan R. és Ofer A.: Seasonality in security returns: The case of earnings announcements, *Journal of Financial Economics* 21, 1988, p. 101–121.

9. Dann L.: Common stock repurchases: An analysis of returns to bondholders and stockholders, *Journal of Financial Economics* 9, p. 113–138.
10. DeBondt W. és Thaler R.: Does the stock market overreact? *Journal of Finance* 40, 1985, p. 793–805.
11. Dimson E.: Risk measurement when shares are subject to infrequent trading, *Journal of Financial Economics* 7, 1979, p. 197–226.
12. Dyckman T., Philbrick D., Stephans J. és Ricks W. E.: A comparison of event study methodologies using daily stock returns: A simulation approach, *Journal of Accounting Research* 22, 1984, p. 1–33.
13. Engle R.: Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 50/4, 1982, p. 987–1007.
14. Easton P. és Zmijewski M.: Cross-sectional variation in stock market response to the announcement of accounting earnings, *Journal of Accounting and Economics* 11, 1989, p. 117–142.
15. Fama E., Fisher L., Jensen M. és Roll, R.: The adjustment of stock prices to new information, *International Economic Review* 10, 1969, p. 1?-21.
16. Gennotte G. és Truemann B.: The strategic timing of corporate disclosure, *Review of Financial Studies* 9, 1996, p. 665–690.
17. Kalman C. J., Hwanini G., Maier S. F., Schwartz R. A. és Whitecomb D. K.: Estimating and adjusting for the intervalling-effect bias in beta, *Management Science* 29, 1983, p. 135–148.
18. Kross W. és Schroeder D.: An empirical investigation of the effect of quarterly earnings announcement timing on stock returns, *Journal of Accounting Research* 22, 1984, p. 153–176.
19. Lakonishok J., Shleifer A. és Vishny, R.: Contrarians investment, extrapolation, and risk, *Journal of Finance* 49, 1994, p. 1541–78.
20. Scholes M. és Williams J.: Estimating beta from non-synchronous data, *Journal of Financial Economics* 5, 1977, p. 309–328.
21. Su D.: Stock Price reaction to earnings announcements: evidence from Chinese markets, *Review of Financial Economics* 12, 2003, p. 271–286.
22. Varga József és Rappai Gábor: Heteroszkedaszticitás és a szisztematikus kockázat hatékony becslése GARCH modell alapján – A magyar részvénypiac elemzése, *Szigma* 33, 2002.

THE APPLICATION OF EVENT STUDY METHODOLOGY TO SHARES LISTED ON THE BUDAPEST STOCK EXCHANGE. IS NEWS, INFLUENCING STOCK PRICES, VALUABLE OR NOT?

The authors introduce the applicability of the event study methodology in case of the Budapest Stock Exchange (BSE). The methodology is to determine whether a certain type of a news is able to influence the tendency of return series, in another word is the examined news relevant in the construction of trading strategies? We selected the quarterly announcement of earnings per share as the return generating information to be put in the event window. The size of the pre-and post-window, around the news release, is +21, (-21). We also divided the examined shares into winner and loser portfolios by relating the current EPS ratio to the previous period's

EPS ratio. If there is an increase, the share is to be put into the winner group, if the current ratio is less than the previous one, than the share is located in the looser portfolio. We are also to test the semi strong form of efficiency of the BSE using the above described settings. The exchange is said to be efficient in the semistrong form if all relevant public information is built into the prices immediately and accurately. Our conclusions are as follows: (1) event study methodology is applicable in the case of the BSE, (2) EPS announcements are considered to be relevant information in relation to the building of trading strategies, (3) the criteria of the semistrong form of efficient market hypothesis is not fully satisfied, since in the post window cumulated abnormal returns (CAR) still persist, (4) the length of the post window is too short for the CAR to return back to the 0 level, so the extension of the window is required in the future.

ARBITRÁZS NAGY PÉNZÜGYI PIACOKON[1]

RÁSONYI MIKLÓS
MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

Pénzügyi piacok olyan matematikai modelljeivel foglalkozunk, melyekben termékek egy végtelen sorozata van jelen. Ilyen piacok arbitrázselméletének új eredményeiről adunk áttekintést. Az arbitrázsmentesség és a martingálmértékek létezése közötti kapcsolatot vizsgáljuk, elsősorban a klasszikus ,,arbitrázs árazási elmélet"-tel összefüggésben.

1 Bevezetés

A dolgozat célja az arbitrázs fogalmi tisztázása és vizsgálata olyan esetekben, amikor a piaci szereplőknek befektetési lehetőségek egész sokasága áll a rendelkezésére. Ilyenkor a kockázat mérsékelhető azáltal, hogy tőkéjüket számos különböző termékbe fektetik. Mindazonáltal továbbra sem állhatnak fenn tartósan arbitrázslehetőségek.

Nagy piac alatt tehát azt értjük, hogy nagyon sok termékkel lehet kereskedni. Példa erre a globális világgazdaság, de nagy piacnak tekinthetjük pl. az Egyesült Államokban forgalomban lévő különböző lejáratú és kibocsátójú kötvények öszszességét is.

A matematikai modellben ezért ugyanúgy indokolt megszámlálhatóan végtelen sok termék szerepeltetése, mint ahogyan a statisztikában is megfigyelések végtelen sorozatára vonatkozó aszimptotikus eredményekkel dolgozunk nagy minták esetén.

A cikkünk 2. szakaszában bemutatott piacmodellt S. A. Ross [23] úttörő munkája óta szokás vizsgálni. A minket foglalkoztató alapvető kérdések: Hogyan célszerű definiálni az arbitrázs fogalmát? Milyen feltételeket kell teljesíteniük a modellparamétereknek, hogy ne léphessen fel arbitrázs? Hogyan árazzunk származékos termékeket egy nagy piacon?

Az utóbbi másfél évtized pénzügyi matematikai eredményei megmutatták, milyen szoros az összefüggés a derivatív termékek árazása, illetve a piac arbitrázsmentessége között, lásd a 3. szakaszt. A 4. szakaszban rámutatunk, hogyan kapcsolódik az arbitrázs korszerű elmélete a korábbi lineáris árazási módszerekhez; ez utóbbiakról a jelen szakasz hátralévő részében ejtünk szót. Az 5. szakaszban potenciális jövőbeli kutatási irányokra utalunk.

Az elméleti közgazdaságtan egyik hagyományos megközelítése az árazási problémához a CAPM ("Capital Asset Pricing Model"), mely szerint egyensúlyban lévő piacon az egyes termékek várható hozama lineárisan függ a

[1] A szerző köszönetet mond az OTKA T 047193 és F 049094 szerződések alapján kapott támogatásért. Beérkezett: 2004. augusztus 29. e-mail: rasonyi@sztaki.hu.

termék "bétájától". Ez a β az adott termék és a piaci portfólió (mikor az egész piacot egyetlen portfóliónak tekintjük) közötti korreláció egy mérőszáma, lásd a második szakaszban bemutatott modellt.

A CAPM elmélet J. Lintner [19], W. Sharpe [25] és J. Mossin [20] nevéhez fűződik; a [8] könyv alapos bevezetést nyújt ebbe a tárgykörbe. Bármennyire csábító egy ilyen lineáris összefüggés megléte, ez nem bizonyult mindig a tapasztalattal egybevágónak, s az elmélet bizonyos előfeltevései (normális eloszlású hozamok, kvadratikus hasznossági függvény) is megkérdőjelezhetőek.

S. A. Ross [23] cikkében merőben új kiindulópontokból jutott el hasonló következtetésekhez: ha kellően sok termék van a piacon és nincsenek arbitrázslehetőségek, akkor a CAPM által jósolt lineáris függés *közelítőleg* fennáll. Ez utóbbi elméletet "Arbitrage Pricing Theory" (APT) néven tartják számon.

2 Az APT modell

Röviden ismertetjük Ross APT modelljének egy egyszerű esetét, némileg módosítva, lásd [22]-t részletesebb tárgyalásért.

Megszámlálhatóan végtelen sok terméket tekintünk. Feltesszük, hogy mindegyik termék egységnyi mennyisége \$1-ba kerül ma. Legyen az n-edik termék ára R_n egy adott T jövőbeli időpontban, $n \in \mathbb{N}$.

Legyen továbbá $R_0 = 1 + r$ konstans (azaz létezzen kockázatmentes befektetés), R_n, $n \geq 1$ pedig valószínűségi változók. Tételezzük fel, hogy a piacot alapvetően egy véletlen forrás (faktor) határozza meg, ehhez persze még hozzájönnek az egyes termékek saját kockázatai. Véges sok közös faktor esete is hasonlóan tárgyalható.

A matematikai modellben egy $(-\ ,\mathcal{F},P)$ valószínűségi mezőt veszünk; a közös faktort az ε_1 valószínűségi változó testesíti meg, a termékek egyedi kockázatait pedig ε_i, $i \geq 2$ írják le, legyenek ezek (teljesen) függetlenek. Feltesszük, hogy az első termék ára, R_1, kizárólag a közös kockázati tényezőtől függ. Másképpen fogalmazva, feltesszük, hogy e közös faktor maga is adható-vehető. Ez például fennáll akkor, ha valamely tőzsdeindexet vagy a fentebb már említett piaci portfóliót tekintjük. A kockázati tényezőktől való függést lineárisnak vesszük.

A következő formális modellhez jutunk:

$$R_1 = 1 + \mu_1 + \sigma_1\varepsilon_1, \quad R_n = 1 + \mu_n + \beta_n\varepsilon_1 + \sigma_n\varepsilon_n,\ n \geq 2,$$

ahol a μ_n, β_n, σ_n konstansok és feltesszük, hogy $E\varepsilon_n = 0,\ E\varepsilon_n^2 = 1,\ n \in \mathbb{N}$. Ekkor μ_n éppen $ER_n - 1$-el, az n-edik termék várható hozamával egyezik meg. Teljesüljön még, hogy a termékek saját kockázatát kifejező szórás korlátos:

$$\sup_i |\sigma_i| < \infty,$$

azaz egy termék saját kockázata nem szökhet az égig.

Egy adott befektető egyszerre véges sok (mondjuk k) termékkel kereskedhet, de ez a k bármilyen nagy lehet. Tetszőlegesen eldöntheti bármely $1 \leq i \leq$

k-re, hogy az i-edik termékből mennyit vásárol, jelölje ezt a mennyiséget ϕ_i; ez bármilyen előjelű lehet (vagyis fedezetlenül is eladhatunk). Ha kezdőtőkéje c, a kockázatmentes befektetés ϕ_0 mennyiségét úgy kell megválasztani, hogy

$$\sum_{i=0}^{k} \phi_i = c \tag{1}$$

teljesüljön, ezt *önfinanszírozási feltétel*nek nevezzük.

A ϕ portfólió értéknövekedése a T időpontig

$$V(\phi) := \sum_{i=0}^{k} \phi_i R_i - c = \sum_{i=0}^{k} \phi_i (R_i - 1) \, .$$

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy a piacon* aszimptotikus arbitrázs *van jelen, ha $c = 0$ és létezik természetes számok olyan n_k, $k \in \mathbb{N}$ növő sorozata és olyan ϕ_{n_k} önfinanszírozó portfóliók az n_k terméket tartalmazó piacon, hogy*

$$EV(\phi_{n_k}) \to C > 0, \quad D^2(V(\phi_{n_k})) \to 0, \quad k \to \infty \, .$$

Vagyis akkor beszélünk aszimptotikus arbitrázsról, ha 0 kezdőtőkéből egyre nagyobb piacokon kereskedve a befektetőnek módja nyílik pozitív átlagos hozamot produkálnia s egyszersmind kockázatát tetszőlegesen kicsire csökkentenie. A kockázatot jelen esetben a szórással mérjük.

A gyakorlatban egy ilyen arbitrázslehetőség jelenléte azt jelenti, hogy elegendően sok termékből már összeállítható pozitív hozamú portfólió, melynek szórása kisebb egy általunk megadott (tetszőlegesen kicsiny) küszöbnél. Ilyen portfólió konkrétan is megadható, lásd [9]-et vagy [10] 5. szakaszát.

Az APT alaptétele a következő:

1. tétel. *Ha nincsenek aszimptotikus arbitrázslehetőségek, akkor létezik olyan $\gamma \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_i - r - \beta_i \gamma)^2 < \infty \, . \tag{2}$$

Megmutatható, hogy a γ konstans éppen $(\mu_1 - r)/\sigma_1$-gyel egyenlő.

A tétel lényege, hogy arbitrázsmentes piacon $\mu_i - r$ (az átlagos hozamok kockázatos része) nagy i-re körülbelül lineárisan függ az adott i-edik termék "betájától". Az eltérés gyorsan 0-hoz tart (még az eltérések négyzetösszege is véges), tehát a CAPM alapösszefüggésének ($\mu_i = r + \beta_i \gamma$) egy aszimptotikus változatát kapjuk. Láthatóan $\beta_i \sigma_1$ éppen $\mathrm{cov}\,(R_i, R_1)$-gyel egyenlő, tehát β_i egy korreláció jellegű mennyiség.

Ez az eredmény először S. A. Ross [23] cikkében jelent meg. G. Huberman [9] dolgozatában világos és matematikailag kifogástalan levezetést adott, lásd úgyszintén a [10] áttekintést. A γ konstans értéke ugyanaz, mint a CAPM alaprelációjában, de az APT esetében ezt csak az [1] cikkben mutatta meg A. Admati és P. Pfleiderer.

A modell több szempontból kifogásolható: az ε_i véletlen mennyiségeknek kell, hogy létezzen a második momentuma, holott a hozamok modellezésénél sokszor vastag farkú, pl. stabil eloszlásokat is használnak, lásd [24, 6] és az utóbbiban szereplő hivatkozásokat. Egy másik gyenge pont a szórás, mint kockázati mérőszám használata: ez az átlagtól felfelé való eltérést ugyanúgy veszi figyelembe, mint a lefelé való eltérést, noha nyilván nem mindegy, hogy az átlagosnál többet vagy kevesebbet jövedelmez az adott értékpapír. A 4. szakaszban látni fogjuk, hogyan küszöböli ki az újabb elmélet ezeket a fogyatékosságokat.

3 Kockázatsemleges árazás

Az arbitrázsmentes piacok vizsgálata más okból is az érdeklődés homlokterébe került. F. Black és M. Scholes [2] cikkükben az opciók olyan árazási módszerét javasolták, melyben ún. *kockázatsemleges árazó funkcionálok* jutnak szerephez.

Ezek a leggyakrabban alkalmazott modellekben olyan valószínűségi mértékeknek felelnek meg, melyekre nézve az árfolyamatok ún. *martingálok.* Az ilyeneket röviden *martingálmértéknek* nevezzük.

Régóta ismert, hogy ha egy szerencsejátékban a játékos összes nyeresége (vagy vesztesége) a t időpontig M_t, és az M_t folyamat martingált alkot, akkor nem lehetséges biztos nyereséghez jutnia. A modern pénzügyi matematika egyik legfontosabb észrevétele a fenti megfigyelés megfordítása, azaz

Metatétel. *Ha nincs kockázat nélküli haszon (arbitrázs), akkor van olyan, az objektív valószínűséggel ekvivalens valószínűségi mérték, melyre nézve a piacon lévő termékek diszkontált árfolyamatai martingálok.*

Ezt a kijelentést a ,,Származékos termékek árazásának alaptétele”-ként szokás emlegetni; valójában inkább egy általános alapelvről van szó, melyet azonban a konkrét modellosztályokban mindig igazolni kell. Először olyan modelleket vizsgáltak, ahol a kereskedés diszkrét időpillanatokban történik; a metatételt [7]-ben mutatták meg véges valószínűségi mező esetére, majd [3]-ban az általános esetre. Ez a kiterjesztés már mélyebb matematikát igényelt, [13]-ban egyszerű bizonyítás található erre a szép eredményre.

A további fejlemények a valószínűségszámítás és a funkcionálanalízis egyre nehezebb fejezeteit használták. Szükségessé vált az arbitrázs fogalmának kibővítése: folytonos időparaméterű modellekben (azaz ahol a kereskedés folytonosan történik) ahhoz, hogy martingálmértékeket kaphassunk, fel kell tenni, hogy még befektetések limeszeként sem lehetséges arbitrázshoz jutni. Evégett az 1. definícióban bemutatott aszimptotikus arbitrázshoz hasonló fogalmak születtek, melyekben különféle módokon kell határértéket venni (pl. sztochasztikusan vagy 1 valószínűséggel). A 4. szakaszban konkrét példát is mutatunk erre. A terjedelmes irodalomból most csak a [5, 18] cikkekre és [10]-re utalunk.

Nézzük meg most, mit értünk martingálmértéken az APT modellben!

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy a Q valószínűségi mérték martingálmérték az APT modellben, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$E^Q R_n = 1 + r,$$

azaz e mérték szerint minden termék átlagos hozama megegyezik a kockázatmentes hozammal.

4 A két elmélet összefonódása

Elsőként a [11] dolgozat vizsgálta nagy piacokon az arbitrázsmentesség és a martingálmértékek kapcsolatát. Ezt [16], [17], [12], [14], [15], [4] követték. Jó áttekintést ad e témáról a [10] tanulmány.

Példaképpen a [15] cikk egy aszimptotikus arbitrázsfogalmát ragadjuk ki:

3. definíció *Azt mondjuk, hogy az NFLBR feltétel ("no free lunch with bounded risk") teljesül, ha a $c = 0$ a kiindulási tőke esetén nincsen olyan n_k, $k \in \mathbb{N}$ növő sorozat és ϕ_{n_k} önfinanszírozó portfóliók az n_k terméket tartalmazó piacon, hogy*

$$V(\phi_{n_k}) \overset{st}{\to} V,$$
$$\text{van olyan } A > 0 \text{, hogy minden } k\text{-ra, } V(\phi_{n_k}) \geq -A,$$
$$V \geq 0 \text{ és } P(V > 0) > 0.$$

Itt $X_n \overset{st}{\to} X$ azt jelenti, hogy valószínűségi változók egy X_n sorozata sztochasztikusan tart az X-hez.

A második feltétel azt jelenti, hogy az arbitrázsügyletek során nem lehet korlátlan hitelt felvenni, ez meglehetősen természetes feltételezés.

Látható e definíció számos előnye: már nem követeljük meg, hogy az árfolyamat második momentuma létezzen, és szakítunk a szórás mint kockázati mérték használatával.

Az elmélet tipikus tételei a következő módon festenek (a zárójeles példa mindig a [15] cikkre vonatkozik): ha nincs aszimptotikus arbitrázs (pl. NFLBR igaz) árfolyamatok egy adott osztályában (pl. folytonos trajektóriájú folyamatok), akkor léteznek jó tulajdonságokkal bíró kockázatsemleges árazó funkcionálok (pl. a piac minden véges szegmensén létezik martingálmérték, és ezek sorozata „szépen viselkedik").

Sajnos, az ismert eredmények jó része csak meglehetősen komplikált és nehezen megragadható módon szolgáltat kockázatsemleges árazó funkcionálokat: az előző bekezdés példájában mindössze ilyenek egy sorozatát kapjuk. Fontos volna feltételeket találni a 2. definícióban szereplő martingálmérték létezésére.

Ez a [21] és [22] közlemények kiindulópontja. E két cikk (mint korábban [12] is) a 2. szakaszbeli APT modellt vizsgálja. [21] szükséges és elégséges feltételt ad martingálmértékek létezésére egy bizonyos erős értelemben, ez a kritérium alkalmazható olyan modellekben is, ahol a hozamokat stabil eloszlású valószínűségi változókkal írják le, mint például [6]-ban. A [22] cikk a klasszikus APT-ben ad feltételt kockázatsemleges árazó mérték létezésére:

2. tétel. *Bizonyos technikai feltételek megléte esetén ha nincs aszimptotikus arbitrázs az 1. definíció értelmében, akkor létezik Q martingálmérték (a 2. definíció szerinti értelemben).*

5 Nyitott kérdések

Továbbra sem ismeretesek pontos, általános feltételek arra nézve, hogy egy nagy piacon létezzék martingálmérték. Másik, a gyakorlat szempontjából lényeges probléma: találjunk a (2)-höz hasonló relációkat, melyeknek egy arbitrázsmentes piacon teljesülniük kell. Az ilyen összefüggéseket arbitrázs kimutatására lehetne használni pl. kötvénypiacok esetében.

Irodalom

1. A. Admati and P. Pfleiderer. Interpreting the factor risk premia in the arbitrage pricing theory. *J. Econom. Theory*, 35(1):191–195, 1985.
2. F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Econom.*, 72:637–659, 1973.
3. R. C. Dalang, A. Morton, and W. Willinger. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics and Stochastic Rep.*, 29(2):185–201, 1990.
4. M. DeDonno. A note on completeness in large financial markets. *Math. Finance*, 14(2):295–315, 2004.
5. F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994.
6. B. Gamrowski and S. T. Rachev. Stable models in testable asset pricing. In *Approximation, probability, and related fields (Santa Barbara, CA, 1993)*, 223–235. Plenum, New York, 1994.
7. J. M. Harrison and S. R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3):215–260, 1981.
8. C. Huang and R. H. Litzenberger. *Foundations for financial economics.* North-Holland, New York, 1988.
9. G. Huberman. A simple approach to arbitrage pricing theory. *J. Econom. Theory*, 28(1):289–297, 1982.
10. Yu. M. Kabanov. Arbitrage theory. In *Handbooks in Mathematical Finance: Topics in Option Pricing, Interest Rates and Risk Management.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
11. Yu. M. Kabanov and D. O. Kramkov. Large financial markets: asymptotic arbitrage and contiguity. *Theory Probab. Appl.*, 39(1):182–187, 1994.
12. Yu. M. Kabanov and D. O. Kramkov. Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance Stoch.*, 2(2):143–172, 1998.
13. Yu. M. Kabanov and Ch. Stricker. A teachers' note on no-arbitrage criteria. In *Séminaire de Probabilités, XXXV*, 149–152. Springer, Berlin, 2001.
14. I. Klein. A fundamental theorem of asset pricing for large financial markets. *Math. Finance*, 10(4):443–458, 2000.

15. I. Klein. Free lunch for large financial markets with continuous price processes. *Ann. Appl. Probab.*, 13(4):1494–1503, 2003.
16. I. Klein and W. Schachermayer. Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets. *Theory Probab. Appl.*, 41(4):780–788, 1996.
17. I. Klein and W. Schachermayer. A quantitative and a dual version of the Halmos-Savage theorem with applications to mathematical finance. *Ann. Probab.*, 24(2):867–881, 1996.
18. D. M. Kreps. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities. *J. Math. Econom.*, 8(1):15–35, 1981.
19. J. Lintner. The valuation of risky assets, and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47:13–37, 1965.
20. J. Mossin. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, October, 1966.
21. M. Rásonyi. Equivalent martingale measures for large financial markets in discrete time. *Math. Methods Oper. Res.*, 58:401–415, 2003.
22. M. Rásonyi. Arbitrage pricing theory and risk-neutral measures. *Decis. Econ. Finance*, 27(2):109–123, 2004.
23. S. A. Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *J. Econom. Theory*, 13(3):341–360, 1976.
24. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes.* Chapman & Hall, New York, 1994.
25. W. Sharpe. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *J. Finance*, 19:425–442, 1964.

ARBITRAGE IN LARGE FINANCIAL MARKETS

We present an overview of recent results in the arbitrage theory of financial market models with an infinite sequence of assets. We analyze the relationship between absence of arbitrage and the existence of martingale measures focusing on the classical Arbitrage Pricing Theory.

ARBITRÁZSLEHETŐSÉGEK VIZSGÁLATA A MAGYAR ÁLLAMPAPíRPIACON[1]

MAKARA TAMÁS
Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések Tanszék

A dolgozat két, az állampapírpiachoz kapcsolódó problémát mutat be, melyeket lineáris programozással oldhatunk meg. A dolgozat egyik része azt mutatja be, hogy hogyan lehet az arbitrázslehetőségeket felismerni, majd azt vizsgálja, hogy az Államadósság Kezelő Központ által megfigyelt vételi és eladási árfolyamjegyzések alapján voltak-e arbitrázslehetőségek a magyar állampapírpiacon az elmúlt két évben. A másik rész azt tárgyalja, hogy hogyan lehet a kockázatmentes pénzáramlásokat értékelni a tranzakciós költségek figyelembevételével az arbitrázsmentesség elve alapján.[2]

Kulcsszavak: állampapírpiac, arbitrázs, replikáció, árazás tranzakciós költségek mellett.

1 Bevezetés

Egy értékpapírpiacon statikus arbitrázsra van lehetőség, ha a befektetőknek lehetőségük van olyan tranzakciókat végezni, amelyek eredőjeként a befektetőnek sem a jelenben, sem egyetlen jövőbeli lehetséges világállapotban nem keletkezik kiadása, és legalább egy világállapotban (akár a jelenben, akár egy lehetséges jövőbeli világállapotban) bevétele keletkezik. (Az arbitrázsmentes árazással kapcsolatos fogalmakat és tételeket lásd pl. Medvegyev (2002).) Ebben a cikkben az arbitrázslehetőséget az állampapírpiac sajátosságait figyelembe véve kicsit eltérően határozzuk meg. Az arbitrázslehetőségek felismeréséhez lineáris programozási feladatokat oldunk meg. A lineáris programozás alkalmazása az állampapírpiachoz kapcsolódó szakirodalomban nem új, lásd például Hodges és Schaefer (1977), Ronn (1987) és Jaschke (1998) cikkeit. E cikk fogalomhasználata nagyjából megfelel Jaschke megközelítésének.

A cikk felépítése a következő: a 2. pontban mutatjuk be a cikkben alkalmazott arbitrázsfogalmat és az arbitrázslehetőségek felismeréséhez megoldandó lineáris programozási feladatokat. A 3. pontban ismertetjük azt az empirikus vizsgálatot, amelynek során az Államadósság Kezelő Központ által rögzített árfolyamjegyzések alapján azt vizsgáljuk, hogy vannak-e arbitrázslehetőségek a magyar állampapírpiacon. A 4. pontban azt mutatjuk

[1]Beérkezett: 2004. október 3. e-mail: t.makara@alarmix.net.

[2]Köszönettel tartozom a cikk első változatához fűzött értékes megjegyzéseikért Berlinger Edinának, Michaletzky Mártonnak, Móricz Dánielnek és Petrimán Zitának.

be, hogy hogyan befolyásolja a kockázatmentes pénzáramlások árazását a tranzakciós költségek megléte.

A cikk fogalomhasználata és módszertani megközelítésmódja nem új, azonban a 3. pont empirikus eredményei azok.

2 Az arbitrázsfeladat

Adott n darab fix kamatozású állampapír (vagy rövidebben: kötvény) és a t_1, t_2, ..., t_m jövőbeli időpontok ($0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$), amikor legalább egy kötvény tulajdonosai kamatra vagy törlesztésre jogosultak. Az i-edik kötvény pénzáramlása a j-edik jövőbeli időpontban C_{ij}, amiről feltételezzük, hogy kockázatmentes, azaz minden körülmények között kifizetésre kerül. Az i-edik kötvény vételi árfolyama p_i^b (ezen az áron adhatják el a befektetők a papírt az árjegyzőnek), eladási árfolyama p_i^a (ezen az áron vásárolható meg a papír az árjegyzőtől), $p_i^b \leq p_i^a$. A befektető az i-edik kötvényből $x_i^a \geq 0$ mennyiséget vásárol és $x_i^b \geq 0$ mennyiséget ad el (ez lehet fedezetlen eladás, azaz *short sale*). Feltesszük, hogy a kötvények korlátlanul oszthatók, tehát $x_i^a \in I\!R$ és $x_i^b \in I\!R$. A befektető $v_0 = \sum_{i=1}^n (x_i^b p_i^b - x_i^a p_i^a)$ azonnali bevételre tesz szert, pénzáramlása a j-edik jövőbeli időpontban $v_j = \sum_{i=1}^n (x_i^a - x_i^b) C_{ij}$. A $(\mathbf{p}^b, \mathbf{p}^a, \mathbf{C})$ árakkal és pénzáramlásokkal jellemezhető állampapírpiacon akkor van statikus arbitrázslehetőség, ha léteznek $0 \leq x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b$ és $0 \leq x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a$ valós számok, amelyekre

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_m)' > \mathbf{0} \ ,$$

ahol $'$ a transzponálás jele, az $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ reláció pedig úgy értendő, hogy $\mathbf{a}$ egyik eleme sem kisebb, mint $\mathbf{b}$ megfelelő eleme, és $\mathbf{a}$ legalább egy eleme nagyobb, mint $\mathbf{b}$ megfelelő eleme.

Az eddigiek során nem vettük figyelembe, hogy a befektetőnek lehetősége van, és a jövőben is lehetősége lesz betétben elhelyezni a pénzét, feltételezhetően pozitív nominális kamatláb mellett, és ezért az arbitrázslehetőség definícióját túl szigorúan szabtuk meg. Tegyük fel például, hogy a befektetőnek módja lenne szert tenni a következő pénzáramlásra: $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_j = 0, (j = 3, \ldots, m)$. Tágabb értelemben ez is arbitrázsnak tekinthető, ugyanis a befektető a t_1 időpontbeli bevételéből biztosan törleszteni tudja majd a t_2 időpontban esedékes kötelezettségét, és mivel a t_1 és t_2 közötti időszakra pozitív kamatláb mellett tudja befektetni a t_1 időpontbeli bevételt, a t_2 időpontban esedékes kötelezettséget meghaladó, szabadon elkölthető jövedelemre tesz szert.

A továbbiakban ezért arbitrázslehetőségen a következő, tágabban definiált fogalmat értjük: A $(\mathbf{p}^b, \mathbf{p}^a, \mathbf{C})$ árakkal és pénzáramlásokkal jellemezhető állampapírpiacon akkor van arbitrázslehetőség, ha léteznek $0 \leq x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b$ és $0 \leq x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a$ valós számok, amelyekre

$$\mathbf{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_m)' > \mathbf{0} \ ,$$

ahol $k_j = \sum_{s=0}^j v_s$ a befektető kumulált pénzáramlása a megfelelő időpontban.

Hogy adott állampapírpiacon van-e arbitrázslehetőség, eldönthető a következő lineáris programozási feladat megoldásával:

$$\max_{x_i^a, x_i^b, i \in \{1,2,\ldots,n\}} \sum_{j=0}^{m} k_j \tag{1}$$

a következő korlátok mellett:

$$0 \leq x_i^a\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,;$$

$$0 \leq x_i^b\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,;$$

$$x_i^a \leq 1\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,; \tag{2}$$

$$x_i^b \leq 1\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,; \tag{3}$$

$$0 \leq k_j\,, \quad j = 0,1,\ldots,m\,.$$

A fenti feladatnak biztosan van megvalósítható megoldása, hisz megvalósítható megoldás az, ha a befektető nem csinál semmit, azaz $x_i^b = x_i^a = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Mivel ebben az esetben a célfüggvény értéke nulla, a célfüggvény értéke az optimumban nem lehet negatív. Ha a célfüggvény értéke az optimumban pozitív, akkor van arbitrázslehetőség. A (2) és (3) feltételek a feladatot normalizálják: azt biztosítják, hogy a célfüggvény optimális értéke véges legyen akkor is, ha van arbitrázslehetőség.

Az eddigiek során nem foglalkoztunk azokkal az esetleges tranzakciós költségekkel, amelyek nem a vételi és az eladási árfolyam különbségéből fakadnak (például felügyeleti, tőzsdei díjak, fedezetlen eladás esetén az értékpapír kölcsönzésének díja). Az állampapírpiacon általában a tranzakciós költséget döntő mértékben a vételi és az eladási árfolyamok közötti különbség jelenti, az egyéb költségek ehhez képest általában elenyészőek (ez alól kivételt jelenthet az értékpapír kölcsönzési díja). Az arbitrázslehetőségek felismerése szempontjából nem jelentenek problémát az olyan költségek, amelyek lineárisan függnek az egyes értékpapírokból vásárolt, illetve eladott mennyiségektől. Ez esetben a p_i^b vételi árfolyamokból le kell vonni az egységnyi eladásra jutó tranzakciós költséget, a p_i^a eladási árfolyamokhoz pedig hozzá kell adni az egységnyi kötvényvásárlásra jutó tranzakciós költséget, de továbbra is az (1) lineáris programozási feladatot kell megoldanunk. Abban az esetben, ha a költségek nemlineárisan függnek a vett és eladott értékpapír-mennyiségektől, akkor elvben nemlineárissá válik a megoldandó feladat. Gyakran azonban ez esetben is megoldást jelent a lineáris programozás: ha az (1) feladat megoldásával nem találunk arbitrázslehetőséget, akkor biztosak lehetünk abban, hogy nincs arbitrázslehetőség. Ha pedig az (1) feladat optimumában a célfüggvény értéke pozitív, és a megtalált arbitrázslehetőség nyereségét nem emésztik fel a feladatban figyelembe nem vett tranzakciós költségek, akkor találtunk egy arbitrázslehetőséget. Csak akkor kell a nemlineáris programozáshoz folyamodnunk, ha az (1) feladat optimumában a célfüggvény értéke pozitív, és a megtalált arbitrázslehetőség nyereségét felemésztik a feladatban figyelembe nem vett tranzakciós költségek.

3 Arbitrázslehetőségek vizsgálata a magyar állampapírpiacon

A magyar állampapírpiacon speciális jogokkal és kötelezettségekkel bíró piaci szereplők, az elsődleges forgalmazók, kötelesek folyamatosan kétoldali (vételi és eladási) árat jegyezni az állampapírokra a tőzsdei kereskedésben. Bár az állampapírpiaci forgalom döntő része a tőzsdén kívüli kereskedésben bonyolódik le, a tőzsdei árjegyzésnek az állampapírpiaci árfolyamok megismerése szempontjából kiemelt jelentősége van. A tőzsdén kívüli kereskedésben ugyanis az árjegyzés jellemzően két fél közötti, nem nyilvános kommunikációban történik, így az elsődleges forgalmazó által jegyzett vételi és eladási árak, valamint a megkötött üzletek árfolyamai a többi piaci szereplő számára közvetlenül nem megfigyelhetőek. A tőzsdei kereskedési rendszerben megjelenő vételi és eladási ajánlatok azonban nyilvánosak és kötelező érvényűek: az elsődleges forgalmazó az általa jegyzett áron köteles üzletet kötni bármely, a tőzsde hitelpapír-szekciójában kereskedési joggal bíró tőzsdetaggal.

A kötelező tőzsdei árjegyzési időszakra az elsődleges forgalmazók számára elő van írva, hogy minimálisan milyen mennyiségre kell árat jegyezniük, és hogy legfeljebb mekkora lehet a különbség az általuk jegyzett vételi és eladási árfolyamok között. Jelenleg a leglikvidebb, úgynevezett referencia államkötvényekre valamennyi elsődleges forgalmazó köteles folyamatosan árat jegyezni, minimum 200 millió forint névértékre. A többi, tőzsdére bevezetett fix kamatozású államkötvény és diszkont kincstárjegy esetében pedig három, pályázat, illetve sorsolás útján kiválasztott elsődleges forgalmazó köteles árat jegyezni minimum 100 millió forint névértékre. A vételi és eladási árfolyamok különbsége korlátozott: a vételi és az eladási árfolyamok alapján kalkulált lejáratig számított hozamok (röviden: vételi és eladási hozamok) különbsége nem haladhatja meg az 50 bázispontot (1 bázispont = 0,01 százalékpont). A tőzsdén kívüli kereskedésben az árfolyamjegyzés jellemzően a fentieknél nagyobb mennyiségekre vonatkozik, a jegyzett vételi és eladási hozamok különbsége pedig lényegesen kisebb, jelenleg jellemzően 10-15 bázispont körül alakul.

Az Államadósság Kezelő Központ (ÁKK) naponta kétszer (egyszer délelőtt és egyszer délután), egy véletlenszerűen meghatározott időpontban rögzíti a tőzsdei kereskedési rendszerbe bevitt, az állampapírokra szóló legmagasabb vételi és legalacsonyabb eladási ajánlatokat, és ezeket nyilvánosságra hozza. 2003. augusztus 29. előtt pedig naponta egyszer rögzítették a legjobb vételi és eladási árfolyamokat. Empirikus vizsgálatunk alapját az ÁKK által 2002. június 13. és 2004. április 27. között rögzített árfolyamjegyzések jelentik. Ezek az adatok a majdnem két évet felölelő időszak összesen 470 kereskedési napjáról rögzítenek 629 pillanatképet. Az (1) lineáris programozási feladatok megoldásával megállapíthatjuk, hogy az adott pillanatban a tőzsdei árfolyamjegyzések alapján volt-e arbitrázslehetőség. A lineáris programozási feladatok mérete számítástechnikai oldalról nem jelent problémát: 2004. április végén például a figyelembe veendő állampapírok száma $n = 25$, a kifizetési dátumok száma $m = 77$, így 50 változót kell optimalizálni 178 korlát mellett.

Az arbitrázslehetőségek vizsgálata a piac fejlettségének egyfajta tesztje: jól működő piacon azt várjuk, hogy tartósan nem állnak fenn arbitrázslehetőségek. Az ÁKK által rögzített árjegyzések alapján azt tapasztaltuk, hogy a rögzített 629 időpontból 625 esetben nem volt lehetőség arbitrázsra, 4 alkalommal viszont volt. Az, hogy ezekben az esetekben mekkora nyereséget lehetett volna elérni az arbitrázzsal, attól függ, milyen mennyiségre szóltak a vételi, illetve eladási ajánlatok. Az ÁKK nem rögzíti, hogy az egyes vételi és eladási ajánlatok milyen mennyiségre szólnak, de ha abból indulunk ki, hogy az elsődleges forgalmazók általában az előírt 100 MFt névértékű papírra jegyeznek árat, akkor viszonylag pontosan meg tudjuk becsülni az elérhető nyereséget. Ez alapján 2003. december 1-jén délelőtt körülbelül 13 EFt azonnali nyereséget lehetett elérni (anélkül, hogy a befektetőnek jövőbeli kötelezettsége keletkezett volna), 2003. december 8-án délelőtt 45 EFt-ot, 2003. december 9-én délután 9 EFt-ot, 2003. december 31-én délelőtt pedig megközelítőleg 54 EFt-ot lehetett nyerni arbitrázzsal. (Az elérhető nyereségek meghatározásánál figyelembe vettük a szükséges tranzakciók után fizetendő felügyeleti és tőzsdei díjakat is. Nem vettünk figyelembe értékpapírkölcsönzési díjat: a számított nyereséget csak olyan tőzsdetagok érhették volna el, akik rendelkeztek az eladandó állampapírral. Azt sem vettük figyelembe, hogy a szükséges tranzakciók egy része az adott pillanatban feltehetőleg előnyösebb áron is megköthető lett volna a tőzsdén kívüli kereskedésben.) Ezek a nyereségek nem tűnnek nagynak, ha arra gondolunk, hogy elérésükhöz minden esetben körülbelül 200 millió forint névértékű állampapírt kellett volna megmozgatni; mégis, egy elsődleges állampapír-forgalmazótól pár gombnyomásnál nem igényeltek volna nagyobb erőfeszítést, ha rendelkezett az eladandó papírral.

Összességében elmondhatjuk, hogy 4 arbitrázslehetőség a vizsgált 629 alkalomból nem tűnik soknak, és nem utal arra, hogy a magyar állampapírpiac rosszul működne. A piac hatékonyságával nem összeegyezhetetlen, hogy időnként arbitrázsra nyíljon lehetőség, csak az nem fér össze a hatékony piaci működéssel, ha az arbitrázslehetőség tartósan fennáll. A vizsgálat eredményének értékeléséhez azt is tudnunk kell, hogy nem zárható ki, hogy az arbitrázslehetőségeket a piac azért nem szüntette meg, mert az adott pillanatban valamelyik állampapírból hiány volt, azaz az elsődleges forgalmazók egyikének sem volt a portfóliójában több, mint amennyit az árjegyzési kötelezettség ellátásához minimálisan szükségesnek tartott (ez esetben az arbitrázslehetőség csak látszólagos, mert az eladandó értékpapír kölcsönzésének díját nem vettük figyelembe).

Érdekes körülmény, hogy mind a négy arbitrázslehetőség ugyanarra a hónapra, 2003 decemberére esik. Ennek egy lehetséges magyarázata, hogy ebben a 2003. november 28-i 300 bázispontos jegybanki kamatemelést követő időszakban az állampapírpiaci árfolyammozgások a szokásosnál sokkal nagyobbak és gyorsabbak voltak, és a tőzsdén kívüli kereskedésben a szokottnál nagyobb árfolyamkülönbséggel jegyezték a vételi és eladási árfolyamokat. Ilyen körülmények között az elsődleges forgalmazóknak a szokásosnál lényegesen gyakrabban kell módosítaniuk tőzsdei árfolyamjegyzéseiket (normál piaci körülmények között erre csak ritkán van szükség), és amennyiben egy árjegyző elmulasztja időben frissíteni ajánlatait, arbitrázslehetőség keletkezhet.

4 Pénzáramlások értékelése tranzakciós költségek mellett

Tekintsük a következő, az 1. pontban ismertetett arbitrázsfeladathoz szorosan kapcsolódó problémát! Ismerjük az állampapírpiacon forgó kötvények pénzáramlásait és árfolyamait, és adott egy $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)'$ kockázatmentes pénzáramlás, $\mathbf{z} \in I\!R^m$, ahol z_j azt az összeget jelöli, amelyet a pénzáramlás jogosultja a t_j időpontban kap. Mennyit ér ma ez a pénzáramlás, illetve mi az az érték, aminél többet semmiképpen nem érdemes fizetni érte, és mi az az érték, aminél kevesebbért semmiképpen nem érdemes eladni?

Mielőtt a fenti kérdésekre válaszolnánk, röviden áttekintjük, hogy hogyan árazható egy kockázatmentes pénzáramlás, ha tökéletes a piac, és nincsenek tranzakciós költségek. Az 1. pontban feltételezettek szerint legyenek ismertek n kötvény pénzáramlásai a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ időpontokban, és legyenek ismertek a kötvények árfolyamai is. Mivel nincsenek tranzakciós költségek, a kötvények vételi és eladási árfolyamai megegyeznek: $p_i = p_i^b = p_i^a$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Megmutatható (lásd pl. Medvegyev [2002]), hogy ha nincs lehetőség statikus arbitrázsra, akkor léteznek $d_1, d_2, \ldots, d_m \in I\!R$ pozitív diszkonttényezők, amelyekre

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} C_{ij} d_j \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \ ;$$

továbbá, ha a $\mathbf{z}$ pénzáramlás árfolyama, z_0 eltérne a

$$\sum_{j=1}^{m} z_j d_j$$

jelenértéktől, akkor arbitrázsra lenne lehetőség. (Megjegyezzük, hogy a diszkonttényezők csak teljes piacon egyértelműen meghatározottak.)

Ez az egyszerű, tankönyvi jelenértékszámítás sajnos a gyakorlatban nem működik, hiszen a valóságban az állampapírok vételi és eladási árfolyamai eltérnek. Térjünk vissza az 1. pontban ismertetett modellhez és jelölésekhez, és tegyük fel ismét, hogy a kötvények eladási árfolyamai meghaladhatják a vételi árfolyamokat. Tegyük fel továbbá, hogy az állampapírok jól árazottak abban az értelemben, hogy az állampapírpiacon nincs lehetőség arbitrázsra. Jelölje z_0^b a $\mathbf{z}$ pénzáramlás vételi árfolyamát, z_0^a pedig az eladási árfolyamát. Kérdésünk a következő: milyen feltételeknek kell teljesülniük a z_0^b és z_0^a árfolyamokra, hogy ne legyen lehetőség arbitrázsra?

Ahhoz, hogy ne legyen lehetőség arbitrázsra, szükséges, hogy önmagában a $\mathbf{z}$ pénzáramlás adásvételével ne lehessen arbitrázsportfóliót előállítani. Jelölje $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m)'$ a $\mathbf{z}$ pénzáramláshoz tartozó kumulált jövőbeli pénzáramlást, ahol $\kappa_j = \sum_{s=1}^{j} z_s$. A $\mathbf{z}$ pénzáramlás z_0^b összegért történő eladásához tartozó kumulált pénzáramlás a jelenbeli pénzáramlás figyelembevételével:

$$(z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \dots, z_0^b - \kappa_m) \ .$$

Ha ez nem jelent arbitrázslehetőséget, akkor z_0^b felső korlátja a

$$\rho^+(\mathbf{z}) = \sup\left\{z_0^b \mid (z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \dots, z_0^b - \kappa_m)' \not> \mathbf{0}\right\} =$$
$$= \max\{0, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\}$$

érték. Hasonlóképpen, mivel $\mathbf{z}$ pénzáramlás megvásárlásához tartozó kumulált pénzáramlás a jelenbeli pénzáramlás figyelembevételével

$$(-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \dots, \kappa_m - z_0^a) \ ,$$

z_0^a alsó korlátja:

$$\rho^-(\mathbf{z}) = \inf\{z_0^a \mid (-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \dots, \kappa_m - z_0^a)' \not> \mathbf{0}\} =$$
$$= \min\{0, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\} \ .$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy $z_0^b \le z_0^a$ fenn kell álljon, ellenkező esetben a pénzáramlás egyidejű megvásárlása és eladása arbitrázslehetőséget jelentene.

Azokat az eseteket is meg kell vizsgálnunk, amikor a befektető megvásárolja vagy eladja a $\mathbf{z}$ pénzáramlást, és ezt állampapírpiaci tranzakciókkal kiegészítve próbál meg arbitrázsportfóliót előállítani. Jelölje $K \subset \mathbb{R}^{m+1}$ az állampapírpiaci tranzakciókkal létrehozható portfóliók $\mathbf{k}$ kumulált pénzáramlásainak halmazát. A $\mathbf{z}$ pénzáramlás eladása arbitrázslehetőséget eredményez, ha létezik olyan $\mathbf{k} \in K$, amelyre

$$(z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \dots, z_0^b - \kappa_m)' + \mathbf{k} > \mathbf{0} \ .$$

A $\mathbf{z}$ pénzáramlás megvásárlása pedig akkor eredményez arbitrázslehetőséget, ha létezik olyan $\mathbf{k} \in K$, amelyre

$$(-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \dots, \kappa_m - z_0^a)' + \mathbf{k} > \mathbf{0} \ .$$

Így z_0^b értékének felső korlátja a

$$\sigma^+(\mathbf{z}) = \sup\left\{z_0^b \mid \nexists \mathbf{k} \in K : (z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \dots, z_0^b - \kappa_m)' + \mathbf{k} > \mathbf{0}\right\}$$

érték, és z_0^a értékének alsó korlátja a

$$\sigma^-(\mathbf{z}) = \inf\{z_0^a \mid \nexists \mathbf{k} \in K : (-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \dots, \kappa_m - z_0^a)' + \mathbf{k} > \mathbf{0}\}$$

érték. A $\sigma^-(\mathbf{z})$ értéket az alábbi lineáris programozási feladat célfüggvényének optimális értékeként határozhatjuk meg:

$$\max_{x_i^a, x_i^b, i \in \{1,\dots,n\}} v_0 \tag{4}$$

a következő korlátok mellett:

$$0 \le x_i^a \ , \quad i = 1, \dots, n \ ;$$

$$0 \leq x_i^b\,, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

$$-\kappa_j \leq \sum_{s=1}^{j} v_s\,, \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

ahol v_j az 1. pontban bevezetett jelölésnek megfelelően a befektető állampapír-portfóliójának kumulálatlan pénzáramlását jelöli a megfelelő időpontban. A célfüggvény értéke az optimumban azt mutatja meg, hogy mekkora mai bevételre tehet szert állampapírpiaci tranzakciókkal a $\mathbf{z}$ pénzáramlás birtokosa amellett a korlát mellett, hogy teljes jövőbeli kumulált pénzáramlása egyetlen jövőbeli időpontban se váljon negatívvá (a teljes pénzáramláson az állampapír-pozíciókból származó pénzáramlások és a $\mathbf{z}$ pénzáramlás összegét értjük). Ha valaki ennél olcsóbban vásárolhatná meg a $\mathbf{z}$ pénzáramlást, az arbitrázslehetőséghez jutna.

A $\sigma^+(\mathbf{z})$ értéket pedig az alábbi lineáris programozási feladat célfüggvényének optimális értékeként határozhatjuk meg:

$$\min_{x_i^a, x_i^b, i \in \{1,\ldots,n\}} -v_0 \tag{5}$$

a következő korlátok mellett:

$$0 \leq x_i^a\,, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

$$0 \leq x_i^b\,, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

$$\kappa_j \leq \sum_{s=1}^{j} v_s\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Ez a feladat azt mutatja meg, hogy mekkora a minimális költség, ami mellett az állampapírpiacon létrehozható egy olyan pozíció, amelynek jövőbeli kumulált pénzáramlása egyetlen jövőbeli időpontban sem kisebb a kumulált $\mathbf{z}$ pénzáramlásnál. Ha valaki ennél drágábban adhatná el a $\mathbf{z}$ pénzáramlást, az arbitrázslehetőséghez jutna.

A tranzakciós költségektől mentes modellben a pénzáramlás jelenértéke lineáris függvénye a pénzáramlásnak, és ha egyszer sikerült meghatározni a $d_1, d_2, \ldots, d_m$ diszkonttényezőket, akkor bármilyen pénzáramlás értékét könnyen meghatározhatjuk. Tranzakciós költségek mellett azonban bonyolultabb a helyzet, a $\sigma^+(\mathbf{z})$ és $\sigma^-(\mathbf{z})$ értékek a $\mathbf{z}$ pénzáramlásnak nemlineáris függvényei. Könnyen belátható, hogy lineárisan homogén, de nem additív függvényekről van szó, mégpedig:

$$\sigma^+(\alpha\mathbf{z}) = \alpha\sigma^+(\mathbf{z})\,,$$

$$\sigma^-(\alpha\mathbf{z}) = \alpha\sigma^-(\mathbf{z})\,,$$

$$\sigma^+(\mathbf{z}+\mathbf{y}) \leq \sigma^+(\mathbf{z}) + \sigma^+(\mathbf{y})\,,$$

$$\sigma^-(\mathbf{z}+\mathbf{y}) \geq \sigma^-(\mathbf{z}) + \sigma^-(\mathbf{y})\,,$$

ahol $0 < \alpha \in I\!R$, $\mathbf{z} \in I\!R^m$ és $\mathbf{y} \in I\!R^m$ tetszőleges pénzáramlások. Ez azt jelenti, hogy a σ^+ és σ^- értékek meghatározásához lényegében minden pénzáramláshoz külön meg kell oldanunk a (4) és (5) lineáris programozási feladatokat.

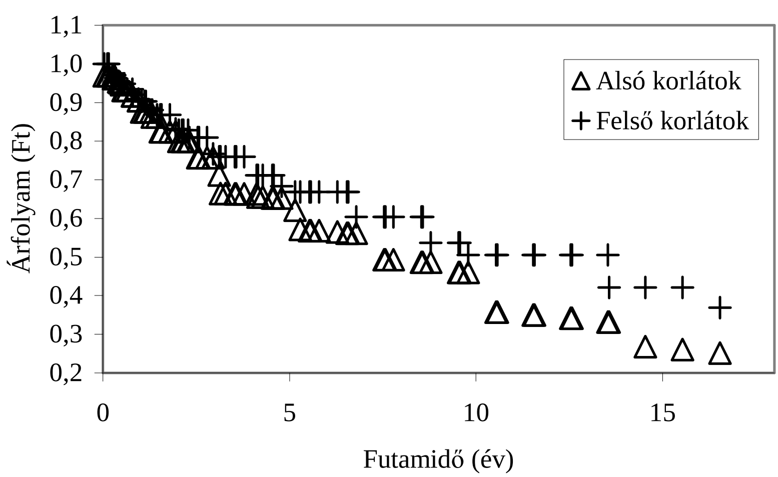
A fentieket összefoglalva, ha nincs lehetőség arbitrázsra, akkor teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$z_0^b \le z_0^a \ ,$$

$$z_0^b \le \min\{\rho^+(\mathbf{z}), \sigma^+(\mathbf{z})\} \ ,$$

$$z_0^a \ge \max\{\rho^-(\mathbf{z}), \sigma^-(\mathbf{z})\} \ .$$

A 2004. április 27-én, délután rögzített tőzsdei árfolyamjegyzések alapján szemléltetjük, hogy a fenti korlátok mit jelentenek a magyar állampapírpiacon. Ezen a napon $n = 25$ fix kamatozású államkötvény, illetve diszkontkincstárjegy árfolyamára jegyeztek árat az elsődleges forgalmazói rendszerben, és $m = 77$ kifizetési időpont volt, amikor legalább egy kötvény jövőbeli pénzáramlása pozitív. Meghatároztuk a 77 elemi pénzáramlás értékének alsó és felső korlátait, elemi pénzáramláson értve egy olyan pénzáramlást, amely 1 forintra jogosít az egyik kifizetési időpontban, és nulla forintra a többi időpontban. Az elemi pénzáramlások értékének nyilván felső korlátja az 1Ft, és alsó korlátja a 0Ft (ez felel meg a ρ^+ és ρ^- korlátoknak), a σ^+ és σ^- korlátokat pedig a megfelelő lineáris programozási feladatok megoldásával határoztuk meg. Az *1. ábra* az elemi pénzáramlások értékeinek alsó, illetve felső korlátait ábrázolja.

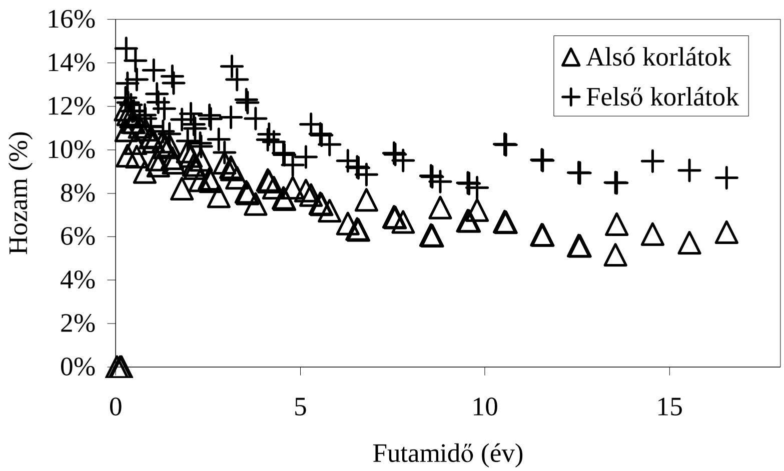


1. ábra. Az elemi pénzáramlások értékeinek alsó és felső korlátai 2004. április 27-én

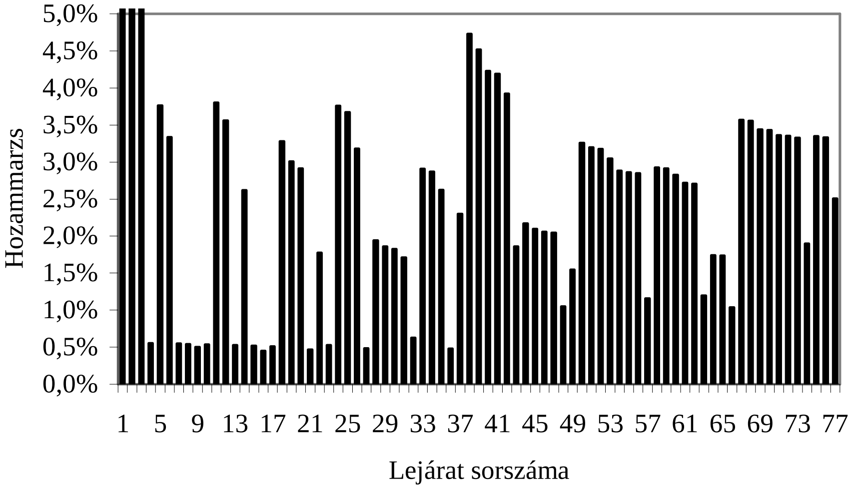
Kiszámítottuk, hogy milyen éves hozamot jelentene egy befektetőnek, ha az egyes elemi pénzáramlásokat az alsó, illetve felső korlátnak megfelelő árfolyamon vásárolhatná meg, ezek a hozamok az elemi pénzáramlások lehetséges hozamainak felső, illetve alsó korlátai. Ezeket szemlélteti a *2. ábra.*

Jól látható, hogy a hozamok felső és alsó korlátai közötti különbség erőteljes eltérést mutat az egyes elemi pénzáramlások esetében. Az egyszerűen replikálható elemi pénzáramlásoknál ez a marzs szűk, 50 bázispont körül alakul, míg a bonyolultan, sok állampapír felhasználásával és ezért nagy tranzakciós költséggel replikálható elemi pénzáramlások esetében a különbözet a 300-400 bázispontot is elérheti. A három legrövidebb futamidejű elemi pénzáramlás esetében a különbözet rendkívül nagy, 20 és 140 százalékpont között alakul. Az egyes elemi pénzáramlások hozamainak felső és alsó korlátai közötti különbséget a *3. ábra* mutatja. (Az áttekinthetőség kedvéért a skálát úgy választottuk meg, hogy az első három pénzáramlás esetében a különbözet nem látszik.)

Mindez jól szemlélteti, hogy milyen jelentőséggel bír a Száz [1996] cikkében megfogalmazott javaslat. Száz az állampapírpiac olyan szabványosítását javasolja, amely az elemi pénzáramlások állampapírpiaci replikálását triviálissá tenné. A javaslat megvalósulása esetén a fenti különbözetek mind 50 bázispont körül alakulnának (feltéve, hogy az árfolyamjegyzők legfeljebb 50 bázispont különbséggel jegyezhetnének vételi és eladási hozamot). Ez azt eredményezné, hogy a gazdasági szereplők pontosabban tudnák értékelni a különböző pénzáramlásokat.



2. ábra. Az elemi pénzáramlások hozamainak alsó és felső korlátai 2004. április 27-én



3. ábra. Az elemi pénzáramlások hozamainak felső és alsó korlátai közötti különbözet 2004. április 27-én

Irodalom

1. Hodges, S., D. – Schaefer, S., M. (1977), A Model for Bond Portfolio Improvement, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 243–260.
2. Jaschke, S. (1998), Arbitrage Bounds for the Term Structure of Interest Rates, *Finance and Stochastics*, vol 2 (1), pp. 29–40.
3. Medvegyev, P. (2002), A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, július-augusztus, pp. 597–620.
4. Ronn, E., I. (1987), A New Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 439–466.
5. Száz, J. (1996), Javaslat az állampapírpiac szabványosítására, *Bank és Tőzsde*, február.

ARBITRAGE OPPORTUNITIES IN THE HUNGARIAN GOVERNMENT BOND MARKET

Two problems are addressed that can be solved with the help of Linear Programming. The first part of the paper investigates whether there were arbitrage opportunities in the Hungarian Government Bond market in the last two years. In the second part the problem of pricing risk free cash flows in the presence of transaction costs is discussed.

A BIZONYTALANSÁGNAK ÉS A VEVŐKÖR NAGYSÁGÁNAK EGYÜTTES HATÁSA AZ ÁRAKRA[1]

ÁGOSTON KOLOS CSABA
Budapesti Corvinus Egyetem

Ebben a cikkben azzal foglalkozom, hogy a kockázat és a vevőkör nagysága együttesen hogyan hat a termék árára. Kétféle piacot hasonlítok össze: egy biztosítási piacot, és egy termékpiacot. A kétféle piac között az a legfontosabb különbség, hogy termékpiac esetében az eladó számára csak ott jelentkezik kockázat, hogy el tudja-e adni a terméket, míg biztosítási piac esetében az eladó a termék értékesítése után is szembesül kockázattal. A cikk során megmutatom, hogy a vevőkör növekedésének ellentétes hatása lehet a termék árára termék- illetve biztosítási piacok esetében.[2]

1 Bevezetés

Ebben a cikkben azt vizsgálom, hogy bizonytalan eladások esetén a vevőkör bővülésével a termék ára hogyan változik. A cikkben összehasonlítom a termékpiacot és a biztosítási piacot. Bemutatom, hogy ez a fajta bizonytalanság biztosítási piacok esetén másfajta hatást is indukálhat, mint termékpiacok esetén.

A modellben több szerződést vizsgálok egyszerre, ami a szakirodalomra nem jellemző. A szakirodalomban általában egy tipikus szerződésen keresztül vizsgálják a piacokat vagy pedig szerződésállományt vizsgálnak, ahol a kifizetések ingadozását figyelmen kívül hagyják. Ezen cikk keretein belül különösen arra keresem a választ, hogy ez az ingadozás befolyásolja-e az eladó viselkedését, és ha igen, hogyan.

Az eladóról kockázatkerülést tételezek fel. Biztosítókról általában a kockázatsemlegesség a szokásos feltételezés, de pl. Borch [2] cikkében is előfordul a kockázatkerülő biztosító. A biztosító kockázatkerülése melletti érv, hogy a piacon nem érhető el várható értéken biztosítás. Ennek okaként a költségeket szokták felhozni a szakirodalomban. A biztosítási díjkalkuláció során valóban figyelembe veszik a költségeket, de a díjnak olyan részei is vannak, amelyek egyértelműen a biztosító kockázatkerülésére utalnak, mint pl. kockázati pótlék, káringadozási tartalék stb.

[1] Beérkezett: 2004. április 8. e-mail: kolos.agoston@uni-corvinus.hu.

[2] Ezúton szeretnék köszönetet mondani két ismeretlen lektoromnak, akik értékes tanácsaikkal segítették munkámat.

2 A vizsgált modell

A cikk során monopolpiacokat vizsgálok. A monopolhelyzetben lévő eladó C nagyságú induló vagyonnal rendelkezik. Az eladó bizonytalan kimenetek esetén a várható hasznosságát szeretné maximalizálni (Neumann-Morgenstern hasznosságfüggvény). Az eladó kockázatkerülő, és a kockázatelutasítás mértéke a vagyon növekedésével csökken. Az eladó viselkedését u hasznosságfüggvény segítségével írom le, amely legalább kétszer folytonosan differenciálható. Értelemszerűen az eladó hasznossága növekszik a vagyonnal ($u' > 0$), a kockázatelutasítás miatt $u'' < 0$, és a csökkenő mértékű kockázatelutasítás miatt: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right) < 0$.

A vásárlók rezervációs ára különböző, de az eladó nem tudja megkülönböztetni őket. A vásárlók ismerik saját rezervációs árukat, de az eladó csak a rezervációs árak eloszlását ismeri, tehát az információ aszimmetrikus.[3] Az eladó ki tudja kalkulálni a piacra jellemző vásárlási hajlandóságot $V(.)$, ami azt mutatja meg, hogy ha az eladó P árat határoz meg, akkor egy vizsgált vásárló mekkora valószínűséggel veszi meg az eladó termékét. Másképpen fogalmazva, ha a termék ára P, akkor $V(P)$ annak valószínűsége, hogy az eladó olyan vásárlóval találkozott, akinek rezervációs ára P-nél magasabb. A vásárlási hajlandóság függvényről felteszem, hogy folytonos, monoton csökkenő és folytonosan deriválható; továbbá léteznek $\underline{P}$ és $\overline{P}$ árak, hogy $V\left(\underline{P}\right) = 1$ és $V\left(\overline{P}\right) = 0$, azaz létezik olyan ár, amelyen mindenki hajlandó vásárolni, és létezik olyan, amelyen senki.

Biztosítási piac esetén a vásárlók q valószínűség mellett kárral szembesülnek. Ha kár következik be, akkor a biztosító K nagyságú kárpótlásban részesíti a biztosítottat.

A piaci szereplők létszámán azt értem, hány (lehetséges) vevő van a piacon. Egyszereplős biztosítási piac esetén az eladó (várható) hasznossága, ha P árat határoz meg termékének:

$$U(C, P, 1) = V(P)\left(qu(C + P - K) + (1 - q)u(C + P)\right) + (1 - V(P))\, u(C),$$

ahol U első argumentuma az eladó induló vagyonát jelenti, a második a termék árát, a harmadik pedig a piaci szereplők számát. Az eladó $V(P)$ valószínűséggel tudja eladni a termékét. Ha eladta, akkor q valószínűséggel a $C + P - K$ vagyoni helyzetbe kerül és $1 - q$ valószínűséggel a $C + P$ helyzetbe. Amennyiben nem tudta eladni a terméket, akkor marad a C vagyoni helyzetben. Ha az eladó nagyobb árat határoz meg, akkor (ha eladja a terméket) nagyobb lesz a hasznossága is, de kisebb valószínűsséggel realizálja ezt a nagyobb hasznosságot. Hasonlóképpen felírhatjuk az eladó hasznát, ha

[3] Amint később látni fogjuk, biztosítási piacok esetén a káresemény bekövetkeztének valószínűségét a biztosító és a biztosított is ismeri. Biztosítási piacok vizsgálatakor a kárbekövetkezési valószínűség tekintetében is aszimmetrikus informáltságot szoktak feltenni. Én ezzel a feltételezéssel nem élek, mert az általam vizsgált jelenség elemzését nehezíti. Természetesen érdekes kérdés, hogy a kapott eredményeket befolyásolja-e ez a fajta információs aszimmetria.

n szereplő van a piacon[4]:

$$U(C,P,n) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j} u(C+kP-jK) \right) \right] \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy az eladó hasznosságát rekurzív módon is fel lehet írni:

$$U(C,P,n) = \\ = V(P)\left(q \cdot U(C+P-K,P,n-1) + (1-q)U(C+P,P,n-1)\right) + \\ + (1-V(P))U(C,P,n-1) \tag{2}$$

Ha $K = 0$, akkor már nem beszélhetünk biztosításról, hiszen kár esetén az eladótól nem áramlik pénz a károsulthoz. Ebben az esetben csak a vásárló fizet P nagyságú összeget az eladónak. Ezt az esetet úgy is felfoghatjuk, hogy nem is következik be kár, hanem a vevő megvásárol valamit az eladótól. Ezt az esetet fogom *termékpiacnak* hívni. Az általam vizsgált termékpiac elég speciális. Az eladó hasznosságában nem jelenik meg maga a termék. Tehát az eladó olyan terméket árul, ami az ő számára nem rendelkezik hasznossággal. Szemléletes példa a beduin esete, aki homokot árul a sivatagban. De a szoftverkészítő a gyakorlatban előforduló legjobb példa. Miután kifejlesztette a szoftvert, az számára annyit ér, amennyi bevételt tud realizálni belőle. A terméket bármennyi vevőnek el tudja adni.

Termékpiac esetén $V(0) = 1$, és a feltételezés értelmében létezik egy $\overline{P}$, amire $V(\overline{P}) = 0$. Termékpiac esetén az (1) és (2) kifejezések leegyszerűsödnek:

$$U(C,P,n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} u(C+kP) \right) \tag{3}$$

$$U(C,P,n) = V(P)U(C+P,P,n-1) + (1-V(P))U(C,P,n-1) \tag{4}$$

A $K > 0$ esetben biztosítási piacról beszélünk. A biztosítási piac sajátosságaiból következik, hogy $V(qK) = 1$ és $V(K) = 0$, azaz várható értéken mindenki vásárol biztosítást, ha pedig a biztosítási díj megegyezik a (legnagyobb) kár nagyságával, akkor biztos, hogy senki sem vásárol biztosítást.

[4] Az (1) és a (3) képletekben a kombinatorikus felírás csak akkor helyes, ha abból, hogy egy érdeklődőnek az eladó értékesítette-e a terméket vagy sem, nem lehet információt levonni egy másik érdeklődővel kapcsolatban, vagyis az eladások függetlenek. A függetlenség a vizsgált modellben nem magától értetődő. Tegyük fel, hogy $V(P)$ függvényt két ember rezervációs ára alapján állítottuk össze. Ekkor ha egy érdeklődő van a piacon, akkor az eladó bizonytalansággal szembesül, de ha már kettő, akkor pontosan tudja hogy adott áron hány ember fog vásárolni. A függetlenség biztosítására több lehetőség adódik: az egyik szerint nincs átfedés azon csoport között, akik rezervációs árát $V(P)$ függvény meghatározásához felhasználták, és azok között, akiknek az eladó értékesíti a termékét; egy másik lehetőség szerint végtelen sok személy információja alapján állítják össze $V(P)$ függvényt. Az első lehetőség úgy interpretálható, hogy külföldi tapasztalatokat használnak fel Magyarországon, ami a biztosítási piacon sokszor előfordul. A másik lehetőség úgy interpretálható, hogy a biztosító lehetséges vevőinek száma elenyésző az információ alapjául szolgáló közösség létszámához képest; pl. az eladó monopóliummal rendelkezik valamelyik megyében, de csak országos statisztikák állnak rendelkezésre.

3 Termékpiac

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy az eddig bemutatott feltételezések esetén termékpiacon a vevőkör bővülésével nő a termék ára is.

3.1 Állítás. *Termékpiac esetén ($K = 0$) az $f(P) = U(C, P, n)$ függvény felveszi a maximumát (P_n^{max}) a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, továbbá $0 < P_n^{max} < \overline{P}$, azaz a maximumpont(ok) a $[0, \overline{P}]$ intervallum belső pontja(i).*

Bizonyítás. A feltételek szerint $V(0) = 1$ és $V(\overline{P}) = 0$. Ezek figyelembevételével a (3)-ból a következő adódik:

$$U(C, 0, n) = U(C, \overline{P}, n) = u(C)$$

és $V(P)$ folytonossága miatt kell olyan $0 < \tilde{P} < \overline{P}$ pontnak léteznie, melyre:

$$V(\tilde{P}) > 0 \tag{5}$$

Tudva, hogy $u'(x) > 0$, az (5) összefüggést figyelembe véve megállapítható, hogy:

$$\begin{aligned} U(C, \tilde{P}, n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(\tilde{P})^k (1 - V(\tilde{P}))^{n-k} u(C + k\tilde{P}) > \\ &> \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(\tilde{P})^k (1 - V(\tilde{P}))^{n-k} u(C) = u(C) \end{aligned} \tag{6}$$

Az $f(P) = U(C, P, n)$ függvény folytonos a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, így a Weierstrass tétel szerint felveszi a szélsőértékeit, azaz a maximumát is. A (6) összefüggés miatt ez a maximum az intervallum belsejében kell hogy legyen.

■

Tudjuk, hogy $f(P) = U(C, P, n)$ függvény deriválható a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, ezért az $f'(P) = U_2'(C, P, n)$ derivált 0-vá válik a maximumhelyen.

A cikk további részében feltételezem, hogy $U(C, P, n)$ függvény P szerinti maximumhelye rögzített C mellett minden n esetén egyedi. Ezen feltételezéshez nem tudtam szükséges és/vagy elégséges feltételt adni, de az általam numerikusan megvizsgált esetekre mindre teljesült.

3.2 lemma. *Amennyiben a, b, c és d számokra teljesül, hogy b és d előjele megegyezik, továbbá $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, akkor*

$$\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}$$

Bizonyítás. Mivel $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d}\frac{a}{b} + \frac{d}{b+d}\frac{c}{d}$, ezért azt mondhatjuk, hogy $\frac{a+c}{b+d}$ tört $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ számok konvex lineáris kombinációja, tehát $\frac{a+c}{b+d}$ értéke $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé kell, hogy essen. Szigorú egyenlőtlenség azért teljesül, mert sem b sem d értéke nem lehet 0.

■

3.3 lemma. *Az $u_i(x)$ hasznosságfüggvényekre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. Legyenek α_i-k pozitív súlyok. Ekkor a*

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x)$$

hasznosságfüggvényre is a csökkenő kockázatelutasítás a jellemző.

Bizonyítás. A lemma bizonyítását először csak két hasznosságfüggvényre mutatom meg, kettőnél több hasznosságfüggvényre az állítást teljes indukcióval bizonyítom.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy

$$\left(-\frac{v''}{v'}\right)' = \left(-\frac{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)''}{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)'}\right)' < 0 \tag{7}$$

A (7) egyenlőtlenséget az alábbi formában is felírhatjuk:

$$\frac{-(\alpha_1 u_1''' + \alpha_2 u_2''')(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2') + (\alpha_1 u_1'' + \alpha_2 u_2'')(\alpha_1 u_1'' + \alpha_2 u_2'')}{(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2')^2} < 0 \tag{8}$$

A (8) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő tört akkor és csak akkor lesz negatív, ha a számlálója negatív. A tört számlálójában elvégezve a beszorzásokat a következő összeghez jutunk:

$$\begin{gathered} -\alpha_1 u_1'''\alpha_1 u_1' - \alpha_1 u_1'''\alpha_2 u_2' - \alpha_2 u_2'''\alpha_1 u_1' - \alpha_2 u_2'''\alpha_2 u_2' + \\ +\alpha_1 u_1''\alpha_1 u_1'' + \alpha_1 u_1''\alpha_2 u_2'' + \alpha_2 u_2''\alpha_1 u_1'' + \alpha_2 u_2''\alpha_2 u_2'' \end{gathered} \tag{9}$$

Mivel u_1 és u_2 hasznosságfüggvényre is a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, ezért:

$$\left(-\frac{u_1''}{u_1'}\right)' = \frac{-u_1'''u_1' + u_1''u_1''}{(u_1)^2} < 0 \tag{10}$$

és

$$\left(-\frac{u_2''}{u_2'}\right)' = \frac{-u_2'''u_2' + u_2''u_2''}{(u_2)^2} < 0 \tag{11}$$

A (10) és (11) egyenlőtlenségből megállapító, hogy

$$0 < u_1''u_1'' < u_1'''u_1' \tag{12}$$

és

$$0 < u_2''u_2'' < u_2'''u_2'. \tag{13}$$

A (12) és a (13) egyenlőtlenséget összeszorozzuk, majd gyököt vonunk (a szorzás és a gyökvonás elvégezhető, mert pozitív kifejezésekről van szó):

$$u_1''u_2'' < \sqrt{u_1'''u_1'u_2'''u_2'} \tag{14}$$

Alkalmazva a számtani és mértani átlag közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy:

$$u_1''u_2'' < \frac{u_1'''u_2' + u_2'''u_1'}{2} \tag{15}$$

A (12), (13) és (15) összefüggésekből következik a hogy a (9) kifejezés értéke kisebb mint 0, ami azt jelenti, hogy v függvényre is a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző.

Teljes indukcióhoz vezessük be a következő jelölést:

$$v_i(x) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k u_k(x)$$

Az eddigiek értelmében $i = 1$-re és $i = 2$-re teljesül, hogy v_i függvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. Belátom, hogy ha v_i függvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás, akkor v_{i+1}-re is teljesül. A bizonyítás készen van, hiszen:

$$v_{i+1} = v_i + \alpha_{i+1}u_{i+1}$$

A lemma feltételei szerint u_{i+1} függvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás, és ez a tulajdonság az indukciós feltétel szerint v_i-re is teljesül. Így v_{i+1} két olyan hasznosságfüggvény nemnegatív lineáris kombinációja, amelyekre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás; a bizonyítás első részének értelmében ennek a tulajdonságnak v_{i+1}-re is teljesülnie kell. ■

3.4 lemma. *Legyen*

$$v_n(x) \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(P)^k (1 - V(P))^{n-k} u(x + kP) \ .$$

Ekkor:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{v_n''(x)}{v_n'(x)}\right) < 0 \ .$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználom, hogy ha u hasznosságfüggvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, akkor rögzített c konstans esetén a $v(x) = u(c + x)$ függvény is hasznosságfüggvény, és v hasznosságfüggvényre is a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. v_n olyan hasznosságfüggvények lineáris kombinációja, amelyekre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. A 3.3 lemma állítása alapján v_n hasznosságfüggvényre is a csökkenő kockázatelutasítás a jellemző, ami a bizonyítani kívánt állítás. ■

Fontos hangsúlyozni, hogy a (4) rekurzív összefüggést v_n és v_n' függvényekre is felírhatjuk:

$$v_n(x) = V(P)v_{n-1}(x + P) + (1 - V(P))v_{n-1}u(x) \tag{16}$$

$$v_n'(x) = V(P)v_{n-1}'(x + P) + (1 - V(P))v_{n-1}'u(x) \tag{17}$$

3.5 lemma.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v_n'(x+P)}{v_n(x+P)-v_n(x)}\right) > 0 \, .$$

Bizonyítás.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v_n'(x+P)}{v_n(x+P)-v_n(x)}\right) =$$

$$= \frac{v_n''(x+P)[v_n(x+P)-v_n(x,P)] - v_n'(x+P)[v_n'(x+P)-v_n'(x,P)]}{[v_n(x+P)-v_n(x,P)]^2} \tag{18}$$

A (18) összefüggésben szereplő tört nevezője mindig pozitív, így csak a számláló előjelét kell vizsgálni. A számláló pozitív, ha fennáll a

$$\frac{v_n''(x+P)}{v_n'(x+P)} > \frac{v_n'(x+P)-v_n'(x)}{v_n(x+P)-v_n(x)} \tag{19}$$

egyenlőtlenség. A (19) egyenlőtlenség pedig fennáll, mert a Cauchy középértéktétel miatt létezik $0 < \alpha < P$, hogy a (19) egyenlőtlenség jobb oldala megegyezik $\frac{v_n''(x+\alpha)}{v_n'(x+\alpha)}$ kifejezés értékével. Innen a 3.4 lemma állításából következik a (19) egyenlőtlenség. ■

3.6 állítás. *Termékpiac esetén ($K = 0$), ha $U_2'(C, P^0, n) = 0$, akkor*

$$U_2'(C, P^0, n+1) > 0.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során legyen

$$v_n(x) \overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(P^0)^k (1 - V(P^0))^{n-k} u(x + kP^0)$$

Ekkor:

$$U_2'(C,P^0,n) = \left.\frac{\partial \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}u(C+kP)\right)}{\partial P}\right|_{P=P^0} =$$
$$= V'(P^0)\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}kV(P^0)^{k-1}(1-V(P^0))^{n-k}u(C+kP^0)\right)+$$
$$- V'(P^0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k}V(P^0)^{k}(n-k)(1-V(P^0))^{n-k-1}u(C+kP^0)\right)+$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n-k}ku'(C+kP^0)\right)$$
$$= nV'(P^0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n_0-1-k}u(C+P^0+kP^0)\right)+$$
$$- nV'(P^0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n-1-k}u(C+kP^0)\right)+$$
$$+ nV(P^0)\sum_{k=0}^{n_0-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n-k}u'(C+P^0+kP^0)\right)$$
$$= nV'(P^0)(v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)) + nV(P^0)v_{n-1}'(C+P^0) =$$
$$= 0,$$

amit jobban áttekinthető alakra hozhatunk:

$$-\frac{V'(P^0)}{V(P^0)} = \frac{v_{n-1}'(C+P^0)}{v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)} \tag{20}$$

Az előző levezetésből adódik az is, hogy

$$U_2'(C,P^0,n+1) =$$
$$= (n+1)V'(P^0)[v_n(C_0+P^0)-v_n(C)] + (n+1)V(P^0)v_n'(C+P^0) \tag{21}$$

A (21) derivált előjelének meghatározásához elég a

$$-\frac{V'(P^0)}{V(P^0)}$$

és a

$$\frac{v_n'(C+P^0)}{v_n(C+P^0)-v_n(C)} \tag{22}$$

kifejezések közti reláció eldöntése. Felhasználjuk a (20) összefüggést, így tulajdonképpen a

$$\frac{v_{n-1}'(C+P^0)}{v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)} \tag{23}$$

és a (22) kifejezések közti reláció eldöntése a cél. Emlékezve a (16) és a (17) összefüggésekre a (22) tört értéke:

$$\frac{V(P^0)v'_{n-1}(C+2P^0)+(1-V(PP^0))v'_{n-1}(C+P^0)}{V(P^0)[v_{n-1}(C+2P^0)-v_{n-1}(C+P^0)]+(1-V(P^0))[v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)]} \tag{24}$$

A 3.5 lemma értelmében:

$$\frac{V(P^0)v'_{n-1}(C+2P^0)}{V(P^0)[v_{n-1}(C+2P^0)-v_{n-1}(C+P^0)]} > \frac{(1-V(P^0))v'_{n-1}(C+P^0)}{(1-V(P^0))[v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)]}$$

Innen a 3.2 lemma állítását felhasználva adódik, hogy a (22) tört értéke nagyobb, mint a (23) tört értéke, ami azt jelenti, hogy a derivált értéke pozitív. ■

3.7 következmény. *Termékpiac esetén, ha az $U(C,P,n)$ függvény P szerinti maximuma rögzített C mellett minden n esetén egyedi, akkor $P_n^{max} < P_{n+1}^{max}$, azaz az eladó $n+1$ szereplős piac esetén magasabb árat határoz meg, mint n szereplős piac esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 3.6 állításból következik. ■

4 Biztosítási piac

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy az előző fejezetben termékpiacra megmutatott állítások nem mindig igazak biztosítási piacra. Bizonyos körülmények között pont az ellentéte következik be annak, mint amit termékpiacra állítottam.

4.1 lemma. *Biztosítási piac esetén ($K>0$), ha a hasznosságfüggvény $u = -e^{-x}+x$, és a vásárlási valószínűség függvényre teljesül, hogy $V''(P)=0$, akkor az $f(P)=U(C,P,n)$ függvény rögzített C mellett, minden n esetén szigorúan konkáv.*

Bizonyítás. Az $U(C,P,n)$ függvényt fel tudjuk írni a következő alakban:

$$U(C,P,n)=$$
$$=-e^{-C}\left[V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right]^n+C+V(P)(nP-nqK)$$

Tudjuk, hogy $V''(P)=0$. Felhasználva ezt az összefüggést, írjuk fel az $f(P)=U(C,P,n)$ függvény P szerinti második deriváltját:

$$(f(P))''=$$

$$\begin{aligned}
&-n(n-1)e^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-2}\times\\
&\qquad\times\left(\left(V'(P)-V(P)\right)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)-V'(P)\right)^2+\\
&-ne^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-1}\times\\
&\qquad\times\left(\left(-2V'(P)+V(P)\right)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)\right)+\\
&+2nV'(P)
\end{aligned}$$

Az összeg minden tagja negatív.

■

4.2 állítás. *Biztosítási piac esetén ($K > 0$), ha a hasznosságfüggvény $u = -e^{-x} + x$, a vásárlási valószínűség $V(P) = 1 - \frac{P-qK}{K-qK}$, a kár bekövetkezésének valószínűsége $q = 0{,}005$ és a kár nagysága pedig $K = 10$, akkor $P_n^{max} > P_{n+1}^{max}$.*

Bizonyítás. $V''(P) = 0$, tehát a 4.1 lemma állítását felhasználva megállapítható, hogy $U(C, P, n)$ függvény rögzített C mellett bármely n esetén P-ben szigorúan konkáv. A hasznosságmaximumot biztosító ár egyedi.

Az $U(C, P, n)$ függvényt fel tudjuk írni a következő alakban:

$$U(C, P, n) =$$
$$= -e^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + 1 - V(P)\right)^n + C + V(P)(nP - nqK)$$

Megmutatom, hogy az $U_2'(C, P_n^{max}, n+1) < 0$:

$$\begin{aligned}
&U_2'(C, P_n^{max}, n) = \\
&\quad = -e^{-C} n\left(V(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + 1 - V(P_n^{max})\right)^{(n-1)} \times \\
&\quad\quad \times \Bigg[V'(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + \\
&\quad\quad\quad - V(P_n^{max}) e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right) - V'(P_n^{max})\Bigg] + \\
&\quad + V'(P_n^{max})(n\,P_n^{max} - nqK) + V(P_n^{max})n = \\
&\quad = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

A (25) egyenlőséget alakítsuk át jobban kezelhető formába:

$$\begin{aligned}
&e^{-C}\left(V(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + 1 - V(P_n^{max})\right)^{n-1} \times \\
&\quad \times \Bigg[V'(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + \\
&\quad\quad - V(P_n^{max}) e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right) - V'(P_n^{max})\Bigg] = \\
&= V'(P_n^{max})(P_n^{max} - qK) + V(P_n^{max})
\end{aligned} \tag{26}$$

Felhasználva a (26) egyenletet, fel tudjuk írni a következő összefüggést:

$$U(C, P_n^{max}, n+1) =$$
$$= \left(V'(P_n^{max})(P_n^{max} - qK) + V(P_n^{max})\right) V(P_n^{max})\left(1 - e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) \tag{27}$$

Azt kell csak eldönteni, hogy a (27) derivált értéke pozitív vagy negatív. A kifejezés előjele a $V'(P)(P - qK) + V(P)$ és az $1 - e^{-P}(qe^K + 1 - q)$

kifejezés előjelétől függ. $V'(P)(P-qK)+V(P) = 1-2\frac{P-qK}{K-qK}$. Ez a kifejezés P-nek monoton csökkenő függvénye, zérushelye a $P = \frac{K+qK}{2}$ pontban van. Az $1-e^{-P}(qe^K+1-q)$ kifejezés P-nek monoton növő függvénye, zérushelye a $P = \ln(qe^K+1-q)$ pontban van. Tegyük fel, hogy $P = \frac{K+qK}{2} = 5{,}025$. Ebben a pontban az $1-e^{-P}(qe^K+1-q)$ kifejezés értéke pozitív ($\approx 0{,}27$). Az $U_2'(C,P,n)$ kifejezés értéke szintén pozitív: $V'(P)(P-qk)+V(P)$ kifejezés értéke 0, a szorzat előjele pedig az $e^{-P}(qe^K+1-q)(V'(P)-V(P))-V'(P)$ kifejezés előjelétől függ. Ennek kifejezésnek az értéke a vizsgált pontban negatív $\approx -0{,}338$, ami azt jelenti, hogy $U_2'(C,5{,}025,n)$ derivált értéke minden n-re pozitív; az optimális ár nagyobb, mint $\frac{K+qK}{2}$. Másrészről ha $P > \frac{K+qK}{2}$, akkor a (27) kifejezés értéke negatív. ■

4.3 következmény. *Biztosítási piac esetén elképzelhető, hogy a monopolhelyzetben lévő biztosító csökkenti terméke árát, ha többen érdeklődnek a terméke iránt.*

Bizonyítás. A 4.1 lemma állítása alapján tudjuk, hogy a 4.2 állításban feltételezett körülmények között bármilyen piaci létszám esetén a hasznosságmaximumot biztosító ár egyedi. Tehát a 4.2 állításban mutatott példa minden követelményt kielégít. A példa érdekessége, hogy az árcsökkenés az induló vagyon szintjétől függetlenül bekövetkezik. ■

A 4.2 állításban szereplő hasznosságfüggvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás. A bizonyítás során ezt a tulajdonságot közvetlenül nem használtuk ki sehol. Fontos viszont megemlíteni, ha a termékpiacot és a biztosítási piacot hasonlítjuk össze. Tudjuk, hogy ha ugyanezzel a hasznosságfüggvénnyel jellemzett eladó termékpiacon tevékenykedik, akkor a piaci létszám növekedésével növelné a terméke árát.

Termékpiac esetén, ha az érdeklődők köre kicsi, akkor a monopolhelyzetben lévő eladó kisebb árat határoz meg, mint ha profitmaximalizáló (kockázatsemleges) lenne.[5] Minél kisebb a piac, annál nagyobb bizonytalansággal tudja csak meghatározni az eladó, hogy a szereplők mekkora része vásárolja meg a terméket. Az eladó alacsonyabb árat határoz meg, hogy egy kisebb nyereséget nagyobb valószínűséggel realizáljon. Ahogy növekszik a szereplők száma, a terméket megvásárlók aránya egyre kisebb mértékben szóródik a várható érték körül, az eladó a profitmaximalizáló árhoz egyre közelebbi árat határoz meg.

A monopolhelyzetben lévő biztosító esetében is szerepet játszik ez az előbb vázolt mechanizmus, de létezik egy másik mechanizmus, ami ezzel ellentétesen hat. Ha alacsonyabb árat határoz meg a biztosító, akkor várhatóan több szereplő veszi meg a biztosítást. Több független, azonos eloszlású valószínűségi változó átlaga jobban a várható érték körül tömörül, tehát a biztosító szemszögéből az átlagos kárkifizetés kevésbé szóródik, tehát kisebb kockázatot jelent a biztosító számára. Az, hogy a biztosító emeli vagy csökkenti a biztosítása árát, ezen két hatás eredőjén múlik.

[5] Ezt az állítást nem látom be formálisan ebben a cikkben, terjedelmi korlátok miatt.

Ismert tény, hogy ha a biztosítónak nagyobb az állománya, akkor olcsóbban tudja adni a biztosítást. A 4.2 állítás nem ezt a jól ismert törvényszerűséget mondja ki más formában. A 4.2 állításban monopolhelyzetben lévő biztosítót vizsgálunk, akit nem kényszerítenek árcsökkentésre a versenytársak. Az a meglepő, hogy a biztosító külső kényszer nélkül is csökkenti a biztosítás árát.

Másik oldalról vizsgálva azt is mondhatjuk, hogy a feltételek fennállása esetén a biztosító és a biztosítottak közös érdeke az állomány növekedése. Termékpiac esetében viszont pont ellentétes az eladó és vevők érdeke. Az eladó az érdeklődők számának emelkedésében érdekelt, a vevők pedig a csökkentésében.

5 Hasznosságfüggvények vizsgálata

Az előző fejezetekben kockázatkerülő eladó viselkedését vizsgáltam. A szakirodalomban több helyen is felmerül, hogy a biztos vagyon hasznosságát tükröző hasznosságfüggvény az értelmezési tartomány egy részén konvex, a döntéshozó bizonyos körülmények között kockázatkedvelő. Ebben a fejezetben azt vizsgálom, változnak-e az eddig tett megállapításaim, ha a hasznosságfüggvény valamely részén konvex.

Első lépésként a csökkenő mértékű kockázatelutasítást általánosítom.

5.1 definíció. *Egy $u(x)$ hasznosságfüggvényre, amelyre $u'(x) > 0$ a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, ha*

$$\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)' < 0$$

Az 5.1 definíció abban tér el az eddigiektől, hogy a csökkenő mértékű kockázatelutasítást nem csak kockázatelutasító magatartás esetén értelmezzük, hanem kockázatkedvelő esetén is. Kockázatkedvelő magatartás esetén furcsa csökkenő mértékű kockázatelutasításról beszélni. Hasonló ez a helyzet ahhoz, mint amikor a nyereségmaximalizálás veszteség esetén a veszteség minimalizálását jelenti.

Ha a csökkenő mértékű kockázatelutasítást az 5.1 definíció szerint általánosítom, akkor a termékpiac esetén tett összes megállapítás érvényben marad. A bizonyítások nagy része változatlan formában fennáll, amin változtatni kell, az annyira minimális, hogy csak az érintett részekre utalok.

A 3.1 állítás változatlan formában érvényben marad, a bizonyításnál nem használtam fel u konkavitását. A 3.3 lemma is érvényben marad változtatás nélkül, csak néhány kiegészítést kell tenni a bizonyításhoz. A bizonyításban a (12) és a (13) egyenlőtlenségek akkor is teljesülnek, ha u_1'' vagy u_2'' negatív, hiszen ezen mennyiségek négyzete szerepel az egyenlőtlenségekben. Mivel mindkét egyenlet mindkét oldala nemnegatív, ezért a két egyenlőtlenség összeszorzását továbbra is el lehet végezni. A (14) egyenlőtlenség akkor is fennáll, ha bal oldal negatív, mert az egyenlőtlenség jobb oldala pozitív. A bizonyítás további részét nem befolyásolják a hasznosságfüggvények második deriváltjának előjelei. A további állítások során a hasznosságfüggvény konkavitása nem kerül elő, csak a 3.3 lemmára történik hivatkozás.

A csökkenő mértékű kockázatelutasítás esetét megvizsgáltuk. A növekvő mértékű kockázatelutasítás vizsgálatát egyszerűbben el tudjuk végezni: a hasznosságfüggvény növekvő mértékű kockázatelutasításának feltétele nem őrződik meg a nemnegatív lineáris transzformáció során, ami a gondolatsorban alapvető helyet foglal el.

Összességében elmondható, hogy ha a hasznosságfüggvény tartalmaz konkáv és konvex részeket is, de a hasznosságfüggvényre az (általánosított) kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző akkor a monopolhelyzetű eladó növeli terméke árát a piac méretének növekedésével.

Egy hasznosságfüggvény csak akkor tud eleget tenni az (általánosított) kockázatelutasítás csökkenő mértékének, ha vagy csak konkáv, vagy csak konvex részeket tartalmaz, vagy kis vagyon esetén konkáv, nagy vagyon esetén konvex.

Markowitc által javasolt hasznosságfüggvény (lásd pl. [11]) konkavitása többször is változik, így biztos, hogy nem tud eleget tenni az (általánosított) kockázatelutasítás csökkenő mértékének. Ezen hasznosságfüggvényre nem tudom meghatározni az eladó viselkedését.

Biztosítókról általában a kockázatsemlegességet, ritkábban a kockázatkerülést szokás feltenni. A szakirodalomra nem jellemző, hogy a biztosító kockázatkedvelő lenne. A kérdés vizsgálata mégis lényeges. Biztosítási piacok esetén —érvelésem szerint— az ár csökkenésének az az oka, hogy több biztosított esetén az átlagos kárkifizetés kevésbé szóródik a várható érték körül, ami kockázatkerülő biztosító számára kedvező. Ez a jelenség nem áll fenn kockázatkedvelő biztosító esetében.

Kutatásom során időm nagy részét a kockázatelutasító esetre fordítottam, a kockázatkedvelő biztosítót nem tudtam kellő alapossággal megvizsgálni, így az előbb felvetett kérdést sem tudom még megválaszolni, ez magam elé kitűzött feladat marad.

6 Kilátás elmélet

Kahneman és Tversky 1979-ben megfogalmazta kilátás elméletét (lásd [7]), amely szerint a döntéshozó nem a várható hasznosságát vizsgálja, hanem az úgynevezett szubjektív várható hasznosságát. A döntéshozó preferenciája a valószínűségnek nem lineáris függvénye. A döntéshozó érzékenyebb a valószínűségben bekövetkezett változásokra kis valószínűségek esetén, mint nagy valószínűségek esetén. A döntéshozó bizonytalan kimenetek esetén a

$$\sum_{i=i}^{\infty} \pi(p_i) v(x_i) \tag{28}$$

kifejezéseket hasonlítja össze, és azt a lehetőséget választja, amelyikre ez a legnagyobb. A (28) kifejezésben x_i az i-edik kimenet esetén a kifizetés, p_i az i-edik kimenet valószínűsége, $\pi(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$; kis p valószínűségek esetén $\pi(p) > p$, nagy p valószínűségek esetén pedig $\pi(p) < p$. A $v(\cdot)$ értékfüggvényről általában azt feltételezik, hogy veszteségek esetén konkáv (kockázatkerülő), nyereségek esetén pedig konvex (kockázatkedvelő). A vizsgált modellre alkalmazva: az eladó a

$$U(C,P,n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left(\pi\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}\binom{k}{j}q^j(1-q)^{k-j}\right]v(C+kP-jK)\right) \tag{29}$$

kifejezést vizsgálja

Látható, hogy ebben az esetben a (29) kifejezést nem tudjuk a (2) és a (4) rekurzív összefüggéseknek megfelelően szétbontani, ami bizonyításaimhoz nélkülözhetetlen. Az előző fejezetekben megállapított összefüggések igaz vagy hamis voltát a bemutatott keretben nem lehet megállapítani, ez is a magam számára kitűzött további feladat.

7 Továbblépési lehetőségek

A cikk befejezéseként összefoglalom azokat az irányokat, amelyek felé a kutatásokat tovább lehet vinni.

Jó lenne feltételt adni arra, hogy $U(C,P,n)$ függvény P szerinti maximuma mikor lesz egyedi.

Biztosítási piacok esetén meg lehetne próbálni bebizonyítani a megfogalmazott állítást arra az esetre is, ha a biztosító által fizetett összeg valószínűségi változóval adott.

Az általam vizsgált modell esetében a biztosító nem tudott változtatni a biztosítási szerződésen, csak az áron. Ez alatt azt értem, hogy kár esemény bekövetkeztekor K összeget fizet a biztosítottnak. Biztosítás esetén a biztosító és biztosított osztozkodik a kockázaton. Nagyon izgalmas kérdésnek tartom annak vizsgálatát, hogy változik-e az osztozkodás módja, és ha igen, hogyan, ha növekszik a szereplők száma.

A cikkben eltekintettem attól, hogy a biztosító csődbe juthat. Fontos megvizsgálni ezt az esetet is.

Vizsgálni lehet azt is, hogy változnak-e megállapításaink, ha a kárbekövetkezési valószínűség esetében is aszimmetrikus informáltságot teszünk fel. Ehhez kapcsolódóan az erkölcsi kockázat (moral hazard) kérdését is meg lehet vizsgálni.

Természetesen a legfontosabb kérdések egyike, hogy versenyhelyzetben hogyan módosulnak a megállapítások.

Irodalom

1. Arrow, Kenneth J.: Le Rôle Des Valeurs Boursieres pour la Répartition la Meilleure des Risques (The Role of Securities in the Optimal Allocation of

Risk Bearing) *International Colloquium on Econometrics*, 1952, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.

2. Borch, Karl: Equilibrium in a Reinsurance Market, *Econometrica*, 1962.
3. Dionne, Georges (editor): *Handbook of Insurance*, Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, London, 2000.
4. Dionne, Georges (editor) and Doherty, Neil: *Contribution to Insurance Economics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.
5. Ehrlich, Isaac and Becker, Garry: Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection, *Journal of Political Economy*, 1972.
6. Grossman, Sanford J. and Hart, Oliver D.: An Analysis of the Principal-Agent Problem, *Econometrica*, 1992.
7. Kahneman, Daniel and Tversky, Amos: Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk, *Econometrica*, 1979.
8. Kimball, Miles S.: Standard Risk Aversion, *Econometrica*, 1993.
9. Kliger, Doron and Levikson, Benny: Pricing insurance contracts - an economic viewpoint, *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998.
10. Luciano, Elisa: A note on loadings and deductibles: can a vicious circle arise? *Scandinavian Actuarial Journal*, 1999.
11. Machina, Mark J.: Expected Utility Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, 1982.
12. Mossin, Jan: Aspect of Rational Insurance Purchasing, *Journal of Political Economy*, 1968.
13. Pratt, John W: Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 1964.
14. Raviv, Arthur: The Design of an Optimal Insurance Policy, *American Economic Review*, 1979.
15. Rotchild, Micheal and Stiglitz, Joseph E.: Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics*, 1976.
16. Shavell, Steven: On Moral Hazard and Insurance, *Quarterly Journal of Economics*, 1979.
17. Sinn, Hans-Werner: *Economic Decisions Under Uncertainty*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1983.

INVESTIGATING HOW THE NUMBER OF POLICIES EFFECT THE OPTIMUM INSURANCE PREMIUM

An economic approach for modeling the insurance markets. The study focuses on the monopolistic market, where one insurance company sells a product with predetermined benefits for the customers. An outline of the company and the insureds' behavior with utility functions is given. The study investigates the problem of policy pricing in relation to the number of clients the company acquires. Analytic tools will be used to further clarify the points.

CONTENTS