ARBITRÁZSLEHETŐSÉGEK VIZSGÁLATA A MAGYAR ÁLLAMPAPíRPIACON[1]

MAKARA TAMÁS
Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések Tanszék

A dolgozat két, az állampapírpiachoz kapcsolódó problémát mutat be, melyeket lineáris programozással oldhatunk meg. A dolgozat egyik része azt mutatja be, hogy hogyan lehet az arbitrázslehetőségeket felismerni, majd azt vizsgálja, hogy az Államadósság Kezelő Központ által megfigyelt vételi és eladási árfolyamjegyzések alapján voltak-e arbitrázslehetőségek a magyar állampapírpiacon az elmúlt két évben. A másik rész azt tárgyalja, hogy hogyan lehet a kockázatmentes pénzáramlásokat értékelni a tranzakciós költségek figyelembevételével az arbitrázsmentesség elve alapján.[2]

Kulcsszavak: állampapírpiac, arbitrázs, replikáció, árazás tranzakciós költségek mellett.

1 Bevezetés

Egy értékpapírpiacon statikus arbitrázsra van lehetőség, ha a befektetőknek lehetőségük van olyan tranzakciókat végezni, amelyek eredőjeként a befektetőnek sem a jelenben, sem egyetlen jövőbeli lehetséges világállapotban nem keletkezik kiadása, és legalább egy világállapotban (akár a jelenben, akár egy lehetséges jövőbeli világállapotban) bevétele keletkezik. (Az arbitrázsmentes árazással kapcsolatos fogalmakat és tételeket lásd pl. Medvegyev (2002).) Ebben a cikkben az arbitrázslehetőséget az állampapírpiac sajátosságait figyelembe véve kicsit eltérően határozzuk meg. Az arbitrázslehetőségek felismeréséhez lineáris programozási feladatokat oldunk meg. A lineáris programozás alkalmazása az állampapírpiachoz kapcsolódó szakirodalomban nem új, lásd például Hodges és Schaefer (1977), Ronn (1987) és Jaschke (1998) cikkeit. E cikk fogalomhasználata nagyjából megfelel Jaschke megközelítésének.

A cikk felépítése a következő: a 2. pontban mutatjuk be a cikkben alkalmazott arbitrázsfogalmat és az arbitrázslehetőségek felismeréséhez megoldandó lineáris programozási feladatokat. A 3. pontban ismertetjük azt az empirikus vizsgálatot, amelynek során az Államadósság Kezelő Központ által rögzített árfolyamjegyzések alapján azt vizsgáljuk, hogy vannak-e arbitrázslehetőségek a magyar állampapírpiacon. A 4. pontban azt mutatjuk

[1]Beérkezett: 2004. október 3. e-mail: t.makara@alarmix.net.

[2]Köszönettel tartozom a cikk első változatához fűzött értékes megjegyzéseikért Berlinger Edinának, Michaletzky Mártonnak, Móricz Dánielnek és Petrimán Zitának.

be, hogy hogyan befolyásolja a kockázatmentes pénzáramlások árazását a tranzakciós költségek megléte.

A cikk fogalomhasználata és módszertani megközelítésmódja nem új, azonban a 3. pont empirikus eredményei azok.

2 Az arbitrázsfeladat

Adott n darab fix kamatozású állampapír (vagy rövidebben: kötvény) és a t_1, t_2, …, t_m jövőbeli időpontok ($0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$), amikor legalább egy kötvény tulajdonosai kamatra vagy törlesztésre jogosultak. Az i-edik kötvény pénzáramlása a j-edik jövőbeli időpontban C_{ij}, amiről feltételezzük, hogy kockázatmentes, azaz minden körülmények között kifizetésre kerül. Az i-edik kötvény vételi árfolyama p_i^b (ezen az áron adhatják el a befektetők a papírt az árjegyzőnek), eladási árfolyama p_i^a (ezen az áron vásárolható meg a papír az árjegyzőtől), $p_i^b \leq p_i^a$. A befektető az i-edik kötvényből $x_i^a \geq 0$ mennyiséget vásárol és $x_i^b \geq 0$ mennyiséget ad el (ez lehet fedezetlen eladás, azaz *short sale*). Feltesszük, hogy a kötvények korlátlanul oszthatók, tehát $x_i^a \in I\!R$ és $x_i^b \in I\!R$. A befektető $v_0 = \sum_{i=1}^n (x_i^b p_i^b - x_i^a p_i^a)$ azonnali bevételre tesz szert, pénzáramlása a j-edik jövőbeli időpontban $v_j = \sum_{i=1}^n (x_i^a - x_i^b) C_{ij}$. A $(\mathbf{p}^b, \mathbf{p}^a, \mathbf{C})$ árakkal és pénzáramlásokkal jellemezhető állampapírpiacon akkor van statikus arbitrázslehetőség, ha léteznek $0 \leq x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b$ és $0 \leq x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a$ valós számok, amelyekre

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_m)' > \mathbf{0} ,$$

ahol $'$ a transzponálás jele, az $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ reláció pedig úgy értendő, hogy $\mathbf{a}$ egyik eleme sem kisebb, mint $\mathbf{b}$ megfelelő eleme, és $\mathbf{a}$ legalább egy eleme nagyobb, mint $\mathbf{b}$ megfelelő eleme.

Az eddigiek során nem vettük figyelembe, hogy a befektetőnek lehetősége van, és a jövőben is lehetősége lesz betétben elhelyezni a pénzét, feltételezhetően pozitív nominális kamatláb mellett, és ezért az arbitrázslehetőség definícióját túl szigorúan szabtuk meg. Tegyük fel például, hogy a befektetőnek módja lenne szert tenni a következő pénzáramlásra: $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_j = 0, (j = 3, \ldots, m)$. Tágabb értelemben ez is arbitrázsnak tekinthető, ugyanis a befektető a t_1 időpontbeli bevételéből biztosan törleszteni tudja majd a t_2 időpontban esedékes kötelezettségét, és mivel a t_1 és t_2 közötti időszakra pozitív kamatláb mellett tudja befektetni a t_1 időpontbeli bevételt, a t_2 időpontban esedékes kötelezettséget meghaladó, szabadon elkölthető jövedelemre tesz szert.

A továbbiakban ezért arbitrázslehetőségen a következő, tágabban definiált fogalmat értjük: A $(\mathbf{p}^b, \mathbf{p}^a, \mathbf{C})$ árakkal és pénzáramlásokkal jellemezhető állampapírpiacon akkor van arbitrázslehetőség, ha léteznek $0 \leq x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b$ és $0 \leq x_1^a, x_2^a, \ldots, x_n^a$ valós számok, amelyekre

$$\mathbf{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_m)' > \mathbf{0} ,$$

ahol $k_j = \sum_{s=0}^j v_s$ a befektető kumulált pénzáramlása a megfelelő időpontban.

Hogy adott állampapírpiacon van-e arbitrázslehetőség, eldönthető a következő lineáris programozási feladat megoldásával:

$$\max_{x_i^a, x_i^b, i \in \{1,2,\ldots,n\}} \sum_{j=0}^{m} k_j \tag{1}$$

a következő korlátok mellett:

$$0 \le x_i^a\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,;$$

$$0 \le x_i^b\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,;$$

$$x_i^a \le 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{2}$$

$$x_i^b \le 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{3}$$

$$0 \le k_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m\,.$$

A fenti feladatnak biztosan van megvalósítható megoldása, hisz megvalósítható megoldás az, ha a befektető nem csinál semmit, azaz $x_i^b = x_i^a = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mivel ebben az esetben a célfüggvény értéke nulla, a célfüggvény értéke az optimumban nem lehet negatív. Ha a célfüggvény értéke az optimumban pozitív, akkor van arbitrázslehetőség. A (2) és (3) feltételek a feladatot normalizálják: azt biztosítják, hogy a célfüggvény optimális értéke véges legyen akkor is, ha van arbitrázslehetőség.

Az eddigiek során nem foglalkoztunk azokkal az esetleges tranzakciós költségekkel, amelyek nem a vételi és az eladási árfolyam különbségéből fakadnak (például felügyeleti, tőzsdei díjak, fedezetlen eladás esetén az értékpapír kölcsönzésének díja). Az állampapírpiacon általában a tranzakciós költséget döntő mértékben a vételi és az eladási árfolyamok közötti különbség jelenti, az egyéb költségek ehhez képest általában elenyészőek (ez alól kivételt jelenthet az értékpapír kölcsönzési díja). Az arbitrázslehetőségek felismerése szempontjából nem jelentenek problémát az olyan költségek, amelyek lineárisan függnek az egyes értékpapírokból vásárolt, illetve eladott mennyiségektől. Ez esetben a p_i^b vételi árfolyamokból le kell vonni az egységnyi eladásra jutó tranzakciós költséget, a p_i^a eladási árfolyamokhoz pedig hozzá kell adni az egységnyi kötvényvásárlásra jutó tranzakciós költséget, de továbbra is az (1) lineáris programozási feladatot kell megoldanunk. Abban az esetben, ha a költségek nemlineárisan függnek a vett és eladott értékpapír-mennyiségektől, akkor elvben nemlineárissá válik a megoldandó feladat. Gyakran azonban ez esetben is megoldást jelent a lineáris programozás: ha az (1) feladat megoldásával nem találunk arbitrázslehetőséget, akkor biztosak lehetünk abban, hogy nincs arbitrázslehetőség. Ha pedig az (1) feladat optimumában a célfüggvény értéke pozitív, és a megtalált arbitrázslehetőség nyereségét nem emésztik fel a feladatban figyelembe nem vett tranzakciós költségek, akkor találtunk egy arbitrázslehetőséget. Csak akkor kell a nemlineáris programozáshoz folyamodnunk, ha az (1) feladat optimumában a célfüggvény értéke pozitív, és a megtalált arbitrázslehetőség nyereségét felemésztik a feladatban figyelembe nem vett tranzakciós költségek.

3 Arbitrázslehetőségek vizsgálata a magyar állampapírpiacon

A magyar állampapírpiacon speciális jogokkal és kötelezettségekkel bíró piaci szereplők, az elsődleges forgalmazók, kötelesek folyamatosan kétoldali (vételi és eladási) árat jegyezni az állampapírokra a tőzsdei kereskedésben. Bár az állampapírpiaci forgalom döntő része a tőzsdén kívüli kereskedésben bonyolódik le, a tőzsdei árjegyzésnek az állampapírpiaci árfolyamok megismerése szempontjából kiemelt jelentősége van. A tőzsdén kívüli kereskedésben ugyanis az árjegyzés jellemzően két fél közötti, nem nyilvános kommunikációban történik, így az elsődleges forgalmazó által jegyzett vételi és eladási árak, valamint a megkötött üzletek árfolyamai a többi piaci szereplő számára közvetlenül nem megfigyelhetőek. A tőzsdei kereskedési rendszerben megjelenő vételi és eladási ajánlatok azonban nyilvánosak és kötelező érvényűek: az elsődleges forgalmazó az általa jegyzett áron köteles üzletet kötni bármely, a tőzsde hitelpapír-szekciójában kereskedési joggal bíró tőzsdetaggal.

A kötelező tőzsdei árjegyzési időszakra az elsődleges forgalmazók számára elő van írva, hogy minimálisan milyen mennyiségre kell árat jegyezniük, és hogy legfeljebb mekkora lehet a különbség az általuk jegyzett vételi és eladási árfolyamok között. Jelenleg a leglikvidebb, úgynevezett referencia államkötvényekre valamennyi elsődleges forgalmazó köteles folyamatosan árat jegyezni, minimum 200 millió forint névértékre. A többi, tőzsdére bevezetett fix kamatozású államkötvény és diszkont kincstárjegy esetében pedig három, pályázat, illetve sorsolás útján kiválasztott elsődleges forgalmazó köteles árat jegyezni minimum 100 millió forint névértékre. A vételi és eladási árfolyamok különbsége korlátozott: a vételi és az eladási árfolyamok alapján kalkulált lejáratig számított hozamok (röviden: vételi és eladási hozamok) különbsége nem haladhatja meg az 50 bázispontot (1 bázispont = 0,01 százalékpont). A tőzsdén kívüli kereskedésben az árfolyamjegyzés jellemzően a fentieknél nagyobb mennyiségekre vonatkozik, a jegyzett vételi és eladási hozamok különbsége pedig lényegesen kisebb, jelenleg jellemzően 10-15 bázispont körül alakul.

Az Államadósság Kezelő Központ (ÁKK) naponta kétszer (egyszer délelőtt és egyszer délután), egy véletlenszerűen meghatározott időpontban rögzíti a tőzsdei kereskedési rendszerbe bevitt, az állampapírokra szóló legmagasabb vételi és legalacsonyabb eladási ajánlatokat, és ezeket nyilvánosságra hozza. 2003. augusztus 29. előtt pedig naponta egyszer rögzítették a legjobb vételi és eladási árfolyamokat. Empirikus vizsgálatunk alapját az ÁKK által 2002. június 13. és 2004. április 27. között rögzített árfolyamjegyzések jelentik. Ezek az adatok a majdnem két évet felölelő időszak összesen 470 kereskedési napjáról rögzítenek 629 pillanatképet. Az (1) lineáris programozási feladatok megoldásával megállapíthatjuk, hogy az adott pillanatban a tőzsdei árfolyamjegyzések alapján volt-e arbitrázslehetőség. A lineáris programozási feladatok mérete számítástechnikai oldalról nem jelent problémát: 2004. április végén például a figyelembe veendő állampapírok száma $n = 25$, a kifizetési dátumok száma $m = 77$, így 50 változót kell optimalizálni 178 korlát mellett.

Az arbitrázslehetőségek vizsgálata a piac fejlettségének egyfajta tesztje: jól működő piacon azt várjuk, hogy tartósan nem állnak fenn arbitrázslehetőségek. Az ÁKK által rögzített árjegyzések alapján azt tapasztaltuk, hogy a rögzített 629 időpontból 625 esetben nem volt lehetőség arbitrázsra, 4 alkalommal viszont volt. Az, hogy ezekben az esetekben mekkora nyereséget lehetett volna elérni az arbitrázzsal, attól függ, milyen mennyiségre szóltak a vételi, illetve eladási ajánlatok. Az ÁKK nem rögzíti, hogy az egyes vételi és eladási ajánlatok milyen mennyiségre szólnak, de ha abból indulunk ki, hogy az elsődleges forgalmazók általában az előírt 100 MFt névértékű papírra jegyeznek árat, akkor viszonylag pontosan meg tudjuk becsülni az elérhető nyereséget. Ez alapján 2003. december 1-jén délelőtt körülbelül 13 EFt azonnali nyereséget lehetett elérni (anélkül, hogy a befektetőnek jövőbeli kötelezettsége keletkezett volna), 2003. december 8-án délelőtt 45 EFt-ot, 2003. december 9-én délután 9 EFt-ot, 2003. december 31-én délelőtt pedig megközelítőleg 54 EFt-ot lehetett nyerni arbitrázzsal. (Az elérhető nyereségek meghatározásánál figyelembe vettük a szükséges tranzakciók után fizetendő felügyeleti és tőzsdei díjakat is. Nem vettünk figyelembe értékpapírkölcsönzési díjat: a számított nyereséget csak olyan tőzsdetagok érhették volna el, akik rendelkeztek az eladandó állampapírral. Azt sem vettük figyelembe, hogy a szükséges tranzakciók egy része az adott pillanatban feltehetőleg előnyösebb áron is megköthető lett volna a tőzsdén kívüli kereskedésben.) Ezek a nyereségek nem tűnnek nagynak, ha arra gondolunk, hogy elérésükhöz minden esetben körülbelül 200 millió forint névértékű állampapírt kellett volna megmozgatni; mégis, egy elsődleges állampapír-forgalmazótól pár gombnyomásnál nem igényeltek volna nagyobb erőfeszítést, ha rendelkezett az eladandó papírral.

Összességében elmondhatjuk, hogy 4 arbitrázslehetőség a vizsgált 629 alkalomból nem tűnik soknak, és nem utal arra, hogy a magyar állampapírpiac rosszul működne. A piac hatékonyságával nem összeegyezhetetlen, hogy időnként arbitrázsra nyíljon lehetőség, csak az nem fér össze a hatékony piaci működéssel, ha az arbitrázslehetőség tartósan fennáll. A vizsgálat eredményének értékeléséhez azt is tudnunk kell, hogy nem zárható ki, hogy az arbitrázslehetőségeket a piac azért nem szüntette meg, mert az adott pillanatban valamelyik állampapírból hiány volt, azaz az elsődleges forgalmazók egyikének sem volt a portfóliójában több, mint amennyit az árjegyzési kötelezettség ellátásához minimálisan szükségesnek tartott (ez esetben az arbitrázslehetőség csak látszólagos, mert az eladandó értékpapír kölcsönzésének díját nem vettük figyelembe).

Érdekes körülmény, hogy mind a négy arbitrázslehetőség ugyanarra a hónapra, 2003 decemberére esik. Ennek egy lehetséges magyarázata, hogy ebben a 2003. november 28-i 300 bázispontos jegybanki kamatemelést követő időszakban az állampapírpiaci árfolyammozgások a szokásosnál sokkal nagyobbak és gyorsabbak voltak, és a tőzsdén kívüli kereskedésben a szokottnál nagyobb árfolyamkülönbséggel jegyezték a vételi és eladási árfolyamokat. Ilyen körülmények között az elsődleges forgalmazóknak a szokásosnál lényegesen gyakrabban kell módosítaniuk tőzsdei árfolyamjegyzéseiket (normál piaci körülmények között erre csak ritkán van szükség), és amennyiben egy árjegyző elmulasztja időben frissíteni ajánlatait, arbitrázslehetőség keletkezhet.

4 Pénzáramlások értékelése tranzakciós költségek mellett

Tekintsük a következő, az 1. pontban ismertetett arbitrázsfeladathoz szorosan kapcsolódó problémát! Ismerjük az állampapírpiacon forgó kötvények pénzáramlásait és árfolyamait, és adott egy $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)'$ kockázatmentes pénzáramlás, $\mathbf{z} \in I\!R^m$, ahol z_j azt az összeget jelöli, amelyet a pénzáramlás jogosultja a t_j időpontban kap. Mennyit ér ma ez a pénzáramlás, illetve mi az az érték, aminél többet semmiképpen nem érdemes fizetni érte, és mi az az érték, aminél kevesebbért semmiképpen nem érdemes eladni?

Mielőtt a fenti kérdésekre válaszolnánk, röviden áttekintjük, hogy hogyan árazható egy kockázatmentes pénzáramlás, ha tökéletes a piac, és nincsenek tranzakciós költségek. Az 1. pontban feltételezettek szerint legyenek ismertek n kötvény pénzáramlásai a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ időpontokban, és legyenek ismertek a kötvények árfolyamai is. Mivel nincsenek tranzakciós költségek, a kötvények vételi és eladási árfolyamai megegyeznek: $p_i = p_i^b = p_i^a$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Megmutatható (lásd pl. Medvegyev [2002]), hogy ha nincs lehetőség statikus arbitrázsra, akkor léteznek $d_1, d_2, \ldots, d_m \in I\!R$ pozitív diszkonttényezők, amelyekre

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} C_{ij} d_j \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \ ;$$

továbbá, ha a $\mathbf{z}$ pénzáramlás árfolyama, z_0 eltérne a

$$\sum_{j=1}^{m} z_j d_j$$

jelenértéktől, akkor arbitrázsra lenne lehetőség. (Megjegyezzük, hogy a diszkonttényezők csak teljes piacon egyértelműen meghatározottak.)

Ez az egyszerű, tankönyvi jelenértékszámítás sajnos a gyakorlatban nem működik, hiszen a valóságban az állampapírok vételi és eladási árfolyamai eltérnek. Térjünk vissza az 1. pontban ismertetett modellhez és jelölésekhez, és tegyük fel ismét, hogy a kötvények eladási árfolyamai meghaladhatják a vételi árfolyamokat. Tegyük fel továbbá, hogy az állampapírok jól árazottak abban az értelemben, hogy az állampapírpiacon nincs lehetőség arbitrázsra. Jelölje z_0^b a $\mathbf{z}$ pénzáramlás vételi árfolyamát, z_0^a pedig az eladási árfolyamát. Kérdésünk a következő: milyen feltételeknek kell teljesülniük a z_0^b és z_0^a árfolyamokra, hogy ne legyen lehetőség arbitrázsra?

Ahhoz, hogy ne legyen lehetőség arbitrázsra, szükséges, hogy önmagában a $\mathbf{z}$ pénzáramlás adásvételével ne lehessen arbitrázsportfóliót előállítani. Jelölje $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m)'$ a $\mathbf{z}$ pénzáramláshoz tartozó kumulált jövőbeli pénzáramlást, ahol $\kappa_j = \sum_{s=1}^{j} z_s$. A $\mathbf{z}$ pénzáramlás z_0^b összegért történő eladásához tartozó kumulált pénzáramlás a jelenbeli pénzáramlás figyelembevételével:

$$(z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \ldots, z_0^b - \kappa_m) \,.$$

Ha ez nem jelent arbitrázslehetőséget, akkor z_0^b felső korlátja a

$$\rho^+(\mathbf{z}) = \sup\left\{z_0^b \mid (z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \ldots, z_0^b - \kappa_m)' \not> \mathbf{0}\right\} =$$
$$= \max\{0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m\}$$

érték. Hasonlóképpen, mivel $\mathbf{z}$ pénzáramlás megvásárlásához tartozó kumulált pénzáramlás a jelenbeli pénzáramlás figyelembevételével

$$(-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \ldots, \kappa_m - z_0^a) \,,$$

z_0^a alsó korlátja:

$$\rho^-(\mathbf{z}) = \inf\{z_0^a \mid (-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \ldots, \kappa_m - z_0^a)' \not> \mathbf{0}\} =$$
$$= \min\{0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m\} \,.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy $z_0^b \leq z_0^a$ fenn kell álljon, ellenkező esetben a pénzáramlás egyidejű megvásárlása és eladása arbitrázslehetőséget jelentene.

Azokat az eseteket is meg kell vizsgálnunk, amikor a befektető megvásárolja vagy eladja a $\mathbf{z}$ pénzáramlást, és ezt állampapírpiaci tranzakciókkal kiegészítve próbál meg arbitrázsportfóliót előállítani. Jelölje $K \subset \mathbb{R}^{m+1}$ az állampapírpiaci tranzakciókkal létrehozható portfóliók $\mathbf{k}$ kumulált pénzáramlásainak halmazát. A $\mathbf{z}$ pénzáramlás eladása arbitrázslehetőséget eredményez, ha létezik olyan $\mathbf{k} \in K$, amelyre

$$(z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \ldots, z_0^b - \kappa_m)' + \mathbf{k} > \mathbf{0} \,.$$

A $\mathbf{z}$ pénzáramlás megvásárlása pedig akkor eredményez arbitrázslehetőséget, ha létezik olyan $\mathbf{k} \in K$, amelyre

$$(-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \ldots, \kappa_m - z_0^a)' + \mathbf{k} > \mathbf{0} \,.$$

Így z_0^b értékének felső korlátja a

$$\sigma^+(\mathbf{z}) = \sup\left\{z_0^b \mid \nexists \mathbf{k} \in K : (z_0^b, z_0^b - \kappa_1, z_0^b - \kappa_2, \ldots, z_0^b - \kappa_m)' + \mathbf{k} > \mathbf{0}\right\}$$

érték, és z_0^a értékének alsó korlátja a

$$\sigma^-(\mathbf{z}) = \inf\{z_0^a \mid \nexists \mathbf{k} \in K : (-z_0^a, \kappa_1 - z_0^a, \kappa_2 - z_0^a, \ldots, \kappa_m - z_0^a)' + \mathbf{k} > \mathbf{0}\}$$

érték. A $\sigma^-(\mathbf{z})$ értéket az alábbi lineáris programozási feladat célfüggvényének optimális értékeként határozhatjuk meg:

$$\max_{x_i^a, x_i^b, i \in \{1,\ldots,n\}} v_0 \tag{4}$$

a következő korlátok mellett:

$$0 \leq x_i^a \,, \quad i = 1, \ldots, n \,;$$

$$0 \leq x_i^b\,, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

$$-\kappa_j \leq \sum_{s=1}^{j} v_s\,, \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

ahol v_j az 1. pontban bevezetett jelölésnek megfelelően a befektető állampapír-portfóliójának kumulálatlan pénzáramlását jelöli a megfelelő időpontban. A célfüggvény értéke az optimumban azt mutatja meg, hogy mekkora mai bevételre tehet szert állampapírpiaci tranzakciókkal a **z** pénzáramlás birtokosa amellett a korlát mellett, hogy teljes jövőbeli kumulált pénzáramlása egyetlen jövőbeli időpontban se váljon negatívvá (a teljes pénzáramláson az állampapír-pozíciókból származó pénzáramlások és a **z** pénzáramlás összegét értjük). Ha valaki ennél olcsóbban vásárolhatná meg a **z** pénzáramlást, az arbitrázslehetőséghez jutna.

A $\sigma^+(\mathbf{z})$ értéket pedig az alábbi lineáris programozási feladat célfüggvényének optimális értékeként határozhatjuk meg:

$$\min_{x_i^a, x_i^b, i \in \{1,\ldots,n\}} -v_0 \tag{5}$$

a következő korlátok mellett:

$$0 \leq x_i^a\,, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

$$0 \leq x_i^b\,, \quad i = 1, \ldots, n\,;$$

$$\kappa_j \leq \sum_{s=1}^{j} v_s\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Ez a feladat azt mutatja meg, hogy mekkora a minimális költség, ami mellett az állampapírpiacon létrehozható egy olyan pozíció, amelynek jövőbeli kumulált pénzáramlása egyetlen jövőbeli időpontban sem kisebb a kumulált **z** pénzáramlásnál. Ha valaki ennél drágábban adhatná el a **z** pénzáramlást, az arbitrázslehetőséghez jutna.

A tranzakciós költségektől mentes modellben a pénzáramlás jelenértéke lineáris függvénye a pénzáramlásnak, és ha egyszer sikerült meghatározni a $d_1, d_2, \ldots, d_m$ diszkonttényezőket, akkor bármilyen pénzáramlás értékét könnyen meghatározhatjuk. Tranzakciós költségek mellett azonban bonyolultabb a helyzet, a $\sigma^+(\mathbf{z})$ és $\sigma^-(\mathbf{z})$ értékek a **z** pénzáramlásnak nemlineáris függvényei. Könnyen belátható, hogy lineárisan homogén, de nem additív függvényekről van szó, mégpedig:

$$\sigma^+(\alpha\mathbf{z}) = \alpha\sigma^+(\mathbf{z})\,,$$

$$\sigma^-(\alpha\mathbf{z}) = \alpha\sigma^-(\mathbf{z})\,,$$

$$\sigma^+(\mathbf{z} + \mathbf{y}) \leq \sigma^+(\mathbf{z}) + \sigma^+(\mathbf{y})\,,$$

$$\sigma^-(\mathbf{z} + \mathbf{y}) \geq \sigma^-(\mathbf{z}) + \sigma^-(\mathbf{y})\,,$$

ahol $0 < \alpha \in I\!R$, $\mathbf{z} \in I\!R^m$ és $\mathbf{y} \in I\!R^m$ tetszőleges pénzáramlások. Ez azt jelenti, hogy a σ^+ és σ^- értékek meghatározásához lényegében minden pénzáramláshoz külön meg kell oldanunk a (4) és (5) lineáris programozási feladatokat.

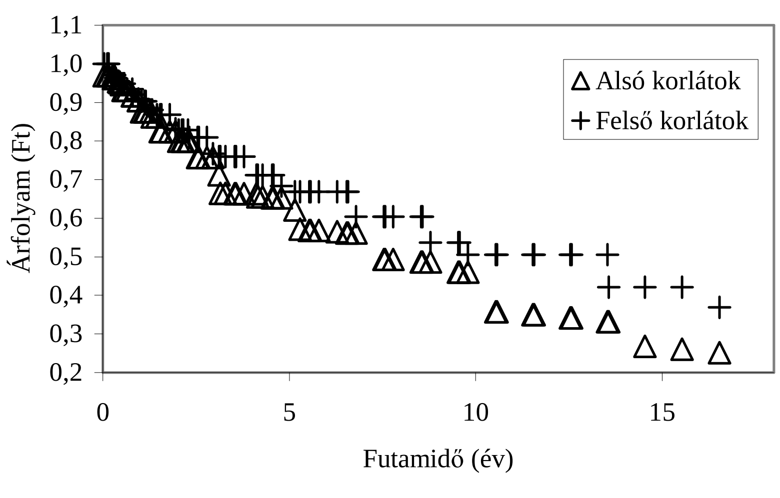
A fentieket összefoglalva, ha nincs lehetőség arbitrázsra, akkor teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$z_0^b \leq z_0^a \ ,$$

$$z_0^b \leq \min\{\rho^+(\mathbf{z}), \sigma^+(\mathbf{z})\} \ ,$$

$$z_0^a \geq \max\{\rho^-(\mathbf{z}), \sigma^-(\mathbf{z})\} \ .$$

A 2004. április 27-én, délután rögzített tőzsdei árfolyamjegyzések alapján szemléltetjük, hogy a fenti korlátok mit jelentenek a magyar állampapírpiacon. Ezen a napon $n = 25$ fix kamatozású államkötvény, illetve diszkontkincstárjegy árfolyamára jegyeztek árat az elsődleges forgalmazói rendszerben, és $m = 77$ kifizetési időpont volt, amikor legalább egy kötvény jövőbeli pénzáramlása pozitív. Meghatároztuk a 77 elemi pénzáramlás értékének alsó és felső korlátait, elemi pénzáramláson értve egy olyan pénzáramlást, amely 1 forintra jogosít az egyik kifizetési időpontban, és nulla forintra a többi időpontban. Az elemi pénzáramlások értékének nyilván felső korlátja az 1Ft, és alsó korlátja a 0Ft (ez felel meg a ρ^+ és ρ^- korlátoknak), a σ^+ és σ^- korlátokat pedig a megfelelő lineáris programozási feladatok megoldásával határoztuk meg. Az *1. ábra* az elemi pénzáramlások értékeinek alsó, illetve felső korlátait ábrázolja.

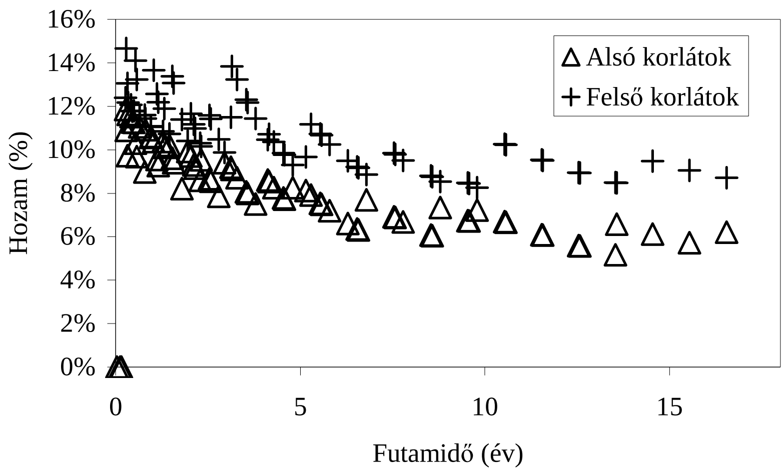


1. ábra. Az elemi pénzáramlások értékeinek alsó és felső korlátai 2004. április 27-én

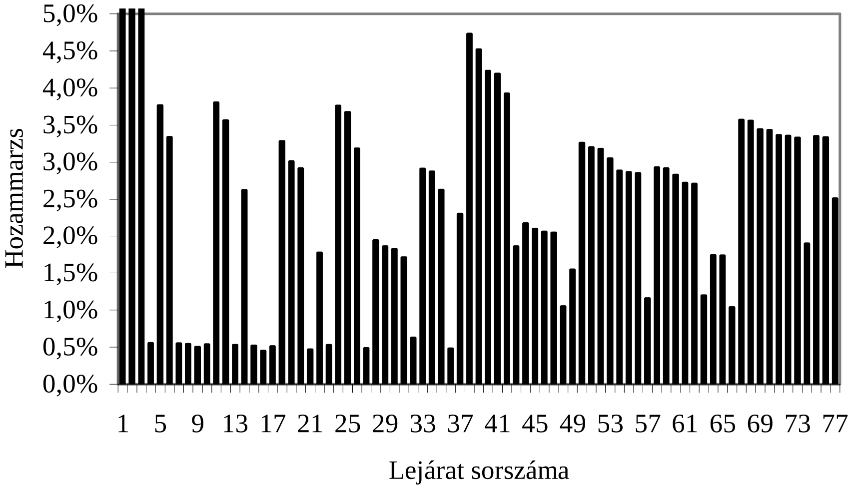
Kiszámítottuk, hogy milyen éves hozamot jelentene egy befektetőnek, ha az egyes elemi pénzáramlásokat az alsó, illetve felső korlátnak megfelelő árfolyamon vásárolhatná meg, ezek a hozamok az elemi pénzáramlások lehetséges hozamainak felső, illetve alsó korlátai. Ezeket szemlélteti a *2. ábra.*

Jól látható, hogy a hozamok felső és alsó korlátai közötti különbség erőteljes eltérést mutat az egyes elemi pénzáramlások esetében. Az egyszerűen replikálható elemi pénzáramlásoknál ez a marzs szűk, 50 bázispont körül alakul, míg a bonyolultan, sok állampapír felhasználásával és ezért nagy tranzakciós költséggel replikálható elemi pénzáramlások esetében a különbözet a 300-400 bázispontot is elérheti. A három legrövidebb futamidejű elemi pénzáramlás esetében a különbözet rendkívül nagy, 20 és 140 százalékpont között alakul. Az egyes elemi pénzáramlások hozamainak felső és alsó korlátai közötti különbséget a *3. ábra* mutatja. (Az áttekinthetőség kedvéért a skálát úgy választottuk meg, hogy az első három pénzáramlás esetében a különbözet nem látszik.)

Mindez jól szemlélteti, hogy milyen jelentőséggel bír a Száz [1996] cikkében megfogalmazott javaslat. Száz az állampapírpiac olyan szabványosítását javasolja, amely az elemi pénzáramlások állampapírpiaci replikálását triviálissá tenné. A javaslat megvalósulása esetén a fenti különbözetek mind 50 bázispont körül alakulnának (feltéve, hogy az árfolyamjegyzők legfeljebb 50 bázispont különbséggel jegyezhetnének vételi és eladási hozamot). Ez azt eredményezné, hogy a gazdasági szereplők pontosabban tudnák értékelni a különböző pénzáramlásokat.



2. ábra. Az elemi pénzáramlások hozamainak alsó és felső korlátai 2004. április 27-én



3. ábra. Az elemi pénzáramlások hozamainak felső és alsó korlátai közötti különbözet 2004. április 27-én

Irodalom

1. Hodges, S., D. – Schaefer, S., M. (1977), A Model for Bond Portfolio Improvement, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 243–260.
2. Jaschke, S. (1998), Arbitrage Bounds for the Term Structure of Interest Rates, *Finance and Stochastics*, vol 2 (1), pp. 29–40.
3. Medvegyev, P. (2002), A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, július-augusztus, pp. 597–620.
4. Ronn, E., I. (1987), A New Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 439–466.
5. Száz, J. (1996), Javaslat az állampapírpiac szabványosítására, *Bank és Tőzsde*, február.

ARBITRAGE OPPORTUNITIES IN THE HUNGARIAN GOVERNMENT BOND MARKET

Two problems are addressed that can be solved with the help of Linear Programming. The first part of the paper investigates whether there were arbitrage opportunities in the Hungarian Government Bond market in the last two years. In the second part the problem of pricing risk free cash flows in the presence of transaction costs is discussed.